Il fibrato tangente e i campi di vettori
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025
Docente: Andrea Loi

1. Sia N una sottovarietà di una varietà differenziabile M. Dimostrare che TN è una sottovarietà di TM.

2. Una varietà differenziabile è detta *orientabile* se esiste un atlante di M rispetto al quale il determinante Jacobiano dei cambi di carte è positivo. Dimostrare che:

   (a) $\mathbb{R}P^3$ è una varietà orientabile;

   (b) il fibrato tangente TM di una varietà differenziabile M è orientabile.

3. Dimostrare che l'applicazione che associa ad ogni varietà differenziabile il suo fibrato tangente e ad ogni applicazione $F : N \to M$ tra varietà differenziabili l'applicazione $F_* : TN \to TM$ definita come $F_*((p, v)) = (F(p), F_{*p}(v))$ per ogni $(p, v) \in TN$ definisce un funtore covariante dalla categoria delle varietà differenziabili in se stessa.

4. Una *derivazione* di un'algebra di Lie $(V, [\cdot, \cdot])$ su un campo $\mathbb{K}$ è un'applicazione lineare $D : V \to V$ tale che
$$D([Y, Z]) = [DY, Z] + [Y, DZ],\ \forall Y, Z \in V.$$
Dimostrare che dato $X \in V$ l'applicazione
$$D_X : V \to V, Y \mapsto [X, Y]$$
è una derivazione.

5. Sia $F : N \to M$ un diffeomorfismo tra varietà differenziabili, $X \in \chi(N)$ e $f \in C^\infty(N)$. Dimostrare che
$$F_*(fX) = (f \circ F^{-1})F_*X.$$

6. Sia $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $X = \frac{d}{dx} \in \chi(M)$. Trovare la curva integrale di X massimale che inizia in un generico punto $p \in \mathbb{R}$.

7. Trovare il flusso (locale) dei seguenti campi di vettori:
$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},\ Y = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y},\ Z = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \in \chi(\mathbb{R}^2).$$
Nel caso siano completi calcolare il loro gruppo di diffeomorfismi ad un parametro.

8. Dimostrare che il campo di vettori $X = \frac{\partial}{\partial x} \in \chi(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0))$ non è completo.

9. Sia M una varietà differenziabile e $X \in \chi(M)$ tale che $X_p = 0$ per ogni $p \in M$. Dimostrare che la curva integrale di X che inizia in p è la curva costante $c(t) = p$.

10. Sia M una varietà differenziabile e $X \in \chi(M)$ il campo di vettori nullo, $X = 0$. Descrivere il gruppo dei diffeomorfismi ad un parametro associato a X.

11. Sia M una varietà differenziabile, $f, g \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \chi(M)$. Dimostrare che

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X.$$

12. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e $X, Y \in \chi(M)$ e $(U, \varphi = (x^1, \ldots x^n))$ una carta locale. Se $X_{|U} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y_{|U} = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, dimostrare che

$$[X, Y]|_U = \sum_{i,j=1}^n \left(a^i \frac{\partial b^j}{\partial x^i} - b^i \frac{\partial a^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$