Spazio tangente e il differenziale
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025
Docente: Andrea Loi

1. Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, y, xy)$. Sia $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Trovare $a, b, c \in \mathbb{R}$ tali che:
$$F_{*p}(\frac{\partial}{\partial x}|_p) = a\frac{\partial}{\partial u}|_{F(p)} + b\frac{\partial}{\partial v}|_{F(p)} + c\frac{\partial}{\partial w}|_{F(p)}.$$

2. Siano x, y le coordinate standard su $\mathbb{R}^2$ e $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. In U le coordinate polari (ρ, θ), $\rho > 0, \theta \in (0, 2\pi)$ sono definite come $x = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$. Si scrivano $\frac{\partial}{\partial\rho}$ e $\frac{\partial}{\partial\theta}$ in funzione di $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$.

3. Sia $p = (x, y)$ un punto di $\mathbb{R}^2$. Allora
$$c_p(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
é una curva liscia in $\mathbb{R}^2$ che inizia in p. Calcolare $c'(0)$.

4. Siano M e N varietà differenziabili e $\pi_1 : M \times N \to M$ e $\pi_2 : M \times N \to N$ le proiezioni naturali. Dimostrare che per $(p.q) \in M \times N$ l'applicazione
$$(\pi_{1*p}, \pi_{2*q}) : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$$
é un isomorfismo.

5. Calcolare il differenziale dell'applicazione antipodale $S^n \to S^n,\ x \mapsto -x$ in un punto $x \in S^n$.

6. Dimostrare che la struttura $\mathcal{V}ett$ i cui oggetti sono spazi vettoriali sui $\mathbb{R}$ e i morfismi sono le applicazioni lineari è una categoria.

7. Dimostrare che la struttura $\mathcal{T}op$ i cui oggetti sono spazi topologici e i morfismi sono le applicazioni continue è una categoria.

8. Dimostrare che la struttura $\mathcal{V}ar$ i cui oggetti sono le varietà differenziabli e i morfismi sono le applicazioni lisce è una categoria.

9. Dimostrare che la struttura $\mathcal{V}ar_p$ i cui oggetti sono le varietà differenziabli puntate e i morfismi sono le applicazioni lisce che rispettano i punti è una categoria.

10. Dimostrare che l'applicazione che ad uno spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ associa il suo duale $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{R})$ e che ad $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ associa $L^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ definito da
$$L^*(\alpha) = \alpha \circ L,\ \forall \alpha \in W^*.$$
definisce un funtore controvariante dalla categoria $\mathcal{V}ett$ degli spazi vettoriali in se stessa.