Teorema di rappresentazione di Stone per algebre di Boole

Relatore: Prof. Andrea Loi   Correlatore: Prof. Stefano Montaldo
Candidata: Noemi Vellante

Università degli Studi di Cagliari

25 Luglio 2016

Obiettivi della tesi

Dualità di Stone

- sia A un'algebra di Boole, allora ad A si può associare uno spazio di Stone $S(A)$
- sia X uno spazio di Stone, allora a X si può associare un'algebra di Boole $B(X)$

Teorema di rappresentazione di Stone

A è isomorfo a $B(S(A))$ e X è omeomorfo a $S(B(X))$

Definizioni preliminari

Definizione

Un reticolo è un insieme parzialmente ordinato t.c. ogni suo sottoinsieme finito ha estremo superiore (sup) e estremo inferiore (inf).

Se A è un reticolo è naturale definire su A due operazioni:

intersezione $\cap \colon A \times A \to A \qquad (x, y) \mapsto inf\{x, y\}$

unione $\cup \colon A \times A \to A \qquad (x, y) \mapsto sup\{x, y\}$

Definizione

Un reticolo A è detto *distributivo* se: $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$

Algebre di Boole: definizione

Definizione

Un'algebra di Boole A è un reticolo distributivo su cui è definita un'operazione unaria $\neg$ (di *complemento*) e contenente due elementi distinti 0 e 1 (*elementi neutri*) che soddisfano le seguenti proprietà:

- $x \cup 0 = x, \qquad \forall x \in A$
- $x \cap 1 = x, \qquad \forall x \in A$
- $x \cap \neg x = 0, \qquad \forall x \in A$
- $x \cup \neg x = 1, \qquad \forall x \in A$

Esempi

- L'insieme delle parti $P(X)$ di un qualsiasi insieme X con la relazione d'ordine $\subseteq$.
- L'insieme $\mathbf{2} = \{0, 1\}$ con la relazione d'ordine $\leq$ e con $0 \leq 1$.

Algebre di Boole: omomorfismi

Definizione

Siano $(A, \cup, \cap, \neg, 0, 1)$ e $(B, \sqcup, \sqcap, \smallsetminus, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ due algebre di Boole, allora $f : A \to B$ è un *omomorfismo tra algebre di Boole* se:

- $f(x \cup y) = f(x) \sqcup f(y)$
- $f(x \cap y) = f(x) \sqcap f(y)$
- $f(\neg x) = \smallsetminus f(x)$

L'insieme $ker\, f = \{x \in A \ : \ f(x) = \mathbf{0}\} \subseteq A$ è detto *kernel* (o *nucleo*) di f. Un omomorfismo è detto *epimorfismo* se è suriettivo, *monomorfismo* se è iniettivo e *isomorfismo* se è bigettivo.

Teorema

Sia A un'algebra di Boole e $x \in A$ con $x \neq 0$, allora esiste un omomorfismo $f : A \to \mathbf{2}$ tale che $f(x) = 1$.

Spazi di Stone: definizione

Definizione

Uno spazio topologico X è detto spazio di Stone se è:

- **di Hausdorff** $\forall x, y \in X$ con $x \neq y \quad \exists\, A, B$ aperti di X t.c. $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$
- **compatto** da ogni ricoprimento aperto di X è possibile estrarre un sottoricoprimento finito
- **totalmente sconnesso** ogni aperto è unione degli insiemi chiusi e aperti (*clopen*) che contiene

Spazi di Stone: un esempio

Teorema

Sia A un insieme non vuoto, allora l'insieme $\mathbf{2}^A = \{f : A \to \mathbf{2}\}$ delle funzioni da A in $\mathbf{2}$ è uno spazio di Stone.

Dimostrazione.

$\mathbf{2}$ con la topologia discreta è compatto, di Hausdorff e totalmente sconnesso. L'insieme delle funzioni da A in $\mathbf{2}$ è il prodotto cartesiano di $\mathbf{2}$ con sè stesso $|A|$ volte. Il prodotto cartesiano con la topologia prodotto è: compatto per il teorema di Tychonoff; di Hausdorff perché prodotto di uno spazio di Hausdorff; discreto perché prodotto di una topologia discreta e quindi totalmente sconnesso. $\square$

Teorema

Sia A un'algebra di Boole, allora l'insieme $S(A)$ degli omomorfismi da A in $\mathbf{2}$ è uno spazio di Stone, ed è detto spazio di Stone associato ad A.

Dimostrazione

$S(A) \subseteq \mathbf{2}^A$, quindi la topologia indotta su $S(A)$ è discreta e $S(A)$ è totalmente sconnesso e di Hausdorff. Sapendo che se $h, g \colon X \to Y$ sono due funzioni continue e Y è uno spazio di Hausdorff, allora l'insieme $\{x \colon h(x) = g(x)\} \subseteq X$ è chiuso, e che ogni funzione definita su $\mathbf{2}^A$ è continua, si ottiene che i seguenti insiemi di $\mathbf{2}^A$ sono chiusi:

- $\{f \in \mathbf{2}^A \colon f(\neg x) = \neg f(x)\}$
- $\{f \in \mathbf{2}^A \colon f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)\}$
- $\{f \in \mathbf{2}^A \colon f(x \cap y) = f(x) \cap f(y)\}$

L'intersezione di questi insiemi è $S(A)$ che quindi è compatto perché chiuso di uno spazio compatto.

Definizione
Sia X uno spazio di Stone, l'insieme $B(X)$ dei clopen di X è chiamato algebra duale di X.

Teorema
Siano X uno spazio di Stone e $B(X)$ la sua algebra duale, allora $B(X)$ è un'algebra di Boole.

Dimostrazione.
L'insieme delle parti $P(X)$ è un'algebra di Boole rispetto all'inclusione e al complemento insiemistici. Essendo $B(X) \subseteq P(X)$, bisogna dimostrare che le operazioni $\cup, \cap$ e di complemento sono chiuse in $B(X)$: l'intersezione e l'unione di due clopen sono clopen e il complemento di un clopen è clopen. Quindi $B(X)$ è un'algebra di Boole. $\square$

Teorema di rappresentazione di Stone

Teorema

Sia A un'algebra di Boole e sia $S(A)$ il suo spazio di Stone, allora A è isomorfo a $B(S(A))$ algebra duale di $S(A)$.

Dimostrazione

Dimostriamo che $\varphi\colon A \to \{C \subseteq S(A)\colon C \ clopen\}$ con $\varphi(x) = \{f \in S(A)\colon f(x) = 1\}$ è l'isomorfismo cercato:

complemento $\varphi(\neg x) = \{f \in S(A)\colon f(\neg x) = 1\} = \{f \in S(A)\colon f(x) = 0\} = \neg\varphi(x)$

unione $\varphi(x \cup y) = \{f \in S(A)\colon f(x \cup y) = 1\} = \{f \in S(A)\colon f(x) \cup f(y) = 1\} = \varphi(x) \cup \varphi(y)$

intersezione $\varphi(x \cap y) = \{f \in S(A)\colon f(x \cap y) = 1\} = \{f \in S(A)\colon f(x) \cap f(y) = 1\} = \varphi(x) \cap \varphi(y)$

iniettività $ker(\varphi) = \{x \in A\colon \varphi(x) = \emptyset\} = \{x \in A\colon \nexists f \in S(A) \ t.c. \ f(x) = 1\} = \{0\}$

Teorema di rappresentazione di Stone: suriettività

Definizione

Un campo di insiemi è un'algebra di Boole i cui elementi sono insiemi.

Esempio

$\mathcal{F} \subseteq P(X)$ è un campo di insiemi se è chiuso rispetto all'unione e all'intersezione finite e al complemento, per qualsiasi insieme X.

Definizione

Si dice che un campo di insiemi $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ separa X se $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$ $\exists A, B \in \mathcal{F}$ $t.c.$ $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Teorema

Se X è uno spazio di Stone e $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ è un campo di clopen che separa X, allora $\mathcal{F}$ è l'algebra duale di X.

Teorema di rappresentazione di Stone: suriettività

Per dimostrare che φ è suriettiva è sufficiente dimostrare che $\varphi(A)$ è un campo di clopen che separa $S(A)$:

- $\varphi(A) = \{f \in S(A) \colon f(x) = 1\}_{x \in A}$ e $\{f \in S(A) \colon f(x) = 1\}$ è clopen in $S(A)$ $\forall x \in A$
- $\varphi(A)$ è chiuso rispetto all'unione e l'intersezione finite e al complemento, quindi è un campo di clopen
- se $f_1, f_2 \in S(A)$ e $f_1 \neq f_2$, allora $\exists x \in A$ t.c. $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 0$ e quindi $f_1 \in H_1 = \{f \in S(A) \colon f(x) = 1\}$, $f_2 \in H_2 = \{f \in S(A) \colon f(\neg x) = 1)$ e $H_1 \cap H_2 = \emptyset$
- $\varphi(A)$ è un campo di clopen che separa $S(A)$, quindi è la sua algebra duale