Esercizi 6.6–6.10

Testo e soluzioni dettagliate

Dal capitolo 6 di A. Loi, *Appunti sulla teoria elementare dei gruppi*

Notazioni e idea guida

Usiamo il neutro 1 e indichiamo con $\mathrm{o}(x)$ l'ordine di x. Manteniamo le notazioni del libro:

$$D_n = \langle r, s \mid r^n = s^2 = 1,\ sr = r^{n-1}s \rangle = \{r^j s^\varepsilon : 0 \le j < n,\ \varepsilon \in \{0,1\}\}.$$

Il gruppo diedrale D_n ha quindi $2n$ elementi. Per i quaternioni, come nel libro,

$$Q_8 = \{\pm I_2, \pm I, \pm J, \pm K\} \le GL_2(\mathbb{C}),$$

con

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Valgono $I^2 = J^2 = K^2 = -I_2$, $IJ = K$ e $JI = -K = I^{-1}J$.

Un fatto usato spesso. Se $|G| = 8$ e $H = \langle a \rangle$ ha ordine 4, allora H ha indice 2, quindi è normale. Per ogni $b \notin H$ abbiamo

$$G = H \sqcup Hb = H \sqcup bH, \qquad b^2 \in H, \qquad ba \in G \setminus H.$$

Esercizio 6.6

Testo dell'esercizio.

Sia G un gruppo di 8 elementi. Dimostrare che, se tutti gli elementi di $G \setminus \{1\}$ hanno ordine 2, allora G è abeliano ed esistono $a, b, c \in G$, distinti tra loro e da 1, tali che

$$G = \{1, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}, \qquad G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Soluzione.

Per ogni $x \in G$ vale $x^2 = 1$, quindi $x^{-1} = x$. Ne segue che, per ogni $x, y \in G$,

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx.$$

Pertanto G è abeliano e, in particolare, tutti i suoi sottogruppi sono normali.

Scegliamo $a \in G \setminus \{1\}$ e $b \in G \setminus \langle a \rangle$. Poniamo

$$H = \langle a \rangle = \{1, a\}, \qquad K = \langle b \rangle = \{1, b\}.$$

Poiché $b \notin H$ e $b^2 = 1$, si ha $H \cap K = \{1\}$. Inoltre $H, K \trianglelefteq G$. Applicando il *teorema del prodotto* al sottogruppo $L = HK$ (in cui H e K sono normali), otteniamo

$$L \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

In particolare,

$$L = HK = \{1, a, b, ab\}, \qquad |L| = 4.$$

Scegliamo ora $c \in G \setminus L$ e poniamo $M = \langle c \rangle = \{1, c\}$. Siccome $c \notin L$, abbiamo $L \cap M = \{1\}$. Inoltre L ha indice 2 in G: le classi L e Lc sono disgiunte e hanno quattro elementi ciascuna. Dunque

$$G = L \sqcup Lc = LM.$$

Anche L e M sono normali in G, perché G è abeliano. Le ipotesi del *teorema del prodotto* sono quindi nuovamente soddisfatte e forniscono

$$G \cong L \times M \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2 \cong \boxed{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}.$$

Infine, dalla decomposizione $G = LM$, si ricava

$$\boxed{G = \{1, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}}.$$

L'isomorfismo ottenuto è esplicitamente

$$([u]_2, [v]_2, [w]_2) \longmapsto a^u b^v c^w.$$

□

Esercizio 6.7

Testo dell'esercizio.

Sia G un gruppo di 8 elementi, sia $a \in G$ con $\mathrm{o}(a) = 4$ e sia $H = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$.

(i) Dimostrare che per ogni $b \in G \setminus H$ si ha $G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

(ii) Dimostrare che, per ogni $b \in G \setminus H$, si ha $ba = ab$ oppure $ba = a^3b$.

Soluzione.

(i) Il sottogruppo H ha quattro elementi, dunque ha indice 2 ed è normale. Se $b \notin H$, la classe laterale Hb è disgiunta da H e ha quattro elementi:

$$Hb = \{b, ab, a^2b, a^3b\}.$$

Poiché $|G| = 8$,

$$\boxed{G = H \sqcup Hb = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}.}$$

(ii) Poiché H è normale, anche bab^{-1} appartiene a H. Il coniugio conserva l'ordine degli elementi; dunque $\mathrm{o}(bab^{-1}) = \mathrm{o}(a) = 4$. Gli unici elementi di ordine 4 in $H = \{1, a, a^2, a^3\}$ sono a e a^3. Pertanto

$$bab^{-1} = a \quad \text{oppure} \quad bab^{-1} = a^3.$$

Moltiplicando a destra per b, otteniamo esattamente

$$\boxed{ba = ab \quad \text{oppure} \quad ba = a^3b.}$$

□

Esercizio 6.8

Testo dell'esercizio.

Nelle ipotesi dell'esercizio 6.7, supponiamo che esista $b \in G \setminus H$ tale che $\mathrm{o}(b) = 2$.

(i) Dimostrare che, se $ab = ba$, allora G è abeliano e $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

(ii) Dimostrare che, se $ba = a^3 b$, allora $G \cong D_4$.

Soluzione.

(i) Se $ab = ba$, allora $G = \langle a, b\rangle$ è abeliano. Inoltre $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{1\}$, perché $b \notin H$, mentre i due sottogruppi hanno ordini rispettivamente 4 e 2. Il loro prodotto è tutto G. Per il teorema prodotto,

$$G \cong \langle a\rangle \times \langle b\rangle \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4.$$

L'isomorfismo è dato da $([j]_4, [\varepsilon]_2) \mapsto a^j b^\varepsilon$.

(ii) Se $ba = a^3 b = a^{-1} b$, allora

$$a^4 = 1, \qquad b^2 = 1, \qquad ba = a^{-1} b.$$

Sono proprio le relazioni dei generatori r, s di D_4: $r^4 = s^2 = 1$ e $sr = r^{-1} s$. La corrispondenza

$$\Phi : D_4 \longrightarrow G, \qquad r^j s^\varepsilon \longmapsto a^j b^\varepsilon \quad (0 \le j \le 3,\ \varepsilon \in \{0, 1\})$$

è biiettiva, perché le forme normali danno otto elementi distinti. È un omomorfismo: dalle relazioni segue

$$(r^j s^\varepsilon)(r^k s^\delta) = r^{j + (-1)^\varepsilon k} s^{\varepsilon + \delta},$$

con gli esponenti letti modulo 4 e 2; la stessa formula vale per a, b. Dunque $\boxed{G \cong D_4}$.

□

Esercizio 6.9

Testo dell'esercizio.

Nelle ipotesi dell'esercizio 6.7, supponiamo che tutti gli elementi di $G \setminus H$ abbiano ordine 4.

(i) Dimostrare che, se $b \in G \setminus H$, allora $a^2 = b^2$.

(ii) Dedurre dal punto (i) che $ba \neq ab$.

(iii) Dedurre dall'esercizio 6.7(ii) che $ba = a^3 b$ e quindi $G \cong Q_8$.

(iv) Dedurre che un gruppo di ordine 8 è isomorfo a uno dei cinque gruppi

$$\mathbb{Z}_8, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \quad D_4, \quad Q_8.$$

Soluzione.

(i) Fissiamo $b \notin H$. Poiché H è normale e ha indice 2, la classe bH ha ordine 2 in G/H. Quindi $(bH)^2 = H$, ovvero $b^2 \in H$. D'altra parte $\mathrm{o}(b) = 4$, perciò $\mathrm{o}(b^2) = 2$. In $H = \{1, a, a^2, a^3\}$ l'unico elemento di ordine 2 è a^2. Ne segue

$$\boxed{b^2 = a^2.}$$

(ii) Supponiamo per assurdo che $ba = ab$. Allora, per il punto (i),

$$(ab)^2 = abab = a^2b^2 = a^4 = 1.$$

Ma $ab \notin H$, perché $b \notin H$: quindi, per ipotesi, ab ha ordine 4. Questo contraddice $(ab)^2 = 1$. Pertanto

$$\boxed{ba \neq ab.}$$

In particolare abbiamo dimostrato, senza presupporlo, che G non è abeliano.

(iii) Dal 6.7(ii), escluso il caso $ba = ab$ al punto (ii), resta

$$\boxed{ba = a^3b = a^{-1}b.}$$

Insieme al punto (i), ciò fornisce le relazioni

$$a^4 = 1, \qquad b^2 = a^2, \qquad ba = a^{-1}b. \tag{$*$}$$

Nel gruppo Q_8 definito sopra valgono

$$I^4 = I_2, \qquad J^2 = I^2 = -I_2, \qquad JI = I^{-1}J.$$

Poiché ogni elemento di G si scrive in un unico modo a^jb^ε con $0 \leq j \leq 3$ e $\varepsilon \in \{0, 1\}$, possiamo definire

$$\begin{aligned} \Psi : G &\longrightarrow Q_8, \\ a^jb^\varepsilon &\longmapsto I^jJ^\varepsilon. \end{aligned}$$

Le otto immagini sono distinte e costituiscono tutto Q_8, quindi Ψ è biiettiva. Verifichiamo che rispetta il prodotto. Da $(*)$ otteniamo, per $j, k \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} a^ja^k &= a^{j+k}, & a^j(a^kb) &= a^{j+k}b, \\ (a^jb)a^k &= a^{j-k}b, & (a^jb)(a^kb) &= a^{j-k+2}, \end{aligned}$$

con gli esponenti di a modulo 4. Le stesse quattro formule valgono in Q_8 sostituendo a, b con I, J. Ne segue che $\Psi(xy) = \Psi(x)\Psi(y)$ per ogni $x, y \in G$. Dunque Ψ è un isomorfismo, e

$$\boxed{G \cong Q_8}, \qquad a \longmapsto I, \quad b \longmapsto J, \quad ab \longmapsto K, \quad a^2 \longmapsto -I_2.$$

(iv) Sia ora G un gruppo qualsiasi di ordine 8. Per il teorema di Lagrange gli elementi possono avere ordine 1, 2, 4 o 8.

1. Se esiste un elemento di ordine 8, allora $G \cong \mathbb{Z}_8$.
2. Se non esistono elementi di ordine 8 né di ordine 4, tutti i non neutri hanno ordine 2 e il 6.6 dà $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
3. Se esiste a di ordine 4, poniamo $H = \langle a \rangle$. Se $G \setminus H$ contiene un elemento di ordine 2, il 6.8 dà $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ oppure $G \cong D_4$.
4. Se invece ogni elemento di $G \setminus H$ ha ordine 4, il punto (iii) dà $G \cong Q_8$.

I cinque casi sono dunque esaustivi. Sono anche non isomorfi tra loro: solo $\mathbb{Z}_8$ ha elementi di ordine 8; negli altri quattro gruppi i numeri di elementi di ordine 2 sono, rispettivamente, 7, 3, 5 e 1.

□

Esercizio 6.10

Testo dell'esercizio.

Sia G un gruppo con 10 elementi.

(i) Dimostrare che $G = \{1, a, a^2, a^3, a^4, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b\}$, dove $\mathrm{o}(a) = 5$ e $\mathrm{o}(b) = 2$.

(ii) Dimostrare che ba non può essere uguale a nessuno dei seguenti: $1, a, a^2, a^3, a^4, b$.

(iii) Dimostrare che, se $ba = ab$, allora $G \cong \mathbb{Z}_{10}$.

(iv) Dimostrare che $ba \neq a^2b$ e $ba \neq a^3b$.

(v) Dimostrare che, se $ba = a^4b$, allora $G \cong D_5$.

(vi) Dedurre che un gruppo di ordine 10 è isomorfo a $\mathbb{Z}_{10}$ oppure a D_5.

(vii) Estendere il ragionamento al caso $|G| = 2p$, con p primo dispari: dimostrare che $G \cong \mathbb{Z}_{2p}$ oppure $G \cong D_p$.

Soluzione.

(i) *Esistenza degli elementi richiesti.* Poiché G ha ordine pari, esiste un elemento b di ordine 2: infatti, fra i nove elementi non neutri, l'inversione $x \mapsto x^{-1}$ non può accoppiarli tutti in coppie distinte; quindi uno soddisfa $b = b^{-1}$, cioè $b^2 = 1$.

Esiste anche un elemento a di ordine 5. Altrimenti, per Lagrange, un elemento non neutro avrebbe ordine 2 oppure 10; ma un elemento di ordine 10 avrebbe quadrato di ordine 5. Dunque tutti i non neutri avrebbero ordine 2 e G sarebbe abeliano, come nel 6.6. Scelti $x \neq 1$ e $y \notin \langle x \rangle$, il sottogruppo $\langle x, y \rangle = \{1, x, y, xy\}$ avrebbe ordine 4, impossibile per Lagrange perché $4 \nmid 10$.

Poniamo $H = \langle a \rangle$; esso ha ordine 5 e quindi indice 2. È normale. Inoltre $b \notin H$ perché $\mathrm{o}(b) = 2$, mentre tutti gli elementi non neutri di H hanno ordine 5. Allora

$$\boxed{G = H \sqcup Hb = \{1, a, a^2, a^3, a^4, b, ab, a^2b, a^3b, a^4b\}.}$$

(ii) Poiché H è normale, $ba \in bH = Hb$. In particolare $ba \notin H = \{1, a, a^2, a^3, a^4\}$. Inoltre $ba \neq b$, altrimenti $a = 1$. Quindi ba non è nessuno dei sei elementi indicati. Dalla descrizione di G al punto (i), segue necessariamente

$$\boxed{ba = a^k b \quad \text{per qualche } k \in \{1, 2, 3, 4\}.} \tag{1}$$

(iii) Se $ba = ab$, i generatori a, b commutano. Dunque $G = \langle a, b \rangle$ è abeliano e i sottogruppi $H = \langle a \rangle$ e $K = \langle b \rangle$ sono normali. Poiché $|H| = 5$, $|K| = 2$, $(5, 2) = 1$ e $|G| = 5 \cdot 2$, per il *teorema numerico* e la ciclicità del prodotto di due gruppi ciclici di ordini coprimi otteniamo

$$\boxed{G \cong H \times K \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{10}.}$$

(iv) Da (1), usando $b^2 = 1$, si ha $bab = a^k$ e quindi

$$a = b(bab)b = ba^k b = (bab)^k = a^{k^2}.$$

Se $k = 2$ oppure $k = 3$, poiché $a^5 = 1$, otteniamo $a = a^4$, dunque $a^3 = 1$, in contraddizione con $\mathrm{o}(a) = 5$. Pertanto

$$\boxed{ba \neq a^2b \qquad \text{e} \qquad ba \neq a^3b.}$$

(v) Se $ba = a^4b = a^{-1}b$, allora $bab = a^{-1}$. Si hanno le relazioni

$$a^5 = 1, \qquad b^2 = 1, \qquad ba = a^{-1}b.$$

Sono le relazioni di D_5 con $r = a$ e $s = b$. L'applicazione

$$\Phi : D_5 \longrightarrow G, \qquad r^j s^\varepsilon \longmapsto a^j b^\varepsilon \quad (0 \le j \le 4,\ \varepsilon \in \{0,1\})$$

è biiettiva per la decomposizione in classi laterali del punto (i) e rispetta il prodotto, perché $sr^j = r^{-j}s$ e $ba^j = a^{-j}b$. È quindi un isomorfismo: $\boxed{G \cong D_5}$.

(vi) Dai punti (ii) e (iv) risulta che i soli casi possibili sono $ba = ab$ e $ba = a^4b$. Per (iii) e (v),

$$\boxed{G \cong \mathbb{Z}_{10} \quad \text{oppure} \quad G \cong D_5.}$$

Sono due tipi distinti: $\mathbb{Z}_{10}$ è abeliano, mentre D_5 no.

(vii) Sia $|G| = 2p$, con p primo dispari. Anche qui esiste b di ordine 2 per l'argomento di parità usato in (i). Esiste poi a di ordine p: se non esistesse, per Lagrange i non neutri avrebbero ordine 2 oppure $2p$; ma un elemento di ordine $2p$ avrebbe quadrato di ordine p. Quindi tutti i non neutri avrebbero ordine 2, il gruppo sarebbe abeliano e, scegliendo due elementi indipendenti di ordine 2, si otterrebbe un sottogruppo di ordine 4, impossibile perché $4 \nmid 2p$. Ora $H = \langle a \rangle$ ha ordine p e indice 2:

$$G = H \sqcup Hb = \{a^j, a^j b : 0 \le j \le p-1\}.$$

Come nel punto (ii), $ba = a^k b$ per un $k \in \{1, \dots, p-1\}$. Ripetendo il calcolo di (iv), $bab = a^k$ e $a = a^{k^2}$, quindi

$$p \mid (k^2 - 1) = (k-1)(k+1).$$

Essendo p primo, $k \equiv 1$ oppure $k \equiv -1 \pmod p$. Nel primo caso a e b commutano e ab ha ordine $2p$; perciò $G \cong \mathbb{Z}_{2p}$. Nel secondo caso $ba = a^{-1}b$; con $r = a$ e $s = b$ si ottengono le relazioni di D_p e l'isomorfismo esplicito

$$D_p \longrightarrow G, \qquad r^j s^\varepsilon \longmapsto a^j b^\varepsilon \quad (0 \le j < p,\ \varepsilon \in \{0,1\}).$$

In conclusione,

$$\boxed{|G| = 2p,\ p \text{ primo dispari} \quad \Longrightarrow \quad G \cong \mathbb{Z}_{2p} \text{ oppure } G \cong D_p.}$$

□