Esercizi sui sistemi di equazioni lineari $\mathbb{R}^n$

Corso di laurea in informatica A.A 2003-2004

Docente : Andrea Loi

Correzione Esercitazione

-2. Indicare quali delle seguenti equazioni sono lineari: (a) $5x + 7y - 8yz$, (b) $x + \pi y + ez = \log 5$, (c) $3x + ky - 8z = 16, \quad k \in \mathbb{R}$.

Soluzione: a) non è lineare; b) è lineare c) è lineare

-1. Dire se $u = (1, 1, 1)$ è soluzione della seguente equazione $x + 2y - 3z = 4$.

Soluzione:

Sostituendo $u = (1, 1, 1)$ nell'equazione si ha: $1 + 2 - 3 = 4$ ossia $0 = 4$ non avendo un'identità si ha che u non è soluzione dell'equazione:

0. Dire se (a) $u = (3, 2, 1, 0)$ (b) $u = (1, 2, 4, 5)$ sono soluzioni dell'equazione: $x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 3$.

Soluzione:

(a) Sostituendo $u = (3, 2, 1, 0)$ nell'equazione si ha: $3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 0 = 3$ ossia $11 = 3$ non avendo un'identità si ha che u non è soluzione dell'equazione.

(b) Sostituendo $v = (1, 2, 4, 5)$ nell'equazione si ha: $1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 5 = 3$ ossia $26 = 3$ non avendo un'identità si ha che u non è soluzione dell'equazione.

1. Risolvere le seguenti equazioni: (a) $ex = \log 5$, (b) $cx = 0$, (c) $3x - 4 - x = 2x + 3$, (d) $z + 2x - 4 = 3x + 3 - x$.

Soluzione:

(a) $x = \frac{log5}{e}$; (b) Se $c = 0$ allora si ha un'identità per qualunque valore di x, se $c \neq 0$ l'unica soluzione è $x = 0$; (c) Si ottiene $0 = 7$ quindi l'equazione è impossibile. (d) $z = 7$

2. Descrivere le soluzioni dell'equazione: $2x + y + x - 5 = 2y + 3x - y + 4$.

Soluzione:

Eliminando gli opposti si ottiene $-5 = 4$ quindi l'equazione è impossibile.

3. Indicare le soluzioni dell'equazione: $2y + 3x - y + 4 = x + 3 + y + 1 + 2x$.

Soluzione:

Eliminando gli opposti si ottiene $4 = 4$ ossia indeterminata quindi l'insieme delle soluzioni è $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

4. Data l'equazione lineare $x-2y+3z = 4$. Trovare (a) tre soluzioni particolari, (b) la soluzione generale.

Soluzione:

(a)Soluzioni particolari potrebbero essere $(1, 0, 1)$, $(6, 1, 0)$, $(0, 1, 2)$ ricavate ponendo rispettivamente $x = 1 \quad y = 0$, $x = 6 \quad y = 1$, $x = 0 \quad y = 2$ ricavando nei tre casi la rimanente variabile.

(b) Poiché abbiamo tre incognite e una sola equazione esplicitiamo la x rispetto alle altre due variabili: $x = 4 + 2y - 3z$, allora posto $y = t_1$ e $z = t_2$ si ha $S = (4 + 2t_1 - 3t_2, t_1, t_2)$

5. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 2t = 0 \\ 5y - z + 3t = 1 \\ 7z - t = 3 \\ 2t = 8 \end{cases}$$

Soluzione:

Il sistema è giá ridotto a gradini pertanto si ha :

$$\begin{cases} x = \frac{2t-5z+3y}{2} \\ y = \frac{1-3t+z}{5} \\ z = \frac{3+t}{7} \\ t = 4 \end{cases}$$

sostituendo:

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = -2 \\ z = 1 \\ t = 4 \end{cases}$$

6. Determinare le variabili libere nei seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 3x+2y-5z-6s+2t=4 \\ z++8s-3t=6 \\ s-5t=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x-3y+7z=1 \\ 4y+5z=6 \\ 4z=9 \end{cases}$$

Soluzione:

Ricordando che le variabili libere sono quelle variabili non eliminabili e tutte le altre si esprimono in funzione di esse, per determinarle si puó procedere nel seguente modo:

Riduciamo la matrice a gradini, determiniamo i pivot (in grassetto) le variabili libere sono quelle che corrispondono ai "non pivot" (in corsivo):

$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathit{2} & -5 & -6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 8 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathit{-5} & 5 \end{pmatrix}$ pertanto le variabili libere sono y e t.

Consideriamo la matrice associata al secondo sistema: $\begin{pmatrix} \mathbf{5} & -3 & 7 & 1 \\ 0 & \mathbf{4} & 5 & 6 \\ 0 & 0 & \mathbf{4} & 9 \end{pmatrix}$

non ci sono variabili libere.

7. Scrivere il seguente sistema in forma matriciale e risolverlo usando l'eliminazione di Gauss:

Soluzione:

$$\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 2x-y+4z=17 \\ 3x-2y+2z=14 \end{cases}$$

la matrice associata al sistema è: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 4 & 17 \\ 3 & -2 & 2 & 14 \end{pmatrix}$

Operiamo le seguenti operazioni:

alla seconda riga sostituiamo la differenza tra la seconda e due volte la prima (R_2-2R_1) : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & 14 \end{pmatrix}$;

alla terza riga sostituiamo la differenza tra la terza e tre volte la prima (R_3-3R_1): $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}$;

alla terza riga sostituiamo la differenza tra la terza e quattro terzi la seconda $(R_3 - \frac{4}{3}R_2)$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{3} & -11 \end{pmatrix}$,

pertanto il sistema ottenuto è:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7 \\ 3y + 2z = 3 \\ -\frac{11}{3}z = -11 \end{cases}$$

sostituendo si ha $S = (2, -1, 3)$.

8. Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 0 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t = 22 \end{cases}$$

Soluzione:

La matrice completa del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & -7 & 2 & -5 & 4 & 9 \\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & 22 \end{pmatrix};$$

Eseguendo successivamente le seguenti operazioni elementari $R_2 \leftarrow R_1 + R_2$, $R_3 \leftarrow R_2 - R_3$, $R_1 \leftarrow 5R_1$, $R_2 \leftarrow 2R_2$, $R_2 \leftarrow R_1 - R_2$ ed infine $R_3 \leftarrow -2R_2 + R_3$ (dove, ad esempio, $R_2 \leftarrow R_1 + R_2$ significa che alla riga due si sostituisce la somma della prima e della seconda) si ha che la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} 10 & -25 & 15 & -20 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -2 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 23 \end{pmatrix}$$

Pertanto il sistema diventa:

$$\begin{cases} 10x - 25y + 15z - 20s + 10t = 0 \\ -y + 5z - 2s - 2t = -18 \\ s + 3t = 23 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x = \frac{5y-3z+92+10t}{2} \\ y = -64 + 5z + t \\ s = 23 - 3t \end{cases}$$

9. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 2 \\ 2x + 5y - 2z + t = 1 \\ 5x + 12y - 7z + 6t = 7 \end{cases}$$

Soluzione:

La matrice associata al sistema è: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 12 & -7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

alla seconda riga sostituiamo la differenza tra la seconda e due volte la prima $(R_2 - 2R_1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 5 & 12 & -7 & 6 & 7 \end{pmatrix}$;

alla terza riga sostituiamo la differenza tra la terza e cinque volte la prima $(R_3 - 5R_1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & -14 & -3 \end{pmatrix}$;

alla terza riga sostituiamo la differenza tra la terza e due volte la seconda $(R_3 - 2R_2)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

pertanto il sistema ottenuto è:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 4t = 2 \\ y + 4z - 7t = -3 \\ 0 = 3 \end{cases}$$

si ricava quindi che il sistema non ammette alcuna soluzione.

10. Trovare i valori del parametro reale λ in modo tale che il seguente sistema nelle incognite x, y e z abbia :(a)una soluzione unica, (b) nessuna soluzione, (c)un numero infinito di soluzioni:

$$\begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ 2x + 3y + \lambda z = 3 \\ x + \lambda y + 3 = 2 \end{cases}$$

Soluzione:

Ricordiamo che il teorema di Rouché-Capelli afferma che un sistema di n equazioni in m incognite è compatibile s e e solo se il rango (r_g) della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa e in tal caso si ha che la dimensione delle soluzioni è $n - r_g$.

Riducendo la matrice completa a gradini: si ricava:
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+6 & -\lambda+2 \end{pmatrix}$.
La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+6 \end{pmatrix}$ ha rango tre quando $-\lambda^2-\lambda+6 \neq 0$ cioé quando $\lambda \neq 2$ e $\lambda \neq -3$, mentre se $\lambda = 2$ e $\lambda = -3$ $r_g(A) = 2$. la matrice completa ha rango tre quando $-\lambda+2 \neq 0$ ossia $\lambda \neq 2$ pertanto si ha:
se $\lambda = 2$ allora $r_g(A) = 2 = r_g(Ab) \Rightarrow$ sistema compatibile, dimensione 1
se $\lambda = -3$ allora $r_g(A) = 2 \neq r_g(Ab) = 3 \Rightarrow$ sistema incompatibile
se $\lambda \neq -3$ e $\lambda \neq 2$ allora $r_g(A) = 3 = r_g(Ab) \Rightarrow$ sistema compatibile, unica soluzione.
Ricerchiamo le soluzioni:

- caso $\lambda = 2$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, considerando z come variabile libera si ha $= \begin{pmatrix} 5t \\ 1-4t \\ t \end{pmatrix}$.
- Consideriamo ora $\lambda \neq -3$ e $\lambda \neq 2$ si ottiene la soluzione

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\lambda+3} \\ \frac{1}{\lambda+3} \end{pmatrix}$$

11. Trovare le condizioni su a,b e c (numeri reali) tali che il seguente sistema nelle incognite x, y e z abbia una soluzione:

$$\begin{cases} x+2y-3z = a \\ 2x+6y-11z = b \\ x-2y+7z = c \end{cases}$$

Soluzione:

Consideriamo la matrice completa: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{pmatrix}$,

riducendo a gradini di ha: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 2b+c-5a \end{pmatrix}$ pertanto il rango di A è 2 mentre il rango di Ab vale 2 se $2b+c-5a=0$ altrimenti vale 3. quindi se $2b+c-5a=0$ $r_g(A)=2=r_g(Ab)$ il sistema è compatibile e si ha che la dimensione delle soluzioni è 1; se $2b+c-5a \neq 0$ $r_g(A)=2 \neq r_g(Ab)=3$ il sistema è incompatibile, pertanto non è possibile trovare alcuna condizione su a, b, c tale che il sistema ammetta soluzione unica.

12. Vero o falso (la matrice dei coefficienti è sempre diversa dalla matrice nulla):

- Un sistema omogeneo è sempre compatibile.

  VERO: infatti ammette sempre almeno la soluzione banale $(0, 0, \dots, 0)$

- Un sistema omogeneo di 4 equazioni in 12 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 8 parametri.

  VERO: sia n numero incognite e m numero equazioni, il teorema di Rouchè-Capelli afferma che dimensione $= n - r_g$, ma $r_g \leq m$ quindi $dimensione \geq n - m = 12 - 4 = 8$

- Un sistema omogeneo di 4 equazioni in 12 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono esattamente da 8 parametri.

  FALSO: infatti (vedi anche punto precedente) sarebbe vero solo nel caso in cui il rango fosse massimo, ma non abbiamo nessuna ipotesi che ci permetta di affermare questo.

- Un sistema di 2 equazioni in 4 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 4 parametri.

  FALSO: un qualunque sistema ammette soluzione nel caso in cui $r_g(A) = r_g(Ab)$ e questa condizione potrebbe non essere soddisfatta, anche se ammettesse soluzioni i parametri sarebbero 2 o 3.

- Un sistema omogeneo di 4 equazioni in 2 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono da almeno 2 parametri.

  FALSO: se le equazioni non sono tra loro proporzionali l'unica soluzione quella banale che non dipende da alcun parametro.

- Un sistema omogeneo di 4 equazioni in 2 incognite ammette sempre soluzioni e queste dipendono esattamente da 2 parametri.

  FALSO: vedi punto precedente.

- Se $A \in M_{m,n}$ con $m < n$, allora il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette soluzioni non banali

  VERO: un sistema omogeneo ammette soluzioni non banali se $r_g(A) < n$, poiché si ha $r_g(A) < m < n$ la condizione è verificata.

- Se $A \in M_{m,n}$ e il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette soluzioni non banali, allora $m < n$.

  FALSO: Per dimostrare che l'affermazione è falsa è sufficiente considerare un qualunque sistema omogeneo compatibile in cui $m < n$ (la sua esistenza è garantita da quanto già dimostrato nel precedente punto) e aggiungere equazioni proporzionali a quelle già considerate fino a quando $m \geq n$. Il sistema così ottenuto è compatibile ma ha più equazioni che incognite.

- Se $A \in M_{m,n}$ con $m > n$, allora il sistema omogeneo $Ax = 0$ ammette soluzioni non banali.

  FALSO: Analogamente a prima, è sufficiente considerare un sistema omogeneo con $m = n$ a gradini, esso ammetterà solo la soluzione banale, se aggiungiamo equazioni proporzionali a quelle già scritte abbiamo un sistema con $m > n$ che ammette solo soluzioni banali.