Esercizi sui numeri complessi

Corso di Laurea in Informatica A.A.

Docente: Andrea Loi

Correzione 1° Esercitazione

1. Trovare parte reale e immaginaria dei numeri complessi:

$$3 + i - \frac{5}{2 - 4i}$$

e

$$\frac{3 + i}{i} - \frac{1}{i}$$

Soluzione:

$$z = 3 + i - \frac{5}{2 - 4i} = \frac{(3 + i)(2 - 4i)(2 + 4i) - 5(2 + 4i)}{(2 - 4i)(2 + 4i)} = \frac{5}{2}$$

segue $Re\, z = \frac{5}{2}$ e $Im\, z = 0$;

$$w = \frac{3 + i}{i} - \frac{1}{i} = \frac{(3 + i)i - i}{i^2} = 1 - 2i$$

segue $Re\, w = 1$ e $Im\, w = -2$.

2. Trovare le radici quadrate dei seguenti numeri complessi: $1\,, i\,, -i\,, -3\,.$

Soluzione: La rappresentazione trigonometrica di $z = 1$ è

$$z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$$

segue che le sue radici quadrate sono:

$$z_0 = 1(\cos 0 + i \sin 0) = z$$

$$z_1 = 1(\cos \pi + i \sin \pi) = -1$$

la rappresentazione trigonometrica di $w = i$ è

$$w = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2})$$

segue che le sue radici quadrate sono:

$$\begin{aligned} w_0 &= 1(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i \\ w_1 &= 1(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i \end{aligned}$$

In modo analogo si ottiene che le radici quadrate di $u = -i$ sono:

$$\begin{aligned} u_0 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,i \\ u_1 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i \end{aligned}$$

mentre le radici quadrate di $v = -3$ sono:

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = \sqrt{3}\,i \\ v_1 &= \sqrt{3}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -\sqrt{3}\,i \end{aligned}$$

3. Risolvere le seguenti equazioni nel campo complesso:

$$z^2 + 2z - 1 = 0$$

$$z^2 + z + 1 = 0$$

Soluzione: Poniamo $z = x + iy$, allora $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, sostituendo nell'equazione di partenza si ottiene:

$$x^2 - y^2 + 2xyi + 2x + 2yi = 1$$

da cui segue

$$x^2 - y^2 + 2x = 1$$

e

$$2xy + 2y = 0$$

Da quest'ultima equazione segue che $y = 0$ oppure $x = -1$.

Se $y = 0$, allora

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \implies x = -1 + \sqrt{2} \quad \text{oppure} \quad x = -1 - \sqrt{2}$$

Se $x = -1$, allora

$$y^2 = -2 \implies \text{nessuna soluzione}$$

In conclusione le soluzioni cercate sono:

$$z_1 = -1 + \sqrt{2} \qquad\qquad z_2 = -1 - \sqrt{2}$$

In modo analogo si ottiene che le soluzioni dell'equazione

$$z^2 + z + 1 = 0$$

sono:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$
$$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

4. Trovare le radici quinte dell'unità.

   Soluzione: Poniamo $z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$, le radici quinte dell'unità sono:

$$z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$
$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}$$
$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i \sin\frac{4\pi}{5}$$
$$z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + i \sin\frac{6\pi}{5}$$
$$z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i \sin\frac{8\pi}{5}$$

5. Dalla formula

$$z_k = \sqrt[n]{r}(\cos(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi + 2k\pi}{n})), \; k = 0, 1, \ldots, n-1 \quad (1)$$

si deduce che *le radici di un numero complesso z si dispongono nel piano come i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{r}$, dove uno di tali vertici rappresenta il numero complesso di argomento $\frac{1}{n}Arg(z)$.*

Trovare le radici terze, quarte e quinte dei seguenti numeri complessi

$$-1\,, 1 + i\,, 1 - i$$

e verificare questo risultato.

Soluzione: Utilizzando la formula (1) si ottengono i seguenti risultati:

- Radici terze di $z = -1$

$$\begin{aligned} z_0 &= \cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3} \\ z_1 &= \cos\pi + i\,\sin\pi \\ z_2 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i\,\sin\frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

  Il poligono regolare con vertici z_0, z_1 e z_2 inscritto in una circonferenza unitaria è rappresentato in Figura 1

- Radici terze di $w = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ w_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\ w_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

  Il poligono regolare con vertici w_0, w_1 e w_2 inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[6]{2}$ è rappresentato in Figura 2

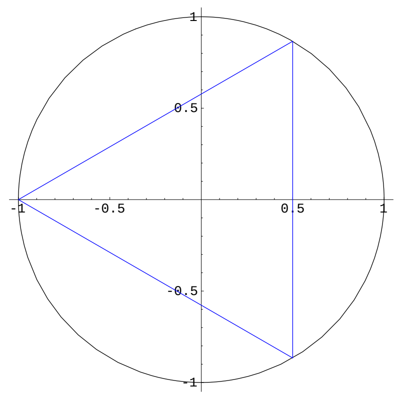

Figura 1: Poligono con vertici z_0, z_1 e z_2

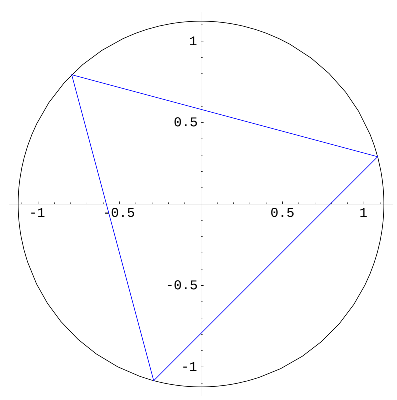

Figura 2: Poligono con vertici w_0, w_1 e w_2

- Radici terze di $u = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \\ u_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \\ u_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i\sin\frac{23\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Il poligono regolare con vertici u_0, u_1 e u_2 inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[6]{2}$ è rappresentato in Figura 3

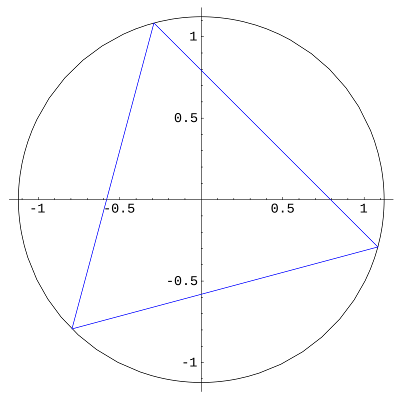

Figura 3: Poligono con vertici u_0, u_1 e u_2

- Radici quarte di $z = -1$

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\\
z_1 &= \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\sin\frac{3\pi}{4}\\
z_2 &= \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\sin\frac{5\pi}{4}\\
z_3 &= \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\sin\frac{7\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Il poligono regolare con vertici z_0, z_1, z_2 e z_3 inscritto in una circonferenza unitaria è rappresentato in Figura 4

- Radici quarte di $w = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)\\
w_1 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right)\\
w_2 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right)\\
w_3 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right)
\end{aligned}
$$

Il poligono regolare con vertici w_0, w_1, w_2 e w_3 inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[8]{2}$ è rappresentato in Figura 5

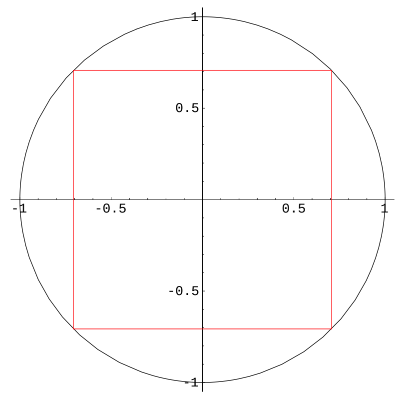

Figura 4: Poligono con vertici z_0, z_1, z_2 e z_3

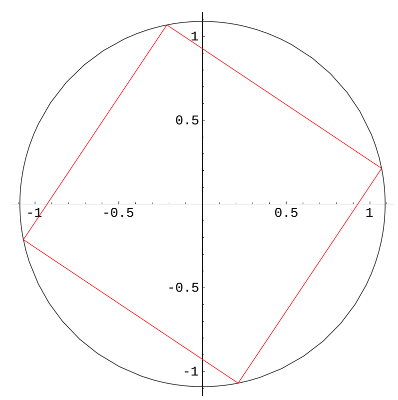

Figura 5: Poligono con vertici w_0, w_1, w_2 e w_3

- Radici quarte di $u = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\right)\\
u_1 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{16} + i\sin\frac{15\pi}{16}\right)\\
u_2 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{16} + i\sin\frac{23\pi}{16}\right)\\
u_3 &= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{16} + i\sin\frac{31\pi}{16}\right)
\end{aligned}$$

Il poligono regolare con vertici u_0, u_1, u_2 e u_3 inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[8]{2}$ è rappresentato in Figura 6

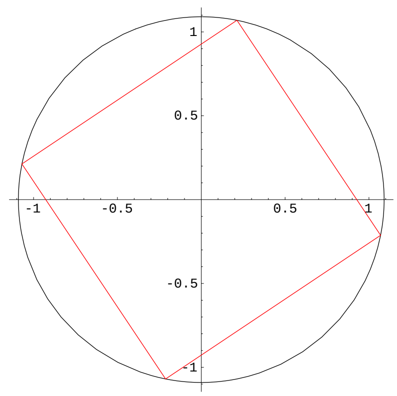

Figura 6: Poligono con vertici u_0, u_1, u_2 e u_3

- Radici quinte di $z = -1$

$$
\begin{aligned}
z_0 &= \cos\frac{\pi}{5} + i\,\sin\frac{\pi}{5} \\
z_1 &= \cos\frac{3\pi}{5} + i\,\sin\frac{3\pi}{5} \\
z_2 &= \cos\pi + i\,\sin\pi \\
z_3 &= \cos\frac{7\pi}{5} + i\,\sin\frac{7\pi}{5} \\
z_4 &= \cos\frac{9\pi}{5} + i\,\sin\frac{9\pi}{5}
\end{aligned}
$$

Il poligono regolare con vertici z_0, z_1, z_2, z_3 e z_4 inscritto in una circonferenza unitaria è rappresentato in Figura 7

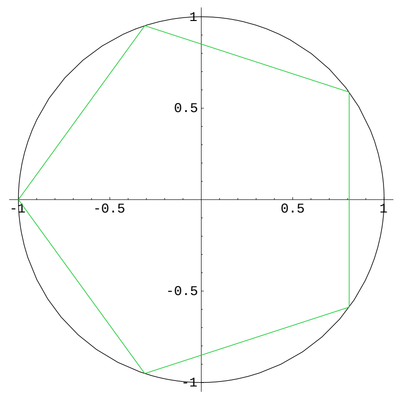

Figura 7: Poligono con vertici z_0, z_1, z_2, z_3 e z_4

- Radici quinte di $w = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)\\
w_1 &= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20} + i\sin\frac{9\pi}{20}\right)\\
w_2 &= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{20} + i\sin\frac{17\pi}{20}\right)\\
w_3 &= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\\
w_4 &= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{20} + i\sin\frac{33\pi}{20}\right)
\end{aligned}
$$

Il poligono regolare con vertici w_0, w_1, w_2, w_3 e w_4 inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[10]{2}$ è rappresentato in Figura 8

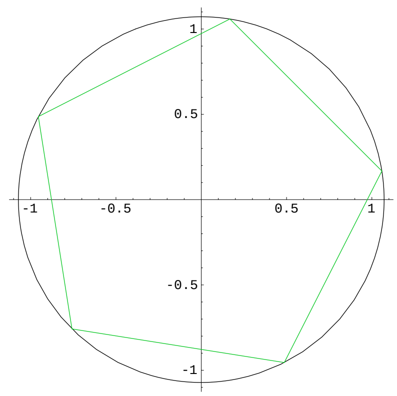

Figura 8: Poligono con vertici w_0, w_1, w_2, w_3 e w_4

- Radici quinte di $u = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right)\\
u_1 &= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\
u_2 &= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right)\\
u_3 &= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right)\\
u_4 &= \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{39\pi}{20} + i\sin\frac{39\pi}{20}\right)
\end{aligned}$$

  Il poligono regolare con vertici u_0, u_1, u_2, u_3 e u_4 inscritto in una circonferenza di raggio $\sqrt[10]{2}$ è rappresentato in Figura 9

6. Trovare le radici complesse dei seguenti polinomi:

$$z^4 + i = 0$$

$$z^5 + z^3 - iz^2 - i = 0$$

Soluzione: Risolviamo la prima equazione.

Poniamo $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora

$$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$$

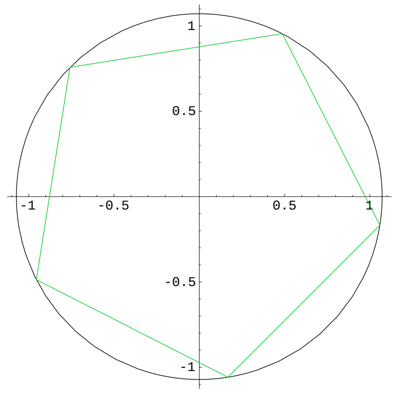

Figura 9: Poligono con vertici u_0, u_1, u_2, u_3 e u_4

e l'equazione diventa

$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 1(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$$

segue

$$r^4 = 1 \implies r = 1$$

e

$$4\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \implies \theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

quindi le radici dell'equazione sono:

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \\ z_2 &= \cos \frac{7\pi}{8} + i \sin \frac{7\pi}{8} \\ z_3 &= \cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} \\ z_4 &= \cos \frac{15\pi}{8} + i \sin \frac{15\pi}{8} \end{aligned}$$

Risolviamo la seconda equazione.

Possiamo scriverla nel seguente modo

$$z^3(z^2 + 1) - i(z^2 + 1) = 0$$

e ancora

$$(z^2 + 1)(z^3 - i) = 0$$

da cui si ricavano le seguenti

$$z^2 = -1$$

$$z^3 = i$$

Poniamo ora $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, allora

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

e

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

segue

$$r = 1$$

e

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2}$$
$$\theta_3 = \frac{\pi}{6}, \quad \theta_4 = \frac{5\pi}{6}, \quad \theta_5 = \frac{3\pi}{2}$$

Riepilogando le radici dell'equazione

$$z^5 + z^3 - iz^2 - i = 0$$

sono:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \\
z_2 &= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = z_5 \,(\text{ossia } z_2 \text{ ha molteplicità } 2) \\
z_3 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \\
z_4 &= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}
\end{aligned}$$