Varietà differenziabili
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025
Docente: Andrea Loi

1. Sia S^n la sfera unitaria in $\mathbb{R}^{n+1}$. Trovare un atlante differenziabile di S^n con $2(n+1)$ carte.
2. Dire se la struttura differenziabile su S^n definita dall'esercizio precedente e la struttura differenziabile su S^n data dalle proiezioni stereografiche coincidono.
3. Dimostrare che l'atlante topologico definito a lezione sul prodotto di due varietà differenziabili definisce una struttura differenziabile su $M \times N$.
4. Sia S uno spazio topologico e $\sim$ una relazione d'equivalenza aperta su S. Dimostare che lo spazio quoziente $S/\sim$ é T_2 se e solo se
$$R = \{(x, y) \in S \times S \mid x \sim y\}$$
é un sottoinsieme chiuso di $S \times S$.
5. Sia S uno spazio topologico N_2 e $\sim$ una relazione d'equivalenza aperta su S. Dimostrare che lo spazio quoziente $S/\sim$ é N_2.
6. Dimostrare che $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ non è uno spazio topologico N_2.
7. Dimostrare che $\mathbb{R}P^1$ è omeomorfo a $S^1/\sim_a$.
8. Dimostrare che la grassmanniana $G(k, n)$ é uno spazio topologico connesso e compatto.
9. Dimostrare che la grassmanniana $G(k, n)$ è una varietà differenziabile.
10. Dimostrare che per ogni $k < n$ la grassmanniana $G(k, n)$ è omeomorfa a $G(n - k, n)$.