7.5 Esercizi

Esercizio 7.1 Sia G un gruppo abeliano e siano H e K sottogruppi finiti di G. Dimostrare che:

1. $|H + K|$ divide $|H||K|$;
2. se gli ordini di H e K sono coprimi. allora $H + K \cong H \times K$.

Esercizio 7.2 Sia G un gruppo abeliano di ordine n, dove $n = 28, 30, 130, 131$. Si dica per quali valori di n si puó affermare che G é necessariamente ciclico.

Esercizio 7.3 Dimostrare che se il gruppo $\mathrm{Aut}(G)$ degli automorfismi di un gruppo G é ciclico allora il gruppo é abeliano. Dedurre che un gruppo G di ordine $|G| = p^2$, con p primo e $Z(G) \neq \{1\}$, è abeliano e quindi isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^2}$ oppure a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. (Suggerimento: se $\mathrm{Aut}(G)$ é ciclico anche $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$ é ciclico e quindi esiste $x \in G$ tale che $< xZ(G) >= G/Z(G)$. Segue che per ogni $y_1, y_2 \in G$ esistono $z_1, z_2 \in Z(G), n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tali che $y_1 = x^{n_1}z_1$ $y_2 = x^{n_2}z_2$. Dimostrare che $y_1y_2 = y_2y_1$. Si dimostra che l'ipotesi $Z(G) \neq \{1\}$ è superflua cioè: un gruppo G di ordine $|G| = p^2$, con p primo è abeliano).

Esercizio 7.4 Sia G un gruppo abeliano di ordine pq, con p e q primi non necessariamente distinti. Si trovi il numero dei sottogruppi di G. (Suggerimento: usare il teorema Frobenius-Stickelberger per dimostrare che G é isomorfo a $\mathbb{Z}_{p^2}$ oppure a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ oppure a $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ con $p \neq q$. Dimostrare che il gruppo ciclico $\mathbb{Z}_{p^2}$ ha 3 sottogruppi; il gruppo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ ha 4 sottogruppi e il gruppo $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ha $p + 1$ sottogruppi).

Esercizio 7.5 Sia p un numero primo. Dimostrare che $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$. (Suggerimento: ogni atuomorfismo di $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ puó essere visto come un'isomorfismo dello spazio vettoriale $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ sul campo $\mathbb{Z}_p$).

Esercizio 7.6 Siano m e n due interi positivi coprimi. Dimostrare che ogni omomorfismo φ da $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ in se stesso ha la forma $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$, dove $\varphi_j : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$, $j = 1, 2$, sono oppurtuni omomorfismi. (Suggerimento: usare il Lemma 6.3.2, che afferma che un omomorfismo $\varphi : H \to K$ tra due gruppi H e K di ordini coprimi é banale, cioé $\ker \varphi = H$).

Esercizio 7.7 Sia G un gruppo abeliano finito generato da due elementi x, y, $G = \langle x, y \rangle$. Sia p un numero primo che divide $|G|$, ma p non divide $o(x)$. Dimostrare che p divide $o(y)$. (Suggerimento: dimostrare che $G = \langle x \rangle + \langle y \rangle$ e che, per la parte (a) dell'Esercizio 7.1, $|\langle x \rangle + \langle y \rangle|$ divide $|\langle x \rangle||\langle y \rangle|$).

Esercizio 7.8 Sia G un gruppo abeliano finito e sia $\hat{G}$ l'insieme di tutti gli omomorfismi $\varphi : G \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, sul quale definiamo un'operazione

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Dimostrare che $\hat{G}$ é un gruppo e che se $G \cong H \times K$ allora $\widehat{H \times K} \cong \hat{H} \times \hat{K}$.

Esercizio 7.9 Sia $\hat{G}$ come nell'Esercizio 7.8. Si dimostri che se G é ciclico allora $\hat{G} \cong G$. (Suggerimento: per $n \geq 2$ si dimostri che l'applicazione $\hat{\mathbb{Z}}_n \to U_n$, $\varphi \mapsto \varphi([1]_n)$, dove U_n é il sottogruppo di $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ costituito dalle radici n-esime dell'unitá, é un isomorfismo).

Esercizio 7.10 Sia $\hat{G}$ come nell'Esercizio 7.8. Si dimostri che $\hat{G} \cong G$. (Suggerimento: usare gli Esercizi 7.8, 7.9 e il Teorema di Frobenius-Stickelberger).