

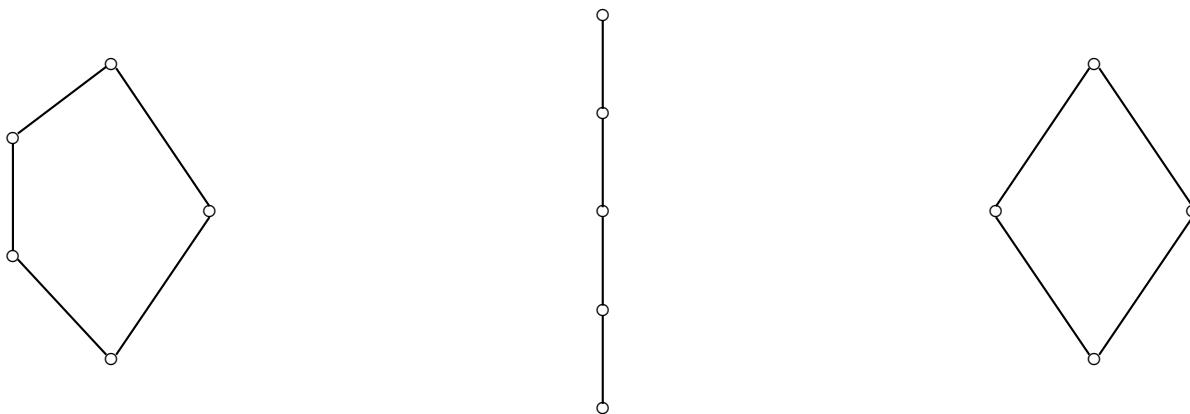
NOTE SUI RETICOLI

I reticoli possono essere definiti equivalentemente (come proveremo) come strutture relazionali oppure come strutture algebriche dotate di due operazioni. Prima di introdurre la definizione relazionale ricordiamo che, dato un insieme parzialmente ordinato (L, \leq) (un insieme non vuoto L dotato di una relazione d'ordine parziale), l'estremo superiore $\sup\{a, b\}$ di due elementi $a, b \in L$ è il più piccolo maggiorante del sottoinsieme $\{a, b\}$ ovvero $a, b \leq \sup\{a, b\}$ e $\forall c \in L$ tale che $a \leq c$ e $b \leq c$, $\sup\{a, b\} \leq c$. Analogamente l'estremo inferiore $\inf\{a, b\}$ è il più grande maggiorante del sottoinsieme $\{a, b\}$ ovvero $\inf\{a, b\} \leq a, b$, $\forall c \in L$ tale che $c \leq a, b$ si ha $c \leq \inf\{a, b\}$

Definizione 1 (Reticolo in senso relazionale). Un insieme parzialmente ordinato (L, \leq) è un *reticolo* se, per ogni $a, b \in L$, esistono, in L , l'estremo superiore $\sup\{a, b\}$ e l'estremo inferiore $\inf\{a, b\}$.

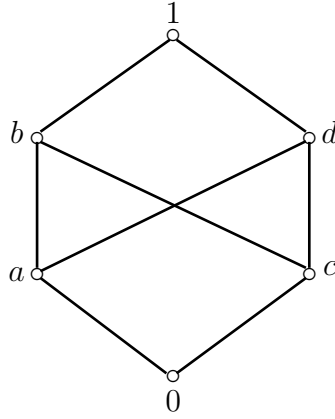
È immediato verificare che \sup e \inf di una qualsiasi coppia elementi, qualora esistano, sono unici.

Gli insieme parzialmente ordinati, e quindi anche i reticoli, possono essere facilmente visualizzati attraverso un diagramma. In particolare, ad ogni insieme (finito) parzialmente ordinato (X, \leq) è possibile associare un diagramma noto come diagramma di Hasse. In particolare, disegneremo un punto \circ per ogni elemento di X e un segmento che colleghi due elementi $x, y \in X$ che sono in relazione ($x \leq y$): in particolare, disporremo spazialmente l'elemento x più in basso rispetto a y , in modo che il segmento vada interpretato "dal basso verso l'alto" (invece di scrivere una freccia al posto del segmento, come usuale, ad esempio, per i grafi). Elenchiamo esempi di diagrammi di Hasse associati ad insiemi parzialmente ordinati.



Se tra due elementi non vi è nessun segmento significa che tali elementi sono

incomparabili nel senso dell'ordine ($x \not\leq y$ e $y \not\leq x$). Nel caso del diagramma di Hasse al centro, ogni coppia di elementi è comparabile tra loro ($x \leq y$ oppure $y \leq x$): in questo caso la relazione d'ordine si dice totale, o lineare. Osserviamo che i diagrammi di Hasse disegnati sopra rappresentano esempi di reticoli. Mentre il seguente rappresenta un insieme parzialmente ordinato che non è un reticolo (ad esempio l'inf tra b e d non esiste).



Esempio 1. Sia $|$ la relazione di divisibilità sull'insieme dei numeri naturali: $(\mathbb{N}, |)$ è un reticolo. Infatti $|$ risulta essere una relazione d'ordine parziale e, per ogni coppia di elementi $m, n \in \mathbb{N}$, $\sup\{m, n\} = mcm(m, n)$ e $\inf\{m, n\} = MCD(m, n)$.

Definiamo a questo punto i reticoli come insiemi dotati di due operazioni (binarie).

Definizione 2 (Reticolo in senso algebrico). Un insieme (L, \wedge, \vee) dotato di due operazioni \wedge e \vee (che chiameremo “meet” e “join”, rispettivamente) è un reticolo se soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c, & a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c; & \text{(Associatività)} \\ a \wedge b &= b \wedge a, & a \vee b &= b \vee a; & \text{(Commutatività)} \\ a \wedge a &= a, & a \vee a &= a; & \text{(Idempotenza)} \\ a \wedge (a \vee b) &= a, & a \vee (a \wedge b) &= a, & \text{(Assorbimento)} \end{aligned}$$

per ogni $a, b, c \in L$.

Un reticolo (L, \wedge, \vee) è dunque un'algebra le cui operazioni (\wedge, \vee) sono entrambe associative, commutative, idempotenti e soddisfano la legge di assorbimento.

Esempio 2. Sia X un insieme e $\mathcal{P}(X)$ l'insieme potenza (l'insieme di tutti i sottoinsiemi di X). Allora $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ è un esempio di reticolo.

Forniremo molti altri esempi di reticoli (si veda l'Esempio 4) dopo aver provato alcuni risultati.

Lemma 1. Sia (L, \wedge, \vee) un reticolo (nel senso della Definizione 2). Allora, per ogni $a, b \in L$, $a \wedge b = a$ se e solo se $a \vee b = b$.

Dimostrazione. (\Rightarrow) Supponiamo $a \wedge b = a$, per $a, b \in L$; allora $a \vee b = (a \wedge b) \vee b = b \vee (a \wedge b) = b$.

(\Leftarrow) Supponiamo $a \vee b = b$, allora $a \wedge b = a \wedge (a \vee b) = a$.

Si osservi che, in entrambe le direzioni, abbiamo applicato la proprietà di assorbimento. \square

Mostriamo ora che le due definizioni di reticolo fornite sono effettivamente equivalenti.

Teorema 1. *Le definizioni 1 e 2 di reticolo sono equivalenti.*

Dimostrazione. Mostriamo prima che, dato un reticolo (L, \wedge, \vee) nel senso della Definizione 2, allora è possibile definire su L una relazione d'ordine parziale tale che esistano sup e inf, per ogni coppia di elementi $a, b \in L$. Per ogni $a, b \in L$, definiamo $a \leq b$ se e solo se $a \wedge b = a$ (equivalentemente, per il Lemma 1, $a \vee b = b$). Mostriamo che (L, \leq) è un reticolo nel senso della Definizione 1. Iniziamo verificando che la relazione \leq è un ordine parziale su L .

(R) $a \leq a$, $\forall a \in A$, perché $a \wedge a = a$.

(Anti-sim) Siano $a \leq b$ e $b \leq a$, per qualche $a, b \in L$. Allora $a \wedge b = a$ e $b \wedge a = b$; quindi $a = a \wedge b = b \wedge a = b$.

(Trans) Siano $a \leq b$ e $b \leq c$, per qualche $a, b, c \in L$. Allora $a \wedge b = a$ e $b \wedge c = b$. Quindi $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$, ovvero $a \leq c$.

Per ogni coppia di elementi $a, b \in L$, definiamo $\sup\{a, b\} := a \vee b$ e $\inf\{a, b\} := a \wedge b$. Verifichiamo immediatamente che $\inf\{a, b\}$ e $\sup\{a, b\}$ appena definiti sono un minorante (maggiorante, rispettivamente) degli elementi a, b . Si ha $(a \wedge b) \wedge a = a \wedge (b \wedge a) = a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge a) \wedge b = a \wedge b$, che mostra $a \wedge b \leq a$ (e, analogamente $a \wedge b \leq b$). Osserviamo che $a \vee (a \wedge b) = (a \vee a) \wedge b = a \wedge b$, ovvero, per il Lemma 1, $a \leq a \vee b$ (analogamente si mostra che $b \leq a \vee b$).

Per mostrare che $a \wedge b$ e $a \vee b$ sono il più grande minorante e il più piccolo maggiorante, rispettivamente, consideriamo $c \in L$ tale che $c \leq a$ e $c \leq b$. Allora $c \wedge a = c$ e $c \wedge b = c$, quindi $c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$, cioè $c \leq a \wedge b$ ($a \wedge b$ è il più grande minorante di $\{a, b\}$). Sia ora $d \in L$ un maggiorante di a e b , $a, b \leq d$. Sfruttando il Lemma 1, $a \vee d = d$ e $b \vee d = d$, ma quindi $d \vee (a \vee b) = (d \vee a) \vee b = (a \vee d) \vee b = d \vee b = d$, ovvero $a \vee b \leq d$. Abbiamo quindi mostrato che (L, \vee) è un reticolo nel senso della Definizione 1.

Viceversa, sia (L, \vee) un reticolo nel senso della Definizione 1, ovvero, per ogni coppia di elementi $a, b \in L$ esistono (in L) $\sup\{a, b\}$ e $\inf\{a, b\}$. Definiamo allora le operazioni di “meet” e “join” come segue:

$$a \wedge b := \inf\{a, b\} \qquad a \vee b := \sup\{a, b\}.$$

È immediato verificare che \wedge e \vee così definite soddisfano tutte le proprietà della Definizione 2. \square

Alla luce del Teorema 1, d'ora in avanti, parlando di reticoli, penseremo un reticolo L come una struttura algebrica dotata di due operazioni (\wedge e \vee) e, al contempo, di una relazione d'ordine \leq definita come $a \leq b = a$ se e solo se $a \wedge b = a$ (equivalentemente, per il Lemma 1, se $a \vee b = b$), in cui gli elementi $a \wedge b$ e $a \vee b$ sono l'inf e il sup, rispettivamente, di $\{a, b\}$, per ogni $a, b \in L$.

Osservazione 1. La relazione d'ordine parziale sul reticolo $\mathcal{P}(X)$ introdotto nell'Esempio 2 è la relazione di inclusione \subseteq fra sottoinsiemi di X .

Definizione 3. Un reticolo (L, \wedge, \vee) si dice *limitato* se esistono gli elementi neutri per le operazioni \wedge e \vee . Denoteremo con 1 e 0 , rispettivamente, l'elemento neutro di \wedge e \vee , ovvero $a \wedge 1 = a$ e $a \vee 0 = a$, per ogni $a \in L$.

Osservazione 2. Un reticolo (L, \wedge, \vee) in cui esistono gli elementi neutri per le due operazioni si dice *limitato* perché è "limitato" nel senso della relazione d'ordine \leq . Infatti, gli elementi neutri 0 e 1 coincidono con gli elementi minimo e massimo rispettivamente dell'ordine \leq . Infatti, per ogni $a \in L$, $0 \leq a \leq 1$, perché $a \vee 0 = a$ (quindi $0 \leq a$ per il Lemma 1) e $a \wedge 1 = a$. Inoltre, in ogni reticolo limitato vale $a \wedge 0 = (a \vee 0) \wedge 0 = 0$ e $a \vee 1 = (a \wedge 1) \vee 1 = 1$, per ogni $a \in L$. \square

Definizione 4. Un reticolo (L, \wedge, \vee) si dice *distributivo* se soddisfa le seguenti proprietà:

$$(D1) \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c);$$

$$(D2) \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

per ogni $a, b, c \in L$.

In un reticolo distributivo valgono la proprietà distributiva sia di \wedge rispetto a \vee che di \vee rispetto a \wedge (diversamente, ad esempio, di quanto accade per gli anelli dove il prodotto è distributivo rispetto alla somma ma non viceversa). Si può dimostrare che un reticolo (L, \wedge, \vee) soddisfa l'equazione (D1) se e solo se soddisfa (D2).

Esempio 3. Il reticolo $\mathcal{P}(X)$ introdotto nell'Esempio 2 è un esempio di reticolo distributivo e limitato: X e \emptyset sono gli elementi neutri delle operazioni \cap e \cup .

Osservazione 3. Non ogni reticolo è distributivo. Ad esempio, dei tre reticoli rappresentati dai diagrammi di Hasse all'inizio della pagina 2, il secondo è distributivo (non è difficile dimostrare che ogni insieme totalmente ordinato è un reticolo distributivo), mentre il primo e il terzo non lo sono. È possibile dimostrare (è un teorema dovuto a Birkhoff) che un reticolo è distributivo se e solo se non può contenere cinque elementi disposti come nei diagrammi del primo e terzo reticolo a pagina 2.¹ \square

Introduciamo ora il concetto di reticolo completo, che ci permetterà di fornire molti esempi di strutture che formano un reticolo.

Definizione 5. Un reticolo L si dice *completo* se, per ogni $A \subseteq L$ esistono (in L) $\sup(A)$ e $\inf(A)$. In un reticolo completo normalmente si indicano $\sup(A) = \bigvee A$ e $\inf(A) = \bigwedge A$.

Osservazione 4. Ogni reticolo L finito è completo. Infatti, sia $A \subseteq L$, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ (per qualche $n \in \mathbb{N}$), allora $\bigvee A = a_1 \vee \dots \vee a_n$ e $\bigwedge A = a_1 \wedge \dots \wedge a_n$.

¹Più propriamente andrebbe detto che un reticolo è distributivo se e solo se non contiene sottoreticoli isomorfi a M5 e N5 (il primo e terzo nel disegno a pagina 2).

Mostriamo ora che, in realtà, la sola esistenza di estremi superiori (o inferiori) per sottoinsiemi arbitrari di un reticolo è sufficiente affinché esso sia completo.

Proposizione 1. *Sia L un reticolo tale che $\bigwedge A$ oppure $\bigvee A$ esiste per ogni $A \subseteq L$. Allora L è un reticolo completo.*

Dimostrazione. Supponiamo che, per ogni $A \subseteq L$, esista (in L) l'inf $\bigwedge A$. Sia A^m l'insieme di tutti i maggioranti di A in L , ovvero $x \in A^m$ se e solo se $a \leq x$ per ogni $a \in A$. Allora l'elemento $\bigvee A = \bigwedge A^m$ (il secondo esiste per ipotesi). Infatti $\bigvee A = \bigwedge A^m$ è un maggiorante di ogni $a \in A$. Inoltre, se c è un qualsiasi maggiorante di A (ovvero $a \leq c, \forall a \in A$), allora $c \in A^m$ e quindi $\bigwedge A^m \leq c$. Si prova analogamente l'esistenza di $\bigwedge A$, per ogni $A \subseteq L$, supponendo che esista $\bigvee A$, per ogni $A \subseteq L$. \square

Osserviamo che il contenuto della Proposizione 1 è stato già più volte utilizzato nel corso di Algebra, ad esempio per definire i concetti di sottogruppo, sottoanello e ideale generato da un insieme, dopo aver mostrato che, per esiste l'inf di una famiglia arbitraria di sottogruppi, sottoanelli e ideali (sinistri, destri o bilateri): in tutti i casi menzionati l'inf è l'intersezione.

Esempio 4. (1) Sia G un gruppo. Allora l'insieme $(Sub(G), \cap, \vee)$ dei sottogruppi di G è un reticolo completo con le operazioni di intersezione (l'intersezione arbitraria di sottogruppi è un sottogruppo) e, dove indichiamo con \vee l'operazione di sottogruppo generato, ovvero $G_1 \vee G_2 = \langle G_1, G_2 \rangle$, per ogni $G_1, G_2 \in Sub(G)$. In questo caso, la relazione d'ordine nel reticolo $Sub(G)$ è data dall'inclusione insiemistica.

Il reticolo $Sub(G)$ è un esempio di reticolo non distributivo: si considerino, ad esempio, i sottogruppi di S_3 , $H = \langle (123) \rangle$, $K = \langle (12) \rangle$, $L = \langle (13) \rangle$, per cui si verifica che $(H \vee K) \cap L \neq (H \cap L) \vee (K \cap L)$.

(2) Sia G un gruppo. L'insieme dei sottogruppi normali $(\mathcal{N}(G), \cap, \vee)$ è un reticolo completo (con le medesime operazioni dell'esempio precedente).

(3) Sia A un anello. Gli insiemi dei sottoanelli $(Sub(A), \cap, \vee)$ e degli ideali (sinistri, destri o bilateri) $(Id(A), \cap, \vee)$ sono esempi di reticoli completi. In entrambi i casi, l'inf coincide con l'intersezione e \vee con l'operazione di sottoanello generato (ideale generato, rispettivamente).

(4) Sia X uno spazio topologico. L'insieme degli aperti $\mathcal{O}(X)$ è un esempio di reticolo completo. Il sup è l'unione (l'unione arbitraria di insiemi aperti è aperto) mentre l'inf è l'interno dell'intersezione (un'intersezione arbitraria di insiemi aperti, in generale non è aperto).

Anche l'insieme dei chiusi $\mathcal{C}(X)$ su uno spazio topologico X è un esempio di reticolo completo. Sappiamo infatti che l'intersezione arbitraria di chiusi è un chiuso e dunque per qualsiasi sottoinsieme in $\mathcal{C}(X)$ esiste l'inf. In questo caso il sup non è l'unione (l'unione arbitraria di chiusi potrebbe non essere un chiuso) ma la chiusura dell'unione.

- (5) Sia $\mathcal{Conv}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme dei sottoinsiemi convessi di \mathbb{R}^n . È facile dimostrare che dato un insieme $\{C_i\}_{i \in I}$ di convessi in \mathbb{R}^n , $\bigcap_{i \in I} C_i$ è un insieme convesso. Ne deduciamo che $(\mathcal{Conv}(\mathbb{R}^n), \cap, \vee)$ è un reticolo completo, dove \vee è l'operazione di convesso generato (l'unione di convessi, in generale, non è un insieme convesso).
- (6) Gli insiemi (\mathbb{N}, \leq) , (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{Q}, \leq) , (\mathbb{R}, \leq) dove \leq indica l'usuale relazione di minore o uguale (chiameremo quest'ordine l'ordine naturale) sono esempi di reticoli (non completi).

Osservazione 5. Un reticolo (L, \wedge, \vee) completo è anche limitato. L'estremo superiore è $1 = \bigwedge \emptyset$ e quello inferiore è $0 = \bigvee \emptyset$. Osserviamo infatti che $\forall x \in L$, x è, banalmente, sia un maggiorante che un minorante dell'insieme vuoto. Essendo L completo, $\bigwedge \emptyset$ e $\bigvee \emptyset$ esistono: per definizione, $\bigwedge \emptyset$ è il più grande di tutti i minoranti dell'insieme \emptyset , ma allora $\bigwedge \emptyset$ coincide con l'elemento massimo in L (rispetto all'ordine) dal momento che ogni elemento in L è minorante di \emptyset . Analogamente, $\bigvee \emptyset$ è il più piccolo di tutti i maggioranti di \emptyset , dunque è l'elemento minimo in L . Osserviamo anche che, se un reticolo L è limitato, allora l'estremo inferiore $0 = \inf(L)$ e l'estremo superiore $1 = \sup(L)$. Combinando quanto appena detto, otteniamo che se L è completo allora ha estremo inferiore $0 = \bigvee \emptyset = \bigwedge L$ e $1 = \bigwedge \emptyset = \bigvee L$.

Osserviamo infine che esistono reticoli limitati ma non completi. Siano $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ e $S' = \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$; l'insieme $S \cup S', \leq$ (dove \leq è l'ordine naturale in \mathbb{R} è un reticolo limitato (1 e -1 sono gli elementi massimo e minimo rispettivamente) ma non completo, perché sia S non ammette inf e S' non ammette sup ($0 \notin X$). \square