Capitolo 1

I numeri complessi

1.1 I numeri complessi

Introduciamo un simbolo i, detto unità immaginaria definito dalla condizione

$$i^2 = i \cdot i = -1.$$

Il simbolo i soddisfa l'equazione

$$x^2 + 1 = 0.$$

Un numero complesso è un'espressione del tipo:

$$z = a + ib, \;\; a, b \in \mathbb{R}.$$

I numeri a e b si chiamano parte reale e parte immaginaria del numero complesso z.

Indicheremo con $\operatorname{Re} z$ e con $\operatorname{Im} z$ la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso z.

Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi.

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ e un sottoinsieme di $\mathbb{C}$. Infatti i numeri reali si possono identificare con l'insieme

$$\{z = a + ib \in \mathbb{C} | \quad \operatorname{Im}(z) = b = 0\}.$$

I numeri complessi $z = a + ib$ tali che $\operatorname{Re} z = 0$ si dicono immaginari puri.

Due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ sono *uguali* se $a = c$ e $b = d$.

Definiamo la somma e la moltiplicazione di due numeri complessi $z = a + ib$ e $w = c + id$ con le solite regole del calcolo algebrico.

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d),$$

$$z \cdot w = (a+ib)(c+id) = ac+ibc+iad+i^2bd = ac-bd+i(bc+ad).$$

Dato un numero complesso $z = a + ib \neq 0$ esiste un numero complesso w, chiamato l'inverso di z tale che

$$z \cdot w = 1.$$

Denoteremo l'inverso di z con $\frac{1}{z}$.

Per trovare $\frac{1}{z}$ scriviamo $\frac{1}{z} = x + iy$. Allora

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1 = (a+ib)(x+iy) = (ax - by) + i(bx + ay),$$

quindi

$$ax - by = 1, \; bx + ay = 0.$$

Abbiamo quindi un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x, y. Usando, il fatto che $z \neq 0$ e quindi $a^2+b^2 \neq 0$ otteniamo:

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \quad , \quad y = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Quindi il <u>quoziente</u> di due numeri complessi $w = c + id$ e $z = a + ib \neq 0$ è dato da:

$$\frac{w}{z} = w \cdot \frac{1}{z} = \frac{c+id}{a+ib} = \frac{(c+id)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{ac+bd}{a^2+b^2} + i \frac{ad-bc}{a^2+b^2}.$$

Osservazione 1 Le operazioni di somma e prodotto dei numeri complessi, ristrette ai numeri reali (cioè ai numeri complessi con parte immaginaria uguale a zero), coincidono con le operazioni di somma e prodotto sui numeri reali. Per questo motivo si dice che il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è un *estensione* del campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Osservazione 2 Una differenza sostanziale tra il campo dei numeri reali e quello dei numeri complessi è quella dell'ordinamento.
Il campo dei numeri reali è un *campo ordinato* in quanto sussistono le seguenti proprietà:

1) se $x \leq y$ e $y \leq x$ allora $x = y$;

2) se $x \leq y$ e $y \leq z$ allora $x \leq z$;

3) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$;

4) se $x \leq y$, allora $x + z \leq y + z, \forall z \in \mathbb{R}$;

5) se $0 \leq x$ e $0 \leq y$, allora $0 \leq xy$.

Nel campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ non è possibile definire una struttura " $\leq$ " di campo ordinato.
Infatti dalle proprietà 4) e 5) seguirebbe che una relazione d'ordine $\leq$ soddisfa le seguenti proprietà:

- se un numero è positivo (negativo) il suo oppposto è negativo (positivo);

- il quadrato di un numero qualsiasi non è mai negativo.

D'altra parte $1^2 = 1$ e $i^2 = -1$. Quindi abbiamo due quadrati che sono l'uno l'opposto dell'altro. Nessuno dei due però può essere negativo (perchè sono quadrati) e questo è assurdo (perchè tra a e $-a$ uno dev'essere negativo se $a \neq 0$).

Il complesso coniugato di un numero complesso $z = a + ib$ è il numero, che si indica con $\bar{z}$, dato da $\bar{z} = a - ib$.

Un numero complesso è reale se e solo se coincide col suo coniugato.

Inoltre valgono le seguenti proprietà (esercizio!):

- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$;
- $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$;
- $z\bar{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$;
- $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$;
- $\bar{\bar{z}} = z$; (l'operazione di coniugio è involutoria);
- $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$;
- $\overline{(zw)} = \bar{z}\bar{w}, \forall z, w \in \mathbb{C}$;
- $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Esempio 3 Vogliamo scrivere la forma algebrica, cioè la forma $z = a + ib$ del numero complesso

$$z = \frac{2+5i}{1-3i}.$$

Per fare questo moltiplichiamo numeratore e denominatore per $1+3i$ (il complesso coniugato di $1-3i$) e otteniamo:

$$z = \frac{2+5i}{1-3i} = \frac{(2+5i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1}{10}(-13+11i).$$

Quindi $a = \mathrm{Re}(z) = -\frac{13}{10}$ e $b = \mathrm{Im}(z) = \frac{11}{10}$.

Esempio 4 Scriviamo in forma algebrica il numero complesso

$$i(5+6i)^2 - \frac{4}{1-i}.$$

Si ha:

$$i(25+60i+36i^2) - \frac{4(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -60-11i-2(1+i) = -62-13i$$

1.2 Rappresentazione geometrica e trigonometrica dei numeri complessi

Ricordiamo che i numeri reali si possono rappresentare come i punti di una retta una volta scelto un sistema di riferimento su di essa. Analogamente i numeri complessi si possono rappresentare con i punti di un piano, che prende il nome di *piano di Gauss*.

Fissato un sistema di coordinate ortogonali, associamo al numero complesso $z = a+ib$ il punto P del piano di coordinate (a, b).

In questo modo ai numeri reali vengono associati i punti dell'asse x, che viene detto *asse reale*, mentre gli immaginari puri sono rappresentati dai punti dell'asse y, detto *asse immaginario*.

L'unità immaginaria viene quindi rappresentata come la coppia $(0, 1)$.

Il punto che rappresenta il complesso coniugato $\bar{z}$ è il simmetrico rispetto all'asse x del punto che rappresenta z.

La distanza dall'origine O (che rappresenta lo zero 0 in $\mathbb{C}$) del punto P che rappresenta z si chiama <u>modulo</u> di z e si indica con $\rho = |z|$.

Per il Teorema di Pitagora

$$\rho = |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Supponiamo $z \neq 0$ (e quindi $P \neq O$). Denotiamo con

$$\theta = \operatorname{Arg}(z)$$

la misura in radianti di una qualsiasi rotazione che sovrappone l'asse delle x al segmento orientato OP, presa con il segno positivo se avviene in senso antiorario, negativo nel caso opposto, si chiama *argomento* di z.

Osserviamo che l'argomento di z è definito a meno di multipli di 2π. Inoltre se $z = 0$, l'argomento è indeterminato.

Per assegnare un ben determinato argomento basta assegnare un intervallo di ampiezza 2π nel quale far variare l'angolo θ. Noi fisseremo l'intervallo $[0, 2\pi)$.

Dato un numero complesso $z = a + ib$ sussistono le relazioni:

$$a = \mathrm{Re}(z) = \rho \cos\theta, \ \ b = \mathrm{Im}(z) = \rho \sin\theta. \tag{1.1}$$

Quindi

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)}, \tag{1.2}$$

che prende il nome di <u>rappresentazione trigonometrica</u> del numero complesso z.

Per trovare la forma trigonometrica (1.2) di un numero complesso $z = a + ib$ si usano le (1.1). Prima di tutto si calcola il modulo di z dato da

$$\boxed{\rho = \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Inoltre

$$\boxed{\cos\theta = \frac{a}{\rho} \quad \sin\theta = \frac{b}{\rho}}.$$

e quindi possiamo trovare univocamente θ restringendosi all'intervallo $[0, 2\pi)$.

Esempio 5 Scriviamo la forma trigonometrica del numero complesso $z = 1 - i$. Si ha

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

mentre

$$\cos\theta = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\sin\theta = \frac{-1}{\rho} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{4} \text{ oppure } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

Segue che $\theta = \frac{7\pi}{4}$ e la forma trigonometrica di z è data da

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}).$$

Due numeri complessi

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ e } z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

sono uguali se e solo se

$$\rho_1 = \rho_2, \quad \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Dati

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

usando le relazioni trigonometriche

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$$

e

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1$$

si ottiene

$$\boxed{z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]}. \tag{1.3}$$

Proprietà *il prodotto di due numeri complessi ha come modulo il prodotto dei moduli e come argomento la somma degli argomenti*

In particolare per ogni intero non negativo n e per ogni numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ si ottiene la cosidetta *formula di De Moivre*:

$$\boxed{z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]} \tag{1.4}$$

Inoltre è immediato verificare che:

$$|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\rho}, \quad \operatorname{Arg}(\frac{1}{z}) = -\operatorname{Arg}(z) = -\theta.$$

Equivalentemente
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{\rho}(\cos\theta - i\sin\theta).$$
Dati
$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
con $z_2 \neq 0$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \tag{1.5}$$

Proprietà *il quoziente di due numeri complessi ha come modulo il quoziente dei moduli e come argomento la differenza degli argomenti.*

Esempio 6 Calcoliamo $z = (2-2i)^5$. Si ha:
$$z = (2-2i)^5 = 2^5(1-i)^5 = 32(1-i)^5.$$
Per l'esempio (5)
$$1 - i = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$$
Usando formula di formula di De Moivre (1.4) otteniamo:
$$(1-i)^5 = (\sqrt{2})^5(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})^5 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{35\pi}{4}+i\sin\frac{35\pi}{4}).$$
Siccome $\frac{35\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 8\pi)$, otteniamo
$$(1-i)^5 = 4\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}) = 4\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4(-1+i).$$
Quindi $z = 128(-1+i)$.

Esempio 7 Cerchiamo i numeri complessi z che soddisfano l'equazione:

$$z^3 - |z|^2 = 0. \tag{1.6}$$

Primo metodo Scriviamo z in forma algebrica $z = x+iy$. L'equazione (1.6) diventa

$$z^3 = (x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) = x^2 + y^2,$$

la quale è equivalente al sistema (non lineare!)

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 & = & x^2 + y^2 \\ 3x^2y - y^3 & = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

nelle incognite reali x e y.

Dalla seconda equazione ricaviamo $y(3x^2 - y^2) = 0$ le cui soluzioni sono $y = 0$ e $y^2 = 3x^2$.

Sostituendo $y = 0$ nella prima equazione otteniamo

$$x^3 = x^2$$

le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = 1$. Quindi le coppie $(x = 0, y = 0)$ e $(x = 1, y = 0)$ sono soluzioni del sistema.

Sostituendo $y^2 = 3x^2$ nella prima equazione si ottiene

$$x^3 - 9x^3 = -8x^3 = x^2 + 3x^2 = 4x^2,$$

o, equivalentemente,

$$4x^2(2x+1) = 0,$$

le cui soluzioni sono $x = 0$ e $x = -\frac{1}{2}$. La soluzione $x = 0$ sostituita in $y^2 = 3x^2$ ci da $y = 0$ mentre $x = -\frac{1}{2}$ sostituita in $y^2 = 3x^2$ ci da $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Abbiamo trovato quindi due nuove soluzioni $(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $(x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2})$

In definitiva abbiamo trovato le quattro coppie di soluzioni

$$(0,0),(1,0),(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}),(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

e quindi le soluzioni dell'equazione (1.6) sono fornite dai quattro numeri complessi:

$$z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Secondo metodo Scriviamo z in forma trigonometrica

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Per la formula di De Moivre, l'equazione (1.6) è equivalente all'equazione

$$\rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta)) = \rho^2,$$

la quale è a sua volta equivalente al sistema

$$\begin{cases} \rho^3 = \rho^2 \\ \cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = 1 \end{cases} \tag{1.8}$$

nelle incognite $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

Le soluzioni della prima equazione sono $\rho = 0$ e $\rho = 1$. Mentre le soluzioni della seconda equazione sono $3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ossia le tre soluzioni $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$. In questo modo ritroviamo le soluzioni già trovate in precedenza e cioè:

$$z_1 = 0, z_2 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$
$$z_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$z_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Esempio 8 Calcoliamo il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$ dove $z_1 = i$ e $z_2 = 1 - i$ usando le loro forme trigonometriche. Il modulo e l'argomento di $z_1 = i$ sono $\rho_1 = 1$ e $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, mentre il modulo e l'argomento di z_2 sono dati da $\rho_2 = \sqrt{2}$ e $\theta_2 = \frac{7\pi}{4}$. Qunidi per la formula (1.5)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4}).$$

Osserviamo che

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4} = 2\pi - \frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},$$

da cui

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}(-1+i)$$

1.3 Radici di un numero complesso

Vogliamo estendere il concetto di radice n-esima valido per i numeri reali positivi a tutti i numeri complessi.

Definizione 9 *Dati un numero naturale $n \geq 1$ e un numero complesso w, diremo che il numero complesso z è una radice n-esima di w, e scriveremo $z = \sqrt[n]{w}$ se $z^n = w$.*

Teorema 10 *Sia $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, e n un intero ≥ 1. Esistono esattamente n radici n-esime complesse $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ di w. Posto $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ e $z_k = \rho_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$ abbiamo*

$$\rho_k = \sqrt[n]{r}$$
$$\theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Equivalentemente

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1} \tag{1.9}$$

Dimostrazione: I numeri z_k sono evidentemente radici n-esime di w, come risulta applicando la formula di De Moivre (1.4). Mostriamo che non ce ne sono altre. Infatti affinchè un numero complesso $R(\cos\psi + i\sin\psi)$ sia radice n-esima di w, dovrebbe risultare:

$$R^n = r \ \text{ e } \ n\psi = \varphi + 2h\pi, h \in \mathbb{Z}$$

e cioè

$$R = \sqrt[n]{r} \ \text{ e } \ \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2h\pi}{n}.$$

Attribuendo a n i valori $0, 1, \ldots, n-1$ troviamo appunto i numeri z_k. Dando a h un qualsiasi altro valore $\tilde{h}$ diverso dai precedenti, questo può scriversi nella forma $\tilde{h} = k + mn, m \in \mathbb{Z}$ ($m \in \mathbb{Z}$ è il quoziente e k il resto della divisione di $\tilde{h}$ per n) per cui sarebbe

$$\psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2m\pi = \theta_k + 2m\pi$$

e ritroveremmo ancora gli stessi z_k precedenti. □

Indichiamo con ϵ_k le radici n-esime del numero 1. Osserviamo che il modulo del numero 1 è uguale a 1 mentre l'argomento è $\theta = 0$.
Dalla formula (1.9) si ottiene allora:

$$\boxed{\epsilon_k = \cos\tfrac{2k\pi}{n} + i\sin\tfrac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1} \qquad (1.10)$$

Esempio 11 Calcoliamo le radici quarte di 1. In queto caso nella formula (1.10) $k = 0, 1, 2, 3$. Otteniamo quindi:

$$\epsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$
$$\epsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{4} + i\sin\frac{4\pi}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$
$$\epsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{4} + i\sin\frac{6\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Proposizione 12 *Le radici n-esime di un qualunque numero complesso z si possono ottenere moltiplicando una di esse per le n radici n-esime del numero* 1.

Dimostrazione: se z_1 è una radice n-esima di z ed ϵ_k una qualsiasi radice n-esima di 1 si ha:

$$(z_1\epsilon_k)^n = z_1^n(\epsilon_k)^n = z_1^n = z$$

e quindi $z_1\epsilon_k$ è una radice n-esima di z; inoltre, al variare di $\epsilon_k, k = 0, 1, \ldots, n-1$, i numeri $z_1\epsilon_k$ sono tutti distinti. $\square$

Esempio 13 Calcoliamo le radici terze di -27. Sicuramente ci sono tre radici complesse. Una di queste è -3. Per la Proposizione 12 le radici terze di -27 si possono ottenere moltiplicando -3 per le radici terze di 1.

Dalla formula (1.10) queste ultime sono date da:

$$\epsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$$

$$\epsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\epsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quindi le radici terze di -27 sono date $z_0 = -3, z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Il Teorema 10 ci dice che un polinomio del tipo $z^n = z_0$ ammette n radici complesse. Vale un risultato più generale noto come il *teorema fondamentale dell'algebra* del quale riportiamo l'enunciato.

Abbiamo bisogno di una definizione

Definizione 14 *Se $P(z)$ è un polinomio in z di grado n e z_0 una sua radice, si dice che z_0 è di molteplicità k (k intero ≥ 1) se vale la formula*

$$P(z) = (z - z_0)^k Q(z),$$

dove Q è un polinomio tale che $Q(z_0) \neq 0$.

Esempio 15 *L'unità immaginaria i è radice di molteplicità due del polinomio $P(z) = z^3 - iz^2 + z - i = z^2(z-i) + (z-i) = (z-i)(z^2+1) = (z-i)^2(z+i)$*

Teorema 16 *(teorema fondamentale dell'algebra) Un'equazione polinomiale*

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n = 0, \;\; a_n \neq 0$$

con coefficienti complessi qualsiasi ammette precisamente n radici in $\mathbb{C}$, se ognuna di esse viene contata con la sua molteplicità.

Capitolo 2

Vettori nel piano e nello spazio

Vedi libro di testo e appunti presi in classe.

Capitolo 3

Matrici e sistemi lineari

3.1 Matrici

Una tabella

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

si chiama *matrice m per n*.

Le m n-uple orizzontali

$$(a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n}),\ (a_{21},\ a_{22},\ \ldots,\ a_{2n}),\ldots\ (a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots,\ a_{mn})$$

si chiamano *righe* della matrice e le n m-uple

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

verticali sono chiamate *le colonne* di A.

Indicheremo una matrice con il simbolo

$$A = (a_{ij}), i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Siano A e B due matrici $m \times n$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \vdots & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

La *somma* di A e B si scrive $A+B$ ed è la matrice $m \times n$ ottenuta come segue:

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Usando la notazione (3.2)

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Osservazione 17 *Osserviamo che la somma tra due matrici è possibile solo quando le due matrici hanno lo stesso numero di righe e di colonne.*

Il *prodotto* di una matrice A e uno scalare λ si scrive λA ed è la matrice $m \times n$ che si ottiene moltiplicando per λ ogni elemento di A:

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ & & \vdots & \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Vale il seguente:

Teorema 18 *L'insieme delle matrici $m \times n$ è uno spazio vettoriale rispetto alle operazione di somma e moltiplicazione per uno scalare definite da (3.3) e (3.4) rispettivamente. Il vettore nullo è la matrice nulla $m \times n$ mentre l'opposto della matrice $A = (a_{ij})$ è la matrice $-A = (-a_{ij})$.*

Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$ due matrici $m \times p$ e $p \times n$ rispettivamente (il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B). Allora il prodotto AB è la matrice $m \times n$ il cui elemento ij è ottenuto moltiplicando la riga i-ma A_i di A per la riga j-ma B_j di B (qui si intende il prodotto scalare della riga e la colonna considerati come vettori in $\mathbb{R}^p$). In altre parole se $C = (c_{ij}), i = i, 2, \ldots m, j = 1, 2 \ldots n$ è il prodotto tra A e B allora:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \ a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{ip}b_{pk} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}.$$

Osserviamo che che il prodotto AB tra due matrici A e B non è definito se il numero di colonne di A è diverso dal numero di righe di B. Osserviamo inoltre che anche se definito il prodotto di due matrici è , in generale, non commutativo (costruire un esempio).

Valgono le seguenti relazioni:

(i) $(AB)C = A(BC), \forall A \in \mathrm{M}_{mp}, B \in \mathrm{M}_{pq}, C \in \mathrm{M}_{qn}$;

(ii) $A(B + C) = AB + AC, \forall A \in \mathrm{M}_{mp}, B, C \in \mathrm{M}_{pn}$;

(iii) $(B + C)A = BA + CA, \forall B, C \in \mathrm{M}_{mp}, A \in \mathrm{M}_{pn}$;

(iv) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \forall A, B \in \mathrm{M}_{mp}, \lambda \in \mathbb{R}$;

(v) $OA = O$, O matrice nulla $m \times p, A \in \mathrm{M}_{pn}$;

(vi) $B0 = 0$, O matrice nulla $p \times n, B \in \mathrm{M}_{mp}$

La *trasposta* A^T di una matrice $A \in \mathrm{M}_{mn}$ è la matrice in M_{nm} ottenuta da A scambiando le sue righe con le sue colonne.

Una matrice $n \times n$ cioè che presenta lo stesso numero di righe e colonne si dice *quadrata*. Il numero di righe (e quello

delle colonne) si chiama ordine della matrice. L'insieme delle matrici quadrate verrà denotato con M_n.
Una matrice quadrata $A \in M_n$ si dice *simmetrica* se $A^T = A$.
Una matrice quadrata $A \in M_n$ si dice *antisimmetrica* se $A^T = -A$.

La *diagonale* principale di $A = (a_{ij}) \in M_n$ è costituita dagli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.
Data una matrice quadrata $A \in M_n$ la *traccia* di A è il numero reale che si ottiene sommando gli elementi della sua diagonale principale. e si indica con $\operatorname{tr} A$, cioè

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

Osserviamo che se A e B sono due matrici quadrate allora ha senso considerare sia AB che BA. Se $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata. La *diagonale* di A è costituita dagli elementi $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.
La matrice diagonale che ha tutti gli elementi 1 nella diagonale e 0 altrove si chiama la matrice *identica* e si indica con I_n

Osserviamo che la matrice identica $I_n = (\delta_{ij})$ è tale che

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Essa soddisfa: $AI_n = I_nA$ per ogni $A \in M_n$. Uno matrice $A = (a_{ij})$ è detta *triangolare superiormente* se $a_{ij} = 0, i \leq j$ mentre è *triangolare inferiormente* se $a_{ij} = 0, i \geq j$.

Una matrice quadrata A di ordine n si dice *invertibile* se esiste una matrice B tale che:

$$AB = BA = I_n. \tag{3.5}$$

La matrice B che soddisfa la (3.5) è unica:

$AB_1 = B_1A = I_n$ e $AB_2 = B_2A = I_n$ implicano

$$B_1 = B_1I_n = B_1(AB_2) = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2.$$

La matrice B che soddisfa (3.5) si chiama la matrice *inversa* di A e si indica con A^{-1}.

Osserviamo che che la moltiplicazione di due matrici di ordine n A e B da origine ad una matrice invertibile AB la cui inversa è $B^{-1}A^{-1}$. Più in generale se $A_1, A_2, \dots A_p$ sono matrici invertibili allora $A_1A_2 \dots A_p$ è invertibile con inversa $A_p \dots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Il primo caso non banale di inversione di una matrice quadrata è il caso 2×2 (se a è una matrice non nulla 1×1, cioè un numero non nullo allora il suo inverso è dato da $\frac{1}{a}$).

Sia allora
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
una matrice 2×2. Cerchiamo degli scalari x, y, z, t tali che
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
o equivalentemente
$$\begin{aligned} ax + bz &= 1 \\ cx + dz &= 0 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} ay + bt &= 0 \\ cy + dt &= 1 \end{aligned}$$
I due sistemi ammettono soluzione se e solo se $\det A = ad - bc \neq 0$ e si ottiene facilmente
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
Per trovare l'inversa di una matrice di ordine n qualunque o per capire se una tale inversa esiste abbiamo bisogno di alcune definizioni.
Il *determinante* di una matrice quadrata $n \times n$ si definisce come (sviluppo rispetto alla prima riga)
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j},$$

dove A_{1j} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta eleminando la prima riga e la colonna j-sima dalla matrice A.
Si può dimostrare che il determinante può essere sviluppato anche secondo una riga qualunque tenendo conto opportunamente dei segni. Più precisamente vale la seguente formula, che rappresenta lo sviluppo rispetto alla i-sima riga.

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij}.$$

Definiamo ora le operazioni elementari sulle righe di una matrice $A \in M_{m,n}$.
Sia A_i la riga i-esima di A.
Allora

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}.$$

Consideriamo le seguenti operazioni elementari:

1. Scambiare la riga i-esima con la riga j-esima $A_i \leftrightarrow A_j$;
2. moltiplicare la riga i-ma per uno scalare non nullo λ, $A_i \to \lambda A_i$;

3. sostituire alla riga i-esima λ volte la j-esima sommata alla riga i-esima stessa, $A_i \to \lambda A_j + A_i$.

Valgono le seguenti proprietà:

- il determinante cambia di segno se si scambiano due righe tra loro;
- il determinante risulta moltiplicato per λ se si moltiplica una riga per λ;
- il determinante non cambia se si applica un' operazione elementare di tipo 3;
- il determinante di una matrice con due righe uguali è nullo;
- il determinante di una matrice con due righe proporzionali è nullo;
- è nullo il determinante di una matrice che ha una riga che è combinazione lineare delle altre righe;
- $\det(A) = \det(A^T)$;
- $\det(AB) = \det A \det B$

Un criterio per capire se una matrice è invertibile è il seguente: una matrice invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

Un criterio per capire se n vettori in $\mathbb{R}^n$ formano una base è il seguente: n-vettori in $\mathbb{R}^n$ formano una base se e solo se la matrice $n \times n$ che ha come righe i vettori in questione ha determinante diverso da zero.

L' algoritmo per trovare l'inversa di una matrice quadrata A di ordine n, o per determinare se A non è invertibile è il seguente:

Passo 1. formare la matrice $n \times 2n$ $M = (A|I_n)$: A nella metà sinistra I_n nella metà destra di M.

Passo 2. usando operazioni elementari sulle righe ridurre M nella forma $(I_n|B)$, dove I_n è la matrice identità $n \times n$

Passo 3. porre $A^{-1} = B$.

Esempio 19 Trovare l'inversa della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Scriviamo la matrice 4×8

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando le operazioni elementari:

$A_3 \to -A_1 + A_3, A_4 \to -A_1 + A_4$

si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando le operazioni elementari:

$A_1 \to -2A_2 + A_1, A_3 \to -A_2 + A_3, A_4 \to -2A_2 + A_4$

si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando le operazioni elementari:

$A_1 \to -3A_3 + A_1, A_2 \to A_3 + A_2, A_4 \to A_3 + A_4$

si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando l' operazione elementare: $A_4 \to -A_4$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 4 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Infine, applicando le operazioni elementari:

$A_3 \to 3A_4 + A_3, A_2 \to 2A_4 + A_2, A_1 \to -7A_4 + A_1$

si ottiene:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & -20 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 8 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Di conseguenza:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & -20 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & -1 & -2 \\ 5 & 8 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lo studente è inviatato a verificare che questa matrice rappresenta effettivimente l'inversa della matrice A.

Osservazione 20 Se applicando l'algoritmo precedente si viene a creare nella metà sinistra di M una riga o una colonna nulla questo significa che la matrice non è invertibile.

Sia $A \in M_{m,n}$. Un *minore di ordine* p di A è una matrice $p \times p$ che si ottiene da A cancellando $m-p$ righe e $n-p$ colonne. Diremo che il *rango* di A è r, e scriveremo $\mathrm{rg}(A) = r$, se A ha un minore M di ordine di r con $\det M \neq 0$ e tutti i minori di ordine maggiore di r hanno determinante nullo.

Il rango di una matrice è invariante per operazioni elementari. Questo fornisce anche un metodo per il calcolo del rango di una matrice.

3.2 Sistemi di equazioni lineari

Consideriamo un sistema di m equazioni lineari, diciamo $L_1, L_2, \ldots, L_m$ in n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nella forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \tag{3.6}$$

dove le a_{ij} e le b_i sono costanti. Una *soluzione* (o *soluzione particolare*) di detto sistema è un n-upla $u = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ di costanti soluzione di ogni equazione del sistema. L'insieme di tutte queste soluzioni si chiama *soluzione generale* del sistema. Sistemi di equazioni lineari nelle stesse incognite si dicono *equivalenti* quando hanno la stessa soluzione generale. Un modo per ottenere un sistema equivalente ad uno assegnato è di applicare una sequenza delle seguenti operazioni elementari:

- Scambiare l'equazione i-ma con la j-ma;

- moltiplicare l'equazione i-ma per uno scalare non nullo λ;
- sostituire l'equazione i-ma con λ volte la j-ma sommata alla i-ma.

Un metodo per risolvere un sistema di equazioni lineari è quello di *eliminazione di Gauss*:

Passo 1. Usando le operazioni elementari ridurre il sistema ad uno equivalente più semplice (in forma triangolare o a gradini, vedi oltre).

Passo 2. Trovare le soluzioni del sistema semplificato

Supponiamo che durante l'applicazione del passo 1 si ottenga l'equazione

$$L : 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b$$

allora:

- se $b = 0$, L si può cancellare senza che l'insieme delle soluzioni cambi;
- se $b \neq 0$ allora il sistema non ha soluzioni.

Sistemi in forma triangolare

Un sistema di equazioni lineari è in *forma triangolare* se il numero di equazioni è uguale a quello delle incognite, e se x_k è incognita iniziale dell'equazione k-ma. Perciò un sistema triangolare di equazioni lineari avrà la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n-1}x_{n-1} = b_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \\ \qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

dove $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0 \ldots a_{nn} \neq 0$.

Il suddetto sistema ha una soluzione unica, che si può ottenere con un procedimento di sostituzione a posteriori: si ricava x_n dall'ultima equazione lo si sostituisce nella penultima che si risolve rispetto all'incognita x_{n-1} etc. Il procedimento ha fine quando si trova la prima incognita x_1.

Sistema a gradini

Un sistema di equazioni lineari è in *forma a gradini* se è della forma seguente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2j_2}x_{j_2} + a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad a_{rj_r}x_{j_r} + a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a_{rn}x_n = b_r \end{cases}$$

dove $1 < j_2 < \cdots < j_r$ e $a_{11} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \ldots, a_{rj_r} \neq 0$.

Un'incognita x_k in un sistema a gradini si chiama *variabile libera* se essa non è incognita iniziale in alcuna equazione, ovvero $x_k \neq x_1, x_k \neq x_{j_2}, \ldots, x_k \neq x_{j_r}$.

Osserviamo che $r \leq n$. Se $r = n$ il sistema è allora in forma triangolare e quindi ammette un'unica soluzione; se $r < n$ ci sono meno equazioni che incognite. Si possono allora assegnare valori arbitrari alle $n - r$ variabili libere e ottenere una soluzione del sistema. Al variare di questi valori arbitrari si ottengono soluzioni diverse, quindi il sistema ha infinite soluzioni.

Algoritmo di Gauss–Jordan

Quest'algoritmo permette di ridurre un sistema di m equazioni in n incognite ad un sistema a gradini (o in forma) triangolare ovvero determina se il sistema non ha soluzioni.

Passo 1. Scambiare le righe in modo che la prima incognita x_1 appaia con un coefficiente non nullo nella prima equazione: $a_{11} \neq 0$;

Passo 2. Usare a_{11} come perno per eliminare x_1 da tutte le equazioni meno che la prima (sostituendo la i-ma equazione $i > 1$ con la prima equazione moltiplicata per $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ sommata alla i-ma equazione);

Passo 3. Esaminare ogni nuova equazione L:

(a) se L ha la forma

$$L : 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$

o se L è multipla di un'altra equazione, cancellarla dal sistema;

(b) se L ha la forma

$$L : 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b,$$

$b \neq 0$, uscire dall'algoritmo: il sistema non ha soluzioni.

Passo 4. Ripetere i passi $1, 2, 3$ sul sottosistema formato da tutte le equazioni meno la prima;

Passo 5. Continuare il procedimento finchè il sistema non si presenta in forma a gradini, o finche nel caso (b) non si ottiene un'equazione degenere.

Sistemi omogenei

Una classe importanza di sistemi sono quelli *omogenei*

Un sistema omogeneo di m equazioni in n incognite ha la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

Un tale sistema ha sempre una soluzione, la soluzione nulla consistente della n-upla $(0, 0, \ldots, 0)$, detta anche *soluzione banale*. Ogni altra soluzione, se esiste, si chiama *soluzione non banale*.

Come conseguenza un sistema omogeneo potrà essere sempre ricondotto ad un sistema omogeno in forma a gradini:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & & & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ & & a_{2j_2}x_{j_2} & + & a_{2,j_2+1}x_{j_2+1} & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & & & & & \\ & & a_{rj_r}x_{j_r} & + & a_{r,j_r+1}x_{j_r+1} & + & \cdots & + & a_{rn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

dove $1 < j_2 < \cdots < j_r$ e $a_{11} \neq 0, a_{2j_2} \neq 0, \ldots, a_{rj_r} \neq 0$.

Ci sono quindi due possibilità :

(i) $r = n$, il sistema è triangolare e ammette quindi la sola soluzione nulla.

(ii) $r < n$, il sistema ha una soluzione non zero.

Concludiamo enunciando due teoremi e il corrispondente corollario (che saranno dimostrati nel corso delle lezioni).

Teorema 21 *Sia $Ax = b$ un sistema lineare compatibile. Allora tutte le sue soluzioni si ottengono sommando ad una sua soluzione particolare X_0 tutte le soluzioni del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$.*

Teorema 22 *Sia A una matrice $m \times n$. Allora il sistema $Ax = b$ è compatibile se e solo se $rg\,A = rg(A|b)$. Quando il sistema è compatibile, le soluzioni dipendono da $n - rg\,A$ parametri (variabili libere). Il numero $n - rg\,A$ è detta la dimensione dell'insieme delle soluzioni. In particolare la soluzione è unica se $rg\,A = n$.*

Corollario 23 *Sia A una matrice $m \times n$. Allora il sistema omogeneo $Ax = 0$ ha una soluzione non banale $x \neq 0$ se e solo se $rg\,A < n$. Perciò se $m < n$, $Ax = 0$ ha sempre una soluzione non banale. Nel caso $m = n$:*

- *Ax=0 ha una soluzione non banale se e solo se A è singolare,*

- *$Ax = b$ ha esattamente una soluzione se e solo se A è non singolare.*

Capitolo 4

Combinazioni lineari, vettori linearmente indipendenti...

Queste brevi note sono un reassunto di quello che abbiamo visto a lezione. I vettori $\mathbf{e_i}$ rappresentano i vettori di $\mathbb{R}^n$ con 1 nell' i-esima posizione e 0 altrove.

4.1 Combinazioni lineari

Un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ se esistono scalari $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots x_k\mathbf{v_k}.$$

Gli scalari $x_1, \ldots, x_k$ si chiamano *coefficienti* della combinazione lineare. La combinazione lineare è detta *non banale* se almeno uno dei coefficienti è diverso da zero.

Lo *spazio generato* dai vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ è l'insieme di tutti i vettori che si ottengono come combinazioni lineari di $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$

$$\mathcal{L} = \{x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots x_k\mathbf{v_k} | x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\}$$

Un insieme di vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ si dice insieme di generatori per $\mathbb{R}^n$ se

$$\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}) = \mathbb{R}^n,$$

cioè se ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ è combinazione lineare di $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$. In questo caso si dice anche che che $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ generano $\mathbb{R}^n$.

- Se $\mathbf{v_1}$ è un vettore non nullo in $\mathbb{R}^3$ allora $\mathcal{L}(\mathbf{v_1})$ è la retta per l'origine $\{t\mathbf{v_1} | t \in \mathbb{R}\}$. Se $\mathbf{v_1} = \mathbf{0}$ allora $\mathcal{L}(\mathbf{v_1})$ consiste della sola origine.
- Se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono due vettori di $\mathbb{R}^3$, allora $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ è l'insieme dei vettori della forma $a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2}$. Se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ non sono multipli l'uno dell'altro, $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ è un piano per l'origine, altrimenti è una retta per l'origine, eccetto il caso $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2} = \mathbf{0}$., dove $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2})$ è l'origine stessa.
- Analogamente, lo spazio generato da tre vettori $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$ può essere tutto $\mathbb{R}^3$, o un piano passante per l'origine, o una retta passante per l'origine, o l'origine stessa.

- I vettori $\mathbf{e_i}, i = 1, 2, \dots n$ generano $\mathbb{R}^n$.

I vettori $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$, almeno uno dei quali diverso da zero , tali che

$$x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots x_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0}.$$

In altre parole, se il vettore nullo può essere scritto come combinazione lineare non banale di $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_k}$.

I vettori si dicono *linearmente indipendenti* se non sono linearmente dipendenti, cioè se da

$$x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots x_k\mathbf{v_k} = \mathbf{0}$$

segue che

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0.$$

Ovvero l'unica combinazione lineare di $\mathbf{v_1}, \dots, \mathbf{v_k}$ che è uguale al vettore nullo è quella banale.

I vettori $\mathbf{e_i}, i = 1, \dots, n$ sono linearmente indipendenti.

Valgono i seguenti fatti:

- Se uno dei vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ è il vettore nullo, allora $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ sono linearmente dipendenti;
- un vettore $\mathbf{v_1}$ è linearmente indipendente se e solo se $\mathbf{v_1} \neq \mathbf{0}$;
- due vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono linearmente indipendenti se e solo se non sono multipli l'uno dell'altro;
- Se $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ sono linearmente indipendenti, ma $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ $\mathbf{v_3}$ sono dipendenti, allora $\mathbf{v_3}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$. Viceversa, se $\mathbf{v_3}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$, allora $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$ sono linearmente dipendenti;
- Vettori di $\mathbb{R}^n$ non nulli e ortogonali sono linearmente indipendenti.

Criterio per vettori di $\mathbb{R}^n$

Dati $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$, possiamo formare la matrice $n \times k$, $A = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k})$ che ha per colonne i vettori dati. Allora ogni combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k}$ si può esprimere come un prodotto di matrici:

$$x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots + x_k\mathbf{v_k} = Ax,$$

dove x è il vettore colonna di componenti $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Ciò consente di riformulare le nozioni di dipendenza lineare, indipendenza lineare e spazio generato nella terminologia dei sistemi lineari:

1. I vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti se e solo se esiste una soluzione $x \neq 0$ del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$;

2. I vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k} \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'unica soluzione del sistema lineare omogeneo $Ax = 0$ è quella banale $x = 0$;

3. Un vettore $\mathbf{b}$ appartiene a $\mathcal{L}(\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_k})$ se e solo se il sistema lineare $Ax = \mathbf{b}$ è compatibile.

Combinando le affermazioni precedenti con i Teoremi relativi ai sistemi lienari, otteniamo:

4. k vettori di $\mathbb{R}^n$ sono lineramente indipendenti se e solo se la corrispondente matrice $n \times k$ ha rango k (quindi $k \leq n$);

5. se $k > n$, k vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti (Attenzione: il viceversa non è vero. Fare un esempio);

6. k vettori di $\mathbb{R}^n$ generano $\mathbb{R}^n$ se e solo se la matrice A, $n \times k$ ha rango n. Questo richiede che $k \geq n$. (Attenzione

non è vero che un qualsiasi insieme di n o più vettori di di $\mathbb{R}^n$ genera $\mathbb{R}^n$. Fare un esempio).

Un *base* di $\mathbb{R}^n$ è un insieme ordinato di generatori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^n$. Una *base ortogonale* di $\mathbb{R}^n$ è una base i cui vettori sono a due a due ortogonali. Una base di $\mathbb{R}^n$ si dice *ortonormale* se inoltre tutti i suoi vettori hanno lunghezza uno.

I vettori $\mathbf{e_i}, i = 1, \ldots n$ sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

Deduciamo il seguente

Teorema 24 *Una base di $\mathbb{R}^n$ è formata esattamente da n vettori. Un insieme di vettori $\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n} \in \mathbb{R}^n$ è una base se e solo se la matrice $n \times n$ $A = (\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n})$ è non singolare.*

Una base dello spazio

$$\mathcal{L} = \{x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + \cdots x_k\mathbf{v_k} |\ x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}\}$$

generato dai vettori $v_1, \ldots v_k$ è uguale al minimo numero di generatori di $\mathcal{L}$ ovvero il massimo numero di vettori linearmente indipendenti di $\mathcal{L}$.