PROGRAMMA DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2022-2023, primo semestre
Docente: Andrea Loi

1. Geometria differenziale in $\mathbb{R}^n$

1.1 Funzioni lisce e reali analitiche. Richiami sulle funzioni lisce e reali analitiche su aperti di $\mathbb{R}^n$; funzioni C^k ma non C^{k+1}; esempi di funzioni lisce che non sono reali analitiche.

1.2 Diffeomorfismi e la formula di Taylor Diffeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$ (applicazioni lisce, bigettive con inversa liscia); esistono funzioni bigettive e lisce che non sono diffeomorfismi; gli intervalli aperti limitati o illimitati di $\mathbb{R}$ sono diffeomorfi; il prodotto di n intervalli aperti di $\mathbb{R}$ risulta diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$; una palla aperta di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ sono diffeomorfi; sviluppo di Taylor con resto intorno ad un punto p di una funzione liscia definita su un aperto stellato di $\mathbb{R}^n$.

1.3 Vettori tangenti. Vettori tangenti in un punto $p \in \mathbb{R}^n$; lo spazio $T_p\mathbb{R}^n$ come insieme dei vettori colonna; derivata direzionale di una funzione liscia rispetto ad un vettore $v \in T_p\mathbb{R}^n$; il germe di una funzione in un punto p; l'insieme dei germi di funzioni $C^\infty_p(\mathbb{R}^n)$ definite in un intorno di un punto $p \in \mathbb{R}^n$ é un algebra su $\mathbb{R}$; derivazioni puntuali in un punto $p \in \mathbb{R}^n$; la derivata direzionale $D_v : C^\infty_p(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ rispetto ad un vettore $v \in T_p\mathbb{R}^n$; l'insieme $\mathrm{Der}(C^\infty_p(\mathbb{R}^n))$ delle derivazioni puntuali risulta uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$; l'applicazione $\Phi : T_p\mathbb{R}^n \to \mathrm{Der}(C^\infty_p(\mathbb{R}^n)), v \mapsto D_v$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali; base canonica di $\mathrm{Der}(C^\infty_p(\mathbb{R}^n))$.

1.4 Campi di vettori. Campi di vettori su un aperto U di $\mathbb{R}^n$; l'insieme dei campi di vettori lisci $\chi(U)$ formano un $C^\infty(U)$-modulo; derivata di una funzione liscia f rispetto ad un campo di vettori liscio X; campi di vettori lisci su un aperto U di $\mathbb{R}^n$ come derivazioni dell'algebra $C^\infty(U)$.

2. Varietà differenziabili

2.1 Varietà topologiche. Richiami sulle varietà topologiche; dimensione di una varietà topologica e teorema dell'invarianza della dimensione topologica (solo enunciato); esempi e non esempi.

2.2 Varietà differenziabili. Carte compatibili; atlanti differenziabili su uno spazio topologico; atlanti massimali (strutture differenziabili); ogni atlante è contenuto in un unico atlante massimale; varietà differenziabili; esempi di varietà: $\mathbb{R}^n$, aperti di varietà; varietà di dimensione zero; grafici di funzioni; curve e superfici in $\mathbb{R}^3$; il gruppo lineare; il cerchio unitario S^1; la sfera S^n; il prodotto di varietà differenziabili; il toro n-dimensionale.

2.3 Quozienti Topologia quoziente; applicazioni costanti sulle classi di'equivalenza; identificazione di un sottoinsieme ad un suo punto; condizioni affinchè il quoziente di uno spazio topologico sia T_2 e N_2.

2.4 Lo spazio proiettivo reale e la Grassmanniana Lo spazio proiettivo reale $\mathbb{R}P^n$ come varietà differenziabile di dimensione n; La Grassmanniana dei k-piani in $\mathbb{R}^n$ come varietà differenziabile di dimensione $k(n-k)$.

3. Applicazioni lisce

3.1 Funzioni lisce su varietà Funzione liscie su una varietà a valori reali; Applicazioni lisce tra varietà; composizione di applicazioni lisce tra varietà; esempi; funzioni a campana; estensioni di applicazioni lisce.

3.2 Diffeomorfismi Diffeomorfismi tra varietà; cenni sull'esistenza e unicità delle strutture differenziabili su una varietà topologica; esempi di strutture differenziabili diverse su $\mathbb{R}$; le funzioni coordinate sono diffeomorfismi; ogni diffeomorfismo da un aperto di una varietà in $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione coordinata.
3.3 Altri esempi di applicazioni lisce Vari esempi di applicazioni lisce; applicazioni sul prodotto di varietà; definizione di gruppi di Lie; esempi: $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{GL}(V)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^+, +)$, $(\mathbb{C}^*, \cdot)$, $(S^1, \cdot)$, il prodotto di gruppi di Lie; il toro $\mathbb{T}^n$; un qualunque gruppo finito o numerabile con la topologia discreta è un gruppo di Lie 0-dimensionale.
3.4 Derivate parziali Derivata parziale di una funzione liscia su una varietà; la matrice Jacobiana di un'applicazione liscia tra varietà; lo Jacobiano dell'applicazione di transizione; diffeomorfismi locali e il teorema delle funzione inversa per applicazioni lisce tra varietà.

4. Lo spazio tangente e il differenziale.
4.1 Lo spazio tangente Lo spazio tangente T_pM ad una varietà M in un suo punto p come insieme delle derivazioni puntuali $\mathrm{Der}_p(C_p^\infty(M))$ in p dei germi di funzioni lisce intorno a p; $\frac{\partial}{\partial x_i}|_p$, $i = 1, \ldots, n$ come elementi della base dello spazio tangente in p ad una varietà differenzibile M di dimensione n.
4.2 Il differenziale Il differenziale di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; il differenziale e lo Jacobiamo: il differenziale e il teorema della funzione inversa; la regola della catena per applicazioni lisce tra varietà; il teorema di invarianza della dimensione nel caso liscio; espressione locale per il differenziale;
4.3 Categorie e funtori (un cenno) Definizione di categorie e funtori tra categorie; esempi; proprietà funtoriali del differenziale.
4.4 Curve su varietà curve su varietà e il vettore tangente ad una curva liscia in un suo punto; derivata direzionale in termini di curve; spazio tangente ad una varietà in un suo punto come insieme dei vettori tangenti a curve lisce sulla varietà pasanti per il punto; calcolo del differenziale di un'applicazione liscia tra varietà in termini di curve; il differenziale della traslazione a sinistra in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; differenziale della moltiplicazione e dell'inversione in un gruppo di Lie.

5. Sottovarietà.
5.1 Immersioni e sommersioni Inclusione canonica e proiezione canonica; immerisoni e sommersioni; rango in un punto di un'applicazione liscia tra varietà differenziabili; punti regolari e punti critici, valori regolari e valori critici; esempi; massimi e minimi locali e punti ciritici.
5.2 Sottovarietà Carte adattate; sottovarietà di una varietà è essa stessa una varietà; il teorema della preimmagine di un valore regolare; esempi: la sfera, i grafici, ipersuperfici dello spazio proiettivo reale, il gruppo lineare speciale.
5.3 Il Teorema del rango costante il teorema del rango costante in analisi; il teorema del rango costante per applicazioni lisce tra varietà differenziabili. preimmagine di un'applicazione di rango costante; dimostrazione che il gruppo ortogonale è una sottovarietà del gruppo lineare; dimostrazione che avere rango massimale in un punto è una condizione aperta; il teorema di immersione e di sommersione.
5.4 Immersioni e embedding immagine di applicazioni lisce: esistono immersioni iniettive la cui immagine non è una sottovarietà (figura a otto e curva di pendenza irrazionale sul toro); sottovarietà immerse; embedding e sottovarietà; teorema di Whit-

ney (senza dimostrazione); l'inclusione di una sottovarietà è un embedding; applicazioni lisce la cui immagine è contenuta in una (sotto)varietà. è liscia.

6. Il fibrato tangente e i campi di vettori.

6.1 Il fibrato tangente Topologia e struttura differenziabile sul fibrato tangente di una varietà differenziabile.

6.2 Campi di vettori Campi di vettori su un varietà; criteri affinchè un campo di vettori su una varietà sia liscio; uguaglianza tra campi di vettori; campi di vettori come derivazioni dell'algebra delle funzioni lisce; campi di vettori su sottovarietà; esempi di campi di vettori sulle sfere; il Teorema di Adams (senza dimostrazione).

6.3 Curve integrali e flussi Curve integrali di un campo di vettori; flussi locali e globali; curve integrali massimali; campi di vettori completi; ogni campo di vettori su una varietà compatta è completo.

6.4 Campi di vettori come algebra di Lie Il commutatore (o bracket) di Lie di due campi di vettori; algebre di Lie; pushforward di un campo di vettori tramite un diffeomorfismo; campi di vettori F-related tramite un'applicazione; campi di vettori F-related e commutatore di Lie.

7. Gruppi di Lie

7.1 Gruppi e sottogruppi di Lie. Le traslazioni a sinistra e a destra; omomorfismi e isomorfismi tra gruppi di Lie; sottogruppi di Lie; se H è un sottogruppo algebrico e una sottovarietà di un gruppo di Lie G allora H è un sottogruppo di Lie di G; sottogruppi di Lie embedded; sottogruppi di Lie immersi.

7.2 L'esponenziale di una matrice. Spazi vettoriali normati; $M_n(\mathbb{R})$ come spazio vettoriale normato; algebre normate e loro proprietà; $M_n(\mathbb{R})$ come algebra normata; spazi di Banach e algebre di Banach; in uno spazio di Banach una successione assolutamente convergente è convergente e quindi l'esponenziale di una matrice risulta ben definito; alcune proprietá dell'esponenziale di una matrice.

7.3 Triangolarizzazioni diagonalizzazioni e matrici normali. Matrici simili e unitariamente simili; teorema di Schur: ogni matrice a entrate complesse é simile ad una matrice triangolare; basi di Schur; la traccia di una matrice è la somma dei suoi autovalori; determinante dell'esponenziale di una matrice é uguale all'esponenziale della traccia della matrice; il differenziale del determinante; matrici normali; il teorema spettrale per matrici normali: ogni matrice normale é unitariamente simile ad una matrice diagonale; forma canonica ortogonale.

7.4 Esempi di gruppi e sottogruppi di Lie. Il gruppo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (risp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) è un gruppo di Lie non compatto e non connesso di dimensione n^2 (risp. $2n^2$) e $T_I \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ (risp. $T_I \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$); Il gruppo ortogonale $O(n)$ è un sottogruppo di Lie (embedded) compatto e non connesso di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ di dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$ e $T_I O(n)$ consiste della matrici antisimmetriche a entrate reali; il gruppo ortogonale speciale $SO(n)$ è una componente connessa di $O(n)$; il gruppo lineare speciale $SL_n(\mathbb{R})$ (risp. $SL_n(\mathbb{C})$) è un sottogruppo di Lie (embedded) connesso e non compatto di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (risp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) di dimensione $n^2 - 1$ (risp. $2n^2 - 2$) e $T_I SL_n(\mathbb{R})$ (risp. $T_I SL_n(\mathbb{C})$) consiste delle matrici a entrate reali (risp. complesse) di traccia nulla; il gruppo unitario $U(n)$ è un sottogruppo di Lie (embedded) compatto e connesso di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ di dimensione n^2 e $T_I U(n)$ consiste della matrici antihermitiane; il gruppo unitario speciale $SU(n)$ è un sottogruppo di Lie compatto e connesso di $U(n)$ e s $T_I SU(n)$ consiste della matrici antihermitiane di dimensione n^2-1; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e $SL_n(\mathbb{R})\times\mathbb{R}\setminus\{0\}$ sono diffeomorfi (come varietà) per ogni $n\geq 1$ mentre sono isomorfi (come gruppi di Lie) se e solo se n è dispari.

Tabella reassuntiva

Gruppo	T_IG	Dimensione	Compatto	Connesso
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	$M_n(\mathbb{R})$	n^2	no	no
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	$M_n(\mathbb{C})$	$2n^2$	no	si
$SL_n(\mathbb{R})$	$\{B\in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}B=0\}$	n^2-1	no	si
$SL_n(\mathbb{C})$	$\{B\in M_n(\mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}B=0\}$	$2n^2-2$	no	si
$U(n)$	$\{B\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B+B^*=0\}$	n^2	si	si
$SU(n)$	$\{B\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid B+B^*=0\wedge \mathrm{tr}B=0\}$	n^2-1	si	si
$O(n)$	$\{B\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid B+B^T=0\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	si	si
$SO(n)$	$\{B\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid B+B^T=0\}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	si	si

8. Algebra di Lie.

8.1 Algebra di Lie di un gruppo di Lie. Campi di vettori invarianti a sinistra su un gruppo di Lie e loro principali proprietà; definizione dell'algebra di Lie di un gruppo di Lie come sottoalgebra dei campi di vettori lisci.

8.2 L'algebra di Lie dei gruppi matricilaii. L'algenra di Lie del gruppo lineare; push-forward di campi di vettori invarianti a sinistra tramite un omomorfismo di gruppi di Lie; omomorfismo di algebra di Lie indotto da un omomorfismo di gruppi di Lie; calcolo dell'algebra di Lie dei gruppi matriciali.

8.3 L'applicazione esponenziale. Flussi (globali) di campi di vettori invarianti a sinistra su un gruppo di Lie e applicazione esponenziale; sottogruppi di Lie ad un parametro di un gruppo di Lie; omomorfismi di gruppi di Lie e applicazione esponenziale; l'applicazione esponenziale di un sottogruppo H di Lie di un gruppo G è la restrizione dell'esponenziale di G; l'applicazione esponenziale di un gruppo matriciale coincide con l'esponenziale di matrici; omomorfismi continui; cenni sulla suriettività dell'applicazione esponenziale e sui teoremi di corrispondenza di Lie.

8.4 Classificazione dei gruppi di Lie abeliani Il bracket dell'algebra di Lie di un gruppo abeliano è nullo; un gruppo di Lie connesso è generato da un suo intorno dell'elemento neutro; quozienti di gruppi di Lie; gruppi discreti; ogni gruppo di Lie compatto e connesso è isomorfo al prodotto di un toro e di uno spazio euclideo.

Testi di riferimento

Lorin, W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.

J. Lee, *Introduction to Manifolds*, Springer Verlag.

W. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press.

M. Spivak, *Calculus on Manifolds*, Addison-Wesley Publishing Company.

F.W. Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie grous*, Springer Verlag.