Geometria Differenziale in $\mathbb{R}^n$
Corso di Laurea in Matematica A.A. 2022-2023
Docente: Andrea Loi

1. Per ogni numero naturale k costruire una funzione che sia $C^k(\mathbb{R})$ ma non $C^{k+1}(\mathbb{R})$.

2. Dimostrare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$
risulta essere liscia ma non reale analitica.

3. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dimostare che i seguenti intervalli sono tutti diffeomorfi tra loro e diffeomorfi a $\mathbb{R}$: (a, b), $(c, +\infty)$, $(-\infty, d)$.

4. Dimostrare che l'applicazione (costruita a lezione)
$$h : B_0(1) \to \mathbb{R}^n, x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto (\frac{x^1}{\sqrt{1 - \|x\|^2}}, \dots, \frac{x^n}{\sqrt{1 - \|x\|^2}})$$
definisce un diffeomorfismo tra la palla aperta unitaria centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$. Dedurre che la palla aperta di centro $c \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$ in $\mathbb{R}^n$ é diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

5. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Usando il teorema di Taylor con resto dimostrare che esistono $g_{11}, g_{12}, g_{22} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che:
$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + x^2 g_{11}(x, y) + xyg_{12}(x, y) + y^2 g_{22}(x, y).$$

6. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che $f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Sia $g(t, u) = \frac{f(t,tu)}{t}$ se $t \neq 0$ e $g(0, u) = 0$. Dimostare che $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.

7. Dimostrare che l'insieme $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ dei germi delle funzioni lisce intorno a $p \in \mathbb{R}^n$ con le operazioni di somma e di prodotto definite a lezione é un algebra commutativa e unitaria.

8. Dimostrare che l'insieme delle derivazioni puntuali $\mathrm{Der}_p\left(C_p^\infty(\mathbb{R}^n)\right)$ di $C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$ con le operazioni definite a lezione é uno spazio vettoriale sui $\mathbb{R}$.

9. Dimostrare che i campi di vettori lisci $\chi(U)$ su un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ con le operazioni definite a lezione é uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e un $C^\infty(U)$-modulo.

10. Sia A un algebra su un campo $\mathbb{K}$. Dimostrare che le operazioni
$$(D_1 + D_2)(a) = D_1(a) + D_2(a)$$
$$(\lambda D)(a) = \lambda D(a)$$
per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e per ogni $D_1, D_2, D \in \mathrm{Der}(A)$ dotano $\mathrm{Der}(A)$ della struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

11. Siano D_1 e D_2 due derivazioni di un algebra A su un campo $\mathbb{K}$ ($D_1, D_2 \in Der(A)$). Mostrare che $D_1 \circ D_2$ non é necessariamente una derivazione di A, mentre $D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1 \in Der(A)$.