Gruppi e algebre di Lie
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025
Docente: Andrea Loi

1. Sia $\pi : \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1, (t,s) \mapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi is})$, $L = \{(t, \alpha t) \mid \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ e $f = \pi_{|L} : L \to S^1 \times S^1$. Sia τ_f la topologia indotta da f su $H = \pi(L)$ e τ_s quella indotta dall'inclusione $H \subset S^1 \times S^1$. Dimostrare che $\tau_s \subset \tau_f$. (Suggerimenrto: si usi il fatto che $f(L)$ è denso in $S^1 \times S^1$).

2. Sia $F : H \to G$ un omomorfismo iniettivo tra gruppi di Lie. Dimostrare che F è un'immersione (e quindi $F(H)$ è un sottogruppo di Lie di G). (Suggerimento: si usi il fatto che un omomorfismo tra gruppi di Lie ha rango costante e il Teorema del rango costante).

3. Sia $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dimostrare che $e^X = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$.

4. Trovare due matrici A e B tali che $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

5. Dimostrare che (teorema della forma canonica ortogonale) data $A \in O(n)$ allora esiste $P \in O(n)$, p, q naturali tali che

$$P^{-1}AP = P^tAP = \left(\begin{array}{cc|ccc} I_p & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -I_q & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & P_1 & & 0 \\ 0 & 0 & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & P_{n-p-q} \end{array}\right) \qquad (1)$$

dove $P_j = \begin{pmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j \\ \cos\theta_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}$, $\theta_j \in \mathbb{R}$, $\theta_j \neq s\pi$, $\forall s \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, \frac{n-p-q}{2}$, I_p (risp. I_q) è la matrice identità di ordine p (risp. q). (Suggerimento: la dimostrazione si ottiene attraverso i seguenti passi.

   a) esistono $p \geq 0$ autovalori di A uguali a 1, $q \geq 1$ autovalori di A uguali a -1, e $2h \geq 0$ autovalori complessi $e^{i\theta_1}, e^{-i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_h}, e^{-i\theta_h}$ di A.

   b) esiste una base ortonormale di autovettori reali $w_1, \ldots, w_p$ di V_1 e una base ortonormale di autovettori reali $t_1, \ldots, t_q$ di V_{-1} tali che $< w_j, t_k >= 0$, $\forall j = 1, \ldots, p$ e $\forall k = 1, \ldots q$.

   c) sia m_ℓ la molteplicità algebrica di $e^{i\theta_\ell}$, $\ell = 1, \ldots h$. Allora esiste una base ortonormale $u_1^\ell + iv_1^\ell, \ldots, u_{m_\ell}^\ell + iv_{m_\ell}^\ell$ di $V_{e^{i\theta_\ell}}$ e $u_1^\ell - iv_1^\ell, \ldots, u_{m_\ell}^\ell - iv_{m_\ell}^\ell$ base ortonormale di $V_{e^{-i\theta_\ell}}$ tali che $< u_{j_\ell}^\ell + iv_{j_\ell}^\ell, u_{k_\ell}^\ell - iv_{k_\ell}^\ell >= 0$, $\forall j_\ell, k_\ell = 1, \ldots, m_\ell$.

   d) sia $\ell = 1, \ldots, h$ fissato, dedurre dal punto precedente che $\forall j_\ell.k_\ell = 1, \ldots, m_\ell, \forall j = 1, \ldots, p$ e $\forall k = 1, \ldots q$

$$\|u_{j_\ell}^\ell\| = \|u_{j_\ell}^\ell\| = 1, \; < u_{j_\ell}^\ell, u_{k_\ell}^\ell >=< v_{j_\ell}^\ell, v_{k_\ell}^\ell >= 0$$
$$< w_j, u_{j_\ell}^\ell >=< w_j, v_{j_\ell}^\ell >=< t_k, u_{j_\ell}^\ell >=< t_k, v_{j_\ell}^\ell >= 0.$$

   e) per ogni $\ell = 1, \ldots, h$, siano $u_{j_\ell}^{(\ell)} := \frac{u_{j_\ell}^\ell}{\|u_{j_\ell}^\ell\|}$ e $v_{j_\ell}^{(\ell)} := \frac{v_{j_\ell}^\ell}{\|v_{j_\ell}^\ell\|}$. Dedurre che

$$A(u_{j_\ell}^{(\ell)} + v_{j_\ell}^{(\ell)}) = e^{i\theta_\ell}(u_{j_\ell}^{(\ell)} + v_{j_\ell}^{(\ell)}).$$

   e che $Au_{j_\ell}^{(\ell)} = \cos\theta_\ell \; u_{j_\ell}^{(\ell)} - \sin\theta_\ell \; v_{j_\ell}^{(\ell)}$ e $Av_{j_\ell}^{(\ell)} = \sin\theta_\ell \; u_{j_\ell}^{(\ell)} + \cos\theta_\ell \; v_{j_\ell}^{(\ell)}$, $\forall j_\ell = 1, \ldots, m_\ell$.

f) dedurre dai punti precedenti che i vettori

$$w_1, \dots w_p, t_1, \dots, t_q, u_1^{(1)}, v_1^{(1)}, \dots, u_{m_1}^{(1)}, v_{m_1}^{(1)}, \dots, u_1^{(h)}, v_1^{(h)}, \dots, u_{m_h}^{(h)}, v_{m_h}^{(h)}$$

sono una base ortonormale di vettori di $\mathbb{R}^n$ e che se $P \in O(n)$ è la matrice associata a questa base (cioè la matrice che ha come colonne tali vettori) si ottiene la (1).

6. Sia G un gruppi di Lie e sia G_0 la componente connessa di G che contiene e (elemento neutro di G). Se μ e i denotano la moltiplicazione e l'inversione in G, provare che

   1. $\mu(\{x\} \times G_0) \subset G_0, \forall x \in G_0$;
   2. $i(G_0) \subset G_0$;
   3. G_0 é un sottoinsieme aperto di G
   4, G_0 é un sottogruppo di Lie di G.

7. Sia G un gruppo di Lie e $\mu : G \times G \to G$ la moltiplicazione. Dimostrare che

$$\mu_{*(a,b)}(X_a, Y_b) = (R_b)_{*a}(X_a) + (L_a)_{*b}(Y_b),\ \forall (a, b) \in G \times G,\ \forall X_a \in T_aG,\ \forall Y_b \in T_bG,$$

dove L_a (risp. R_b) denota la traslazione a sinistra (risp. a destra) associata ad a (risp. b).

8. Sia G un gruppo di Lie con inversione $i : G \to G, a \mapsto i(a) = a^{-1}$. Dimostrare che

$$i_{*a}(Y_a) = -(R_{a^{-1}})_{*e}(L_{a^{-1}})_{*a}(Y_a),\ \forall a \in G,\ \forall Y_a \in T_aG.$$

9. Dimostrare che ogni gruppo di Lie é parallelizzabile.

10. Si dimostri che se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore per una matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ allora e^λ è un autovalore per e^B. Si deduca che se $G = SL_2(\mathbb{R})$ il gruppo lineare speciale allora l'applicazione esponenziale $e : \mathrm{Lie}(G) \to G, A \mapsto e^A$ non è suriettiva (Suggerimento per la seconda parte: si usi la prima parte per dimostrare che se $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ allora non esiste B tale che $e^B = A$).

11. Dimostrare che il gruppo $SU(2) = \{A \in GL_2(\mathbb{C}) \mid A^* = A^{-1} \ \wedge \ \det A = 1\}$ è diffeomorfo a S^3 e $\mathrm{Lie}(SU(2)) = \{\begin{pmatrix} iv_1 & v_2 + iv_3 \\ -v_2 + iv_3 & -iv_1 \end{pmatrix} \mid v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3\}$. (Suggerimento per la prima parte: mostrare che per ogni $A \in SU(2)$ esistono $a, b \in \mathbb{C}$ tali che $|a|^2 + |b|^2 = 1$ tali che $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$).

12. Dimostrare che l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{Lie}(SU(2)), v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto M_v := \begin{pmatrix} iv_1 & v_2 + iv_3 \\ -v_2 + iv_3 & -iv_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

è un isomorfismo tra spazi vettoriali su $\mathbb{R}$. Verificare inoltre che

$$[M_u, M_v] = 2M_{u \times v}, \forall u, v \in \mathbb{R}^3 \tag{3}$$

e

$$\operatorname{tr}(M_u M_v) = -2u \cdot v, \forall u, v \in \mathbb{R}^3, \tag{4}$$

dove $u \times v$ (risp. $u \cdot v$) denota il prodotto vettoriale (risp. scalare) in $\mathbb{R}^3$.

Dedurre che $(\mathrm{Lie}(SU(2)), -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\cdot,\cdot))$ è uno spazio euclideo isometrico a $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ e che l'algebra di Lie $(\mathbb{R}^3, 2\times)$ è isomorfa all'algebra $\mathrm{Lie}(SU(2))$.

13. Dimostrare che dati $A \in SU(2)$ e $v \in \mathbb{R}^3$ esiste $w \in \mathbb{R}^3$ tale che $AM_vA^{-1} = M_w$, dove M_v è definita nell'Esercizio 12. Dedurre che per ogni $A \in SU(2)$ esiste una matrice $F(A) \in GL_3(\mathbb{R})$ tale che $w = F(A)v$ e quindi
$$AM_vA^{-1} = M_{F(A)v}. \tag{5}$$
Dimostrare che in effetti $F(A) \in O(3)$. (Suggerimento per l'ultima parte: usare la (4) nell'Esercizio 12 per verificare che $F(A) \cdot u = F(A) \cdot v$, $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$).

14. Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ con $a, b \in \mathbb{C}$ e $|a|^2 + |b|^2 = 1$ (cfr. Esercizio 11). Dimostrare che la matrice $F(A)$ definita nell'Esercizio 13 si scrive come:
$$F(A) = \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 & 2Im(a\bar{b}) & 2Re(a\bar{b}) \\ -2Re(iab) & Re(a^2+b^2) & Re[i(a^2-b^2)] \\ -2Im(iab) & Im(a^2+b^2) & Im[i(a^2-b^2)] \end{pmatrix}. \tag{6}$$

15. Si consideri l'applicazione
$$F : SU(2) \to O(3), A \mapsto F(A), \tag{7}$$
dove $F(A) \in O(3)$ è definita nell'Esercizio 13. Si dimostri che F è un omomorfismo algebrico e che $\mathrm{Ker}(F) = \{\pm I\}$. Si dimostri inoltre che F è continua e si deduca che $F(SU(2)) \subseteq SO(3)$. (Suggerimento per il calcolo del $\mathrm{Ker}\, F$: si usi il fatto che se $A \in SU(2) \in \mathrm{Ker}\, F$ se e solo se A commuta con ogni elemento di $\mathrm{Lie}(SU(2))$ e, in particolare, commuta con le matrici $E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$).

16. Sia $F : SU(2) \to SO(3)$ l'applicazione (7). Si dimostri che $F_{*I}(M_u)(v) = 2M_{u\times v}$, per ogni $u, v \in \mathbb{R}^3$ e che quindi $F_{*I}(M_u) = 2\begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$). Si deduca che $F_{*I} : \mathrm{Lie}(SU(2)) \to \mathrm{Lie}(SO(3))$ è un isomorfismo di algebre di Lie e che F è un diffeomorfismo locale.

17. Dedurre dagli Esercizi 15 e 16 che l'applicazione $F : SU(2) \to SO(3)$ è un omomorfismo suriettivo di gruppi di Lie e che quindi $\frac{SU(2)}{\pm I}$ è un gruppo di Lie isomorfo a $SO(3)$.

18. Dimostrare che $SO(3)$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}P^3$. (Suggerimento: si usi l'Esercizio 11 e l'Esercizio 17).