6.4 Esercizi

Esercizio 6.1 Dimostrare che $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ é isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$. (Suggerimento: si usi $\mathbb{Z}_2 \cong \{\pm 1, \cdot\}$ e si consideri l'applicazione $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2 \to R^*, (s, x) \mapsto (-1)^s e^x$).

Esercizio 6.2 Sia G un gruppo e sia $D = \{(x, x) \in G \times G \mid x \in G\}$. Si dimostri che:

1. D é un sottogruppo di $G \times G$;
2. D é normale in $G \times G$ se e solo se G é abeliano.

Esercizio 6.3 Sia G un gruppo e siano N_j, $j = 1, \ldots, r$, sottogruppi normali di G tali che:

1. $N_i \cap N_j = \{1\}, \forall i, j = 1, \ldots, n, i \neq j$;
2. $G = N_1 \ldots N_r$.

Dimostrare con un esempio che G non é isomorfo a $N_1 \times \cdots \times N_r$ (e che quindi il *Teorema prodotto* visto a lezione non si estende in questo modo a piú di due sottogruppi).

Esercizio 6.4 Sia G un gruppo abeliano e $f : G \to G$ un omomorfismo di gruppi tale che $f \circ f = f$. Dimostrare che $G \cong f(G) \times \operatorname{Ker} f$.

Esercizio 6.5 Sia $f_1 : K \to G$ e $f_2 : K \to H$ due omomorfismi e sia

$$F : K \to G \times H,\ x \mapsto (f_1(x), f_2(x)).$$

Dimostrare che:

1. F é un omomorfismo e $p_i \circ F = f_i$, $i = 1, 2$;
2. ogni omomorfismo $\tilde{F} : K \to G \times H$ si ottiene in questo modo cioé gli omomorfismi $f_1 : K \to G$ e $f_2 : K \to H$ dati da $f_i = p_i \circ \tilde{F}$, $i = 1, 2$, danno luogo ad un omomorfismo $F : K \to G \times H$ descritto sopra, che coincide con $\tilde{F}$.

Esercizio 6.6 Sia G un gruppo di 8 elementi. Dimostrare che se tutti gli elementi di G hanno ordine 2, allora G è abeliano ed esistono $a, b, c \in G$ distinti tra loro e dall'elemento neutro tali che

$$G = \{1, a, b, c, ab, ac, bc, abc\}$$

e quindi $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Esercizio 6.7 Sia G un gruppo di 8 elementi, sia $a \in G$ tale che $o(a) = 4$ e sia $H = \langle a \rangle = \{1, a, a^2, a^3\}$.

(i) Dimostrare che per ogni $b \in G \setminus H$ si ha:

$$G = \{1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}.$$

(ii) Dedurre dal punto (i) che per ogni $b \in G \setminus H$ si hanno tre possibilità:

1. $ba = ab$
2. $ba = a^2b$
3. $ba = a^3b$

Esercizio 6.8 Sia G un gruppo di 8 elementi, sia $a \in G$ tale che $o(a) = 4$ e $H = \{1, a, a^2, a^3\}$ come nell'Esercizio 6.7. Supponiamo che esista $b \in G \setminus H$ tale che $o(b) = 2$.

(i) Dimostrare che $ba \neq a^2b$ e quindi, dal punto (ii) dell'Esercizio 6.7, $ba = ab$ oppure $ba = a^3b$.

(ii) Dimostrare che se $ab = ba$ allora G è abeliano è isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

(iii) Dimostrare che se $ba = a^3b$ allora G è isomorfo al gruppo diedrale D_4.

Esercizio 6.9 Sia G un gruppo di 8 elementi, sia $a \in G$ tale che $o(a) = 4$ e $H = \{1, a, a^2, a^3\}$ come nell'Esercizio 6.7. Supponiamo che tutti gli elementi di $G \setminus H$ abbiamo ordine 4.

(i) Dimostrare che se $b \in G \setminus H$ allora $a^2 = b^2$.

(ii) Dedurre dal punto (i) che $ba \neq a^2b$ e $ba \neq ab$.

(iii) Dedurre dal punto (ii) dell'Esercizio 6.7 che $ba = a^3b$ e che quindi G è isomorfo al gruppo dei quaternioni Q_8.

(iv) Usare il punto precedente e gli Esercizi 6.6, 6.7 e 6.8 per dimostrare che un gruppo G di ordine 8 è isomorfo ad uno dei seguenti cinque gruppi:

$$\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4,\ D_4,\ Q_8.$$

Esercizio 6.10 Sia G un gruppo con 10 elementi.

(i) Dimostrare che

$$G = \{1, a, b, b^2, b^3, b^4, ab, ab^2, ab^3, ab^4\},$$

dove $o(a) = 2$ e $o(b) = 5$.

(ii) Dimostrare che ba non puó essere uguale a: 1, a, b, b^2, b^3, b^4.

(iii) Dimostrare che se $ba = ab$ allora $G \cong \mathbb{Z}_{10}$.

(iv) Dimostrare che $ba \neq ab^2$ e $ba \neq ab^3$.

(v) Dimostrare che se $ba = ab^4$ allora G è isomorfo al gruppo diedrale D_5.

(vi) Dedurre che un gruppo G di ordine 10 é isomorfo a $\mathbb{Z}_{10}$ oppure a D_5.

(vii) Estendere il ragionamento precedente per dimostrare che un gruppo G di ordine $|G| = 2p$, con p primo dispari. è isomorfo a $\mathbb{Z}_{2p}$ oppure a D_p.