Applicazioni lisce
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2024-2025
Docente: Andrea Loi

1. Siano M e N due varietà differenziabili e $q_o \in N$. Dimostrare che
$$i_{q_0} : M \to M \times N, p \mapsto (p, q_0)$$
é un'applicazione liscia.

2. Sia S^1 il cerchio unitario di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che una funzione liscia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si restringe ad una funzione liscia $f_{|S^1} : S^1 \to \mathbb{R}$.

3. Dimostrare che l'applicazione antipodale $S^n \to S^n,\ x \mapsto -x$ è liscia.

4. Dimostrare che l'applicazione
$$S^3 \to S^2,\ (z, w) \mapsto (z\bar{w} + \bar{z}w, i\bar{z}w - iz\bar{w}, |z|^2 - |w|^2)$$
è liscia, dove stiamo pensando a $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.

5. Dimostrare che $\mathbb{R}P^1$ è diffeomorfo a $S^1/\sim_a$.

6. Dimostrare che l'applicazione quoziente $\pi_a : S^n \to \mathbb{R}P^n,$ che identifica i punti antipodali è liscia.

7. Dimostrare che per ogni $k < n$ la grassmanniana $G(k, n)$ è diffeomorfa a $G(n - k, n)$.

8. Consideriamo su $\mathbb{R}$ le due strutture differenziabili $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \varphi = id_{\mathbb{R}})$ e $\tilde{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, \psi(x) = x^{\frac{1}{3}})$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un'applicazione (non necessariamente liscia). Trovare condizioni necessarie e sufficienti affinchè $f : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ e $f : \tilde{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ siano applicazioni lisce.

9. Siano M e N due spazi topologici e $C^0(M, \mathbb{R})$ (risp. $C^0(M, \mathbb{R})$) l'insieme delle applicazione continue da M (risp. N) in $\mathbb{R}$. Se $F : N \to M$ è un'applicazione continua, definiamo $F^* : C^0(M, \mathbb{R}) \to C^0(N, \mathbb{R})$ come $F^*(f) = f \circ F,\ \forall f \in C^0(N, \mathbb{R})$. Dimostrare i seguenti fatti:
    1. F^* è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare;
    2. Se M e N sono varietà differenziabili allora $F : N \to M$ è liscia se e solo se $F^*(C^\infty(M, \mathbb{R})) \subset C^\infty(N, \mathbb{R})$;
    3. Un omeomorfismo $F : N \to M$ tra varietà differenziabili è un diffeomorfismo se e solo se $F^* : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(N, \mathbb{R})$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali.

10. Dimostrare che sulla palla unitaria $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ si possono definire un'infinità non numerabile di strutture differenziabili distinte (che possono però essere diffeomorfe). (Suggerimento: per ogni $s > 0$ si consideri l'applicazione $F_s : B_1(0) \to B_1(0), x \mapsto \|x\|^{1-s}x)$. Dedurre che se una varietà topologica di dimensione $n \geq 1$ ammette una struttura differenziabile allora ammette un'infinità non numerabile di strutture differenziabili distinte.