UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Il teorema di invarianza della dimensione

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di laurea di
Marianna Saba

ANNO ACCADEMICO 2006–2007

Indice

Introduzione

Una varietà topologica M è uno spazio topologico (di Hausdorff) localmente euclideo, cio per ogni punto x di M esiste un intorno U di x, un numero naturale n e un omeomorfismo $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$. Il teorema di invarianza della dimensione afferma che il numero naturale n è ben definito, ossia che se esiste un intorno V di x, un numero naturale m e un omeomorfismo $\psi : V \to \mathbf{R}^m$ allora $m = n$. Questo risultato fu dimostrato da Brouwer intorno al 1920.

La dimostrazione di questo teorema si basa sul fatto che spazi topologici omotopicamente equivalenti hanno gruppi di omologia isomorfi e sul calcolo dei gruppi di omologia di S^n.

La tesi è strutturata nel seguente modo. Nel primo capitolo sono raccolte (senza dimostrazione) le nozioni di base di topologia generale e la definizione di varietà topologica. Nel secondo capitolo vengono richiamate le proprietà principali dell'omotopia e dell'omologia. In particolare viene enunciato il teorema di Mayer-Vietoris che è lo strumento principale per calcolare i gruppi di omologia della sfera. Infine il terzo capitolo è dedicato alla dimostrazione del teorema di invarianza della dimensione.

Capitolo 1

Richiami di topologia

Questo capitolo contiene i concetti di base della topologia generale (Si veda ad esempio [Kosniowski Czes. *Introduzione alla topologia algebrica*]).

Spazi topologici e omeomorfismi

Definizione 1.1 Una topololgia su un insieme X è una famiglia $\mathcal{U}$ di sottinsiemi di X che soddisfano le seguenti proprietà:
i) $\emptyset \in \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$;
ii) l'intersezione finita di elementi di $\mathcal{U}$ appartiene a $\mathcal{U}$;
iii)l'unione di una qualsiasi famiglia di elementi di $\mathcal{U}$ appartiene a $\mathcal{U}$.

L'insieme X con la suddetta famiglia $\mathcal{U}$ viene detto spazio topologico. Gli elementi $U \in \mathcal{U}$ sono detti aperti di X.

Definizione 1.2 Una funzione $f : X \to Y$ fra due spazi topologici si dice continua se per ogni aperto U di Y, la controimmagine $f^{-1}(U)$ è aperta in X.

Teorema 1.3 Siano X, Y, Z tre spazi topologici. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono due funzioni continue, allora la funzione composta $h = gf : X \to Z$ è continua.

Dimostrazione. Se U è aperto in Z, $g^{-1}(U)$ è aperto in Y e quindi $f^{-1}(g^{-1}(U))$ è aperto in X. Ma $f^{-1}(g^{-1}(U)) = h^{-1}(U)$, e quindi h è continua.

Definizione 1.4 Siano X e Y due spazi topologici; si dice che essi sono omeomorfi se esistono due funzioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ che siano l'una l'inversa dell'altra. In questo caso scriveremo che $X \simeq Y$ e diremo che f e g sono omeomorfismi tra X e Y.

Gli esempi che seguono verranno utilizzati nella trattazione successiva.

Esempio 1 Sia $D^n = \{(x_0, \dots x_{n-1}) \mid \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 < 1\}$, allora D^n e $\mathbf{R}^n$ sono omeomorfi.

Dimostrazione. Faccio la proiezione ortogonale di D^n sulla calotta inferiore $W = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in S^n_{(0,\dots,1)}(1) \mid x_n < 1\} \subset S^n_{(0,\dots,1)}(1)$ e poi una proiezione dal punto $(0, \dots, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Sia $p : D^n \to W$ definita da

$$p(x_0, \dots, x_{n-1}) = (x_0, \dots, x_{n-1}, -\sqrt{1 - \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2} + 1) = (x'_0, \dots, x'_n)$$

e sia $\pi_{(0,\dots,1)} : W \to \mathbf{R}^n$ definita da

$$\pi_{(0,\dots,1)}(x'_0, \dots, x'_n) = (\frac{x'_0}{1 - x'_n}, \dots, \frac{x'_{n-1}}{1 - x'_n})$$

$\pi_{(0,\dots,1)} p$ è composizione di funzioni continue e quindi è continua a sua volta. Ora dobbiamo verificare che anche l'inversa è continua. Si verifica facilmente che le inverse di p e di $\pi_{(0,\dots,1)}$ sono $\pi^{-1}_{(0,\dots,1)} : \mathbf{R}^n \to W$ definita da

$$\pi^{-1}_{(0,\dots,1)}(x_0, \dots, x_{n-1}) = (\frac{-x_0}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}}, \dots, \frac{-x_{n-1}}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}})$$

e $p^{-1} : W \to D^n$ definita da

$$p^{-1}(x_0, \dots, x_n) = (x_0, \dots, x_{n-1})$$

$p^{-1}\pi^{-1}_{(0,\dots,1)}$ è l'inversa cercata ed è continua perchè composizione di funzioni continue. $\square$

Esempio 2 Sia $U_1 = \{x \in S^n \mid x_n > -1/2\}$, allora $U_1 \simeq D^n$.

Dimostrazione. Facciamo la proiezione stereografica dal polo sud $\pi_S : S^n \setminus \{S\} \to \mathbf{R}^n$ definita da

$$\pi_S(x_0, \dots, x_n) = (\frac{x_0}{1 + x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{1 + x_n}) = (x'_0, \dots, x'_{n-1})$$

Sia

$$\sigma_1 = \begin{cases} x_0^2 + \dots x_{n-1}^2 = 3/4 \\ x_n = -1/2 \end{cases}$$

allora $\pi_S(x_0,\ldots,x_{n-1},-1/2)=(2x_0,\ldots,2x_{n-1})$ e

$$\pi_S(\sigma_1)=\begin{cases} x_0'^2+\ldots x_{n-1}'^2=3 \\ x_n'=0 \end{cases}$$

Quindi $\pi_S(U_1)=\{x'\in\mathbf{R}^n \mid x_0'^2+\ldots x_{n-1}'^2<3\}=D$, dove $x_i'=x_i/(1+x_n)$. Poichè la proiezione stereografica è un omeomorfismo abbiamo dimostrato che $U_1\simeq D$. A questo punto, per mostrare l'omeomorfismo tra D e D^n consideriamo l'applicazione $f:D\to D^n$ definita da $f(x)=x/3$ e l'inversa è $f^{-1}:D^n\to D$ definita da $f^{-1}(x)=3x$. Poichè sono entrambe continue, ho l'omeomorfismo tra U_1 e D^n componendo $f\pi_S$. $\Box$

Definizione 1.5 Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X. La topologia su S indotta dalla topologia di X è definita come la famiglia di sottinsiemi di S della forma $U\cap S$, dove U è un aperto di X.

Un sottoinsieme S di X dotato della topologia indotta viene detto *sottospazio* di X.

Proprietà topologiche

Compattezza

Definizione 1.6 Un ricoprimento di un sottoinsieme S di un insieme X è una famiglia di sottinsiemi $\{U_j \mid j\in J\}$ di X tale che $S\subseteq\bigcup_{j\in J}U_j$. Il riprimento è detto finito se l'insieme di indici J è finito.

Definizione 1.7 Siano $\{U_j \mid j\in J\}$ e $\{V_k \mid k\in K\}$ due ricoprimenti di un sottoinsieme S di X. Diremo che $\{U_j \mid j\in J\}$ è un sottoricoprimento di $\{V_k \mid k\in K\}$ se per ogni $j\in J$ esiste $k\in K$ tale che $U_j=V_k$.

Definizione 1.8 Siano X uno spazio topologico e S un sottoinsieme di X; diremo che un ricoprimento $\{U_j \mid j\in J\}$ di S è aperto se U_j è un sottoinsieme aperto di X per ogni $j\in J$.

Definizione 1.9 Un sottoinsieme S di uno spazio topologico X si dice compatto se ogni ricoprimento aperto di S ammette un sottoricoprimento finito.

Teorema 1.10 Un sottoinsieme S di X è compatto se e solo se è compatto come spazio topologico con la topologia indotta.

Teorema 1.11 L'immagine di uno spazio compatto tramite un'applicazione continua è compatta.

Corollario 1.12 Se X e Y sono due spazi topologici omeomorfi, X è compatto se e solo se Y è compatto.

Teorema 1.13 Un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.

Teorema 1.14 Un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^n$ è compatto.

Connessione

Definizione 1.15 Uno spazio topologico X si dice connesso se i soli sottinsiemi di X contemporaneamente aperti e chiusi sono X e $\emptyset$.
Un sottoinsieme si dice connesso se lo è come spazio topologico con la topologia indotta.

Teorema 1.16 Uno spazio X è connesso se e solo se X non è unione di due aperti disgiunti non vuoti.

Teorema 1.17 L'immagine di uno spazio connesso tramite un'applicazione continua è connessa.

Corollario 1.18 Se X e Y sono due spazi topologici omeomorfi,allora X è connesso se e solo se Y è connesso.

Teorema 1.19 Sia $\{Y_j \mid j \in J\}$ una famiglia di sottinsiemi connessi di uno spazio X; se $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq 0$ allora $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$ è connesso.

Connessione per archi

Definizione 1.20 Un arco in uno spazio X è un'applicazione continua $f : [0,1] \to X$; $f(0)$ è detto punto iniziale e $f(1)$ punto finale dell'arco.

Definizione 1.21 Uno spazio X si dice connesso per archi se, dati comunque due punti x_0 e x_1 in X, esiste un arco da x_0 a x_1.

Teorema 1.22 L'immagine di uno spazio connesso per archi tramite un'applicazione continua è connessa per archi.

Corollario 1.23 Siano X e Y due spazi topologici omeomorfi; allora X è connesso per archi se e solo lo è Y.

Teorema 1.24 Sia $\{Y_j \mid j \in J\}$ una famiglia di sottinsiemi connessi per archi di uno spazio X; se $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq 0$, allora $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$ è connesso per archi.

Teorema 1.25 Ogni spazio connesso per archi è connesso,ma non ogni spazio connesso è connesso per archi.

Teorema 1.26 Ogni sottoinsieme A di $\mathbf{R}^n$ aperto, connesso e non vuoto è connesso per archi.

Hausdorff

Definizione 1.27 Uno spazio X è detto di Hausdorff se per ogni coppia di punti distinti x, y di X esistono due aperti U_x e U_y contenenti rispettivamente x e y, tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Teorema 1.28 In uno spazio di Hausdorff ogni punto è chiuso.

Teorema 1.29 Un sottoinsieme compatto A di uno spazio di Hausdorff X è chiuso.

Teorema 1.30 Sia f un'applicazione continua da uno spazio compatto X in uno spazio di Hausdorff Y; essa è un omeomorfismo se e solo se è bigettiva.

Teorema 1.31 Un sottospazio S di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff.

Varietà topologiche

Definizione 1.32 Sia $n \in \mathbf{N}$, M è una n-varietà topologica se M è uno spazio topologico di Hausdorff tale che per ogni $p \in M$ esiste un aperto $\mathcal{U}_p$ e un omeomorfismo $\varphi_p : \mathcal{U}_p \to \mathbf{R}^n$.

L'insieme delle $\{\mathcal{U}_p, \varphi_p\}$ al variare di p è chiamato un atlante di M.

Osservazione 1.33 Il fatto che n sia univocamente determinato è il risultato principale di questa tesi (Vedi teorema 3.2)

Osservazione 1.34 Sia M una m-varietà, allora un aperto U di M è esso stesso una m-varietà.

Capitolo 2

Omotopia e omologia

2.1 Nozioni sull'omotopia

Definizione 2.1.1 Siano $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ due funzioni continue. Allora f e g sono *omotope*, cioè $f \sim g$, se e solo se esiste $F : X \times I \to Y$ continua, con $I = [0,1]$, tale che $F(x,0) = f(x)$ e $F(x,1) = g(x)$.

Definizione 2.1.2 Due spazi X e Y sono detti *omotopicamente equivalenti* se esistono due funzioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che $fg : Y \to Y$ sia omotopa a Id_Y e $gf : X \to X$ sia omotopa a Id_X. In questo caso f e g sono chiamate *equivalenze omotopiche*.

Nota 2.1.3 Sarà utilizzata la notazione $X \sim Y$ per indicare che X è omotopicamente equivalente a Y.

Teorema 2.1.4 L'omotopia definisce una relazione d'equivalenza tra spazi topologici,detta *equivalenza omotopica*.

Dimostrazione.

• $X \sim X$.

Esiste infatti $Id_X : X \to X$ e $Id_X Id_X$ è omotopa a Id_X in quanto possiamo definire $F : X \times I \to X$ in questo modo: $F(x,t) = x$

• $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$.

Poichè $X \sim Y$ esistono $f : X \to Y$ e $f' : Y \to X$ continue tali che $ff' \sim Id_Y$ e $f'f \sim Id_X$, cioè esiste $G : X \times I \to X$ tale che $G(x,0) = f'f(x)$ e $G(x,1) = Id_X(x)$ ed esiste $G' : Y \times I \to Y$ tale che $G'(y,0) = ff'(y)$ e $G'(y,1) = Id_Y(y)$. Si può quindi concludere che $Y \sim X$ perchè esistono $f' : Y \to X$ e $f : X \to Y$ tali che $f'f \sim Id_X$ e $ff' \sim Id_Y$ per quanto detto

sopra.
• $X \sim Y \wedge Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$

Siano $f : X \to Y$, $f' : Y \to X$, $g : Y \to Z$, $g' : Z \to Y$ funzioni continue. Poichè $X \sim Y$ esistono $F : X \times I \to X$ e $F' : Y \times I \to Y$ continue tali che $F(x, 0) = f'(f(x))$, $F(x, 1) = x$, $F'(y, 0) = f(f'(y))$ e $F'(y, 1) = y$, e poichè $Y \sim Z$ esistono $G : Y \times I \to Y$ e $G' : Z \times I \to Z$ continue tali che $G(y, 0) = g'(g(y))$, $G(y, 1) = y$, $G'(z, 0) = g(g'(z))$ e $G'(z, 1) = z$.

Si dimostra che $X \sim Z$ se e solo se $f'g'gf \sim Id_X$ e $gff'g' \sim Id_Z$, cioè se e solo se esistono $H : X \times I \to X$ e $H' : Z \times I \to Z$ continue tali che $H(x, 0) = f'g'gf(x)$, $H(x, 1) = x$, $H'(z, 0) = gff'g'(z)$ e $H'(z, 1) = z$.
Definiamo $H : X \times I \to X$ e $H' : Z \times I \to Z$ in questo modo:

$$H(x,t) = \begin{cases} f'(G(f(x), 2t)) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ F(x, 2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$$H'(z,t) = \begin{cases} g(F'(g'(z), 2t)) & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2, \\ G'(z, 2t-1) & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Infatti $H(x, 0) = f'(G(f(x), 0)) = f'(g'g(f(x)))$, $H(x, 1) = F(x, 1) = x$, $H'(z, 0) = g(F'(g'(z), 0)) = gff'g'(z)$ e $H'(z, 1) = G'(z, 1) = z$. H e H' sono continue perchè composizione di funzioni continue. □

Osservazione 2.1.5 Se $X \simeq Y$, allora X è omotopicamente equivalente a Y.

Dimostrazione. Il fatto che $X \simeq Y$ implica che esistono $f : X \to Y$ e $f^{-1} : Y \to X$ continue tali che $ff^{-1} = Id_Y$ e $f^{-1}f = Id_X$. Vorremmo verificare che $ff^{-1} \sim Id_Y$, cioè che esiste una funzione continua $F : Y \times I \to Y$ tale che $F(y, 0) = ff^{-1}(y) = Id_Y(y)$ e $F(y, 1) = Id_Y(y)$. Allora posso definire una funzione continua $F : Y \times I \to Y$ ponendo $F(y, t) = y$. Allo stesso modo, per dimostrare che $f^{-1}f \sim Id_X$ consideriamo una funzione $F' : X \times I \to X$ ponendo $F'(x, t) = x$. F' è continua e soddisfa $F'(x, 0) = f^{-1}f(x) = Id_X(x)$ e $F'(x, 1) = Id_X(x)$. □

Non vale il viceversa e il seguente esempio ne è una prova: ci mostra infatti che spazi omotopicamente equivalenti ($\mathbf{R}^n$ e $\{p\}$) non sono omeomorfi.

Esempio 2.1.6 Sia $p \in \mathbf{R}^n$, allora $\mathbf{R}^n$ è omotopo a $\{p\}$.

Dimostrazione. Vorremmo trovare due funzioni $f : \mathbf{R}^n \to \{p\}$ e $g : \{p\} \to \mathbf{R}^n$ tali che $fg \sim Id_{\{p\}}$ e $gf \sim Id_{\mathbf{R}^n}$. Definendo $f(x) = p$ e $g(p) = p$, cioè essendo g l'inclusione naturale, si ha $fg = Id_{\{p\}}$ e quindi $fg \sim Id_{\{p\}}$; manca quindi da dimostrare che $h = gf \sim Id_{\mathbf{R}^n}$. Per dimostrarlo consideriamo una funzione $F : \mathbf{R}^n \times I \to \mathbf{R}^n$ definita da $F(x,t) = (1-t)p + tx$ che è continua e tale che $F(x,0) = p = gf(x)$ e $F(x,1) = x = Id_{\mathbf{R}^n}(x)$. $\square$

Definizione 2.1.7 Uno spazio X è detto *contraibile* se è omotopicamente equivalente ad un punto.

Osservazione 2.1.8 Poichè $D^n \simeq \mathbf{R}^n$ si ha $D^n \sim \{p\}$(Esempio 1, cap.1) (infatti $D^n \simeq \mathbf{R}^n \sim \{p\}$ implica $D^n \sim \mathbf{R}^n \sim \{p\}$, che implica a sua volta $D^n \sim \{p\}$).

Esempio 2.1.9 Siano $U_1 = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in S^n | x_n > -1/2\}$ e $U_2 = \{x = (x_0, \ldots, x_n) \in S^n | x_n < 1/2\}$, allora $U_1 \cap U_2 \sim S^{n-1}$.

Dimostrazione. Sia $\pi_N : S^n \setminus \{N\} \to \mathbf{R}^n = \{x_n = 0\}$ la proiezione stereografica dal polo nord è (Esempio 2, cap.1),allora

$$\pi_N(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} x_0'^2 + \ldots + x_{n-1}'^2 < 3 \\ x_0'^2 + \ldots + x_{n-1}'^2 > 1/3 \\ x_n' = 0 \end{cases}$$

dove $x_i' = x_i/(1-x_n)$. Poichè π_N è un omeomorfismo si ha $U_1 \cap U_2 \simeq \pi_N(U_1 \cap U_2)$ e $\pi_N(S^{n-1}) \simeq S^{n-1}$, per cui, se dimostro che $\pi_N(U_1 \cap U_2) \sim \pi_N(S^{n-1})$ allora $U_1 \cap U_2 \sim S^{n-1}$. Sia $p_1 : \pi_N(U_1 \cap U_2) \to \pi_N(S^{n-1})$ definita da $p_1(p) = p / \parallel p \parallel$ (p_1 è continua perhè $0 \notin \pi_N(U_1 \cap U_2)$) e sia $i : \pi_N(S^{n-1}) \to \pi_N(U_1 \cap U_2)$ l'inclusione naturale; si deve verificare che $ip_1 : \pi_N(U_1 \cap U_2) \to \pi_N(U_1 \cap U_2)$ è omotopa a $Id_{\pi_N(U_1 \cap U_2)}$ e che $p_1 i : \pi_N(S^{n-1}) \to \pi_N(S^{n-1})$ è omotopa a $Id_{\pi_N(S^{n-1})}$. Poichè $p_1 i(x) = x = Id_{\pi_N(S^{n-1})}(x)$ si ha $p_1 i \sim Id_{\pi_N(S^{n-1})}$. Invece per dimostrare che $ip_1 \sim Id_{\pi_N(U_1 \cap U_2)}$ considero $F : \pi_N(U_1 \cap U_2) \times I \to \pi_N(U_1 \cap U_2)$ definita da

$$F(x,t) = xt + (1-t)x / \parallel x \parallel$$

infatti $F(x,0) = i(p_1(x)) = x / \parallel x \parallel$ e $F(x,1) = x = Id_{\pi_N(U_1 \cap U_2)}(x)$. Inoltre F è continua e $F(\pi_N(U_1 \cap U_2) \times I)$ è tutta contenuta in $\pi_N(U_1 \cap U_2)$ perchè è uno spazio convesso. Quindi $U_1 \cap U_2 \sim S^{n-1}$. $\square$

Esempio 2.1.10 S^{n-1} è omotopo a $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

Dimostrazione. Siano $k : S^{n-1} \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ definita da $k(x) = x$ e $r : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to S^{n-1}$ definita da $r(x) = x / \parallel x \parallel$. Allora $S^{n-1} \sim \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ se e solo se $kr \sim Id_{\mathbf{R}^n \setminus \{0\}}$ e $rk \sim Id_{S^{n-1}}$. Poichè $rk = Id_{S^{n-1}}$ si ha $rk \sim Id_{s^{n-1}}$. Invece per dimostrare che $kr \sim Id_{\mathbf{R}^n \setminus \{0\}}$ consideriamo la funzione $F : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ definita da $F(x,t) = (1-t)x / \parallel x \parallel + tx$. Questa F è

continua e soddisfa $F(x,0) = kr(x) = x/ \parallel x \parallel$ e $F(x,1) = Id_{\mathbf{R}^n \setminus \{0\}}(x) = x$.
$\square$

2.2 Introduzione all'omologia singolare

Definizioni 2.2.1 Il *simplesso standard di dimensione* n è definito come il seguente sottoinsieme di $\mathbf{R}^{n+1}$

$$\Delta_n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 1; x_i \geq 0, i = 0, \ldots n\}$$

I punti $v_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $v_1 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,$\ldots$, $v_n = (0, \ldots, 0, 1)$ sono detti *vertici* del simplesso.

Ne segue che $\Delta_0 = \{x \mid x = 1\}$ è il punto 1, $\Delta_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1\}$ è un segmento di retta e Δ_2 è un triangolo.

Un *simplesso singolare di dimensione* n (un n-simplesso singolare) in uno spazio topologico X è una funzione continua

$$\varphi : \Delta_n \to X$$

Ne segue che uno 0-simplesso singolare è un punto di X e un 1-simplesso singolare è un arco in X:infatti, partendo da un 1-simplesso singolare φ posso definire un arco da $\varphi(v_0)$ a $\varphi(v_1)$ ponendo $f(t) = \varphi(t, 1-t)$; viceversa a partire da un arco $f : I \to X$ posso definire un 1-simplesso singolare $\varphi : \Delta_1 \to X$ ponendo $\varphi(x_0, x_1) = f(x_1)$.

Una *n-catena singolare* in X è un'espressione formale

$$\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$$

dove $\{\varphi_j \mid j \in J\}$ è la famiglia di tutti gli n-simplessi singolari in X, $n_j \in \mathbf{Z}$ e il numero di elementi non nulli di $\{n_j \mid j \in J\}$ è finito.

L'insieme $S_n(X)$ delle n-catene singolari in X forma un gruppo abeliano con l'operazione (indicata con $+$) definita da

$$\sum_{j \in J} n_j \varphi_j + \sum_{j \in J} m_j \varphi_j = \sum_{j \in J} (n_j + m_j) \varphi_j$$

- elemento neutro: $\sum_{j \in J} 0 \varphi_j = 0$

- l'opposto di $\sum_{j\in J} n_j\varphi_j$ è $\sum_{j\in J}(-n_j)\varphi_j$
- associatività:

$$(\sum_{j\in J} n_j\varphi_j + \sum_{j\in J} m_j\varphi_j) + \sum_{j\in J} p_j\varphi_j =$$

$$= \sum_{j\in J}(n_j + m_j)\varphi_j + \sum_{j\in J} p_j\varphi_j =$$

$$= \sum_{j\in J}[(n_j + m_j) + p_j]\varphi_j = \sum_{j\in J}[n_j + (m_j + p_j)]\varphi_j =$$

$$= \sum_{j\in J} n_j\varphi_j + \sum_{j\in J}(m_j + p_j)\varphi_j =$$

$$= \sum_{j\in J} n_j\varphi_j + (\sum_{j\in J} m_j\varphi_j + \sum_{j\in J} p_j\varphi_j)$$

- commutatività: è dovuta al fatto che la somma in $\mathbf{Z}$ è commutativa, cioè:

$$\sum_{j\in J} n_j\varphi_j + \sum_{j\in J} m_j\varphi_j = \sum_{j\in J}(n_j + m_j)\varphi_j =$$

$$= \sum_{j\in J}(m_j + n_j)\varphi_j = \sum_{j\in J} m_j\varphi_j + \sum_{j\in J} n_j\varphi_j$$

Sia φ un n-simplesso singolare e $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Definiamo un $(n-1)$-simpleso singolare $\partial_i\varphi$ ponendo

$$\partial_i\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \varphi(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1})$$

Abbiamo così un omomorfismo di gruppi: $\partial_i : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ definito da

$$\partial_i(\sum_{j\in J} n_j\varphi_j) = \sum_{j\in J} n_j\partial_i\varphi_j$$

L'*operatore di bordo* $\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ è definito come

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \ldots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$$

grazie ad esso definiamo due sottogruppi di $S_n(X)$:
• Una n-catena singolare $c \in S_n(X)$ è detta un n-ciclo se $\partial c = 0$; l'insieme degli n-cicli di X è indicato con $Z_n(X)$.
• Una n-catena singolare $d \in S_n(X)$ è detta un n-bordo se $d = \partial e$ per qualche $e \in S_{n+1}(X)$; l'insieme degli n-bordi è indicato con $B_n(X)$. In altri termini

$$Z_n(X) = Ker\{\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)\}$$

$$B_n(X) = Im\{\partial : S_{n+1}(X) \to S_n(X)\}$$

e quindi $Z_n(X)$ e $B_n(X)$ sono sottogruppi di $S_n(X)$.

Definiamo $Z_0(X) = S_0(X)$, cioè tutte le 0-catene singolari sono 0-cicli.

Teorema 2.2.2 $\partial\partial = 0$

Dimostrazione. Consideriamo un generico n-simplesso singolare φ,allora

$$\partial\partial\varphi = \partial(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i \varphi) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \partial_j (\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i \varphi) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_j \partial_i \varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi$$

Ora,se $i \leq j$,si ha $\partial_j \partial_i = \partial_i \partial_{j+1}$: infatti

$(\partial_j \partial_i \varphi)(x_0, \ldots, x_{n-2}) = (\partial_j(\partial_i \varphi))(x_0, \ldots, x_{n-2}) = (\partial_i \varphi)(x_0, \ldots, x_{j-1}, 0, x_j, \ldots, x_{n-2}) =$

$= \varphi(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{j-1}, 0, x_j, \ldots, x_{n-2}) = (\partial_{j+1} \varphi)(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-2}) =$

$= (\partial_i(\partial_{j+1} \varphi))(x_0, \ldots, x_{n-2}) = (\partial_i \partial_{j+1} \varphi)(x_0, \ldots, x_{n-2})$.

Quindi

$$\partial\partial\varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{i+j} \partial_i \partial_{j+1} \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} (-1)^{i+j} \partial_i \partial_{j+1} \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_{i+1} \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j-1} \partial_j \partial_i \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} ((-1)^{i+j-1} + (-1)^{i+j}) \partial_j \partial_i \varphi = 0$$

□

Da questo teorema segue che $B_n(X) \subseteq Z_n(X)$, ed in particolare che $B_n(X)$ è un sottogruppo di $Z_n(X)$, cioè che per ogni $a, b \in B_n(X)$, $a - b \in B_n(X)$. Infatti poichè $a, b \in B_n(X)$,si ha che $a = \partial c$ e $b = \partial d$ per qualche $c, d \in S_{n+1}(X)$, cioè

$$a = \partial c = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i c = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \partial_i (\sum_{j \in J} n_j \varphi_j) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sum_{j \in J} n_j \partial_i \varphi_j$$

$$b = \partial d = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sum_{j \in J} m_j \partial_i \varphi_j$$

Allora $a - b = \partial c - \partial d = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sum_{j \in J} (n_j - m_j) \partial_i \varphi_j = \partial f$ dove $f = \sum_{j \in J} (n_j - m_j) \varphi_j \in S_{n+1}$. In particolare è un sottogruppo normale perchè $Z_n(X)$ è abeliano. Possiamo quindi definire il gruppo quoziente $Z_n(X)/B_n(X)$.

2.3 Gruppi di omologia

Definizione 2.3.1 L'*n-esimo gruppo di omologia* di X è defnito come

$$H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$$

Gli elementi di $H_n(X)$ sono *classi di omologia*, ossia classi di equivalenza di cicli rispetto alla relazione d'equivalenza

$$c \sim c' \Leftrightarrow c - c' \in B_n(X)$$

dove c,$c' \in Z_n(X)$. Se $c \sim c'$ diremo che c e c' sono cicli omologhi.

Definiamo $H_n(\emptyset) = \{0\}$, $\forall n \geq -1$.

Osservazione 2.3.2 Sia $(G, +)$ un gruppo e H uno suo sottogruppo normale (cioè tale che $\forall a \in G$ e $\forall h \in H$ si abbia $(a + h + (-a)) \in H$).
Allora $(G/H, +')$, con l'operazione definita da $[a] +' [b] = [a + b]$ $\forall$ a,$b \in G$ è detto gruppo quoziente di G modulo H (dove $G/H = \{[a]_{mod.H} \mid a \in G\}$ e $[a]_{mod.H} = \{b \in G \mid a + (-b) \in H\}$).

Come esempi, calcoliamo i gruppi di omologia di un singolo punto e lo 0-esimo gruppo di omologia di uno spazio connesso per archi.

Teorema 2.3.3 Se X è uno spazio che consiste di un singolo punto allora

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{se } n = 0 \\ \{0\} & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Per ogni $n \geq 0$ esiste un unico n-simplesso singolare $\varphi_n : \Delta_n \to X$ e quindi

$$S_n(X) = \{k\varphi_n \mid k \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z}$$

Per $n > 0$ abbiamo $\partial_i \varphi_n = \varphi_{n-1}$ e si ha:

$$\partial\varphi_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \partial_i \varphi_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \varphi_{n-1} =$$

$$= (\sum_{i=0}^{n}(-1)^i)\varphi_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é dispari} \\ \varphi_{n-1} & \text{se n è pari} \end{cases}$$

mentre per $n = 0$ abbiamo $\partial\varphi_0 = 0$. Ne segue che

$$Z_n(X) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } n \text{ é pari e } n > 0 \\ S_n(X) & \text{se } n \text{ è dispari o } n = 0 \end{cases}$$

e poichè

$$\partial\varphi_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é pari o } n = 0 \\ \varphi_n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$B_n(X) = \begin{cases} S_n(X) & \text{se } n \text{ é dispari} \\ \{0\} & \text{se } n \text{ è pari o } n = 0 \end{cases}$$

Infatti, se n è dispari, per ogni $k\varphi_n \in S_n$ esiste $k\varphi_{n+1}$ tale che $\partial k\varphi_{n+1} = k\varphi_n$ e quindi $B_n(X) = S_n(X)$. Invece se n è pari, l'unico modo per avere $k\varphi_n = \partial k\varphi_{n+1} = 0$ è $k = 0$.

Allora

$$H_n(X) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{se } n = 0, \\ \{0\} & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

Infatti, per $n = 0$ si ha $H_0(X) = S_n(X)/\{0\} \cong \mathbf{Z}/\{0\} = \mathbf{Z}$, per n dispari si ha $H_n(X) = S_n(X)/S_n(X) \cong \mathbf{Z}/\mathbf{Z} = \{0\}$ e per n pari si ha $H_n(X) = \{0\}/\{0\} = \{0\}$. □

Teorema 2.3.4 Se X è uno spazio non vuoto e connesso per archi, allora $H_0(X) \cong \mathbf{Z}$.

Dimostrazione. Gli 0-simplessi singolari di X sono in corrispondenza biunivoca con i punti di X, infatti posso definire tanti $\varphi_i : \Delta_0 \to X$ quanti sono gli elementi di X in questo modo: $\varphi_i(1) = x_i$, avendo così la bigezione

$$\begin{aligned} f : \{\varphi_i\} &\to X \\ \varphi_i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

Allora una generica 0-catena singolare (e quindi un generico 0-ciclo perchè $S_0(X) = Z_0(X)$) è della forma

$$\sum_{x \in X} n_x x$$

dove $n_x \in \mathbf{Z}$ e il numero di elementi non nulli di $\{n_x \mid x \in X\}$ è finito. Definiamo $\psi : H_0(X) \to \mathbf{Z}$ ponendo

$$\psi(\sum_{x \in X} n_x x) = \sum_{x \in X} n_x$$

e verifichiamo che ψ è ben definita. Supponiamo dunque che lo 0-ciclo $\sum_{x\in X} m_x x$ sia omologo a $\sum_{x\in X} n_x x$, cioè che

$$\sum_{x\in X} n_x x = \sum_{x\in X} m_x x + \partial c$$

dove $c \in S_1(X)$; sia

$$c = \sum_{j\in J} k_j \varphi_j$$

con $\varphi_j : \Delta_1 \to X$ e $k_j \in \mathbf{Z}$. Allora

$$\partial c = \partial(\sum_{j\in J} k_j \varphi_j) = \sum_{j\in J} k_j \partial\varphi_j = \sum_{j\in J} k_j(\partial_0\varphi_j(1) - \partial_1\varphi_j(1)) =$$

$$= \sum_{j\in J} k_j(\varphi_j(0,1) - \varphi_j(1,0)) = \sum_{j\in J} k_j(\varphi_j(v_1) - \varphi_j(v_0))$$

pertanto avremo

$$\psi(\sum_{x\in X} n_x x) = \psi(\sum_{x\in X} m_x x + \sum_{j\in J} k_j(\varphi_j(v_1) - \varphi_j(v_0))) =$$

$$= \psi(\sum_{x\in X} m_x x + \sum_{j\in J} k_j\varphi_j(v_1) - \sum_{j\in J} k_j\varphi_j(v_0)) = \sum_{x\in X} m_x + \sum_{j\in J} k_j - \sum_{j\in J} k_j =$$

$$= \sum_{x\in X} m_x = \psi(\sum_{x\in X} m_x x)$$

Ho quindi dimostrato che ψ è ben definita, cioè prendendo rappresentanti diversi ($\sum_{x\in X} n_x x$ e $\sum_{x\in X} m_x x$)per la stessa classe di omologia trovo esattamente la stessa immagine, appunto

$$\psi(\sum_{x\in X} n_x x) = \psi(\sum_{x\in X} m_x x)$$

Si verifica facilmente che la funzione ψ è un omomorfismo di gruppi $((H_0(X), +)$ gruppo quoziente e $(\mathbf{Z}$,+) gruppo degli interi), infatti

$$\psi(\sum_{x\in X} n_x x + \sum_{x\in X} m_x x) = \psi(\sum_{x\in X} (n_x + m_x)x) = \sum_{x\in X} (n_x + m_x) =$$

$$= \sum_{x\in X} n_x + \sum_{x\in X} m_x = \psi(\sum_{x\in X} n_x x) + \psi(\sum_{x\in X} m_x x)$$

ed è suriettiva perchè $\psi(nx) = n$, dove x è un punto qualunque di X

Dimostriamo infine che ψ è iniettiva. Sia $x_0 \in X$ e $\sum_{x \in X} n_x x$ uno 0-ciclo, avremo allora

$$\sum_{x \in X} n_x x = (\sum_{x \in X} n_x)x_0 + \sum_{x \in X}(n_x x - n_x x_0) =$$

$$(\sum_{x \in X} n_x)x_0 + \partial(\sum_{x \in X} n_x \varphi_x)$$

dove φ_x è un 1-simplesso singolare,e quindi è un arco da x a x_0.
Abbiamo quindi dimostrato che i due cicli
$\sum_{x \in X} n_x x$ e $\sum_{x \in X} n_x x_0$ sono omologhi.

Di conseguenza, se $\psi(\sum_{x \in X} n_x x) = 0$ si ha $\sum_{x \in X} n_x = 0$

e quindi

$$\sum_{x \in X} n_x x \sim (\sum_{x \in X} n_x)x_0 = 0$$

cioè ψ è iniettiva.

2.4 Applicazioni continue e omomorfismo indotto

Per ogni applicazione $f : X \to Y$ continua definiamo

$$f_{\#} : S_n(X) \to S_n(Y)$$

mediante

$$f_{\#}(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j) = \sum_{j \in J} n_j (f\varphi_j)$$

L'applicazione $f_{\#}$ è un omomorfismo di gruppi, infatti

$$f_{\#}(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j + \sum_{j \in J} m_j \varphi_j) = f_{\#}(\sum_{j \in J}(n_j + m_j)\varphi_j) =$$

$$= \sum_{j \in J} (n_j + m_j)(f\varphi_j) = \sum_{j \in J} n_j (f\varphi_j) + \sum_{j \in J} m_j (f\varphi_j) =$$

$$= f_\#(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j) + f_\#(\sum_{j \in J} m_j \varphi_j)$$

Lemma 2.4.1 $\partial f_\# = f_\# \partial$
Dimostrazione. Dal momento che

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i$$

è sufficiente verificare che $(\partial_i f_\#)(\varphi) = (f_\# \partial_i)(\varphi)$ per un generico $(n-1)$-simplesso singolare φ. Infatti si ha:

$$((\partial_i f_\#)(\varphi))(x_0, \ldots., x_{n-1}) = \partial_i (f\varphi)(x_0, \ldots.., x_{n-1}) =$$

$$= (f\varphi)(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1}) = f_\#(\varphi(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1})) =$$

$$= (f_\#(\partial_i \varphi))(x_0, \ldots, x_{n-1}) = (f \partial_i \varphi)(x_0, \ldots, x_{n-1}) = ((f_\# \partial_i)(\varphi))(x_0, \ldots, x_{n-1})$$

□

$f_\#$ fa corrispondere cicli a cicli e bordi a bordi, infatti:

Corollario 2.4.2 $f_\#(Z_n(X)) \subseteq Z_n(Y)$ e $f_\#(B_n(X)) \subseteq B_n(Y)$
Dimostrazione.
- Sia $c \in Z_n(X)$, allora $\partial f_\#(c) = f_\# \partial(c) = 0$ cioè $f_\#(c) \in Z_n(Y)$.
- Sia $d \in B_n(X)$, allora $f_\#(d) = f_\#(\partial e) = \partial f_\#(e)$, cioè $f_\#(d) \in B_n(Y)$. □

Questo corollario implica che esiste un omomorfismo di gruppi

$$f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$$

definito da

$$f_*[c] = [f_\#(c)]$$

L'omomorfismo $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ è chiamato *omomorfismo indotto* da f.

Dimostriamo che f_* è ben definita. Siano $[d] \in H_n(X)$ e $c \in [d]$ (cioè $c = d + \partial a$, dove $a \in S_{n+1}(X)$), allora f_* è ben definita se $f_*([c]) \sim f_*([d])$.

$f_*([c]) = f_*([d+\partial a]) = [f_\#(d+\partial a)] = [f_\#(d)+f_\#(\partial a)] = [f_\#(d)]+[f_\#(\partial a)] =$

$= f_*([d]) + \partial b$ (Corollario 2.4.2). Abbiamo quindi dimostrato che $f_*([c]) \sim f_*([d])$.

Teorema 2.4.3
i)Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni continue, allora $(gf)_* = g_* f_* : H_n(X) \to H_n(Z)$ per ogni $n \geq 0$.
ii) Se $1 : X \to X$ è la funzione identica di X, 1_* è l'omomorfismo identico di $H_n(X)$ per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione.
i) Sia $c = \sum_{j\in J} n_j \varphi_j$

$$g_*(f_*[c]) = g_*[f_\#(c)] = g_*[\sum_{j\in J} n_j(f\varphi_j)] =$$

$$= [g_\#(\sum_j n_j(f\varphi_j))] = [\sum_j n_j(gf\varphi_j)] =$$

$$[(gf)_\#(\sum_j n_j\varphi_j)] = (gf)_*[\sum_j n_j\varphi_j] = (gf)_*[c]$$

ii) Segue immediatamente dalla definizione di f_*.

Osservazione 2.4.4 Da questo teorema segue che l'omologia è un funtore covariante dalla categoria degli spazi topologici, avente come morfismi le applicazioni continue, alla categoria dei gruppi abeliani, avente come morfismi gli omomorfismi (Vedi: Rudimenti di algebra astratta, Luigi Cerlienco).

Un importante corollario del teorema 2.4.3.è il seguente:

Corollario 2.4.5 Se $f : X \to Y$ è un omoeomorfismo, allora $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ è un isomorfismo per ogni $n \geq 0$.

Dimostrazione. Essendo f una funzione continua esiste $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ ed essendo invertibile con inversa continua esiste $f_*^{-1} : H_n(Y) \to H_n(X)$, quindi f_* èun isomorfismo. $\square$

Sia X uno spazio topologico tale che $X = U_1 \cup U_2$, con U_1 e U_2 aperti di X, e denotiamo con $\varphi_i : U_1 \cap U_2 \to U_i$ e $\psi : U_i \to X$ le rispettive inclusioni $(i = 1, 2)$. Definiamo due omomorfismi

$$i : H_k(U_1 \cap U_2) \to H_k(U_1) \oplus H_k(U_2)$$

$$j : H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \to H_k(X)$$

ponendo

$$i(c) = ((\varphi_1)_*(c), (\varphi_2)_*(c))$$
$$j(c_1, c_2) = (\psi_1)_*(c_1) - (\psi_2)_*(c_2)$$

Nota 2.4.6 $A \oplus B$ è la somma diretta: è l'insieme $A \times B$ con l'operazione binaria definita da $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. $\square$

Teorema 2.4.7 Sia $X = U_1 \cup U_2$, dove U_1 e U_2 sono aperti di X. Esistono allora degli omomorfismi

$$\Delta : H_k(X) \to H_{k-1}(U_1 \cap U_2)$$

tali che la successione di gruppi e di omomorfismi

$$\ldots H_{k+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i} H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \xrightarrow{j} H_k(X)$$
$$\xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(U_1 \cap U_2) \to \ldots$$

è esatta,cioè il Ker di ogni omomorfismo coincide con l'Im dell'omomorfismo che lo precede. La suddetta successione è detta successione di Mayer-Vietoris.

2.5 Relazione tra omotopia e omologia

Il seguente teorema 2.5.2 è l'ingrediente principale per la dimostrazione del teorema di invarianza della dimensione. La sua dimostrazione si basa sul seguente teorema che enunciamo senza dimostrazione (si rinvia il lettore a [Kosniowski Czes. *Introduzione alla topologia algebrica*] pag. 281)

Teorema 2.5.1 (Invarianza omotopica dell'omologia)
Siano f,g : $X \to Y$ due applicazioni continue e omotope. Allora $f_* = g_* : H_k(X) \to H_k(Y)\ \forall\ n \geq 0$.

Teorema 2.5.2 Se $f : X \to Y$ è un'equivalenza omotopica,allora $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$ è un isomorfismo $\forall\ n \geq 0$.

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che se X è omotopo a Y allora $H_n(X) \cong H_n(Y)$. Se $X \sim Y$ allora esiste $g : Y \to X$ continua tale che $gf \sim Id_X$ e $fg \sim Id_Y$. Dal teorema precedente sappiamo che se $gf \sim Id_X$ allora $(gf)_* = (Id_X)_*$ e $g_* f_* = (gf)_* = (Id_X)_* = Id_{H_k(X)}$. Inoltre $fg \sim Id_Y$ implica che $f_* g_* = Id_{H_k(Y)}$. Questo dimostra che f_* e g_* sono l'una l'inversa dell'altra. $\square$

Calcoliamo ora i gruppi di omologia di S^n.

2.6 Gruppi di omologia di S^n

Teorema 2.6.1 Se n è un intero positivo si ha

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{se } k = 0, n, \\ \{0\} & \text{negli altri casi.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Procediamo per induzione. Siano $U_1 = \{x \in S^n | x_n > -1/2\}$ e $U_2 = \{x \in S^n | x_n < -1/2\}$; poichè $U_1 \simeq D^n \sim \{p\}$ (Esempio 2,cap.1; Osservazione 2.1.8) si ha $U_1 \sim D^n \sim \{p\}$ e quindi $U_1 \sim \{p\}$, cioè U_1 è uno spazio contraibile,e questo implica che

$$H_k(U_1) \cong H_k(\{p\}) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & \text{se } k = 0, \\ \{0\} & \text{se } k \neq 0. \end{cases}$$

Lo stesso vale per U_2. Invece $U_1 \cap U_2 \sim S^{n-1}$ (Esempio 2.1.9) e quindi $H_k(U_1 \cap U_2) \cong H_k(S^{n-1})$. Poichè $S^n = U_1 \cup U_2$ (U_1 e U_2 aperti di S^n), esiste $\Delta : H_k(S^n) \to H_{k-1}(S^{n-1})$ tale che la successione di Mayer-Vietoris è esatta.

Supponiamo $n = 1$. La parte della successione di Mayer-Vietoris relativa a $k = 1$ è

$$\to H_1(U_1) \oplus H_1(U_2) \xrightarrow{j} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{j}$$

cioè

$$\ldots \to \{0\} \xrightarrow{j} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{j} \ldots$$

Infatti $H_1(U_1) \cong H_1(U_2) \cong \{0\}$ e per verificare che $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \cong H_0(U_1 \cap U_2)$ usiamo la successione di Mayer-Vietoris per $X = S^0 = \{-1\} \cup \{1\} = V_1 \cup V_2$, $k = 0$ ottenendo

$$\ldots \to H_0(\emptyset) \xrightarrow{i} H_0(V_1) \oplus H_0(V_2) \xrightarrow{j} H_0(S^0) \xrightarrow{\Delta} H_{-1}(\emptyset) \to \ldots$$

cioè

$$\ldots \to \{0\} \xrightarrow{i} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{j} H_0(S^0) \xrightarrow{\Delta} \{0\} \to \ldots$$

essendo $Kerj = Imi = \{0\}$ j è iniettiva ed essendo $H_0(S^0) = Ker\Delta = Imj$ j è suriettiva, cioè j è un isomorfismo, quindi $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \cong H_0(S^0) \cong H_0(U_1 \cap U_2)$ perchè $U_1 \cap U_2 \sim S^0$. $\Box$

Inoltre $i(x, y) = (x + y, x + y)$. Verifichiamolo: $i : H_0(U_1 \cap U_2) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$. Il generico omomorfismo tra $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ è della forma $(x, y) \mapsto (mx + ny, px + qy)$, ma poichè φ_i è un'inclusione, anche φ_{i*} non può moltiplicare per scalari diversi da 1. Quindi $m = n = p = q = 1$. $\Box$

Si avrà quindi $Ker\Delta = Imj = \{0\}$, che implica Δ iniettiva, e $Im\Delta = Keri = \{(x, -x) \in \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \mid x \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z}$ (avendo $f(x, -x) = x$ e $f^{-1}(x) = (x, -x)$). Percui $\Delta : H_1(S^1) \to Im\Delta$ è un isomorfismo e poichè $Im\Delta \cong \mathbf{Z}$ si ha $H_1(S^1) \cong Im\Delta \cong \mathbf{Z}$.

La parte della successione relativa a $k > 1$ è

$$\ldots \{0\} \xrightarrow{j} H_k(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^0) \xrightarrow{i} H_{k-1}(U_1) \oplus H_{k-1}(U_2) \to \ldots$$

cioè

$$\ldots \to \{0\} \xrightarrow{j} H_k(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^0) \xrightarrow{i} \{0\} \to \ldots$$

$Ker\Delta = Imj = \{0\}$ implica che Δ è iniettiva e $Im\Delta = Keri = H_{k-1}(S^0)$ implica che Δ è suriettiva, quindi $H_k(S^1) \cong H_{k-1}(S^0)$.

Per $k > 1$ $H_{k-1}(S^0) = \{0\}$, infatti, usando Mayer-Vietoris su $X = S^0$, $V_1 = \{-1\}$, $V_2 = \{1\}$ si ha

$$\ldots \to H_{k-1}(V_1) \oplus H_{k-1}(V_2) \xrightarrow{j} H_{k-1}(S^0) \xrightarrow{\Delta} H_{k-2}(V_1 \cap V_2) \xrightarrow{i}$$

$$\xrightarrow{i} H_{k-2}(V_1) \oplus H_{k-2}(V_2) \to \ldots$$

cioè

$$\ldots \to \{0\} \xrightarrow{j} H_{k-1}(S^0) \xrightarrow{\Delta} \{0\} \xrightarrow{i} H_{k-2}(V_1) \oplus H_{k-2}(V_2) \to \ldots$$

e $Imj = \{0\} = Ker\Delta = H_{k-1}(S^0)$ $\Box$

Pertanto, usando Mayer-Vietoris per $X = S^1$ si ha

$$\ldots \to \{0\} \xrightarrow{j} H_k(S^1) \xrightarrow{\Delta} \{0\} \xrightarrow{i} \{0\} \to \ldots$$

e $\{0\} = Imj = Ker\Delta = H_k(S^1)$. Abbiamo così dimostrato il teorema per $n = 1$.

Sia ora $m \geq 1$ e supponiamo che il teorema valga per $n = m - 1$, allora vogliamo dimostrare che vale anche per $n = m$.

Se $k = 1$ avremo

$$\ldots \to H_1(U_1) \oplus H_1(U_2) \xrightarrow{j} H_1(S^m) \xrightarrow{\Delta} H_0(S^{m-1}) \xrightarrow{i}$$

$$\xrightarrow{i} H_0(U_1) \oplus H_0(U_2) \to \ldots$$

e poichè S^{m-1} è connesso per archi $H_0(S^{m-1}) \cong \mathbf{Z}$ e la successione diventa

$$\ldots \to \{0\} \xrightarrow{j} H_1(S^m) \xrightarrow{\Delta} \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \to \ldots$$

dove $i(a) = (a, a)$. Infatti $i : H_0(S^{m-1}) \cong \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ ed il generico omomorfismo $i : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ è defiinito da $i(x) = (mx, nx)$, con m,$n \in \mathbf{Z}$. Ma $\varphi_i : U_1 \cap U_2 \to U_i$ è l'inclusione, quindi$(\varphi_i)_*$ non può moltiplicare per scalari diversi da 1. Questo implica che $m = n = 1$, cioè $i(x) = (x, x)$. $\square$

Δ è iniettiva perchè $Ker\Delta = Imj = \{0\}$ e poichè $Im\Delta = Keri = \{0\}$ si ha che Δ è suriettiva se ristretta a $\Delta : H_1(S^m) \to \{0\}$, quindi $H_1(S^m) \cong \{0\}$.

Se $k > 1$ si ha

$$\ldots \to \{0\} \xrightarrow{j} H_k(S^m) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{i} \{0\} \to \ldots$$

quindi $Ker\Delta = Imj = \{0\}$ implica che Δ è iniettiva, e $Im\Delta = Keri = H_{k-1}(S^{m-1})$ implica che Δ è suriettiva. Per cui $H_k(S^m) \cong H_{k-1}(S^{m-1})$. $\square$

Capitolo 3

Il teorema di invarianza della dimensione

In questo capitolo dimostriamo il teorema di invarianza della dimensione. Per fare ciò abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 3.1 Sia $\mathcal{U}$ un aperto di $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ e $x \in \mathcal{U}$. Allora $H_{n-1}(\mathcal{U} \setminus \{x\}) \neq 0$.

Dimostrazione. Scegliamo $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo tale che la sfera $S_\varepsilon(x)$ di raggio ε e centro x sia contenuta in $\mathcal{U}$. Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} S_\varepsilon(x) \arrow[d, "i"'] \arrow[dr, "k"] & \\ U \setminus \{x\} \arrow[r, "j"'] & \mathbf{R}^n \setminus \{x\} \end{tikzcd}$$

dove i, j, k sono le inclusioni naturali. Queste inducono

$$\begin{tikzcd} H_{n-1}(S_\varepsilon(x)) \arrow[d, "i_*"'] \arrow[dr, "k_*"] & \\ H_{n-1}(U \setminus \{x\}) \arrow[r, "j_*"'] & H_{n-1}(\mathbf{R}^n \setminus \{x\}) \end{tikzcd}$$

Si ha la conclusione se si dimostra che i_* è iniettiva, perchè in questo caso $H_{n-1}(\mathcal{U} \setminus \{x\}) \neq 0$. Essendo $j_* i_* = k_*$, è sufficiente dimostrare che $k_* : H_{n-1}(S_\varepsilon(x)) \to \mathbf{R}^n \setminus \{x\}$ è invertibile. Ma questo segue dall'esempio 2.1.10 e dal teorema 2.5.2. $\square$

Teorema 3.2 (Teorema di invarianza della dimensione) Se $m \neq n$, una varietà topologica non può essere contemporaneamente una n-varietà e una m-varietà.

Dimostrazione. Senza ledere la generalità, possiamo supporre $n > m$. Se $m = 0$ allora M è costituita da un numero discreto di punti (tali punti sono aperti). D'altra parte un punto non è aperto per una n-varietà, $n > 0$. Quindi M non può essere contemporaneamente una 0-varietà e una n-varietà ($n > 0$). Supponiamo quindi $n > m \geq 1$.
Sia M una m-varietà e una n-varietà, con $n > m$. Essendo M una n-varietà, per ogni $x \in M$ esistono $\mathcal{U}_x$ e φ_x tali che $\varphi_x : \mathcal{U}_x \to \mathbf{R}^n$ è un omeomorfismo. Ma M è anche una m-varietà e $\mathcal{U}_x$, essendo un aperto di M, è a sua volta una m-varietà; quindi per ogni $x \in \mathcal{U}_x$ esiste $\mathcal{V}_x$ aperto di $\mathcal{U}_x$ contenente x, e $\psi_x : \mathcal{V}_x \to \mathbf{R}^m$ è l'omeomorfismo che mi dimostra che $\mathcal{U}_x$ è una m-varietà.
Inoltre poichè φ_x è un omeomorfismo e $\mathcal{V}_x$ è un aperto di $\mathcal{U}_x$, $\mathcal{V}_x \simeq \varphi_x(\mathcal{V}_x) = W$, dove W è un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$. Allora, per il lemma precedente, $H_{n-1}(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \neq 0$. Ma $\mathcal{V}_x \setminus \{x\} \simeq \mathbf{R}^m \setminus \{0\} \sim S^{m-1}$ e quindi $H_{n-1}(\mathcal{V}_x \setminus \{x\}) \cong H_{n-1}(S^{m-1}) \cong \{0\}$ perchè $n \neq m$ (Teorema 2.6.1), ma questo è assurdo perchè sapevamo dal lemma precedente che $H_{n-1}(V \setminus \{x\}) \neq 0$.
□

Da questo teorema risulta univocamente definita la dimensione di una varietà topologica. (cfr. Definizione 1.32 e Osservazione 1.33)

Corollario 3.3
Se M ed N sono due varietà topologiche omeomorfe di dimensione m ed n rispettivamente, allora $m = n$.

Dimostrazione. Sia $m \neq n$ e $f : M \to N$ un omeomorfismo. Siano $(\mathcal{U}_p, \varphi_p)$ un atlante di M, con $\varphi_p : \mathcal{U}_p \to \mathbf{R}^m$ e $(\mathcal{V}_q, \psi_q)$ un atlante di N, con $\psi_q : \mathcal{V}_q \to \mathbf{R}^n$. Allora $(f^{-1}(\mathcal{V}_q), \psi_q f)$ è un atlante di M, dove $\psi_q f : f^{-1}(\mathcal{V}_q) \to \mathbf{R}^n$. Risulta così che M è contemporaneamente una m-varietà e una n-varietà, contraddicendo il teorema precedente. □

Bibliografia

[1] Kosniowski Czes. *Introduzione alla topologia algebrica*. Zanichelli.

[2] McLane-Birkhoff. *Algebra*. Mursia.

[3] Sernesi Edoardo. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri.