Università degli studi di Cagliari

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

LE RETI NEGLI SPAZI TOPOLOGICI

Relatore:
Prof. Andrea Loi

Presentata da:
Silvia Perra

Anno Accademico 2006/07

Introduzione

Le reti, o "supersuccessioni", rappresentano un concetto molto importante in topologia.
I primi a sviluppare questa teoria furono E.H.Moore [1] (nel 1915) e Smith (1922), mentre Birkoff[2](1937) le applicò alla topologia e Tukey (1940) e Kelley (1950-1955) si occuparono dei successivi sviluppi. Il termine "rete" (dall'inglese *net*) fu coniato da Kelley nel 1950.
Le reti sono state introdotte per generalizzare il concetto di successione. Una successione è una funzione avente per dominio l'insieme dei naturali e per codominio uno spazio topologico qualunque; mentre una rete ha per dominio un insieme, che diremo *diretto*, dotato di una particolare relazione d'ordine e per codominio lo stesso spazio topologico. In questo modo indeboliamo la relazione d'ordine sul dominio della funzione, infatti l'introduzione di un insieme diretto, come vedremo, ci permetterà di far svolgere alle reti lo stesso ruolo che rivestono le successioni in spazi soddisfacenti il primo assioma di numerabilità.
In questa tesi analizzeremo alcuni problemi che nascono con lo studio delle successioni in un generico spazio topologico e vedremo come le reti potranno risolverli.

[1]Eliakim Hastings Moore(1862- 1932)
[2]George David Birkhoff (1884 - 1944)

La tesi è organizzata come segue.
Nel primo capitolo vengono richiamati alcuni concetti di topologia generale utili per la trattazione successiva. Per approfondimenti si vedano i testi [2], [4] e [5] presenti in bibliografia.
Nel secondo capitolo vengono sviluppate le successioni e vengono dimostrate in dettaglio le proprietà di cui godono, sia negli spazi metrici che negli spazi topologici generici.
Nel terzo e ultimo capitolo, che rappresenta il cuore della tesi, analizziamo le reti, la loro convergenza e le relative proprietà (si vedano i testi [4]) e [7]).
Infine, nell'appendice trattiamo, per completezza, gli spazi topologici compatti e il loro legame con le successioni (vedi [2] e [5]).

Indice

Capitolo 1

Richiami

In questo capitolo richiamiamo alcuni importanti concetti di topologia tratti dai testi [2], [3], [5], [6] e [8].

1.1 Gli spazi topologici

Definizione 1.1.1. *Una topologia $\mathcal{T}$ su un insieme non vuoto X è una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ [1] di X che soddisfa i seguenti assiomi:*

T_1. *$\emptyset$ e $X \in \mathcal{T}$;*

T_2. *$\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{T}$ ogni volta che $A_j \in \mathcal{T}$;*

T_3. *$A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$ ogni volta che A_1 e $A_2 \in \mathcal{T}$.*

Gli elementi della topologia $\mathcal{T}$ si dicono *aperti* e l'insieme X si chiama *spazio topologico* e si indica con $(X, \mathcal{T})$.

Definizione 1.1.2. *Diremo che N è un intorno di $x \in X$ se esiste $A \in \mathcal{T}$ tale che $x \in A \subset N$.*

[1] $\mathcal{P}(x)$ è l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di X, detto *insieme delle parti di X*.

Osservazione 1.1.1. Denotiamo con $\mathcal{N}(x)$ la famiglia di intorni di $x \in X$ e $\mathcal{N}(x) \neq \emptyset$ perchè X è sicuramente un intorno di x.

Definizione 1.1.3. *Sia X uno spazio topologico e S un sottoinsieme di X. Un punto $x \in X$ si dice interno ad S se esiste un intorno di x tutto contenuto in S. L'insieme dei punti interni ad S si chiama* interno di S *e si indica con Int(S).*

Definizione 1.1.4. *Sia X uno spazio topologico e S un sottoinsieme di X. Un sottoinsieme S di X è un insieme chiuso se e solo se il suo complementare $X \setminus S$ è un insieme aperto.*

Definizione 1.1.5. *Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico. X la chiusura di S, che indichiamo con $\overline{S}$, è il più piccolo sottoinsieme chiuso di X contenente S. I punti di $\overline{S}$ si dicono punti di aderenza o di chiusura di S.*

Definizione 1.1.6. *Sia X uno spazio topologico e S un sottoinsieme di X. Un punto $x \in X$ si dice punto di accumulazione dell'insieme $S \subset X$ se ogni intorno di x contiene almeno un punto di S diverso da x, cioè*

$$(N \setminus \{x\}) \cap S \neq \emptyset \text{ per ogni } N \in \mathcal{N}(x).$$

L'insieme dei punti di accumulazione di S si chiama derivato e si indica con $D(S)$.

Il prototipo di spazio topologico è lo *spazio metrico* che ora studiamo.
Consideriamo una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$, detta *distanza*, con $X \neq \emptyset$, tale che per ogni $x, y, z \in X$ si abbia:

1. $d(x, y) \geq 0$;

2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

3. $d(x, y) = d(y, x)$;

4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Definizione 1.1.7. *La coppia* (X, d) *si dirà* spazio metrico.

Definizione 1.1.8. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico, se* $x \in X$ *e* $r > 0$*, si chiama bolla di centro* x *e raggio* r *l' insieme*

$$D_r(x) = \{y \in X | d(x, y) < r\}.$$

Osservazione 1.1.2. Uno spazio metrico è dotato della struttura di spazio topologico in cui gli aperti sono unioni di bolle.

Esempio 1.1.1. $(\mathbb{R}^n, d)$, con $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$ (detta *metrica euclidea o standard*) è uno spazio metrico.

1.2 Alcuni esempi di topologie

Nei capitoli successivi faremo uso di alcune delle topologie più semplici :

1. Topologia indotta: sia X un insieme non vuoto e $S \subset X$ un suo sottoinsieme. Definiamo una topologia su S, detta indotta, $\mathcal{T}_S = \{A \cap S | A \in \mathcal{T}\}$ con $S \subset X$ un sottoinsieme qualsiasi ;

2. Topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$: è la topologia indotta dalla distanza definita nell'esempio 1.1.1 ;

3. Topologia banale: sia X un insieme non vuoto e $S \subset X$ un suo sottoinsieme. Definiamo una topologia su X, detta banale, $\mathcal{T}_{ban} = \{X, \emptyset\} \subset \mathcal{P}(X)$, è la topologia i cui aperti sono i soli insieme vuoto e l'insieme X stesso ;

4. Topologia discreta: sia X un insieme non vuoto e $S \subset X$ un suo sottoinsieme. Definiamo una topologia su X, detta discreta: $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{P}(X)$, è la topologia i cui aperti sono tutti i possibili sottoinsiemi di X ;

5. Topologia cofinita: sia X un insieme non vuoto e $S \subset X$ un suo sottoinsieme. Definiamo una topologia su X, detta cofinita, $\mathcal{T}_{cof} = \{A \in \mathcal{T}_{cof} : X \setminus A$ è un numero finito di punti$\}$;

6. Topologia conumerabile: sia X un insieme non vuoto e $S \subset X$ un suo sottoinsieme. Definiamo una topologia su X, detta conumerabile, $\mathcal{T}_{con} = \{A \in \mathcal{T}_{con} : X \setminus A$ è un insieme numerabile$\}$;

7. Topologia degli intervalli chiusi a sinistra: è la topologia definita su $\mathbb{R}$ i cui aperti sono della forma $[a, b), a < b, a, b \in \mathbb{R}$;

8. Topologia degli intervalli chiusi a destra : è la topologia definita su $\mathbb{R}$ i cui aperti sono della forma $(a, b], a < b, a, b \in \mathbb{R}$.

1.3 Basi e sottobasi

Concetti fondamentali nello studio degli spazi topologici sono quelli di *base* e di *sottobase*. Iniziamo con due definizioni equivalenti di base.

Definizione 1.3.1. *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, consideriamo una famiglia di aperti di X, $\mathcal{B} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Diremo che $\mathcal{B}$ è una base per la topologia $\mathcal{T}$ se per ogni aperto $A \in \mathcal{T}$, si ha che $A = \bigcup_{j \in J} B_j$, con $B_j \in \mathcal{B}$.*

Definizione 1.3.2. *Per ogni aperto $A \in \mathcal{T}$ e per ogni $x \in X$ tale che $x \in A$, esiste un aperto $B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subset A$.*

La dimostrazione che le definizioni 1.3.1 e 1.3.2 sono equivalenti segue.
Infatti, sia $x \in A = \bigcup_{j \in J} B_j$ allora $x \in B_{j_0} \subset A$, per un certo $B_{j_0} \in \mathcal{B}$.
Viceversa, per ogni $x \in X$ e per ogni $A \in \mathcal{T}$, con $x \in A$, esiste $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subset A$ vale per ogni x e si ha che

$$\bigcup_{x \in A} B_x = A.$$

Esempio 1.3.1. Consideriamo $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ (vedi Paragrafo 1.2 Punto 2), una base per questo spazio sarà

$$\mathcal{B} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Per un qualunque $A \in \mathcal{E}$ aperto, fissato un $x \in A$ scriveremo

$$A = \bigcup_{x \in A} (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

per un $\varepsilon > 0$ opportuno.

Definizione 1.3.3. *Una famiglia $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ di sottoinsiemi è una sottobase per $\mathcal{T}$ se ogni aperto $A \in \mathcal{T}$ si può scrivere come l'unione di intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$:*

$$A = \bigcup_{k \in K} (S_{j_1} \cap \cdots \cap S_{j_k}).$$

Osservazione 1.3.1. Se $\mathcal{S}$ è una sottobase, allora la famiglia $\mathcal{B}$ costituita da intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ è una base.

Definizione 1.3.4. *Se $\mathcal{S}$ è una sottobase per $\mathcal{T}$, allora per ogni $x \in X$ e per ogni $A \in \mathcal{T}$, con $x \in A$, esistono $S_1^x, \dots, S_p^x \in \mathcal{S}$ tali che $x \in (S_1^x \cap \cdots \cap S_p^x) \subset A$.*

La dimostrazione che le definizioni 1.3.3 e 1.3.4 sono equivalenti segue.
Infatti, sia $x \in A = \bigcup_{k \in K}(S_{j_1} \cap \dots \cap S_{j_k})$ allora $x \in (S_{j_{0_1}} \cap \dots \cap S_{j_{0_k}}) \subset A$, per $S_{j_{0_1}}, \dots, S_{j_{0_k}} \in \mathcal{S}$.
Viceversa, per ogni $x \in X$ e per ogni $A \in \mathcal{T}$, con $x \in A$, esiste $S^x_{j_1}, \dots, S^x_{j_k} \in \mathcal{S}$ tale che $x \in S^x_{j_1} \cap \dots \cap S^x_{j_k} \subset A$. Questo vale per ogni x e si ha che $\bigcup_{k \in K}(S^x_{j_1} \cap \dots \cap S^x_{j_k}) = A$.

Esempio 1.3.2. Consideriamo $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ (vedi Paragrafo 1.2 Punto 2), una sottobase per questo spazio sarà

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, b), (a, +\infty) | a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b\}.$$

Infatti $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$.

Definizione 1.3.5. *Fissato un punto $x \in (X, \mathcal{T})$, diremo che $\mathcal{B}_x$ è una base locale nel punto x se per ogni $A \in \mathcal{T}$ e per ogni $x \in A$ esiste un $B \in \mathcal{B}_x$ tale che $x \in B \subset A$.*

Osservazione 1.3.2. Se $\mathcal{B}$ è una base per $(X, \mathcal{T})$, allora

$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} | x \in B\}$$

è una base locale nel punto x.

Osservazione 1.3.3. Se per ogni $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ è una base locale, allora $\mathcal{B} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}_x$ è una base.

Esempio 1.3.3. (X, d) è uno spazio metrico. Per ogni $x \in X$ $\{D_r(x) | r > 0\} = \mathcal{B}_x$ è una base locale nel punto x.

1.4 Assiomi di numerabilità

Definizione 1.4.1. *Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice N_1 se esiste una base locale della topologia costituita da una quantità finita o da un'infinità numerabile di aperti.*

Esempio 1.4.1. Ogni spazio metrico (X, d) è N_1, infatti $\forall x \in X$

$$\mathcal{B}_x = \{D_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$$

è una base locale numerabile di aperti.

Definizione 1.4.2. *Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice N_2 se esiste una base della topologia costituita da una quantità finita o da un'infinità numerabile di aperti.*

Esempio 1.4.2. Lo spazio $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ è N_2. Infatti, fissato un aperto U di $\mathbb{R}^n$ e preso un $x \in U$, consideriamo un $D_r(x) \subset U$; prendiamo un $y \in \mathbb{Q}^n$ *vicino* ad x e un $D_q(y)$ con $q \in \mathbb{Q}$ e tale che $\frac{r}{3} = d(x, y) < q < \frac{r}{2}$. Allora $D_q(y) \subset D_r(x)$.
Infatti, se $x \in D_q(y)$, ossia $d(x, y) = \frac{r}{3} < q$ e se $z \in D_q(y)$ allora $z \in D_r(x)$ sse $d(x, z) < r$.
Pertanto risulta:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < \frac{r}{2} + q < r.$$

Quindi la base cercata è $\{D_q(y) | q \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}^n\}$.

Notiamo che uno spazio topologico che sia N_2 è anche N_1, infatti se $\mathcal{B}$ è una base numerabile, allora

$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} : x \in \mathcal{B}\}$$

è una base locale numerabile.

Osserviamo, inoltre, che esistono spazi topologici che sono N_1 ma non N_2: ad esempio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dis})$ e $(\mathbb{R}, j_d)$.
Consideriamo il caso di $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dis})$. Questo spazio topologico è N_1 perchè $\mathcal{T}_{dis}$ (cfr. Paragrafo 1.2 Punto 4) nasce dalla metrica discreta ($\{D_{\frac{1}{n}}(x) | n \in \mathbb{N}\}$ è una base locale numerabile). Ma non è N_2:

se, per assurdo, lo fosse dovrebbe esistere una base numerabile, cioè ogni aperto si potrebbe scrivere come unione di un'infinità numerabile di aperti. Un punto è un aperto e ogni base dello spazio deve essere tale che $x \in \mathcal{B}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Ma conterrebbe un insieme non numerabile, quindi lo spazio non è N_2.

Osservazione 1.4.1. Esistono spazi non N_1 (ad esempio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$). Infatti, supponiamo per assurdo che sia N_1, con $x \in \mathbb{R}$ e che sia $\mathcal{B}_x = \{B_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ una base locale numerabile. Se consideriamo $E_n = \mathbb{R} \backslash B_n(x)$ (con n fissato), essendo $B_n(x)$ un aperto, ne consegue che E_n è costituito da un numero finito di punti. Prendendo ora $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ risulta un unione di un numero finito di punti su un insieme numerabile e, pertanto, risulta numerabile. Allora esisterà un $y \neq x$ e $y \in \mathbb{R}$, con $y \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \backslash B_n(x)) = \mathbb{R} \backslash (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n(x)) \Rightarrow y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n(x) \Rightarrow y \in B_n(x)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Prendendo $U = \mathbb{R} \backslash \{y\}$, questo risulta un aperto. Siccome $x \in U$ (perchè $x \neq y$) esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x \in B_{n_0}(x) \subset U$. Inoltre $y \in B_n(x)$, ma è impossibile perchè $x \in B_{n_0}(x)$.

Concludiamo questo paragrafo con un concetto che sarà utile per lo studio delle successioni.

Definizione 1.4.3. *Una base locale nidificata è una base locale per un punto $x \in X$, $\mathcal{B}_x = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ tale che*

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \ldots$$

Osservazione 1.4.2. In uno spazio N_1 ogni punto $x \in X$ possiede una base locale nidificata. Infatti, se $N_1, N_2, \ldots, N_n, \ldots$ è una base locale di x, allora $B_1 = N_1$, $B_2 = N_1 \cap N_2$, $B_n = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_n$

è una base locale nidificata (è una base locale perchè se A è un aperto di x, allora esiste un n_0 tale che $x \in N_{n_0} \subset A$ e quindi $x \in B_{n_0} \subset N_{n_0} \subset A$).

1.5 Proprietà di separazione

Uno *spazio di Hausdorff* (T_2) è uno spazio topologico X che soddisfa il seguente assioma:
Assioma di separazione di Hausdorff Comunque si prendano $u, v \in X$ distinti, esistono due aperti U, V di X tali che $u \in U$ e $v \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Proposizione 1.5.1. *Ogni sottospazio Y di uno spazio di Hausdorff X é di Hausdorff.*

Dimostrazione Se u, v sono due punti distinti di Y, esistono due aperti U e V di X tali che $u \in U$ e $v \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Allora $U' = U \cap Y$ e $V' = V \cap Y$ sono aperti di Y per la topologia indotta (cfr. Punto 1 del Paragrafo 1.2) tali che $u \in U'$ e $v \in V'$ e $U' \cap V' = \emptyset$.

Proposizione 1.5.2. *In uno spazio di Hausdorff X ogni punto è un sottoinsieme chiuso.*

Dimostrazione Sia $u \in X$. Per ogni $v \in X$ con $v \neq u$, esistono due aperti U e V tali che $u \in U$ e $v \in V$ con $U \cap V = \emptyset$; in particolare $v \in V \subset X \setminus \{u\}$. Quindi $X \setminus \{u\}$ è un intorno di v, è un aperto e pertanto u è chiuso.

Uno spazio topologico i cui punti siano chiusi viene detto spazio T_1.

Osservazione 1.5.1. La proposizione precedente ci dice che ogni spazio T_2 è anche T_1, ma non vale il viceversa. Ad esempio uno spazio infinito con la topologia cofinita è T_1 (perchè $X \backslash \{x\}$ è un aperto) ma non T_2. Infatti, presi $u, v \in X$ con $u \neq v$, esisteranno sempre due aperti $U = X \backslash \{x\}$ e $V = X \backslash \{y\}$, qualunque siano $x, y \in X$, tali che $U \cap V \neq \emptyset$ perchè X è infinito.

Proposizione 1.5.3. *Ogni spazio metrico (X, d) è uno spazio di Hausdorff.*

Dimostrazione Siano $x, y \in X$, $x \neq y$ e sia $d(x, y) = m$. Poniamo $U = D_{\frac{m}{2}}(x)$ e $V = D_{\frac{m}{2}}(y)$, allora U e V sono aperti, inoltre $U \cap V = \emptyset$. Infatti non può esistere un punto $z \in U \cap V$, perchè se esistesse, per la disuguaglianza triangolare, si avrebbe $\frac{m}{2} + \frac{m}{2} > d(x, z) + d(z, y) \geq d(x, y) = m$ e questo porta ad una contraddizione.

1.6 Funzioni continue

In questo paragrafo studiamo le funzioni continue e gli omeomorfismi che utilizzeremo successivamente.

Definizione 1.6.1. *Siano X ed Y due spazi topologici e un'applicazione $f : X \to Y$. Diremo che f è continua in un punto $x \in X$ se per ogni aperto V che contiene $f(x)$, esiste un aperto U tale che $x \in U$ e $f(U) \subset V$.*

Definizione 1.6.2. *Diremo che una funzione f è continua, se è continua in ogni punto $x \in X$.*

La proposizione seguente riassume tutto ciò di cui abbiamo bisogno sulle funzioni continue. Per la dimostrazione si veda il testo [5] presente in bibliografia.

Proposizione 1.6.1. *Siano X ed Y due spazi topologici e un'applicazione $f : X \to Y$ e sia $\mathcal{B}$ una base di Y e $\mathcal{S}$ una sottobase di Y. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *f è continua;*
2. *per ogni aperto A in Y, $f^{-1}(A)$ è aperto in X;*
3. *per ogni chiuso C in Y, $f^{-1}(C)$ è chiuso in X;*
4. *$f^{-1}(B)$ è aperto, per ogni $B \in \mathcal{B}$;*
5. *$f^{-1}(S)$ è aperto, per ogni $S \in \mathcal{S}$;*
6. *$f(\overline{V}) \subset \overline{f(V)}$, con $V \subset X$;*
7. *$f^{-1}(\overline{W}) \supset \overline{f^{-1}(W)}$, con $W \subset Y$;*
8. *$f^{-1}(Int(W)) \subset Int(f^{-1}(W))$.*

Esempio 1.6.1. Preso $(X, \mathcal{T}_{dis})$ e uno spazio topologico qualunque $(Y, \mathcal{T})$, allora ogni funzione $f : (X, \mathcal{T}_{dis}) \to (Y, \mathcal{T})$ è continua. Infatti, se V è un aperto di Y, $f^{-1}(V)$ è un aperto di X, dato che ogni sottoinsieme in uno spazio discreto è aperto.

Definizione 1.6.3. *Dati due spazi topologici X e Y, un omeomorfismo $f : X \to Y$ è una funzione bigettiva che sia continua e la cui inversa è continua.*

Una proprietà topologica è una proprietà invariante per omeomorfismi. Le sguenti proposizioni mostrano che T_1, T_2, N_1 e N_2 sono proprietà topologiche.

Proposizione 1.6.2. **(a)** *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico N_1, allora uno spazio topologico $(Y, \mathcal{T}')$ omeomorfo ad X è N_1.*

(b) *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico N_2, allora uno spazio topologico $(Y, \mathcal{T}')$ omeomorfo ad X è N_2.*

Dimostrazione:

(a) Sia $f : X \to Y$ un omeomorfismo. Se X è N_1, esisterà per $x \in X$ una base locale numerabile $\mathcal{B}_x$. Un omeomorfismo è una funzione bigettiva, continua e la cui inversa è continua; quindi l'immagine di un aperto è un aperto e $f(\mathcal{B}_x)$ sarà un insieme numerabile perchè f è bigettiva e la cardinalità è invariante per bigezioni. Abbiamo così ottenuto una base locale numerabile per il punto $f(x)$.

(b) Vale la stessa cosa del punto precedente, con la differenza che la base non è locale.

Proposizione 1.6.3. **(a)** *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico T_1, allora uno spazio topologico $(Y, \mathcal{T}')$ omeomorfo ad X è T_1.*

(b) *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico T_2, allora uno spazio topologico $(Y, \mathcal{T}')$ omeomorfo ad X è T_2.*

Dimostrazione

(a) Sia $f : X \to Y$ un omeomorfismo. Se X è T_1 e $x \in X$, abbiamo che $\{x\}$ è un chiuso. Se $f(\{x\}) = \{y\}$ allora $\{y\}$ è un chiuso perchè f manda chiusi in chiusi in quanto è un omeomorfismo.

(b) Sia $f : X \to Y$ un omeomorfismo e X uno spazio T_2. Per assurdo, supponiamo che presi due punti $z, w \in Y$, esistano due aperti A e B con $z \in A$ e $w \in B$ e $A \cap B \neq \emptyset$. Applicando f^{-1}:

$$\emptyset \neq f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = U \cap V,$$

con U e V aperti in X.

Se $x, y \in X$ e $x \in U$ e $y \in V$ allora $U \cap V = \emptyset$ perchè X è T_2.
Dall'assurdo discende la tesi.

Capitolo 2

Successioni

2.1 Definizioni ed esempi

Sia X uno spazio topologico e $\mathbb{N}^+$ l'insieme dei numeri naturali positivi.

Definizione 2.1.1. *Un'applicazione* $f : \mathbb{N}^+ \to X$ *si chiama* successione di elementi di X*. Per ogni* $n \in \mathbb{N}^+$ *l'immagine* $x_n = f(n)$ *si chiama* n-esimo termine della successione f*. Indicheremo la successione con* $\{x_n\}$*, ovvero identificheremo la successione con* $f(\mathbb{N}^+)$*.*

Definizione 2.1.2. *La successione* $\{x_n\}$ *si dice* convergente al punto $x \in X$ *(e* x *si dice* limite *della successione) se per ogni* $I \in \mathcal{N}(x)$ *esiste un* $n = n(I) \in \mathbb{N}^+$ *tale che* $x_m \in I$ *per ogni* $m \geq n(I)$ *e scriveremo*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

In poche parole, la definizione precedente afferma che una successione è convergente se tutti i suoi termini, tranne al più un numero finito di essi, appartengono ad ogni intorno I del punto x.

Esempio 2.1.1. Consideriamo in $\mathbb{R}$ la successione $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\}$.

- Nella topologia euclidea (vedi Paragrafo 1.2 Punto 2) la successione data converge a 0 che è anche l'unico punto di convergenza;
- nella topologia degli intervalli chiusi a sinistra (vedi Paragrafo 1.2 Punto 7) la successione data converge a 0 che è anche l'unico punto di convergenza;
- nella topologia degli intervalli chiusi a destra (vedi Paragrafo 1.2 Punto 8) la successione non converge.

Esempio 2.1.2. Consideriamo ora la successione $\{1, 2, 3, \dots\}$.

- Nella topologia ordinaria (vedi Paragrafo 1.2 Punto 2) la successione non converge;
- nella topologia degli intervalli chiusi a sinistra (vedi Paragrafo 1.2 Punto 7) la successione non converge.

Definizione 2.1.3. *Un punto x si dice di accumulazione* per una successione $\{x_n\}$ *se per ogni $I \in \mathcal{N}(x)$ e per ogni $n = n(I) \in \mathbb{N}^+$ esiste $m \geq n(I)$ tale che $x_m \in I$.*

Esempio 2.1.3. La successione $(-1)^n$ non converge (è una successione oscillante) ma ha -1 e 1 come punti di accumulazione.

Definizione 2.1.4. *Un punto x si dice di accumulazione* di una successione $\{x_n\}$ *se $x \in D(\{x_n\})$, cioè se per ogni $I \in \mathcal{N}(x)$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tale che $x_{n_0} \neq x$, $x_{n_0} \in I$.*

Definizione 2.1.5. *Una sottosuccessione di $\{x_n\}$ è una successione $\{x_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$ ottenuta in corrispondenza di una successione crescente di interi positivi $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Equivalentemente* *una sottosuccessione della successione* $f : \mathbb{N}^+ \to X$ *è una successione ottenuta come composizione* $f \circ \varrho : \mathbb{N}^+ \to X$ *dove* $\varrho : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ *è un'applicazione crescente.*

Definizione 2.1.6. *Una funzione* $f : X \to Y$ *si dice sequenzialmente continua sse per ogni successione* $\{x_n\}$ *tale che* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *si ha che* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

2.2 Proprietà delle successioni negli spazi metrici

In analisi si studia il concetto di successione in $\mathbb{R}$ e, più in generale, in uno spazio metrico.
Vediamo ora le proprietà di cui godono le successioni negli spazi metrici.

Proposizione 2.2.1. *Sia* (X, d) *uno spazio metrico, allora:*

1. *ogni successione convergente ammette un unico limite ;*

2. *sia* $S \subset X$, $x \in \overline{S} \Leftrightarrow$ *esiste una successione* $\{x_n\}$, $x_n \in S$, *tale che* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *;*

3. *sia* $S \subset X$, $x \in D(S) \Leftrightarrow$ *esiste una successione* $\{x_n\}$, $x_n \in S \cap (X \backslash \{x\})$, *tale che* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *;*

4. *sia x un punto di accumulazione* per *una successione* $\{x_n\}$ *in* X, *allora esiste una sottosuccessione* $\{x_{n_k}\}$ *di* $\{x_n\}$ *tale che* $\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = x$ *;*

5. *sia x un punto di accumulazione* di *una successione* $\{x_n\}$ *in* X, *allora esiste una sottosuccessione* $\{x_{n_k}\}$ *di* $\{x_n\}$ *tale che* $\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = x$ *;*

6. *una funzione* $f : X \to Y$ *è continua* $\Leftrightarrow$ *è sequenzialmente continua .*

Dimostrazione

1. Per assurdo supponiamo che esistano due limiti distinti y e z e poniamo $\varepsilon = \frac{d(y,z)}{2}$. Allora si avrà che esiste un ν_1 tale che $d(x_n, y) < \varepsilon$ per ogni $n > \nu_1$ ed esiste un ν_2 tale che $d(x_n, z) < \varepsilon$ per ogni $n > \nu_2$. Posto $\nu = max(\nu_1, \nu_2)$, le relazioni sopra scritte valgono contemporaneamente e, utilizzando la disuguaglianza triangolare, si ha $d(y, z) \leq d(x_n, y) + d(x_n, z) < \varepsilon + \varepsilon = d(y, z)$. Dalla contraddizione discende la tesi.

2. $\Leftarrow$ Per definizione di limite si ha che per ogni $D_r(x)$, con $r > 0$, esiste $x_n \in D_r(x)$ tale che $D_r(x) \cap S \neq \emptyset$, quindi $x \in \overline{S}$.
   $\Rightarrow$ Siccome un punto di accumulazione è un punto di chiusura, il viceversa lo trattiamo nel punto successivo.

   Se, invece, $x \in S \backslash D(S)$ allora la successione costante $\{x_n = x\}$ converge a x.

3. $\Leftarrow$ Per ogni aperto $D_r(x)$, con $x \in D_r(x)$ esiste $x_n \in S \cap (X \backslash \{x\})$ e quindi $x \in D(S)$.

   $\Rightarrow$ Viceversa, la famiglia di aperti $\mathcal{B}(x) = \{D_{\frac{1}{n}}(x) | n \in \mathbb{N}\}$ è una base locale nidificata (cfr. Definizione 1.4.3) di x tale che esiste un n_0 per cui $x \in D_{\frac{1}{n_0}}(x) \subset A$, con A aperto di X.

   Osservazione 2.2.1. Se $\mathcal{B}(x) = \{D_{\frac{1}{n}}(x) | n \in \mathbb{N}\}$ è una base locale nidificata di un punto x e $\{x_n\}$ è una successione in X tale che $x_n \in D_{\frac{1}{n}}(x)$ per ogni n, allora $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Infatti, per ogni bolla aperta $D_r(x)$ contenente x esiste un n_0 tale che $x \in D_{\frac{1}{n_0}}(x) \subset D_r(x)$ e quindi $x_n \in D_r(x)$ per ogni $n \geq n_0$.

Sia S un sottoinsieme di X e $x \in D(S)$ (risp. $x \in \overline{S}$) allora esiste una successione $\{x_n\} \in S \cap X \backslash \{x\}$ (risp. $x_n \in S$) tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Infatti sia $x \in D(S)$ e sia $\mathcal{B}(x) = \{D_{\frac{1}{n}}(x)|n \in \mathbb{N}\}$ una base locale nidificata di x. Allora esiste $x_n \in D_{\frac{1}{n}}(x)$ per ogni n e quindi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ per l'osservazione precedente.

4. Sia $\mathcal{B}(x) = \{D_{\frac{1}{n}}(x)|n \in \mathbb{N}\}$ una base locale nidificata di x. Siccome x è un punto di accumulazione per la successione $\{x_n\}$, esiste $n_1 \geq 1$ tale che $x_{n_1} \in D_1(x)$, esiste $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} \in D_{\frac{1}{2}}(x)$ e così via. Esiste quindi una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ convergente a x (per l'Osservazione 2.2.1).

5. Sia $\mathcal{B}(x) = \{D_{\frac{1}{n}}(x)|n \in \mathbb{N}\}$ una base locale nidificata di x, allora esiste $n_1 \geq 1$ tale che $x_{n_1} \in D_1(x)$. Consideriamo la successione $\{x_n, n > n_1\}$; x è un punto di accumulazione di questa successione (in quanto l'insieme degli $\{x_n, n \leq n_1\}$ è un chiuso perchè unione finita di punti che sono chiusi). Quindi esiste $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} \in D_{\frac{1}{2}}(x)$ e così via. Esiste, quindi , una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ convergente ad x (per l'Osservazione 2.2.1).

6. $\Rightarrow$ Sia $\{x_n\}$ una successione in X tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e sia $A \subset D_\varepsilon(f(x))$. Poichè f è continua in x, esiste $B \subset D_{\delta(\varepsilon)}(x)$ tale che $f(B) \subset A$. Allora esiste n_0 tale che $x_n \in B$ per ogni $n \geq n_0$ e, quindi, $f(x_n) \in f(B) \subset A$ per ogni $n \geq n_0$ e la successione $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$.
$\Leftarrow$ Viceversa, se f non fosse continua, in Y esisterebbe una

bolla $D_r(f(x))$ tale che $f^{-1}(D_r(f(x)))$ non è aperto. Ma questo significa che se $\mathcal{B}(x) = \{D_{\frac{1}{n}}(x)|n \in \mathbb{N}\}$ è una base locale nidificata di x, allora $D_{\frac{1}{n}}(x)$ non è incluso in $f^{-1}(D_r(f(x)))$ per ogni n. Sia $x_n \in D_{\frac{1}{n}}(x)$ tale che x_n non appartenga a $f^{-1}(D_r(f(x)))$, allora $f(x_n)$ non appartiene $D_r(f(x))$. Allora x_n converge a x (per l'Osservazione 2.2.1) ma $f(x_n)$ non converge ad $f(x)$ (infatti $D_r(f(x))$ è un intorno di $f(x)$ che non contiene nessun punto di $D_r(f(x))$).

2.3 Proprietà delle successioni negli spazi topologici

Cosa accade se, invece che lavorare in uno spazio metrico, studiamo le successioni in uno spazio topologico qualunque $(X, \mathcal{T})$? Analizziamo i casi precedenti.

1. Unicità del limite

Sia X un insieme non vuoto, $\mathcal{T}_{ban}$ la topologia banale su X e $\{x_n\}$ una successione in X, con $\#X \geq 2$. Osserviamo che X è l'unico insieme aperto che contiene un qualunque $x \in X$ e che, inoltre, X contiene ogni punto della successione $\{x_n\}$. Perciò la successione converge ad ogni punto di X e il limite non è unico.

Osserviamo che per avere un unico limite è sufficiente supporre che lo spazio sia T_2 e non necessariamente metrico (cfr. Proposizione 1.5.3). Infatti se per ogni coppia di punti $x, y \in X$ con $x \neq y$ esistono due aperti U e V disgiunti contenenti, rispettivamente, x e y, allora il limite sarebbe unico: infatti, se per assurdo $\{x_n\} \to x$ e $\{x_n\} \to y$, con $x \in U$ e $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$, allora questo verrebbe a contraddire la definizione di convergenza, perchè tutti i punti della successione, tranne al più un numero finito di essi, devono appartenere allo stesso intorno di x.

Osservazione 2.3.1. La sola proprietà T_1 non è sufficiente per dedurre l'unicità del limite. Ad esempio, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ (vedi Paragrafo 1.2 Punto 5) è T_1 ma non T_2 (cfr. Osservazione 1.5.1) e una qualunque successione $\{x_n\}$ con infiniti punti converge ad ogni punto dello spazio.

2. Punti di chiusura e limiti di successioni

Vale il seguente risultato:

Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X qualunque. Data una successione $\{x_n\}$, $x_n \in S$, tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow x \in \overline{S}$.

Infatti, per definizione di limite, per ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ esiste $x_n \in N$ $\Rightarrow N \cap S \neq \emptyset$, quindi x è un punto di chiusura.

Il viceversa <u>*non*</u> è vero in generale. Siccome un punto di accumulazione è anche di chiusura, rinviamo al punto successivo.

3. Punti di accumulazione e limiti di successioni

Vale il seguente risultato:

Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X qualunque. Data una successione $\{x_n\}$, $x_n \in S \cap (X \backslash \{x\})$ tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ $\Rightarrow x \in D(S)$.

Infatti, per ogni aperto A contenente x esiste $x_n \in S \cap (X \backslash \{x\})$ e quindi $x \in D(S)$. Il viceversa <u>*non*</u> è vero in generale come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.3.1. (punti di accumulazione che non sono limiti di successioni): Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$ (vedi Paragrafo 1.2 Punto 6) uno spazio topologico .

Osserviamo preliminarmente che una successione $\{x_n\}$ convergente a un punto $x \in X$ è della forma $x_1, x_2, \ldots, x_k, x, x, \ldots, x, \ldots$ cioè, a partire un numero finito k di termini, $x_j = x$ per ogni $j > k$. Sia, infatti, A l' insieme costituito dai punti di $\{x_n\}$ diversi da x, allora $X \backslash A$ è un insieme aperto e numerabile contenente x. Quindi $X \backslash A$ deve contenere tutti i punti della successione $\{x_n\}$ tranne un numero finito.

Sia ora $S = \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Allora 0 è un punto di accumulazione per S. Infatti poichè $(A \backslash \{0\}) \cap S = (A \backslash \{0\}) \cap (\mathbb{R} \backslash \{0\}) \neq \emptyset$ allora esiste un $y \in (A \backslash \{0\}) \cap S$. Se per assurdo esistesse una successione in $S = S \cap (\mathbb{R} \backslash \{0\})$ convergente a 0, allora, per l'esempio precedente, $0 \in S$.
Il problema sta nel fatto che $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$ non è N_1 e quindi non si riesce a numerare l'insieme degli intorni del punto x in modo da costruire una successione convergente ad x.
Ricordiamo che in uno spazio N_1 ogni punto x ha una base locale nidificata (cfr.Definizione 1.4.3), come visto nell'Osservazione 1.4.2.

Osservazione 2.3.2. Se $\mathcal{B}(x) = \{B_1, B_2, \dots, B_n, \dots\}$ è una base locale nidificata di un punto x e $\{x_n\}$ è una successione in X tale che $x_n \in B_n$ per ogni n, allora $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Infatti, per ogni aperto A contenente x esiste un n_0 tale che $x \in B_{n_0} \subset A$ e quindi $x_n \in A$ per ogni $n \geq n_0$ (il ragionamento è analogo a quanto visto nella Proposizione 2.2.1 al Punto 3).

Nel caso di spazi topologici N_1 si ha:
Sia S un sottoinsieme di uno spazio topologico X che soddisfa il primo assioma di numerabilità e $x \in D(S)$ (risp. $x \in \overline{S}$) allora esiste una successione $\{x_n\} \in S \cap X \backslash \{x\}$ (risp. $x_n \in S$) tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
Infatti sia $x \in D(S)$ e sia $\mathcal{B}(x) = \{B_1, B_2, \dots, B_n, \dots\}$ una base locale nidificata di x. Allora esiste $x_n \in B_n$ per ogni n e

quindi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ per l'osservazione precedente. Se, invece, $x \in S\backslash D(S)$ allora la successione costante $\{x_n = x\}$ converge a x.

4. Punti di accumulazione per una successione e sottosuccessioni

Dato un punto di accumulazione per una successione $\{x_n\}$ in uno spazio topologico X <u>non</u> è vero che esiste una sottosuccessione della successione convergente a quel punto.
Se X è N_1 vale il seguente risultato:
Sia x un punto di accumulazione per una successione $\{x_n\}$ in uno spazio topologico N_1, allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ convergente a x.
Infatti, sia $\mathcal{B}(x) = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$ una base locale nidificata di x. Siccome x è un punto di accumulazione per la successione $\{x_n\}$, esiste $n_1 \geq 1$ tale che $x_{n_1} \in B_1$, esiste $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} \in B_2$ e così via. Esiste quindi una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ convergente a x (per l'Osservazione 2.3.2).

5. Punti di accumulazione di una successione e sottosuccessioni

In questo caso osserviamo che la condizione per ottenere punti di accumulazione di una successione $\{x_n\}$ che siano limiti di una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ è che lo spazio $(X, \mathcal{T})$ sia N_1 e T_1.
Sia X uno spazio topologico N_1 e T_1, $\{x_n\}$ una successione in X e $x \in D(\{x_n\})$, allora esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ convergente ad x.
Infatti, sia $\mathcal{B}(x) = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$ una base locale nidificata di x, allora esiste $n_1 \geq 1$ tale che $x_{n_1} \in B_1$. Consideriamo la successione $\{x_n, n > n_1\}$; poichè X è T_1, allora x è un punto di

accumulazione anche *per* questa successione (in quanto l'insieme degli $\{x_n, n \leq n_1\}$ è un chiuso perchè unione finita di punti che sono chiusi). Quindi esiste $n_2 > n_1$ tale che $x_{n_2} \in B_2$ e così via. Esiste, quindi, una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$ convergente ad x (per l'Osservazione 2.3.2).
Vediamo ora cosa accade quando lo spazio topologico è semplicemente N_1.

Esempio 2.3.2. Sia $X = \{a, b, c\}$ con la topologia

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a, b\}\}.$$

Sia $x_1 = a$, $x_n = c$, $n \geq 2$ una successione in X convergente a c. Allora b è un punto di accumulazione di x_n, cioè $b \in D(\{x_n\})$. Infatti, qualunque sia l'aperto U che contiene b, U contiene a oppure c. D'altra parte, se esistesse una sottosuccessione convergente $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$, questa non potrebbe convergere a b dovendo convergere a c (una sottosuccessione di una successione convergente converge allo stesso limite).

6. Continuità e continuità sequenziale

Una funzione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici continua in x è sequenzialmente continua in x.
Infatti, sia $\{x_n\}$ una successione in X tale che $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e sia $N \in \mathcal{N}(f(x))$. Poichè f è continua in x, esiste $M \in \mathcal{N}(x)$ tale che $f(M) \subset N$. Allora esiste n_0 tale che $x_n \in M$ per ogni $n \geq n_0$ e, quindi, $f(x_n) \in f(M) \subset N$ per ogni $n \geq n_0$ e la successione $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x)$.
Non vale il viceversa, come mostra il seguente esempio.

Esempio 2.3.3. Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$ e $f = id : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{E})$ l'identità, dove nel codominio si considera la topologia euclidea $\mathcal{E}$. La funzione f non è continua (ad esempio, $(0, 1)$ non è aperto in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$) ma è sequenzialmente continua (infatti le successioni convergenti in $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{con})$ sono costanti da un certo punto in poi e, quindi, convergenti anche in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$).

Ma se lo spazio è N_1 abbiamo:
Sia X uno spazio topologico N_1. Una funzione $f : X \to Y$ sequenzialmente continua è continua.
Infatti, se f non fosse continua, in x esisterebbe un aperto A di $f(x)$ tale che $f^{-1}(A)$ non è aperto. Ma questo significa che se $\mathcal{B}(x) = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$ è una base locale nidificata di x, allora B_n non è incluso in $f^{-1}(A)$ per ogni n. Sia $x_n \in B_n$ tale che x_n non appartenga a $f^{-1}(A)$, allora $f(x_n)$ non appartiene A. Per l'Osservazione 2.3.2, x_n converge a x ma $f(x_n)$ non converge ad $f(x)$ (infatti A è un intorno di $f(x)$ che non contiene nessun punto di A).

Capitolo 3

Reti

In questo capitolo introduciamo il concetto di *rete* che generalizza quello di *successione*. Ricordiamo che le successioni sono funzioni aventi per dominio l'insieme $\mathbb{N}^+$. Tale insieme possiede un ordine molto semplice, ma non tutti gli insiemi sono naturalmente dotati di un ordinamento del genere. Se sostituiamo il dominio con un insieme dotato di un ordine più complicato, allora potremo:

- definire le reti in modo analogo alle successioni;
- introdurre una nozione di convergenza per le reti;
- mostrare che la convergenza della rete è sufficiente per caratterizzare la chiusura e i derivati degli insiemi.

Notiamo che gli ultimi due punti generalizzano il ruolo delle successioni in uno spazio metrico.
Per ulteriori approfondimenti si vedano i testi [7] e [9] presenti in bibliografia.

3.1 Definizione di rete

Definizione 3.1.1. *Un* insieme diretto *è un insieme non vuoto $\mathcal{D}$ con una relazione $\leq$ che soddisfa:*

1. *$\leq$ è riflessiva;*
2. *$\leq$ è transitiva;*
3. *$\leq$ è diretta, ovvero, per ogni $a, b \in \mathcal{D}$ esiste $c \in \mathcal{D}$ tale che $a \leq c$ e $b \leq c$.*

In altre parole, un insieme ordinato è diretto quando ogni suo sottoinsieme finito possiede maggioranti. Ad esempio, l'insieme dei naturali con l'ordinamento usuale.

Osservazione 3.1.1. Osservare che $\mathcal{D}$ è un insieme parzialmente ordinato ma non totalmente ordinato perchè manca la proprietà antisimmetrica.

Definizione 3.1.2. *Un sottoinsieme $\mathcal{D}'$ di un insieme diretto $\mathcal{D}$ è detto* cofinale *in $\mathcal{D}$ sse per ogni $d \in \mathcal{D}$ esiste $d' \in \mathcal{D}'$ tale che $d \leq d'$.*

Proposizione 3.1.1. *Ogni sottoinsieme cofinale $\mathcal{D}'$ di un insieme diretto $(\mathcal{D}, \leq)$ è un insieme diretto rispetto alla stessa relazione $\leq$.*

Dimostrazione: La relazione d'ordine definita su $\mathcal{D}'$ è riflessiva e transitiva. Dati $a, b \in \mathcal{D}'$, allora la relazione $\leq$ è diretta, cioè $\exists\, c \in \mathcal{D}$ tale che $a \leq c$ e $b \leq c$. Essendo $\mathcal{D}'$ cofinale in $\mathcal{D}$, esiste un $d' \in \mathcal{D}'$ tale che $c \leq d'$. Per la proprietà transitiva, $a \leq d'$ e $b \leq d'$ e quindi $(\mathcal{D}', \leq)$ è un insieme diretto.

Analizziamo ora alcuni esempi di insiemi diretti:

- ogni insieme finito linearmente ordinato;
- l'insieme di tutti i numeri complessi con $a \leq b$ sse $Re(a) \leq Re(b)$ e $Im(a) \leq Im(b)$ (si osservi che l'insieme dei numeri complessi non è un insieme ordinato, infatti stiamo definendo un ordine sui reali che costituiscono la parte reale e la parte immaginaria);
- l'insieme $\mathcal{N}(x)$ di tutti gli intorni di un punto x in uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$, con la relazione d'ordine $U \leq V$ sse $V \subset U$. Infatti, preso un intorno W di x, con $W \leq V$, allora la proprietà diretta vale, basta prendere $U \cap W$;
- l'insieme delle coppie (x, U), con $x \in U$ e $U \in \mathcal{N}(x)$, dove $(y, V) \leq (x, U)$ sse $U \subset V$.

Definizione 3.1.3. *Sia $(\mathcal{D}, \leq)$ un insieme diretto. Una* rete *su un insieme X è una mappa $S : \mathcal{D} \to X$. Il valore $S(n)$, $n \in \mathcal{D}$, verrà indicato con S_n.*

Per le successioni l' ordinamento sui naturali gioca un ruolo importante. Le reti generalizzano questo concetto indebolendo la relazione d'ordine che caratterizza l'insieme degli indici e introducono, così, il concetto di insieme diretto.

Definizione 3.1.4. *Una rete $(S, \leq)$ si dice* definitivamente *in A, $A \subseteq X$, sse esiste un $m \in \mathcal{D}$ tale che per ogni $n \in \mathcal{D}$, $m \leq n$, abbiamo che $S_n \in A$.*

Definizione 3.1.5. *Una rete $(S, \leq)$ si dice* frequentemente *in A, $A \subseteq X$, sse per ogni $m \in \mathcal{D}$ esiste un $n \in \mathcal{D}$, $m \leq n$, tale che $S_n \in A$.*

3.2 Convergenza e punti di accumulazione

Introduciamo per le reti una nozione di convergenza, detta *convergenza di Moore-Smith*, allo scopo di unificare le varie nozioni di limite e di estenderle a spazi topologici arbitrari. Osserviamo che i limiti di reti rivestono in spazi topologici lo stesso ruolo che i limiti di successioni svolgono negli spazi N_1 come, ad esempio, gli spazi metrici.

Definizione 3.2.1. *Sia* $(S, \leq)$ *una rete in uno spazio topologico* $(X, \mathcal{T})$*, allora si dice che converge ad un punto* $x \in X$*, detto* limite della rete*, sse per ogni* $N \in \mathcal{N}(x)$ *la rete è definitivamente in* N*. In tal caso scriveremo*

$$limS = x$$

.

Definizione 3.2.2. *Sia* $(S, \leq)$ *una rete in uno spazio topologico* $(X, \mathcal{T})$*, allora un punto* $x \in X$ *è detto* punto di accumulazione *della rete sse la rete è frequentemente in ogni* $N \in \mathcal{N}(x)$*.*

Come nel caso delle successioni, per le reti ogni limite è anche un punto di accumulazione mentre il viceversa è generalmente falso. Chiaramente i limiti delle successioni sono un esempio di limiti di reti.

3.3 Flessibilità delle reti

Il teorema successivo mostra che nelle reti, in condizioni generali, è vero che un punto di accumulazione è anche limite di una rete (cfr. Paragrafo 2.3 Punto 3).

Teorema 3.3.1. *Sia* $(X, \mathcal{T})$ *uno spazio topologico. Allora un punto* $x \in X$ *è un punto di accumulazione di* $A \subset X$ *se solo se esiste una rete* $(S, \leq)$ *che assume valori in* $A \cap (X \setminus \{x\})$ *che converge a* x*.*

Dimostrazione: Se una tale rete esiste, poichè la rete è definitivamente in ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ ne segue che A e ogni N hanno punti in comune oltre ad x e quindi x è un punto di accumulazione per A.
Se x è un punto di accumulazione di A, ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ contiene almeno un punto $a \in A$ con $a \neq x$.
Sia $\mathcal{D}$ l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, N), $a \in A \cap N, a \neq x$. Ordiniamo l'insieme ponendo $(b, M) \leq (a, N)$ sse $N \subset M$. Allora $(\mathcal{D}, \leq)$ è un insieme diretto. Chiaramente la relazione d'ordine è riflessiva e transitiva, e date le coppie $(a, N), (b, M)$, l'elemento $(y, N \cap M)$, con $y \neq x$ e $y \in A \cap (M \cap N)$, è *più grande* dei due elementi dati e pertanto la relazione è diretta. Che la coppia $(y, N \cap M) \in \mathcal{D}$ segue dal fatto che $N \cap M \in \mathcal{N}(x)$ e che ogni intorno di x contiene punti di A diversi da x. Ora proviamo che la rete converge ad x.
Poniamo $S : \mathcal{D} = (a, N) \to X$, con $S(a, N) = a$, $a \in A \cap N$ e fissiamo un $N \in \mathcal{N}(x)$, esisterà un (y, N_0) tale che, per ogni (z, M), si abbia $(y, N_0) \leq (z, M)$ (questo equivale a dire che per ogni $z \in A \cap M$, $M \subset N_0$). Allora $S(z, M) = z \in N$. Nel caso in cui $N = N_0$ la dimostrazione è immediata.

Il seguente teorema, invece, mostra che, sempre in condizioni generali, un punto di chiusura è anche limite di una rete e viceversa (cfr. Paragrafo 2.3 Punto 2).

Teorema 3.3.2. *Sia* $(X, \mathcal{T})$ *uno spazio topologico e* $A \subset X$*. Allora*

$x \in \overline{A}$ sse esiste una rete $(S, \leq)$ in A tale che questa converga ad x.

Dimostrazione: Se una tale rete esiste, ogni altro N contiene punti di A diversi da x, in tal caso x è un punto di accumulazione di A e, quindi, della chiusura; oppure esiste un N tale che $S_n = x$ per ogni n per cui $S_n \in N$ (e questo deve valere per ogni $n \geq n_x$). Allora $x \in A$ se si assume che $(S, \leq)$ assuma valori in A.
$\Rightarrow$ Se x è un punto di accumulazione di A, allora abbiamo già provato come costruire una rete che soddisfa alle richieste del teorema. Se $x \in A \backslash D(A)$, prendiamo un qualunque insieme diretto $(\mathcal{D}, \leq)$ e poniamo $S_n = x$ per ogni $n \in \mathcal{D}$. Allora la rete convergerà ad x.

Definizione 3.3.1. *Una funzione $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ è continua per reti se per ogni rete $(S, \leq)$ in X, che converge in x, la rete $(f \circ S, \leq)$ converge a $f(x)$.*

Ora vediamo come, grazie alla generalità delle reti, una funzione continua è sempre continua per reti (cfr. Paragrafo 2.3 Punto 6).

Teorema 3.3.3. *Una funzione $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$ è continua in $x \in X$ sse è continua per reti.*

Dimostrazione: Se f è continua, per ogni $N \in \mathcal{N}(f(x))$, la controimmagine $f^{-1}(N)$ è un intorno di x, e quindi $(S, \leq)$ è definitivamente in questo intorno. Cioè $(f \circ S, \leq)$ è definitivamente in N. Essendo vero per ogni N, la rete $(f \circ S, \leq)$ converge a $f(x)$.
Ora, posto che la f non sia continua in x, allora esiste un $N \in \mathcal{N}(f(x))$ tale che $f^{-1}(N)$ non sia un intorno di x. Perciò per ogni $N^{(i)} \in \mathcal{N}(x)$ esiste un $a_i \in N^{(i)}$ tale che $a_i \notin f^{-1}(N)$.
Sia $(\mathcal{D}, \leq)$ un insieme diretto formato da tutte le coppie $(a_i, N^{(i)})$, con $(a_j, N^{(j)}) \leq (a_i, N^{(i)})$ sse $N^{(i)} \subset N^{(j)}$ e poniamo $S(a_i, N^{(i)}) =$

a_i. Allora la rete $(S, \leq)$ converge a x, ma la rete $(f \circ S, \leq)$ non è definitivamente in N e, cioè, non converge a $f(x)$.

3.4 Sottoreti

Definizione 3.4.1. *Una rete* $(T, \ll)$ *si chiama* sottorete *della rete* $(S, \leq)$ *sse* $g : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$, *dove* $\mathcal{D}'$ *è il dominio di* T *e* $\mathcal{D}$ *è il dominio di* S, *soddisfa alle condizioni:*

1. $T = S \circ g$;
2. *per ogni* $m \in \mathcal{D}$ *esiste un* $m' \in \mathcal{D}'$ *tale che, se* $m' \ll p$, *allora* $m \leq g(p)$.

Osservazione 3.4.1. Come nel caso delle sottosuccessioni (cfr. def.2.1.5), abbiamo definito una sottorete come composizione di una funzione g con una rete S. Inoltre abbiamo generalizzato la definizione di funzione crescente usando le ipotesi del Punto 2 della Definizione 3.4.1. Ricordiamo che, a differenza di quanto accade per le sottosuccessioni dove la funzione ϱ ha dominio e codominio coincidenti, per le sottoreti abbiamo definito una funzione g con dominio e codominio diversi su cui sono definiti due ordini differenti e non lineari.

Il seguente teorema risulta un'estensione di quanto detto nel Paragrafo 2.3 Punti 4 e 5.

Teorema 3.4.1. *Sia* $(S, \leq)$ *una rete in uno spazio topologico* $(X, \mathcal{T})$. *Il punto* $x \in X$ *è un punto di accumulazione della rete* $(S, \leq)$ *sse esiste una sottorete di* $(S, \leq)$ *che converge a* x.

Dimostrazione: Sia $(S \circ g, \ll)$ una sottorete di $(S, \leq)$ che converge a x. Sia N un intorno arbitrario di x. Allora esiste un $n' \in \mathcal{D}'$ tale che per ogni $p \in \mathcal{D}'$ con $p \ll n'$, $(S \circ g)(n') \in N$. Sia m un elemento arbitrario di $\mathcal{D}$, allora esiste un $m' \in \mathcal{D}'$ tale che per ogni p con $m' \ll p$ si abbia che $m \leq g(p)$. Poichè $\mathcal{D}'$ è un insieme diretto, esisterà almeno un p, chiamiamolo p^*, tale che $m' \ll p^*$ e $n' \ll p^*$. Ne segue che $m \leq g(p^*)$ e che $(S \circ g)(p^*) \in N$. Quindi la rete $(S, \leq)$ è frequentemente in ogni $N \in \mathcal{N}(x)$ e x è un punto di accumulazione della rete.
Se x è un punto di accumulzione della rete $(S, \leq)$, consideriamo l'insieme $\mathcal{D}'$ di tutte le coppie (m, N), $m \in \mathcal{D}$, con $S_m \in N$. Poichè x è un punto di accumulazione di $(S, \leq)$, le coppie di questo tipo esistono per ogni N. Ordiniamo l'insieme $\mathcal{D}'$ in questo modo: $(m^*, N^*) \ll (m, N)$ sse $m^* \leq m$ e $N \subset N^*$. La coppia $(\mathcal{D}', \ll)$ è un insieme diretto e la relazione d'ordine $\ll$ è riflessiva e transitiva. Per mostrare che è anche diretta, siano (m, N) e (m^*, N^*) due elementi di $\mathcal{D}^*$ e scegliamo n' tale che $m \leq n'$ e $m^* \leq n'$. Siccome x è un punto di accumulazione di $(S, \leq)$ e $N \cap N^*$ è un intorno di x, esisterà un $n \in \mathcal{D}$ tale che $n' \leq n$ e $S_n \in N \cap N^*$. E' allora chiaro che $(n, N \cap N^*)$ appartiene a $\mathcal{D}'$ ed è più *grande* di (m, N) e (m^*, N^*).
Ora definiamo $g(m, N) = m$ per tutti gli elementi di $\mathcal{D}'$; allora diciamo che la rete $(S \circ g, \ll)$ è una sottorete di $(S, \leq)$ e che converge ad x. Sia $m \in \mathcal{D}$ e N un intorno arbitrario di x; scegliamo n' tale che $m \leq n'$ e $S_{n'} \in N$. Poniamo $(n', N) = m' \in \mathcal{D}'$, e sia $(n', N) \ll (n, N^*)$, allora $n' \leq n$ e, quindi, $m \leq n' \leq n = g(n, N^*)$ e questo prova la prima affermazione.
Ora supponiamo che N sia dato. Allora, per ogni $(n, N) \in \mathcal{D}'$, abbiamo che $(n, N) \ll (n^*, N^*)$ implica che $(S \circ g)(n^*, N^*) = S_{n^*} \subset N^* \subset N$ e quindi la sottorete converge ad x.

Conclusioni

Nei capitoli precedenti abbiamo analizzato le successioni e le relative proprietà negli spazi metrici e negli spazi topologici arbitrari. Con l'introduzione del concetto più generale di rete, siamo riusciti ad estendere alcune proprietà, di cui le successioni non godono, agli spazi topologici.
Prima di tutto, ci siamo chiesti se fosse possibile che in uno spazio topologico qualunque esistesse un unico limite per una successione, ma neppure le reti possono soddisfare questa richiesta. A tale proposito esiste un teorema che può essere visto come caratterizzazione degli spazi di Hausdorff:

Teorema 3.4.2. *Uno spazio topologico è uno spazio di Hausdorff sse ogni rete nello spazio converge al massimo ad un punto.*

Dimostrazione: Si veda il testo [4] presente in bibliografia.

Invece, grazie alle reti, siamo riusciti a dimostrare (cfr. Teorema 3.3.1 e Teorema 3.3.2) che, in un qualunque spazio topologico, un punto è di accumulazione (rispettivamente di chiusura) se e solo se è limite di una rete, cosa che non accade per le successioni in spazi che non siano N_1.
Ci siamo chiesti, inoltre, se la generalità delle reti rendesse possibile

provare che se un punto è di accumulazione allora esiste una sottorete che converge ad esso. Questo è stato dimostrato nel Teorema 3.4.1. Nelle successioni, invece, è necessario che lo spazio sia N_1. Infine, con l'uso delle reti siamo riusciti a mostrare che una funzione è continua se e solo se è continua per reti (cfr. Teorema 3.3.3), mentre per le successioni è necessario che lo spazio sia N_1.

Appendice A

Appendice

In questa appendice trattiamo la compattezza e il suo legame con le successioni.
Nessuno dei risultati presenti in questa appendice è stato utilizzato nella tesi, ma comunque sono stati inseriti per completezza.
Inizialmente la nozione di compattezza è stata introdotta negli spazi metrici sotto forma di compattezza per successioni, solo più tardi si è arrivati alla definizione che conosciamo oggi.
I testi utilizzati sono i seguenti: [2], [3] e [5]. Uno studio più approfondito si ritrova nei filtri (vedi [7]).

Definizione A.0.2. *Uno spazio topologico X si dice compatto se ogni suo ricoprimento costituito da aperti ammette un sottoricoprimento finito.*

Esempio A.0.1. *Ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ sulla retta $\mathbb{R}$ è compatto.*

Definizione A.0.3. *Un sottoinsieme K di spazio topologico X si dice compatto se con la topologia relativa K è uno spazio compatto.*

Esempio A.0.2. *Ogni spazio banale è compatto come lo è pure ogni spazio finito con la topologia cofinita.*

Esempio A.0.3. *Uno spazio topologico discreto è compatto se e solo se è finito; infatti in uno spazio discreto* X *la famiglia degli* $\{x|x \in X\}$ *è un ricoprimento aperto che possiede un sottoricoprimento finito se e solo se* X *è finito.*

Corollario A.0.1. *Un sottoinsieme* K *di* $\mathbb{R}$ *è compatto se e solo se* K *è chiuso e limitato.*

Proposizione A.0.1.
1. *Ogni sottoinsieme infinito* Y *di uno spazio compatto* X *possiede un punto di accumulazione in* X*.*
2. *Ogni successione di punti di uno spazio compatto* T_1 *ed* N_1 *possiede una sottosuccessione convergente .*

Dimostrazione:

1. Per assurdo, sia Y un sottoinsieme che non possieda punti di accumulazione, pertanto Y è chiuso in X ed è compatto. Essendo la topologia su Y quella discreta, allora Y sarà uno spazio topologico discreto infinito e, perciò, non sarà un compatto. Dalla contraddizione segue la tesi.
2. Se infiniti termini della successione coincidono, formano una sottosuccessione convergente. Se, invece, la successione contiene infiniti punti distinti, per la (1), possiede un punto di accumulazione e, per il Punto 5 del Paragrafo 2.3, si ottiene la tesi.

Teorema A.0.3 (di Boltzano-Weierstrass)**.** *Ogni successione limitata* $\{x_n\}_{n\geq 1}$ *di numeri reali possiede una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione: Poichè $\{x_n\}$ è una successione limitata, esiste un $N > 0$ tale che $\{x_n\} \subset [-N, N]$. Ma tale intervallo è compatto, e quindi (per la Proposizione A.0.1, Punto 2), $\{x_n\}$ possiede una sottosuccessione convergente.

Bibliografia

[1] Giulio Campanella, *Esercizi di topologia generale*, Aracne, ristampa 1997.

[2] Czes Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, ristampa 1983.

[3] Seymour Lipschutz, *Topologia*, Collana Schaum, Etas Libri, 1979.

[4] John L.Kelley, *General Topology*, Springer- Verlag , 1955.

[5] Edoardo Sernesi, *Geometria II vol*, Bollati Boringhieri,ristampa 2006.

[6] Isadore M. Singer - John A. Thorpe *Lezioni di topologia elementare e di geometria*, Boringhieri, 1980.

[7] Wolfgang J. Throne, *Topological structures*, Holt, Rinehart and Winston, 1966.

[8] http://www.mat.uniroma1.it/people/manetti/.

[9] http://www.matapp.unimib.it/∼ferrario/geotop-2006/.

[10] http://www.mat.unimi.it/users/bini/eserci.html# var.

[11] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/∼
john/MT4522/Lectures/L6.html.