UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Il Teorema di Hodge e il flusso del calore

Candidato
Vincenzo Farina

Relatore
Prof. Andrea Loi

Anno Accademico 2021-2022

Indice

Introduzione

All'interno della teoria degli spazi di coomologia di de Rham su varietà Riemanniane si inserisce il famoso Teorema di Hodge sulle forme armoniche.

Data una varietà differenziabile M, si consideri l'operatore *differenziale esterno* $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ che ad una p-forma differenziale su M associa una $(p+1)$-forma. Si definisce allora il p-esimo *gruppo di coomologia di de Rham* come lo spazio quoziente

$$H^p_{dR}(M) := \frac{\ker d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)}{\operatorname{Im} d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)}$$

Se M è inoltre dotata di una metrica Riemanniana con un'orientazione, allora è possibile definire un prodotto L^2 $(\cdot,\cdot)$ sulle p-forme, e definire l'operatore aggiunto di d rispetto a questo prodotto: $d^* : \Omega^{p+1}(M) \to \Omega^p(M)$, ovvero $(d\omega, \eta) = (\omega, d^*\eta)$, per ogni p-forma ω e ogni $(p+1)$-forma η. Con l'aiuto dell'aggiunto si definisce quindi l'*operatore di Laplace-Beltrami*

$$\Delta := d^*d + dd^* : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M).$$

Una forma differenziale ω tale che $\Delta\omega = 0$ è detta *armonica*.

Il Teorema di Hodge afferma che in ogni classe di coomologia in $H^p(M)$, con M varietà Riemanniana compatta e orientata, esiste un'unica forma armonica. In questa tesi ci proponiamo di dare una dimostrazione del Teorema di Hodge attraverso il metodo del *flusso del calore*, che consiste nell'impostazione e risoluzione di un'equazione alle derivate parziali lineare parabolica per un certo dato iniziale.

La tesi è strutturata in 4 capitoli e procede in modo da dare gradualmente le definizioni utili e gli strumenti necessari a pervenire alle dimostrazioni, prima classica (con metodi variazionali) e poi col metodo del flusso del calore, del Teorema di Hodge.

Il primo capitolo è dedicato alle definizioni di varietà differenziabili e Riemanniane, alle loro principali proprietà e alle strutture che possiamo erigere su di esse, in primo luogo spazi tangenti e cotangenti, e più in generale fibrati vettoriali, e le relative metriche.

Nel secondo capitolo richiamiamo sinteticamente alcune definizioni di analisi funzionale, come spazi di Lebesgue, di Hilbert e di Hölder e alcune loro proprietà. Riportiamo anche i principali Teoremi sulla risolubilità di equazioni alle derivate parziali (PDE) ellittiche e paraboliche, e sulla regolarità delle soluzioni.

Nel terzo capitolo approfondiamo le forme differenziali, nel caso Euclideo e in quello Riemanniano e definiamo gli operatori di derivazione sulle forme citati precedentemente, culminando con l'operatore di Laplace -Beltrami Δ.

L'ultimo capitolo è dedicato al Teorema di Hodge. Forniamo prima la sua dimostrazione secondo metodi variazionali, separando l'unicità e l'esistenza della forma armonica. Diamo inoltre alcune sue utili applicazioni, come il Teorema di decomposizione di Hodge e il Teorema di dualità di Poincaré. L'ultima sezione è dedicata alla dimostrazione del Teorema di Hodge col metodo del flusso del calore. Più precisamente enunceremo e dimostreremo il Teorema di Milgram-Rosembloom

Teorema. *Sia $\beta_0(x)$ una p-forma su M di classe $C^{2,\alpha}$, per $0 < \alpha < 1$. Allora esiste un'unica soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} + \Delta\beta(x,t) = 0 \quad \forall t \in [0,\infty)$$
$$\textit{con } \beta(x,0) = \beta_0(x).$$

Per $t \to \infty, \beta(\cdot,t)$ converge in $C^{2,\alpha}$ ad una forma armonica $H\beta$.

Questo Teorema ricomprende al suo interno il Teorema di Hodge e quindi ne fornisce un ulteriore dimostrazione.

Capitolo 1

Varietà Riemanniane

1.1 Varietà Differenziabili

Uno *spazio topologico* è un insieme M con una famiglia $\mathcal{O}$ di sottoinsiemi di M che soddisfi le seguenti proprietà:

(i) $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{O} \implies \Omega_1 \cap \Omega_2 \in \mathcal{O}$,

(ii) per ogni insieme di indici $A : (\Omega_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathcal{O} \implies \bigcup_{\alpha \in A} \Omega_\alpha \in \mathcal{O}$

(iii) $\emptyset, M \in \mathcal{O}$.

Gli insiemi contenuti in $\mathcal{O}$ sono detti *aperti*. Uno spazio topologico è detto di *Hausdorff* se per ogni coppia di punti distinti $p_1, p_2 \in M$ esistono due aperti $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{O}$ tali che $p_1 \in \Omega_1, p_2 \in \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Un ricoprimento $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ (con A insieme di indici arbitrario) è detto *localmente finito* se ogni $p \in M$ ha un intorno che interseca solo un numero finito di Ω_α. M è detto *paracompatto* se ogni suo ricoprimento ammette un raffinamento localmente finito. Quindi per ogni suo ricoprimento $(\Omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ esiste un ricoprimento $(\Omega'_\beta)_{\beta \in B}$ localmente finito, tale che

$$\forall \beta \in B \quad \exists \alpha \in A : \Omega'_\beta \subset \Omega_\alpha$$

Un'applicazione, o mappa, tra due spazi topologici è detta *continua* se la controimmagine di ogni aperto è ancora un aperto. Un'applicazione bigettiga che sia continua in entrambi i versi è detta *omeomorfismo*.
Possiamo ora introdurre il concetto di varietà:

Definizione 1.1.1. *Una varietà M di dimensione d è uno spazio topologico di Hausdorff, connesso e paracompatto tale che ogni suo punto ha un intorno U omeomorfo ad un sottoinsieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.*

Tale omeomorfismo

$$x : U \to \Omega$$

è detto *carta (coordinata)*.
Un *atlante* è una famiglia di carte $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ tale che le U_α costituiscano un ricoprimento aperto di M.

Osservazioni

1. Un punto $p \in U_\alpha$ è determinato da $x_\alpha(p)$; qundi viene spesso identificato con $x_\alpha(p)$. Inoltre spesso si omette l'indice α e le componenti di $x(p) \in \mathbb{R}^d$ sono chiamate *coordinate locali* di p.

2. Si è soliti indicare le coordinate Euclidee di $\mathbb{R}^d$ nel modo seguente:

$$x = (x^1, \ldots, x^d),$$

   e queste sono quindi considerate come coordinate locali sulla varietà M considerata, se $x : U \to \Omega$ è una carta.

In questa maniera le coordinate locali ci consentono di avere un metodo di rappresentazione locale della varietà, in modo che possiamo effettuare diversi tipi di calcoli, come vedremo più avanti.

Definizione 1.1.2. *Due atlanti sono detti compatibili se la loro unione è ancora un atlante. Una carta è detta compatibile con un dato atlante se l'aggiunta della carta all'atlante dà ancora un atlante.*

Definizione 1.1.3. *Un atlante è detto massimale se ogni carta con esso compatibile è già contenuta nell'atlante stesso.*

Definizione 1.1.4. *Un altlante $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ su una varietà è detto differenziabile se tutte le trasformazioni di carte*

$$x_\beta \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to x_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sono mappe differenziabili di classe C^∞ (se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$).

Definizione 1.1.5. *Un atlante massimale differenziabile è detto struttura differenziabile.*

Definizione 1.1.6. *Una varietà differenziabile di dimensione d è una varietà di dimensione d dotata di una struttura differenziabile.*

Nel seguito supporremo differenziabile ogni atlante.

Osservazioni

1. Si può anche richiedere un ordine di differenziabilità inferiore di C^∞, ovvero C^k, per qualche $k \in \mathbb{N}$: in tal caso le trasformazioni di carte sarebbero k volte differenziabili con continuità. Tuttavia C^∞ è conveniente perchè non ci si deve preoccupare dell'ordine della differenziabilità. D'altra parte gli spazi C^k per $k \in \mathbb{N}$ hanno il vantaggio di essere spazi di Banach.

2. Siccome l'inversa di $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ è $x_\alpha \circ x_\beta^{-1}$, le trasformazioni di carte sono differenziabili in entrambi i sensi, cioè sono *diffeomorfismi*. In particolare il loro determinante Jacobiano non si annulla mai.

3. Una varietà può essere compatta o no. L'esempio più semplice di varietà differenziabile non compatta é $\mathbb{R}^d$. In generale, ogni sottoinsieme aperto di una varietà differenziabile è ancora una varietà differenziabile.

4. Se M e N sono varietà differenziabili, il loro prodotto cartesiano $M \times N$ ammette in modo naturale una struttura differenziabile: se $\{U_\alpha, x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ e $\{V_\beta, y_\beta\}_{\beta\in B}$ sono atlanti differenziabili per M e N rispettivamente, allora $\{U_\alpha \cap V_\beta, (x_\alpha, y_\beta)\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ è un atlante differenziabile su $M \times N$.

Definizione 1.1.7. *Un atlante su una varietà differenziabile è detto orientato se tutte le trasformazioni di carte hanno determinante Jacobiano positivo. Una varietà differenziabile è detta orientabile se possiede un atlante orientato.*

Definizione 1.1.8. *Una mappa $h : M \to M'$ tra due varietà differenziabili M e M', rispettivamente dotate di carte $\{U_\alpha, x_\alpha\}$ e $\{U'_\alpha, x'_\alpha\}$ è detta differenziabile se tutte le mappe $x'_\beta \circ h \circ x_\alpha^{-1}$ sono differenziabili (di classe C^∞), quando risultano definite. Questa mappa è detta diffeomorfismo se è bigettiva e differenziabile in entrambi i sensi (ovvero anche l'inversa è differenziabile).*

Terminiamo questo paragrafo con un utile risultato, conosciuto anche col nome di *Lemma di partizione dell'unità.*

Lemma 1.1.1. *Sia M una varietà differenziabile, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ un ricoprimento aperto. Allora esiste una partizione dell'unità subordinata alle (U_α). Ovvero esistono un raffinamento localmente finito $(V_\beta)_{\beta\in B}$ di (U_α) e delle funzioni C_c^∞ (cioè di classe C^∞ a supporto compatto) $\phi_\beta : M \to \mathbb{R}$ tali che:*

(i) $\operatorname{supp} \phi_\beta \subset V_\beta \quad \forall \beta \in B,$

(ii) $0 \leq \phi_\beta(x) \leq 1 \quad \forall x \in M, \beta \in B$

(iii) $\sum_{\beta\in B} \phi_\beta(x) = 1 \quad \forall x \in M.$

1.2 Spazi tangenti

Siano $x = (x^1, \dots, x^d)$ le coordinate Euclidee su $\mathbb{R}^d, \Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto, $x_0 \in \Omega$. Lo spazio tangente di Ω nel punto x_0,

$$T_{x_0}\Omega$$

è lo spazio $\{x_0\} \times E$, dove E è lo spazio vettoriale reale di dimensione d generato dalla base $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d}\}$. Stiamo indicando con $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^d}$ le derivate parziali nel punto x_0. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^d, \Omega' \subset \mathbb{R}^c$ sono due aperti e $f : \Omega \to \Omega'$ è differenziabile, definiamo l'*applicazione tangente o differenziale* $df(x_0)$ per $x_0 \in \Omega$ come l'applicazione lineare indotta tra gli spazi tangenti:

$$\begin{aligned} df(x_0) : T_{x_0}\Omega &\to T_{f(x_0)}\Omega' \\ v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} &\mapsto v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x_0) \frac{\partial}{\partial f^j}. \end{aligned}$$

Da qui in avanti usiamo la *convenzione di somma di Einstein*: un indice ricorrente in un prodotto sottintende una sommatoria da 1 alla dimensione dello spazio.
Seguendo le notazioni precedenti, poniamo:

$$T\Omega := \Omega \times E \cong \Omega \times \mathbb{R}^d.$$

Quindi $T\Omega$ è un aperto di $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ed in particolare è una varietà differenziabile.
Ora consideriamo la *proiezione sul primo fattore*

$$\begin{aligned} \pi : T\Omega &\to \Omega \\ (x, v) &\mapsto x. \end{aligned}$$

Definizione 1.2.1. *La terna $(T\Omega, \pi, \Omega)$ è detta fibrato tangente di Ω. $T\Omega$ è detto spazio totale del fibrato tangente.*

Definiamo inoltre la mappa

$$\begin{aligned} df : T\Omega &\to T\Omega' \\ \Big(x, v^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) &\mapsto \Big(f(x), v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}(x) \frac{\partial}{\partial f^j}\Big). \end{aligned}$$

Invece di

$$df(x, v)$$

scriveremo

$$df(x)(v).$$

Se in particolare, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, abbiamo per $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$

$$df(x)(v) = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \in T_{f(x)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}.$$

In questo caso possiamo anche scrivere $v(f)(x)$ invece di di $df(x)(v)$ per sottolineare che il vettore tangente v opera come una derivazione sulla funzione f.

Consideriamo ora il caso di una varietà differenziabile M di dimensione d e sia $p \in M$. Vogliamo definire lo spazio tangente di M nel punto p.
Sia $x : U \to \mathbb{R}^d$ una carta tale che $p \in U$, con U aperto di M, e sia $\Omega := x(U)$ aperto di $\mathbb{R}^d$. Sull'insieme

$$\{(x, v) : x : U \to \Omega \text{ carta su } p \in M, v \in T_{x(p)}\Omega\}$$

definiamo una relazione di equivalenza:

$$(x, v) \sim (y, w) \Longleftrightarrow w = d(y \circ x^{-1})v.$$

Definizione 1.2.2. *Lo spazio delle classi di equivalenza è chiamato spazio tangente ad M nel punto p e denotato con T_pM.*

T_pM eredita in modo naturale la struttura di spazio vettoriale.

Definiamo ora il *fibrato tangente* di una varietà differenziabile di dimensione d. Sia TM l'unione disgiunta degli spazi tangenti T_pM al variare di $p \in M$, sia $\pi : TM \to M$, con $\pi(w) = p$ per $w \in T_pM$, la proiezione sul *punto base*:

Definizione 1.2.3. *La terna (TM, π, M) è detta fibrato tangente di M e TM è detto spazio totale del fibrato tangente.*

1.3 Sottovarietà

Un'applicazione differenziabile $f : M \to N$, tra due varietà differenziabili M e N, è detta *immersione*, se $\forall x \in M$ l'applicazione tangente

$$df : T_xM \to T_{f(x)}N$$

è iniettiva. In particolare si ha che $m := \dim M \leq n := \dim N$. Se, data un immersione $f : M \to N$, M è omeomorfo alla sua immagine $f(M)$ su N, diciamo che f è un *embedding* differenziabile.

Definizione 1.3.1. *Sia $f : M \to N$ un embedding differenziabile: $f(M)$ è detta sottovarietà differenziabile di N.*

Quindi un sottoinsieme N' di una varietà N, dotato della topologia indotta, è una sottovarietà di N se N' è una varietà e la mappa di inclusione è un embedding differenziabile. Le carte su N' sono date semplicemente dalle restrizioni delle carte di N a N'.

1.4 Varietà Riemanniane

Vogliamo ora introdurre una struttura metrica sulle varietà differenziabili, in modo da poter misurare lunghezze e angoli tra vettori tangenti. Così facendo, ad esempio saremo in grado di misurare la lunghezza di curve differenziabili. Sugli spazi vettoriali questo concetto di misura si ottiene definendo un prodotto scalare.

Definizione 1.4.1. *Una metrica Riemanniana su una varietà differenziabile M è data da un prodotto scalare su ognuno degli spazi tangenti T_pM che dipende in modo differenziabile dal punto base p.*

Definizione 1.4.2. *Una varietà Riemanniana è una varietà differenziabile dotata di una metrica Riemanniana.*

Analizziamo meglio il concetto di metrica Riemanniana studiandone l'espressione in coordinate locali e come questa si modifichi in seguito ad un cambiamento di coordinate.

Sia $x = (x^1, \dots, x^d)$ un sistema di coordinate locali. In queste coordinate, una metrica è rappresentata da una matrice simmetrica e definita positiva

$$(g_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,d}$$

(ovvero $g_{ij} = g_{ji}\ \forall i, j$, $g_{ij}\xi^i\xi^j > 0\ \forall \xi = (\xi^1, \dots, \xi^d) \neq 0$), le cui entrate sono funzioni differenziabili di x. Questa dipendenza, come vedremo, in realtà dipende solo dal punto base e non dalla scelta del sistema di coordinate.

Il prodotto di due vettori tangenti $v, w \in T_pM$, rappresentati dalle d-uple $(v^1, \dots, v^d), (w^1, \dots, w^d)$ (ovvero $v = v^i\frac{\partial}{\partial x^i}, w = w^j\frac{\partial}{\partial x^j}$), è dato da

$$\langle v, w\rangle := g_{ij}(x(p))v^iw^j. \tag{1.1}$$

In particolare abbiamo che $\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\rangle = g_{ij}$.

La lunghezza di un vettore v è data dall'espressione

$$\|v\| := \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Abbiamo infine il fattore di volume

$$\sqrt{g} := \sqrt{\det(g_{ij})}$$

che si usa per integrare le funzioni $F : M \to \mathbb{R}$ misurabili,

$$\int_M F(x)\sqrt{g(x)}dx^1 \dots dx^d. \tag{1.2}$$

In particolare, il volume di un sottoinsieme A di una varietà è dato da

$$\mathrm{Vol}(A) = \int_A \sqrt{g(x)}dx^1 \dots dx^d.$$

Il volume $\mathrm{Vol}(M)$ di una varietà Riemanniana M può essere infinito, ma se la varietà è compatta sarà finito. $\sqrt{g(x)}dx^1 \dots dx^d$ è detta *forma di volume* e si indica anche con $d\mathrm{Vol}$.

Studiamo ora il comportamento dell'espressione della metrica tramite un cambiamento di coordinate. Supponiamo che $y = f(x)$ esprima un nuovo sistema di coordinate locali. In queste nuove coordinate v e w hanno nuovi rappresentanti $(\tilde{v}^1, \dots, \tilde{v}^d), (\tilde{w}^1, \dots, \tilde{w}^d)$, con $\tilde{v}^j = v^i \frac{\partial f^j}{\partial x^i}, \tilde{w}^j = w^i \frac{\partial f^j}{\partial w^i}$.
Se la metrica nelle nuove coordinate è espressa da $h_{kl}(y)$, allora

$$h_{kl}(f(x))\tilde{v}^k\tilde{w}^l = \langle v, w\rangle = g_{ij}(x)v^i w^j,$$

per cui

$$h_{kl}(f(x))\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^l}{\partial x^j}v^i w^j = g_{ij}(x)v^i w^j,$$

e siccome ciò deve valere per tutti i vettori tangenti v e w,

$$h_{kl}(f(x))\frac{\partial f^k}{\partial x^i}\frac{\partial f^l}{\partial x^j} = g_{ij}(x), \tag{1.3}$$

che è la formula che descrive il cambiamento dell'espressione della metrica attraverso un cambio di coordinate.

Anche l'integrale (1.2) di una funzione Φ è invariante per trasformazioni di coordinate:

$$\int_M \Phi(f(x))\sqrt{g(x)}dx^1 \dots dx^d = \int_M \Phi(y)\sqrt{h(y)}dy^1 \dots dy^d.$$

L'esempio più semplice di metrica Riemanniana è la metrica Euclidea sullo spazio Euclideo $\mathbb{R}^d$. Siano $v = (v^1, \dots, v^d), w = (w^1, \dots, w^d) \in T_x\mathbb{R}^d$; il prodotto scalare Euclideo è dato semplicemente da

$$v \cdot w := \delta_{ij}v^i w^j = v^i w^i$$

dove

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

è l'usuale δ di Kronecker.

Osservazione
Lo spazio coordinato $\mathbb{R}^d = \{(x^1, \dots, x^d)\}$ è semplicemente lo spazio delle coardinate Cartesiane e il prodotto scalare Euclideo è una struttura aggiuntiva: tuttavia da qui in avanti supporremo sempre definito il prodotto scalare Euclideo sullo spazio coordinato Cartesiano.

Teorema 1.4.1. *Ogni varietà differenziabile ammette una metrica Riemanniana.*

Dimostrazione. Sia $\{(x_\alpha, U_\alpha) : \alpha \in A\}$ un atlante, $(\phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ una partizione dell'unità subordinata alle (U_α), che esiste per il Lemma 1.1.1 (per semplicità usiamo lo stesso insieme di indici per (ϕ_α) e (U_α): il motivo è che possiamo eventualmente sostituire il ricoprimento (U_α) con un suo raffinamento).

Siano $v, w \in T_pM$, $\alpha \in A$ con $p \in U_\alpha$, di coordinate $(v^1_\alpha, \ldots, v^d_\alpha)$, $(w^1_\alpha, \ldots, w^d_\alpha)$. Allora poniamo

$$\langle v, w\rangle := \sum_{\substack{\alpha\in A \\ \text{con } p\in U_\alpha}} \phi_\alpha(p) v^i_\alpha w^i_\alpha.$$

Questa è una metrica Riemanniana, ottenuta mettendo assieme le metriche Euclidee delle immagini nello spazio coordinato con l'ausilio della partizione dell'unità. □

Osservazione
Sia M una sottovarietà differenziabile di una varietà Riemanniana N. La metrica Riemanniana su N induce una metrica Riemanniana su M considerando la restrizione della metrica su N agli spazi tangenti $T_pM \subset T_pN$ per $p \in M$. Allora anche M è una varietà Riemanniana.

Su una varietà Riemanniana è possibile misurare la lunghezza di una curva e la distanza tra due punti.
Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso in $\mathbb{R}, \gamma : [a, b] \to M$ una curva differenziabile, ovvero di classe C^∞.
La *lunghezza di* γ è definita da

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\frac{d\gamma}{dt}(t)\| dt \tag{1.4}$$

e l'*energia di* γ da

$$E(\gamma) := \frac{1}{2}\int_a^b \|\frac{d\gamma}{dt}(t)\|^2 dt \tag{1.5}$$

Vediamo anche le loro espressioni in coordinate. Un punto sulla curva è individuato dalle coordinate $(x^1(\gamma(t)), \ldots, x^d(\gamma(t))))$; usiamo la notazione abbreviata

$$\dot{x}^i(t) := \frac{d}{dt}(x^i(\gamma(t))).$$

Allora

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(\gamma(t)))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)} dt \tag{1.6}$$

e

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b g_{ij}(x(\gamma(t)))\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t) dt \tag{1.7}$$

Osserviamo anche che la lughezza di una curva continua e differenziabile a tratti è data dalla somme delle lunghezze delle sue parti; lo stesso vale per l'energia.

Su una varietà Riemanniana M la *distanza* tra due punti p, q è definita da:

$$d(p,q) := \inf\{L(\gamma) : \gamma \to M, C^\infty \text{a tratti, tale che } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$$

Osserviamo che due punti qualsiasi su una varietà Riemanniana possono sempre essere connessi da una curva differenziabile a tratti e che quindi la distanza tra due punti è sempre definita.

1.5 Fibrati vettoriali

Definizione 1.5.1. *Un fibrato vettoriale (differenziabile) di rango n è una terna (E, π, M) consistente di uno spazio totale E, una base M e una proiezione $\pi : E \to M$, tali che: E e M sono varietà differenziabili, π è una mappa differenziabile, ogni "fibra" $E_x := \pi^{-1}(x)$ per $x \in M$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione n e vale la seguente proprietà: $\forall x \in M$ esistono un intorno U e un diffeomorfismo*

$$\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$$

con la proprietà che $\forall y \in U$

$$\phi_y := \phi_{|E_y} : E_y \to \{y\} \times \mathbb{R}^n$$

sia un isomorfismo tra spazi vettoriali, ovvero un'applicazione lineare bigettiva. La coppia (ϕ, U) è detta carta fibrata.

D'ora in avanti ometteremo il termine "differenziabile" per un fibrato vettoriale. Inoltre capiterà di indicare un fibrato vettoriale con il solo spazio totale.
Un fibrato vettoriale di rango n isomorfo a $M \times \mathbb{R}^n$ è detto *banale.*

Definizione 1.5.2. *Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Una sezione di E è mappa differenziabile $s : M \to E$ tale che $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$. Lo spazio delle sezioni di E è denotato con $\Gamma(E)$.*

Abbiamo già incontrato un esempio di fibrato vettoriale: il fibrato tangente TM di una varietà differenziabile M.

Definizione 1.5.3. *Una sezione del fibrato tangente TM di una varietà differenziabile M è detto campo vettoriale su M.*

Ora consideriamo un'applicazione differenziabile $f : M \to N$ tra due varietà differenziabili M e N, e sia (E, π, N) un fibrato vettoriale su N. Vogliamo "trasportare" su M il fibrato tramite f, ovvero costruire un fibrato f^*E tale che la fibra su $x \in M$ sia $E_{f(x)}$, la fibra sull'immagine di x.

Definizione 1.5.4. *Il fibrato pull-back f^*E è il fibrato su M le cui carte fibrate sono $(\phi \circ f, f^{-1}(U))$, con (ϕ, U) carte fibrate di E.*

Ora estendiamo ai fibrati vettoriali alcune costruzioni relative agli spazi vettoriali.

Definizione 1.5.5. *Siano $(E_1, \pi_1, M), (E_2, \pi_2, M)$ fibrati vettoriali su M. Se $f : E_1 \to E_2$ è un'applicazione differenziabile che conserva le fibre, ovvero*

$$\pi_2 \circ f = \pi_1,$$

e se le mappe indotte sulle fibre $f_x : E_{1,x} \to E_{2,x}$ sono omomorfismi tra spazi vettoriali, allora f è detta omomorfismo fibrato.

Definizione 1.5.6. *Siano $(E_1, \pi_1, M), (E_2, \pi_2, M)$ fibrati vettoriali su M. Il prodotto Cartesiano di E_1 e E_2 è un fibrato vettoriale su M, di fibre $E_{1,x} \times E_{2,x}, x \in M$, e di carte fibrate $(\phi_\alpha \times \psi_\beta, U_\alpha \cap V_\beta)$, con (ϕ_α, U_α) e (ψ_β, V_β) carte su E_1 e E_2 rispettivamente, e*

$$(\phi_\alpha \times \psi_\beta)(x, (v, w)) := (\phi_\alpha(x, v), \psi_\beta(x, w)) \quad (v \in E_{1,x}, w \in E_{2,x}).$$

Quindi il *fibrato prodotto* non è altro che il fibrato le cui fibre su $x \in M$ sono date dal prodotto delle fibre di E_1 e E_2 su x.

In modo analogo è possibile estendere ai fibrati vettoriali le nozioni di spazio duale, prodotto esterno e prodotto tensoriale.

Definizione 1.5.7. *Sia M una varietà differenziabile, $x \in M$. Lo spazio duale dello spazio tangente T_xM è detto spazio cotangente di M nel punto x e denotato con T_x^*M:*

$$T_x^*M := \{\alpha : T_xM \to \mathbb{R} \textit{ lineari}\}.$$

Il fibrato su M le cui fibre sono gli spazi cotangenti di M è detto fibrato cotangente di M e denotato con T^*M. Gli elementi di T^*M sono detti vettori cotangenti, le sezioni di T^*M sono dette 1-forme.

Vediamo ora come si trasformano i vettori cotangenti attraverso un cambio di coordinate. Siano $(e_i)_{i=1,\dots,d}$ una base di T_xM e $(\omega^j)_{j=1,\dots,d}$ la sua base duale su T_x^*M, ovvero

$$\omega^j(e_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Inoltre, siano $v = v^i e_i \in T_xM, \eta = \eta_j \omega^j \in T_x^*M$. Abbiamo che $\eta(v) = \eta_i v^i$. In cordinate locali abbiamo le seguenti espressioni per le basi $(e_i), (\omega^j)$:

$$e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \omega^j = dx^j.$$

Se f rappresenta un cambiamento di coordinate, v diventa

$$f_*(v) := v^i \frac{\partial f^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial f^k}$$

mentre η viene trasformato in

$$f^*(\eta) := \eta_j \frac{\partial x^j}{\partial f^l} df^l,$$

infatti

$$f^*(\eta)(f_*(v)) = \eta_j \frac{\partial x^j}{\partial f^k} v^i \frac{\partial f^k}{\partial x^i} = \eta_i v^i = \eta(v).$$

Osserviamo che un vettore tangente viene trasformato tramite la matrice associata al cambio di coordinate, mentre un vettore cotangente tramite la trasposta inversa della stessa matrice. Questa diversità di comportamento è espressa nella seguente definizione:

Definizione 1.5.8. *Un tensore p volte controvariante e q volte covariante su una varietà differenziabile M è una sezione di*

$$\underbrace{TM \otimes \cdots \otimes TM}_{p \text{ volte}} \otimes \underbrace{T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M}_{q \text{ volte}}.$$

Ricordiamo un risultato di algebra lineare. Siano V e W spazi vettoriali reali di dimensione m e n rispettivamente e siano $(e_1, \ldots, e_m), (f_1, \ldots, f_n)$ due loro basi. Allora $V \otimes W$ è lo spazio vettoriale di dimensione mn generato dalle basi $(e_i \otimes f_j)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$. Esiste un'applicazione bilineare canonica

$$L : V \times W \to V \otimes W$$

che manda $(a^i e_i, b^j f_j)$ in $a^i b^j e_i \otimes f_j$. Tramite la proprietà associativa si può definire il prodotto tensoriale di un numero maggiore di spazi vettoriali.

Osservazione

Per essere più precisi, su una varietà M dovremmo parlare di *campo tensiorale*, in quanto un tensore indicherebbe un elemento della corrispondente fibra, allo stesso modo in cui un vettore tangente è un elemento di T_xM e un campo tangente è una sezione di TM.

Se f è un cambio di coordinate, un tensore p volte controvariante e q volte covariante si trasforma p volte tramite la matrice (df) e q volte tramite la matrice $(df^{-1})^t$.

Lemma 1.5.1. *Una metrica Riemanniana su una varietà Riemanniana M è un tensore su M due volte covariante, simmetrico e definito positivo.*

Dimostrazione. Il comportamento della metrica come tensore due volte covariante è descritto dalla formula (1.3) per la trasformazione di una metrica Riemanniana. □

Quindi una metrica Riemanniana è una sezione di $T^*M \otimes T^*M$ e può essere espressa in coordinate locali da

$$g_{ij}dx^i \otimes dx^j.$$

1.6 Gruppo di struttura

Siano (E, π, M) un fibrato vettoriale di rango n, $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un ricoprimento di aperti di M per cui il fibrato è banale, e siano $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ i corrispondenti diffeomorfismi. Se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ abbiamo le mappe di transizione

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Gl(n, \mathbb{R})$$

tali che

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x, v) = (x, \phi_{\beta\alpha}(x)v) \quad \text{per } x \in U_\alpha \cap U_\beta, v \in \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

con $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ gruppo lineare generale delle matrici $n \times n$ invertibili su $\mathbb{R}$ (o, equivalentemente, delle applicazioni lineari invertibili su $\mathbb{R}^n$).

Le mappe di transizione soddisfano le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\alpha}(x) &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \quad && \forall x \in U_\alpha \\ \phi_{\alpha\beta}(x)\phi_{\beta\alpha}(x) &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \quad && \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \\ \phi_{\alpha\gamma}(x)\phi_{\gamma\beta}(x)\phi_{\beta\alpha}(x) &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} \quad && \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \end{aligned}$$

Un fibrato vettoriale può essere ricostruito a partire dalle sue mappe di transizione.

Teorema 1.6.1.

$$E = \coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{R}^n / \sim$$

dove $\coprod$ *indica l'unione disgiunta e la relazione di equivalenza* $\sim$ *è così definita:*

$$(x, v) \sim (y, w) \Longleftrightarrow x = y \text{ e } w = \phi_{\beta\alpha}(x)v \quad (x \in U_\alpha, y \in U_\beta, v, w \in \mathbb{R}^n).$$

Definizione 1.6.1. *Sia G un sottogruppo di $Gl(n, \mathbb{R})$, ad esempio il gruppo ortogonale $O(n)$ o il gruppo ortogonale speciale $SO(n)$. Diciamo che un fibrato vettoriale ha gruppo di struttura G se esiste un atlante di carte fibrate tale che tutte le mappe di transizione abbiano valori in G.*

Vediamo ora alcuni risultati relativi alle varietà Riemanniane.

Teorema 1.6.2. *Il fibrato tangente di una varietà Riemanniana M di dimensione d ha gruppo di struttura $O(d)$.*

Dimostrazione. Sia (f, U) una carta fibrata di TM,

$$f : \pi^{-1}(U) \to (U) \times \mathbb{R}^d.$$

Siano $e_1, \dots, e_d$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^d$, e siano $v_1, \dots, v_d$ le sezioni di $\pi^{-1}(U)$ tali che $f(v_i) = e_i, i = 1, \dots, d$. Applicando il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt a $v_1(x), \dots, v_d(x), \forall x \in U$, otteniamo delle sezioni $w_1, \dots, w_d$ di $\pi^{-1}(U)$ tali che $\{w_1(x), \dots, w_d(x)\}$ è una base ortonormale, rispetto alla metrica Riemanniana, di $T_xM, \forall x \in U$. Ponendo

$$\begin{aligned} f' : \pi^{-1}(U) &\to U \times \mathbb{R}^d \\ \lambda^i w_i &\mapsto (x, \lambda^1, \dots, \lambda^d), \end{aligned}$$

otteniamo una carta fibrata (f', U) che manda,$\forall x \in U$, la base $\{w_1(x), \dots, w_d(x)\}$, ortonormale rispetto alla metrica Riemanniana, in una base ortonormale Euclidea di $\mathbb{R}^d$. Applicando lo stesso processo di ortonormalizzazione ad ogni carta fibrata otteniamo un nuovo atlante fibrato le cui mappe di transizione mandano basi ortonormali Euclidee di $\mathbb{R}^d$ in altre basi dello stesso tipo, e quindi hanno valori in $O(d)$. □

Corollario 1.6.1. *Il fibrato tangente di una varietà Riemanniana orientata di dimensione d ha gruppo di struttura $SO(d)$.*

Dimostrazione. L'orientazione ci consente di scegliere un atlante tale che tutte le mappe di transizione di carte abbiano determinante Jacobiano positivo. Allora è possibile ottenere anche delle mappe di transizione di carte del fibrato tangente con determinante positivo. Il metodo di ortonormalizzazione applicato nel Teorema 1.6.2 conserva la positività del determinante e quindi, nel caso di un atlante orientato, otteniamo un nuovo atlante fibrato le cui mappe di transizione stanno in $SO(d)$. □

1.7 Metrica fibrata

Così come abbiamo introdotto una struttura metrica sugli spazi tangenti, allo stesso modo possiamo introdurre una metrica sui fibrati.

Definizione 1.7.1. *Sia (E, π, M) un fibrato vettoriale. Una metrica fibrata è data da una famiglia di prodotti scalari sulle fibre E_x, dipendenti in modo differenziabile dal punto base $x \in M$.*

Con lo stesso metodo seguito nel Teorema 1.6.2 si dimostra il seguente

Teorema 1.7.1. *Ogni fibrato vettoriale (E, π, M), di rango n, dotato di una metrica fibrata, ha gruppo di struttura $O(n)$. In particolare esistono delle carte fibrate (f, U), $f : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, tali che, $\forall x \in U, f^{-1}(x, (e_1, \dots, e_n))$ formano una base ortonormale di E_x, con $\{e_1, \dots, e_n\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.*

Alla stessa maniera del Teorema 1.4.1 si dimostra che:

Teorema 1.7.2. *Ogni fibrato vettoriale può essere dotato di una metrica fibrata.*

Ciò che per noi è rilevante è che una metrica Riemanniana su una varietà M induce in modo immediato una metrica fibrata sui fibrati tensiorali su M e in particolare sul fibrato cotangente. La metrica del fibrato cotangente è espressa in coordinate locali da

$$\langle \omega, \eta \rangle = g^{ij} \omega_i \eta_j \quad \text{con } \omega = \omega_i dx^i, \eta = \eta_i dx^i \tag{1.9}$$

e con (g^{ij}) inversa della matrice (g_{ij}).

Vediamo il suo comportamento nei confronti di un cambio di coordinate: sia $w \mapsto x(w)$ un cambio di coordinate, allora

$$\omega_i dx^i = \omega_i \frac{\partial x^i}{\partial w^k} dw^k =: \tilde{\omega}_k dw^k,$$

mentre g^{ij} viene trasformato in

$$h^{kl} = g^{ij} \frac{\partial w^k}{\partial x^i} \frac{\partial w^l}{\partial x^j}$$

e

$$h^{kl} \tilde{\omega}_k \tilde{\eta}_l = g^{ij} \omega_i \eta_j,$$

da cui l'invarianza.
Abbiamo inoltre

$$\|\omega(x)\| = \sup\{\omega(x)(v) : v \in T_x M, \|v\| = 1\}.$$

Una metrica Riemanniana induce un identificazione tra TM e T^*M:

$$\text{a } v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ corrisponde } \omega = \omega_j dx^j$$

$$\text{con } \omega_j = g_{ij} v^i$$
$$\text{e viceversa con } v^i = g^{ij} \omega_j.$$

Tramite questa identificazione, a $v \in T_x M$ corrisponde la 1-forma $\omega \in T_x^* M$ definita da

$$\omega(w) := \langle v, w \rangle \quad \forall w \in T_x M$$

e la (1.9) implica

$$\|\omega\| = \|v\|.$$

Definizione 1.7.2. *Una base ortonormale locale di $T_x M$ del tipo ottenuto nel Teorema 1.7.1 è detta riferimento ortonormale di campi.*

Capitolo 2

Spazi di Sobolev e PDE

2.1 Spazi di Sobolev

In questa sezione richiamiamo alcune nozioni e alcuni risultati, senza dimostrazione, relativi agli spazi di *Lebesgue* e di *Sobolev*. Per le dimostrazioni rimandiamo a [2].
Facciamo uso della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, identificando quindi le funzioni che differiscono solamente su un insieme di misura nulla. Quindi, quando parliamo di una funzione, in realtà stiamo considerando una classe di equivalenza di funzioni, secondo l'identificazione appena indicata.

Definizione 2.1.1. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto, $p \in \mathbb{R}, p \geq 1$ definiamo gli spazi di Lebesgue*

$$L^p(\Omega) := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \textit{ misurabili,}$$
$$\textit{tali che } \|f\|_{L^p(\Omega)} := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\},$$

$$L^\infty(\Omega) := \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \textit{ misurabili,}$$
$$\textit{tali che } \|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| < \infty \Big\},$$

con $\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} f(x) := \inf\{a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} : f(x) \leq a, \textit{ per quasi ogni } x \in \Omega\}$.

Teorema 2.1.1. *$L^p(\Omega)$, con la norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, è uno spazio di Banach, per $1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema 2.1.2. *Siano $p, q \geq 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($q = \infty$ per $p = 1$ e viceversa), $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$. Allora $fg \in L^1(\Omega)$ e vale la cosiddetta diseguaglianza di Hölder*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \Big(\int_\Omega |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_\Omega |g(x)|^q dx \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Teorema 2.1.3. *Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f in $L^p(\Omega)$, allora esiste una sua sottosuccessione convergente puntualmente quasi ovunque a f.*

Teorema 2.1.4. *Lo spazio delle funzioni differenziabili a supporto compatto $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$, per $1 \leq p < \infty$, ma non per $p = \infty$.*

Teorema 2.1.5. *Se $f \in L^2(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

allora

$$f = 0.$$

Poniamo ora

$$L^p_{\text{loc}} := \{f : \omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} : f \in L^p(\Omega'), \forall \Omega' \Subset \Omega\}.$$

Definizione 2.1.2. *Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Chiamiamo $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ la derivata debole di f in direzione x^i, indicata con $v = D_i f$, se*

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega f(x)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x^i}dx,$$

per ogni $\phi \in C_c^1(\Omega)$, con $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$.

In modo simile si possono definire le derivate deboli di ordine superiore: per ogni multi-indice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \dots, \alpha^N) \in \mathbb{N}^N$ di modulo $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha^1 + \cdots + \alpha^N = k$, usiamo la notazione $D_{\boldsymbol{\alpha}} f$.

Definizione 2.1.3. *Siano $k \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$. Definiamo gli spazi di Sobolev e le norme di Sobolev come segue:*

$$\begin{aligned}
W^{k,p}(\Omega) &:= \{f \in L^p(\Omega) : \forall \boldsymbol{\alpha} \text{ con } |\boldsymbol{\alpha}| \leq k : D_{\boldsymbol{\alpha}} \in L^p(\Omega)\}, \\
\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} &:= \Big(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \int_\Omega |D_{\boldsymbol{\alpha}} f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad \text{per } 1 \leq p < \infty, \\
\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} &:= \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq k} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |D_{\boldsymbol{\alpha}} f(x)|, \\
H_0^{k,p}(\Omega) &:= \overline{C_c^\infty(\Omega)} \text{ rispetto a } \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \\
H^{k,p}(\Omega) &:= \overline{C^\infty(\Omega)} \text{ rispetto a } \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Teorema 2.1.6. *$W^{k,p}(\Omega) = H^{k,p}(\Omega)$ per $1 \leq p < \infty, k \in \mathbb{N}$. $W^{k,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach per $1 \leq p \leq \infty, k \in \mathbb{N}$.*

Enunciamo anche alcune proprietà per le funzioni di Sobolev.

Lemma 2.1.1. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto, $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitziana, $f \in H^{1,p}(\Omega)$. Se $l \circ f \in L^p(\Omega)$, allora $l \circ f \in H^{1,p}(\Omega)$ e, per quasi ogni $x \in \Omega$,*

$$D_i(l \circ f)(x) = l'(f(x))D_i(x), \quad i = 1, \ldots, d.$$

Teorema 2.1.7 (**Teorema di embedding di Sobolev**). *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, $f \in H_0^{1,p}(\Omega)$. Allora*

$$\begin{aligned} &f \in L^{\frac{np}{n-p}} \quad \text{per } p < n, \\ &f \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{per } p > n. \end{aligned}$$

Più precisamente, esistono delle costanti $c = c(n,p)$ tali che

$$\begin{aligned} &\|f\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)} \leq c\|Df\|_{L^p(\Omega)} && \text{per } p < n, \\ &\sup_{x\in\Omega}|f(x)| \leq c\,\mathrm{Vol}(\Omega)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|Df\|_{L^p(\Omega)} && \text{per } p = n. \end{aligned}$$

Per $n = p$, $f \in L^q(\Omega)$ per ogni $q < \infty$.

Corollario 2.1.1 (**Diseguaglianza di Poincaré**). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Allora per ogni $f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ si ha che*

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\mathrm{Vol}(\Omega)^{\frac{1}{n}}\|Df\|_{L^2(\Omega)}.$$

Se, al posto di un dominio Ω nello spazio Euclideo, consideriamo una varietà Riemanniana compatta e connessa, abbiamo

Corollario 2.1.2 (**Diseguaglianza di Poincaré**). *Sia M una varietà Riemanniana compatta e connessa di dimensione n. Se $f \in H^{1,2}(M)$ soddisfa $\int_M f = 0$, allora*

$$\|f\|_{L^2(M)} \leq c\,\mathrm{Vol}(M)^{\frac{1}{n}}\|Df\|_{L^2(M)}.$$

Corollario 2.1.3. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, allora*

$$H_0^{k,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{np}{n-kp}}(\Omega) & \text{per } kp < n, \\ C^m(\overline{\Omega}) & \text{per } 0 \leq m < k - \frac{n}{p}. \end{cases}$$

In particolare, se $f \in H_0^{k,p}(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ per qualche p fissato, allora $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Teorema 2.1.8 (**Teorema di compattezza di Rellich-Kondrachov**). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un aperto limitato. Siano p, q tali che $1 \leq q < \frac{dp}{d-p}$ se $p < d$, $1 \leq q < \infty$ se $p \geq d$. Allora $H_0^{1,p}(\Omega)$ ammette un embedding compatto in $L^q(\Omega)$, ovvero se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_0^{1,p}(\Omega)$ soddisfa la relazione*

$$\|f_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \text{cost.},$$

allora ammette una sottosuccessione convergente in $L^q(\Omega)$.

Corollario 2.1.4. *Sia Ω come nel teorema precedente. Allora $H_0^{1,2}(\Omega)$ ammette embedding compatto in $L^2(\Omega)$. Allo stesso modo, se M è una varietà Riemanniana compatta, $H^{1,2}(M)$ ammette embedding compatto in $L^2(M)$.*

$H^{k,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare definito da

$$(f,g)_{H^{k,2}(\Omega)} := \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq k} \int_\Omega D_{\boldsymbol{\alpha}} f(x) D_{\boldsymbol{\alpha}} g(x) dx.$$

Ricordiamo infine il concetto di *convergenza debole*.
Sia H uno spazio di Hilbert, con norma $\|\cdot\|$ e prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diciamo che $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ *converge debolmente a* $v \in H$, indicando con

$$v_n \rightharpoonup v,$$

se e solo se

$$\langle v_n, w\rangle \to \langle v, w\rangle \quad \forall w \in H.$$

Teorema 2.1.9. *Ogni successione limitata $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in H ammette una sottosuccessione debolmente convergente e, se v è il suo limite,*

$$\|v\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|,$$

indicando ancora con (v_n) la sottosuccessione debolmente convergente.

2.2 Teoria dell'esistenza e regolarità delle soluzioni di equazioni alle derivate parziali lineari

In questa sezione ricorderemo brevemente alcuni risultati riguardanti la teoria delle equazioni alle derivate parziali lineari, in particolare ellittiche e paraboliche. Per dimostrazioni e maggiori dettagli rimandiamo a [2] e [8].

Nel seguito con Ω indicheremo sempre un aperto limitato di $\mathbb{R}^m$.
Consideriamo un operatore

$$Lf(x) := \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(a^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^j} f(x)\Big) \tag{2.1}$$

con $x \in \Omega, a^{ij}, f : \Omega \to \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^m$. Diciamo che L è *uniformemente ellittico* se esistono delle costanti $0 < \lambda \leq \mu$ tali che

$$\lambda|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \mu|\xi|^2 \tag{2.2}$$

per ogni $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^m$.

Definizione 2.2.1. *Sia $k \in L^2(\Omega)$. Diciamo che $f \in H^{1,2}(\Omega)$ è soluzione debole dell'equazione*

$$Lf = k \tag{2.3}$$

se

$$\int_\Omega a^{ij}(x) D_j f(x) D_i \phi(x) dx = -\int_\Omega k(x)\phi(x) d(x)$$

per ogni $\phi \in H_0^{1,2}(\Omega)$.

Teorema 2.2.1. *Sia $k \in L^2(\Omega)$. Allora esiste un unica soluzione debole $f \in H_0^{1,2}(\Omega)$ dell'equazione (2.3).*

Enunciamo ora il teorema di regolarità per le soluzioni deboli.

Teorema 2.2.2. *Sia $f \in H^{1,2}$ una soluzione debole della (2.3). Se $k \in H^{n,2}(\Omega), a^{ij} \in C^{n+1}(\Omega), n \in \mathbb{N}$, allora*

$$f \in H^{n+2,2}(\Omega')$$

per ogni $\Omega' \Subset \Omega$.
Se

$$\|a^{ij}\|_{C^{n+1}(\Omega)} \leq K_n$$

allora

$$\|f\|_{H^{n+2,2}(\Omega')} \leq c(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|k\|_{H^{n,2}(\Omega)}),$$

con c costante dipendente da m, λ, n, K_n e $\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)$.

Iterando questo risultato rispetto all'ordine di regolarità, otteniamo il seguente

Corollario 2.2.1. *Sia $f \in H^{1,2}(\Omega)$ una soluzione debole della (2.3). Siano inoltre $k, a^{ij} \in C^\infty(\Omega)$. Allora*

$$f \in C^\infty(\Omega')$$

per ogni $\Omega' \Subset \Omega$.

Se le funzioni coefficienti sono Hölder-continue abbiamo anche delle stime a priori sulle soluzioni della (2.3). Ricordiamo prima come sono definiti gli spazi di Hölder $C^{0,\sigma}, C^{\nu,\sigma}$.
Siano $0 < \sigma < 1, \nu \in \mathbb{N}, \Omega \subset \mathbb{R}^m$ aperto limitato,

$$C^{0,\sigma}(\Omega) = \left\{ u \in C(\Omega) \ : \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\sigma} < \infty \right\}$$
$$C^{\nu,\sigma}(\Omega) = \{ u \in C(\Omega) \ : D^{\boldsymbol{\beta}} u \in C^{0,\sigma}(\Omega) \quad \forall \boldsymbol{\beta} \text{ tale che } |\boldsymbol{\beta}| = \nu \},$$

dove $D^{\boldsymbol{\beta}}$ è la derivata multiindice definita da

$$D^{\boldsymbol{\beta}} u = \frac{\partial^\nu u}{\partial x_1^{\beta_1}, \dots \partial x_m^{\beta_m}},$$

per ogni multiindice $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{N}^m$ con $|\boldsymbol{\beta}| = \beta_1 + \dots + \beta_m = \nu$, con $u \in C^\nu(\overline{\Omega})$. Con le relative norme, per funzioni u limitate,

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{0,\sigma}(\Omega)} &= \|u\|_{C(\Omega)} + \sup_{x,y \in \Omega, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{\|x - y\|^\sigma} \\ \|u\|_{C^{\nu,\sigma}(\Omega)} &= \sum_{|\boldsymbol{\beta}| \leq \nu} \|D^{\boldsymbol{\beta}} u\|_{C^{0,\sigma}(\Omega)}, \end{aligned}$$

$C^{0,\sigma}(\Omega), C^{\nu,\sigma}(\Omega)$ sono spazi di Banach.

Abbiamo quindi le seguenti stime di Schauder.

Teorema 2.2.3. *Sia L come nelle (2.1),(2.2) e supponiamo che i coefficienti $a^{ij}(x)$ siano Hölder-continui in Ω, cioè contenuti in $C^{0,\sigma}(\Omega)$ per qualche $0 < \sigma < 1$.*

(i) Se u è soluzione debole di

$$Lu = k$$

con $k \in L^\infty(\Omega)$, allora $u \in C^{1,\sigma}(\Omega)$, e su ogni $\Omega' \Subset \Omega$, la sua norma $C^{1,\sigma}$ può essere stimata a partire dalla sua norma L^2 e dalla norma L^∞ di k, con una costante che dipende da $\Omega, \Omega', m, \sigma, \lambda, \mu$ e dalla norma $C^{0,\sigma}$ di $a^{ij}(x)$.

(ii) Se u è soluzione debole di

$$Lu = k$$

con $k \in C^{\nu,\sigma}(\Omega)$, e se anche i coefficienti $a^{ij} \in C^{\nu,\sigma}(\Omega)$, allora $u \in C^{\nu+2,\sigma}(\Omega)$, e vale una stima analoga alla (i), ma stavolta con le norme $C^{\nu,\sigma}$ di k e a^{ij}.

Vale inoltre il cosiddetto *principio del masssimo*:

Teorema 2.2.4. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (o, più in generale, $\Omega \subset M$ con M varietà Riemanniana) un aperto limitato, $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tale che*

$$Lf \geq 0 \quad su\ \Omega.$$

Allora f assume il suo massimo sulla frontiera $\partial\Omega$.

Tutti i risultati precedenti all'interno di questa sezione possono essere applicati anche su opportuni aperti su una varietà Riemanniana M, di dimensione m, considerando l'operatore di Laplace-Beltrami, ponendo

$$L = -\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big),$$

con $(g_{ij})_{i,j=1,\ldots,m}$ tensore metrico su M in coordinate locali $(x^1, \ldots, x^m)$, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, $g = \det(g_{ij})$.

Nell'ultimo capitolo vedremo una dimostrazione del Teorema di Hodge che fa uso dell'equazione del calore, la quale è un'equazione lineare parabolica. Vediamo quindi brevemente alcuni risultati della relativa teoria.

Consideremo equazioni differenziali su $\Omega \times [0, +\infty)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^m$. Come prima, sia L un operatore uniformemente ellittico

$$Lf(x,t) := \frac{\partial}{\partial x^i} \Big(a^{ij}(x,t) \frac{\partial}{\partial x^j} f(x,t) \Big) \tag{2.4}$$

per cui esistono due costanti $0 < \lambda \leq \mu$ tali che

$$\lambda |\xi|^2 \leq a^{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \leq \mu |\xi|^2 \tag{2.5}$$

per ogni $x \in \Omega, t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^m$. Vogliamo quindi studiare l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) - Lf(x,t) = k(x,t) \quad \text{per } (x,t) \in \Omega \times [0, +\infty) \tag{2.6}$$

$$f(x,0) = \phi(x) \quad \text{per } x \in \Omega \ , \tag{2.7}$$

con $\phi(x)$ funzione continua, $k(x,t)$ funzione limitata (con opportune condizioni al bordo, su cui non approfondiamo perchè nel nostro caso considereremo varietà Riemanniane M compatte invece di aperti Ω, e queste condizioni non sarebbero rilevanti). La (2.6) è un'equazione alle derivate parziali lineare parabolica.

Enunciamo prima il *principio del massimo.*

Teorema 2.2.5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ (o più in generale, $\Omega \subset M$, con M varietà Riemannianna) un aperto limitato, $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ rispetto a x e $C^1((0,T)) \cap C([0,T])$ rispetto a t, tale che*

$$\frac{\partial}{\partial t} f - Lf \leq 0 \quad \textit{in } \Omega \times [0,T] \ . \tag{2.8}$$

Allora f assume il suo massimo in (x,t) con $x \in \partial\Omega$ o $t = 0$, ovvero sul bordo dello spazio o al tempo iniziale. Se, in particolare, M è una varietà compatta, senza bordo, l'estremo superiore di $f(\cdot, t)$ è una funzione decrescente di t.

Abbiamo infine il seguente teorema di esistenza e regolarità per le soluzioni dell'equazione (2.6), con stime di Shauder.

Teorema 2.2.6. *Sia L come in (2.4), (2.5), supponiamo che i coefficienti $a^{ij}(x,t)$ siano Hölder-continui in $\Omega \times [0,\infty)$, ovvero contenuti in $C^{0,\sigma}(\Omega \times [0,\infty))$, per qualche $0 < \sigma < 1$. Se fissiamo la condizione sul bordo, ad esempio ponendo $f(y,t) = g(y), \forall y \in \partial\Omega$, con g funzione continua, la soluzione dell'equazione (2.6) esiste $\forall t \geq 0$.*
Inoltre si hanno le seguenti stime:

(i) Se u è soluzione debole di

$$Lu = k$$

con $k \in L^\infty(\Omega \times [0,\infty))$, allora, come funzione di x, $u \in C^{1,\sigma}(\Omega)$, e per ogni $\Omega' \Subset \Omega$ e $t_0 > 0$, la sua norma $C^{1,\sigma}$ su $\Omega' \times [t_0,\infty)$ può essere stimata a partire dalla sua norma L^∞ e dalla norma L^∞ di k, con una costante che dipende da $\Omega, \Omega', t_0, m, \sigma, \lambda, \mu$ e dalla norma $C^{0,\sigma}$ di $a^{ij}(x)$.

(ii) Se u è soluzione debole di

$$Lu = k$$

con $k \in C^{\nu,\sigma}(\Omega \times [0,\infty))$, e se anche i coefficienti $a^{ij} \in C^{\nu,\sigma}(\Omega \times [0,\infty))$, allora $u \in C^{\nu+2,\sigma}(\Omega)$ rispetto a x ed è di classe $C^{\nu+1,\sigma}$ rispetto a t, e vale una stima analoga alla (i), ma stavolta con le norme $C^{\nu,\sigma}$ di k e a^{ij}.

Nel secondo caso, per $\nu = 0$, otteniamo la stima

$$\|u(\cdot,t)\|_{C^{2,\sigma}} + \|\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot,t)\|_{C^\sigma} \leq c\Big(\sup_{[0,T]}\|k(\cdot,t)\|_{C^\sigma} + \sup_{[0,T]}\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty}\Big) \tag{2.9}$$

Per maggiori dettagli sulle stime di Shauder rimandiamo a [3, Sez. 2.2]. Osserviamo che è possibile ottenere una stima più forte sostituendo a destra le norme L^∞ con le norme L^2.

Capitolo 3

Forme differenziali e operatore di Laplace

3.1 Forme differenziali su $\mathbb{R}^n$

Iniziamo per semplicità col definire le forme differenziali su $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che se definiamo un prodotto che sia associativo su uno spazio vettoriale reale Λ in modo da dotarlo della struttura di anello con unità e se $\forall a \in \mathbb{R}, \lambda, \mu \in \Lambda$ vale che:

$$a(\lambda\mu) = (a\lambda)\mu = \lambda(a\mu),$$

allora Λ è detta $\mathbb{R}$-*algebra*.

Definizione 3.1.1. *Un'algebra generata da $dx^1, \ldots, dx^n$ con unità 1, tale che valga l'equazione*

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \tag{3.1}$$

per ogni i, j, è denotata con Λ_n^*. Col simbolo $\wedge$ stiamo indicando il prodotto all'interno dell'algebra. Chiamiamo Λ_n^* l'algebra esterna generata da $dx^1, \ldots, dx^n$.

La formula 3.1 implica che $dx^i \wedge dx^i = 0 \ \forall i$.
Se poniamo il grado di dx_i uguale a 1, allora ogni elemento prodotto in Λ_n^* ha un grado fissato. Ad esempio il grado di $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ è 3. Se chiamiamo Λ_n^k l'insieme di tutte le combinazioni lineari di elementi di grado k, abbiamo la seguente decomposizione in somme dirette:

$$\Lambda_n^* = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda_n^k = \Lambda_n^0 \oplus \Lambda_n^1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_n^n.$$

Come base di Λ_n^k possiamo considerare degli elementi del tipo

$$dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n, \tag{3.2}$$

e perciò $\dim \Lambda_n^k = \binom{n}{k}$. Inoltre se $k > n$ allora $\Lambda_n^k = 0$ e $\dim \Lambda_n^* = 2^n$.

Definizione 3.1.2. *Una combinazione lineare*

$$\omega = \sum_{i_1<\dots<i_k} \omega_{i_1\dots i_k}(x^1,\dots,x^n)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

di elementi di base con funzioni C^∞ da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ come coefficienti, è detta forma differenziale di grado k su $\mathbb{R}^n$ o, abbreviando, k-forma.

Talvolta sarà più comodo indicare la stessa forma con l'espressione seguente:

$$\omega = \omega_I(x)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$$

Indicheremo l'insieme delle k-forme su $\mathbb{R}^n$ con $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$. Più precisamente,

$$\Omega^k(\mathbb{R}^n) := \{\omega : \mathbb{R}^n \to \Lambda^k_n, \text{differenziabili}\}$$

o anche

$$\Omega^k(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)\otimes\Lambda^k_n.$$

Se mettiamo insieme tutte le forme differenziali di qualsiasi grado, possiamo definire l'algebra di tutte le forme differenziali su $\mathbb{R}^n$:

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) := \bigoplus_{k=0}^{n}\Omega^k(\mathbb{R}^n).$$

Come caso particolare abbiamo $\Omega^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ovvero le forme differenziali di grado 0 sono semplicemente funzioni C^∞.
Il *prodotto esterno* $\omega\wedge\eta \in \Omega^{k+l}(\mathbb{R}^n)$ di una k-forma $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ e una l-forma $\eta \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$ è definito da

$$\omega\wedge\eta = \omega_I\eta_J dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}\wedge dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l}$$

con

$$\omega = \omega_I(x)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k},\ \eta = \eta_J(x)dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_l}.$$

Possiamo fare le stesse costruzioni e considerazioni sostituendo $\mathbb{R}^n$ con un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$ e ottenere l'algebra $\Omega^*(U)$ delle forme differenziali su U.

Definiamo ora un importante operatore che agisce sulle forme differenziali.

Definizione 3.1.3. *Il differenziale esterno, o derivata esterna, è l'applicazione lineare*

$$d : \Omega^k(\mathbb{R}^n) \to \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^n)$$

così definita: se $\omega = f(x^1,\dots,x^n)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}$, poniamo

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_k}. \tag{3.3}$$

Per una generica k-forma la formula 3.3 si estende per linearità. Per una funzione $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ la sua derivata esterna $df \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ è $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$.

Una forma differenziale ω tale che $d\omega = 0$ è detta *forma chiusa*, mentre una forma η tale che $\eta = d\omega$ per qualche forma ω è detta *forma esatta*. Il teorema seguente afferma che ogni forma esatta è chiusa.

Teorema 3.1.1.

$$d \circ d = 0$$

Dimostrazione. Per linearità basta dimostrare l'identità su forme del tipo

$$\omega = f(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Applicando nuovamente d nella formula (3.3) otteniamo:

$$d(d\omega) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = 0$$

perchè $\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^j}$ e vale la relazione di antisimmetria in (3.1). □

E' lecito chiedersi se vale il viceversa, cioè se ogni k-forma chiusa è esatta: ciò accade effettivamente per le forme definite su aperti stellati di $\mathbb{R}^n$, con $k > 0$ (Lemma di Poincaré, vedere ad esempio in [6]), ma non accade nel caso generico di varietà differenziabili. Questo problema è l'oggetto di studio della teoria della coomologia di de Rham che definiremo più avanti.

Vediamo ora alcune ulteriori proprietà del prodotto esterno e della derivata esterna.

Lemma 3.1.1. *Siano $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n), \eta \in \Omega^l(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

(i) $\eta \wedge \omega = (-1)^{kl} \omega \wedge \eta$,

(ii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

Dimostrazione. Per linearità basta dimostrare le due affermazioni per

$$\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}, \quad \eta = g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$$

Per dimostrare la (i) basta utilizzare ripetutamente l'antisimmetria della formula (3.1).
Ora, per dimostrare la (ii), se applichiamo d al prodotto

$$\omega \wedge \eta = fg dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta) &= (dfg + fdg) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} = \\
&= dfg dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} + \\
&\quad + fdg dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} = \\
&= df dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge g dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} + \\
&\quad + (-1)^k f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dg \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_l} = \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta
\end{aligned}$$

□

Consideriamo ora due aperti di $\mathbb{R}^n$, U e U', e un diffeomorfismo $\phi : U \to U'$. Possiamo allora definire un omomorfismo

$$\phi^* : \Omega^*(U') \to \Omega^*(U)$$

nel modo seguente. Per una funzione $f \in \Omega^0(U')$ poniamo $\phi^*(f) := f \circ \phi \in \Omega^0(U)$ e sulle 1-forme di base poniamo $\phi^*(dx^i) := d(\phi^*(x^i))$. Allora possiamo estendere queste definizioni alle forme di qualsiasi grado in modo che valga

$$\phi^*(\omega \wedge \eta) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\eta)$$

per il prodotto esterno di due forme su U'. Procediamo nel modo seguente. Siano $(x^1, \ldots, x^n), (y^1, \ldots, y^n)$ coordinate locali su U' e U rispettivamente. Ogni x^i può essere scritto come funzione $x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n)$. Allora abbiamo che $\phi^*(dx^i) = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j$, e da questa ricaviamo che

$$\phi^*(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \frac{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})}{\partial(y^{j_1}, \ldots, y^{j_k})} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}, \qquad (3.4)$$

dove $\frac{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_k})}{\partial(y^{j_1}, \ldots, y^{j_k})}$ è lo Jacobiano di $x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}$ rispetto alle $y^{j_1}, \ldots, y^{j_k}$.
Si dimostra (ad esempio in [7]) anche che

$$d \circ \phi^* = \phi^* \circ d$$

e che, considerando ϕ^{-1}, ϕ^* risulta essere un isomorfismo. Denoteremo $\phi^*(\omega)$ anche con $\phi^* \omega$.

3.2 Forme differenziali su varietà

Sia M una varietà differenziabile di dimensione d, $x \in M$. Poniamo

$$\Lambda^p(T_x^* M) := \underbrace{T_x^* M \wedge \cdots \wedge T_x^* M}_{p \text{ volte}},$$

dove $\wedge$ indica il prodotto esterno. Un elemento di $\Lambda^p(T_x^*M)$ è una somma di termini del tipo

$$\eta dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

con $(x^1, \dots, x^d)$ coordinate locali di $x, \eta \in \mathbb{R}$. Ovvero se $\omega \in \Lambda^p(T_x^*M)$

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}.$$

con i coefficienti $\omega_{i_1,\dots,i_p}$ supposti antisimmetrici, nel senso che cambiano segno quando due indici vengono scambiati. Quindi ad esempio nel caso $p = 2$

$$\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j = -\omega_{ij} dx^j \wedge dx^i$$

implica l'antisimmetria

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}.$$

Ciò implica anche che $\omega_{ii} = 0\ \forall i$. La proprietà caratteristica del prodotto esterno $\wedge$ è la seguente. Siano $V = v^k \frac{\partial}{\partial x^k}, W = w^l \frac{\partial}{\partial x^l}$ vettori tangenti in $x \in M$ e consideriamo $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \in \Lambda^2(T_x^*M)$. Allora

$$\omega(V, W) = \omega_{ij}(v^i w^j - v^j w^i).$$

In particolare si ha che

$$dx^i \wedge dx^j \Big(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \Big) = \delta^i_k \delta^j_l - \delta^j_k \delta^i_l.$$

Questa regola si estende per p generico. Se $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Lambda^1(T_x^*M)$,

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(\xi_1, \dots \xi_p) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_1) & \dots & \omega_1(\xi_p) \\ \omega_2(\xi_1) & \dots & \omega_2(\xi_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_p(\xi_1) & \dots & \omega_p(\xi_p) \end{pmatrix}$$

Su $\Lambda^p(T_x^*M)$ abbiamo due importanti operazioni.
La prima è il prodotto esterno per una 1-forma $\eta \in T_x^*M = \Lambda^1(T_x^*M)$:

$$\begin{aligned} \Lambda^p(T_x^*M) &\to \Lambda^{p+1}(T_x^*M) \\ \omega &\mapsto \eta \wedge \omega =: \epsilon(\eta)\omega \end{aligned}$$

La seconda è il prodotto interno o contrazione per un elemento $v \in T_xM$:

$$\begin{aligned} \Lambda^p(T_x^*M) &\to \Lambda^{p-1}(T_x^*M) \\ \omega &\mapsto \iota(v)\omega \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \iota(v)\omega(v_1, \dots, v_{p-1}) :=& \omega(v, v_1, \dots, v_{p-1}) \\ & \text{per } v, v_1, \dots, v_{p-1} \in T_xM \end{aligned}$$

Il fibrato vettoriale su M di fibre $\Lambda^p(T_x^*M)$ su x è denotato con $\Lambda^p(M)$.

Definizione 3.2.1. *Lo spazio delle sezioni di* $\Lambda^p(M)$ *è denotato con* $\Omega^p(M)$, *ovvero* $\Omega^p(M) := \Gamma(\Lambda^p(M))$. *Gli elementi di* $\Omega^p(M)$ *sono detti p-forme.*

Definizione 3.2.2. *La derivata esterna* $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ $(p = 0, 1, \ldots, \dim M)$ *è definita dalla formula*

$$d(\eta(x)dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = \frac{\partial \eta(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

e si estende per linearità a tutto $\Omega^p(M)$.

Lemma 3.2.1. *Siano* $\omega \in \Omega^p(M), \theta \in \Omega^q(M)$. *Allora*

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta.$$

Dimostrazione. Analogo al caso euclideo. □

Se $f : M \to N$ è una mappa differenziabile tra due varietà differenziabili M, N, con coordinate locali $(x^1, \ldots, x^m), (z^1, \ldots, z^n)$ rispettivamente, e

$$\omega(z) = \eta(z)dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \in \Omega^p(N),$$

definiamo

$$f^*(\omega(x)) = \eta(f(x)) \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial f^{i_p}}{\partial x^{j_p}} dx^{j_p} \in \Omega^p(M).$$

Se, in particolare, M e N hanno la stessa dimensione n e se $\omega = \eta(z)dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$ è una n-forma, allora

$$f^*(\omega(x)) = \det(df)\eta(f(x))dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

dove $\det(df)$ è lo Jacobiano della mappa f.
Se supponiamo anche che M, N siano compatte abbiamo che

$$\int_N \omega = \int_M f^*(\omega).$$

Usando le precedenti notazioni possiamo enunciare alcuni risultati relativi al comportamento della derivata esterna d in seguito a un cambio di coordinate. Per le dimostrazioni rimandiamo a [1, Sezione 2.1].

Lemma 3.2.2.

$$d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$$

Corollario 3.2.1. *d non dipende dalla scelta delle coordinate.*

Analogamente al caso Euclideo si dimostra il seguente

Teorema 3.2.1.

$$d \circ d = 0$$

Enunciamo anche il *Teorema di Stokes* rimandando a [7] per la dimostrazione

Teorema 3.2.2. *Sia M una sottovarietà differenziabile, orientabile, di dimensione m, di una varietà differenziabile N, con bordo. Ovvero ∂M è una sottovarietà differenziabile di N di dimensione $m-1$, con un orientazione indotta da quella di M; sia inoltre ω una $(m-1)$-forma differenziale su N. Allora, se gli integrali esistono, ad esempio se $\bar{M}$ è compatta,*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Corollario 3.2.2. *Sia M una varietà differenziabile orientabile, di dimensione m, senza bordo. Se ω è una $(m-1)$-forma a supporto compatto, allora*

$$\int_M d\omega = 0.$$

3.3 Operatore di Laplace su funzioni

Iniziamo col caso dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^d$ dotato della metrica Euclidea $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Il *gradiente di f* è definito dal campo vettoriale:

$$\nabla f := \operatorname{grad} f := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{3.5}$$

Consideriamo inoltre la 1-forma

$$df = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Questi due oggetti sono l'uno il duale dell'altro, nel senso che

$$df(X) = \langle \operatorname{grad} f, X \rangle$$

per ogni campo vettoriale differenziabile X.
Per un campo vettoriale differenziabile $Z = Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ su $\mathbb{R}^d$, definiamo la sua *divergenza*

$$\operatorname{div} Z := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial Z^i}{\partial x^i}.$$

Inoltre, per una 1-forma $\phi = \sum_{i=1}^{d} \phi_i dx^i$, definiamo

$$d^* \phi := -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \phi_i}{\partial x^i} = -\operatorname{div} \phi.$$

Definiremo meglio in seguito l'operatore d^* su forme di qualsiasi grado. Possiamo anticipare dicendo che d^* è l'operatore aggiunto di d sulle forme rispetto al prodotto L^2. Si dimostra, tramite il Teorema di Stokes, che se ϕ è una 1-forma a supporto compatto,

$$\int \operatorname{div} \phi dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = 0, \tag{3.6}$$

e più in generale

$$\begin{aligned}(df, \phi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i} \phi_i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^d f \frac{\partial \phi_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d.\end{aligned} \tag{3.7}$$

L'operatore Δ definito su una funzione differenziabile f da

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) \tag{3.8}$$

è detto *operatore di Laplace*.
Se f è una funzione differenziabile a supporto compatto, dalla (3.6) abbiamo che

$$\int \Delta f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = 0,$$

e dalla (3.7), per due analoghe funzioni f, g, abbiamo che

$$(\Delta f, g) = (df, dg) = (f, \Delta g). \tag{3.9}$$

Infine, per una funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, definiamo l'*integrale di Dirichlet o energia*

$$\begin{aligned}E(f) :&= \frac{1}{2} \int \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = \\ &= \frac{1}{2} \int \langle df, df \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = \\ &= \frac{1}{2} \int \sum_{i=1}^d \Big(\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big)^2 dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d,\end{aligned}$$

dove il prodotto scalare nel primo integrale è quello sui campi vettoriali, mentre quello nel secondo integrale è il prodotto scalare indotto sulle 1-forme. Nel caso Euclideo non ne notiamo le differenze, ma nel caso delle varietà Riemannianne sarà diverso.
Più in generale, se $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ è un aperto, poniamo

$$E(f, \Omega) := \frac{1}{2} \int_\Omega \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d.$$

Se f è una funzione a supporto compatto, $E(f) < \infty$. In opportuni spazi di funzioni anche $E(f, \Omega)$ è ben definito (ad esempio in $H_0^{1,2}(\Omega)$).

Supponiamo ora che f sia un (punto di) minimo per $E(f, \Omega)$, ovvero

$$E(f, \Omega) \leq E(g, \Omega)$$

per ogni $g : \Omega \to \mathbb{R}$ con gli stessi valori alla frontiera, cioè

$$g(y) = f(y) \ \forall y \in \partial\Omega.$$

Allora

$$E(f, \Omega) \leq E(f + t\eta, \Omega)$$

per ogni $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\eta(y) = 0 \ \forall y \in \partial\Omega, t \in \mathbb{R}$. Perciò, quando la derivata esiste, avremo che

$$\frac{d}{dt} E(f + t\eta, \Omega)_{|t=0} = 0 \tag{3.10}$$

per ogni η del tipo su indicato. Sviluppando il calcolo otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E(f + t\eta, \Omega)_{|t=0} &= \int_\Omega \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \eta \rangle dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \eta}{\partial dx^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = \\
&= \int_\Omega \Big(- \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} \eta \Big) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = \\
&= \int_\Omega \Delta f \eta dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d,
\end{aligned}$$

avendo usato l'integrazione per parti e il fatto che $\eta = 0$ su $\partial\Omega$.
Allora, per il teorema 2.1.5, condizione necessaria affinchè valga la (3.10) è che

$$\Delta f = 0 \text{ su } \Omega. \tag{3.11}$$

Definizione 3.3.1. *Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $\Delta f = 0$ è detta funzione armonica.*

Riassumiamo le considerazioni precedenti affermando che un minimo per l'integrale di Dirichlet, con determinate condizioni alla frontiera su un aperto Ω, deve essere una funzione armonica.

Estendiamo ora le nostre considerazioni al caso di una varietà Riemanniana: sia M una varietà Riemanniana di dimensione d, di coordinate locali $x^1, \dots, x^d$ e indichiamo con g_{ij} la sua metrica. Per non appesantire eccessivamente la notazione faremo ampio utilizzo della convenzione di Einstein.

Siano $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile su M e X un campo vettoriale. Vogliamo definire il gradiente di f in modo che valga la relazione

$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = X(f) = df(X).$$

Siccome

$$\langle \operatorname{grad} f, X\rangle = g_{ij}(\operatorname{grad} f)^i X^j,$$

abbiamo che dobbiamo porre

$$\nabla f := \operatorname{grad} f := g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Infatti, come possiamo verifcare sulle norme,

$$\|\nabla f\|^2 = g_{jl}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}g^{kl}\frac{\partial f}{\partial x^k} = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} = \|df\|^2.$$

Possiamo quindi estendere la definizione di divergenza di un campo vettoriale $Z = Z^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, indicando con $g = \det(g_{ij})$,

$$\operatorname{div} Z := \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}Z^j) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\sqrt{g}g^{ij}\langle Z, \frac{\partial}{\partial x^i}\rangle\Big)$$

e definire l'*operatore di Laplace-Beltrami*

$$\Delta f := -\operatorname{div}\operatorname{grad} f = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big).$$

Come nel caso Euclideo, per una funzione differenziabile f a supporto compatto, abbiamo

$$\int \Delta f\sqrt{g}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^d = 0$$

e per due funzioni f, g dello stesso tipo

$$(\Delta f, g) = (df, dg) = (f, \Delta g).$$

Infine definiamo l'energia di una funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} E(f) :&= \frac{1}{2}\int_M \langle df, df\rangle\sqrt{g}dx^1\ldots dx^d = \\ &= \frac{1}{2}\int_M g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\sqrt{g}dx^1\ldots dx^d. \end{aligned}$$

In questa formula abbiamo indicato con $\langle ., .\rangle$ la metrica Riemanniana indotta sulle 1-forme. Se invece consideriamo il campo vettoriale $\operatorname{grad} f$ al posto della 1-forma df, possiamo usare la metrica Riemanniana sui vettori tangenti

$$\begin{aligned} E(f) :&= \frac{1}{2}\int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f\rangle\sqrt{g}dx^1\ldots dx^d = \\ &= \frac{1}{2}\int_M g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\sqrt{g}dx^1\ldots dx^d. \end{aligned}$$

In queste formule rientra anche il caso Euclideo.

Supponiamo ora che f si un punto critico di $E(f)$, ovvero

$$\frac{d}{dt}E(f+t\eta)_{|t=0}=0$$

per ogni $\eta : M \to \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre, per semplificare, che M sia una varietà Riemanniana compatta e che η abbia supporto compatto.
Possiamo allora calcolare

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_M g^{ij}(x)\Big(\frac{\partial f}{\partial x^i}+t\frac{\partial \eta}{\partial x^i}\Big)\Big(\frac{\partial f}{\partial x^j}+t\frac{\partial \eta}{\partial x^j}\Big)\sqrt{g}dx^1\dots dx^d|_{t=0} = \\
&= \int_M g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \eta}{\partial x^j}\sqrt{g}dx^1\dots dx^d = \\
&= -\int_M \frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)\eta dx^1\dots dx^d = \\
&= \int_M \Delta f\eta\sqrt{g}dx^1\dots dx^d.
\end{aligned}$$

Se questo è valido per ogni η allora, sempre per il teorema 2.1.5,

$$\Delta f = 0.$$

Analogamente al caso Euclideo, una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ tale che $\Delta f = 0$ è detta *armonica*.

Quindi nelle considerazioni precedenti abbiamo mostrato che:

Lemma 3.3.1. *Un punto critico f dell'integrale dell'energia E, ovvero*

$$\frac{d}{dt}E(f+t\eta)_{|t=0}=0,$$

$\forall\eta : M \to \mathbb{R}$ a supporto compatto in M, è una funzione armonica, cioè $\Delta f = 0$.

Se ripercorriamo i calcoli precedenti considerando stavolta 1-forme differenziali otteniamo

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_M \langle df+td\eta, df+td\eta\rangle\sqrt{g}dx^1\dots dx^d|_{t=0} = \\
&= \int_M \langle df, d\eta\rangle\sqrt{g}dx^1\dots dx^d = \\
&= \int_M \langle d^*df, \eta\rangle\sqrt{g}dx^1\dots dx^d,
\end{aligned}$$

dove d^* indica ancora l'aggiunto di d. Possiamo osservare che, come nel caso Euclideo, l'operatore aggiunto d^* agisce sulle 1-forme come il duale dell'operatore divergenza sui campi. Possiamo quindi scrivere l'operatore di Laplace-Beltrami Δ anche come

$$\Delta = d^*d.$$

3.4 L'operatore di Laplace sulle forme differenziali

Estendiamo ora l'operatore di Laplace-Beltrami dalle funzioni, vale a dire le 0-forme, alle forme differenziali di grado arbitrario.

Ricordiamo alcuni concetti di algebra lineare. Sia V uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $\Lambda^p(V)$ l'algebra esterna definita dal prodotto esterno su V. Possiamo definire un prodotto scalare su $\Lambda^p(V)$ ponendo

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle)$$

ed estendendolo per bilinearità a tutto $\Lambda^p(V)$. Se $e_1, \dots, e_d$ è una base ortormale di V, allora gli elementi

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \quad \text{con } 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq d$$

formano una base ortonormale di $\Lambda^p(V)$.

Un'orientazione su V si ottiene determinando come positiva una certa base di V. Ogni altra base che si ottenga da questa tramite una trasformazione con determinante associato positivo è detta positiva, le altre basi vengono dette negative.

Supponiamo ora di aver fissato un'orientazione su V. Definiamo l'*operatore lineare star di Hodge*

$$* : \Lambda^p(V) \to \Lambda^{d-p}(V)$$

ponendo

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{d-p}}, \tag{3.12}$$

con $j_1, \dots, j_{d-p}$ scelti in modo che $e_{i_1}, \dots, e_{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{d-p}}$ sia una base positva di V. Essendo l'operatore supposto lineare, esso risulta determinato univocamente a partire dai suoi valori su una base.

Se $e_1, \dots, e_d$ è una base positiva otteniamo

$$* \, (1) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_d \tag{3.13}$$

$$* \, (e_1 \wedge \cdots \wedge e_d) = 1. \tag{3.14}$$

Dall'algebra multilineare segue che, se A è una matrice $d \times d$ e se $f_1, \dots, f_p \in V$, allora

$$*(Af_1 \wedge \cdots \wedge Af_p) = (\det A) * (f_1 \wedge \cdots \wedge f_p).$$

Ciò in particolare implica che l'operatore star non dipende dalla scelta della base ortonormale positiva di V, in quanto due tali basi sarebbero legate da una trasformazione con determinante 1.

Se si considera una base negativa invece di una positiva, si ottiene un segno negativo nei secondi membri delle (3.12)-(3.14).

Lemma 3.4.1.

$$** = (-1)^{p(d-p)} : \Lambda^p(V) \to \Lambda^p(V).$$

Dimostrazione. Ovviamente $**$ manda $\Lambda^p(V)$ in sè stesso. Supponiamo

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{d-p}}.$$

Allora applicando nuovamente l'operatore $*$ otteniamo

$$**(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \pm e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p},$$

a seconda del fatto che $e_{j_1}, \ldots, e_{j_{d-p}}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}$ sia una base positiva o negativa di V. Ma dall'antisimmetria del prodotto esterno ricaviamo che

$$\begin{aligned} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{d-p}} &= \\ &= (-1)^{p(d-p)} e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{d-p}} \wedge e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}, \end{aligned}$$

e $(-1)^{p(d-p)}$ è il determinante del cambio base da $e_{i_1}, \ldots, e_{j_{d-p}}$ a $e_{j_1}, \ldots, e_{i_p}$. □

Lemma 3.4.2. *Se* $v, w \in \Lambda^p(V)$

$$\langle v, w \rangle = *(w \wedge *v) = *(v \wedge *w).$$

Dimostrazione. Per linearità, basta dimostrarla per gli elementi della base. Siano v, w elementi di base diversi, allora $w \wedge *v = v \wedge *w = 0 = \langle v, w \rangle$. Se invece $v = w = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ e $e_1, \ldots, e_d$ è una base ortonormale positiva, abbiamo

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \wedge *(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p})) = *(e_1 \wedge \cdots \wedge e_d) = 1 = \langle v, v \rangle$$

□

Osservazione
Possiamo considerare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ come un prodotto scalare definito su

$$\Lambda(V) := \bigoplus_{p=0}^{d} \Lambda^p(V),$$

con $\Lambda^p(V)$ e $\Lambda^q(V)$ ortogonali per $p \neq q$.

Lemma 3.4.3. *Sia* $v_1, \ldots, v_d$ *una base positiva qualsiasi di* V. *Allora*

$$*(1) = \frac{1}{\sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)}} v_1 \wedge \cdots \wedge v_d.$$

Dimostrazione. Sia $e_1, \ldots, e_d$ una base ortonormale positiva. Allora

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \cdots \wedge v_d &= \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} e_1 \wedge \cdots \wedge e_d = \\ &= \sqrt{\det(\langle v_i, v_j \rangle)} * (1). \end{aligned}$$ □

Consideriamo ora una varietà Riemanniana orientata M di dimensione d. Essendo M orientata, possiamo fissare un'orientazione su tutti gli spazi tangenti T_xM, e di conseguenza anche sugli spazi cotangenti T_x^*M. Scegliamo come positiva la base ortonormale Euclidea $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^d}$ su $\mathbb{R}^d$. Allora siccome tutte le transizioni di carte di una varietà orientata hanno determinante positivo, possiamo considerare come positiva la base $d\phi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right), \ldots, d\phi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x^d}\right)$ di T_xM, con ϕ carta su M, e l'orientazione non dipenderà dalla scelta della carta.
Siccome su M abbiamo una struttura Riemanniana, come visto in precedenza resta definito un prodotto scalare indotto su ogni spazio cotangente T_x^*M (ricordiamo che la metrica su T_x^*M è data da $g^{ij}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$, con $g_{ij}(x)$ metrica su T_xM).
Possiamo quindi considerare l'operatore star

$$* : \Lambda^p(T_x^*M) \to \Lambda^{d-p}(T_x^*M),$$

e di conseguenza l'operatore, che conserva il punto base, definito sulle sezioni del fibrato $\Lambda^p(M)$

$$* : \Omega^p(M) \to \Omega^{d-p}(M),$$

con $\Omega^p(M) = \Gamma(\Lambda^p(M))$.

Dal Lemma 3.4.3 ricaviamo

$$*(1) = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d$$

che è chiamata *forma di volume*. Ricaviamo anche il volume di M

$$\mathrm{Vol}(M) := \int_M *(1) \ ,$$

se l'integrale esiste finito.

Siano ora $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ a supporto compatto, definiamo il prodotto L^2

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) : &= \int_M \langle \alpha, \beta \rangle * (1) = \\ &= \int_M \alpha \wedge *\beta \ ,\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue immediatamente dal Lemma 3.4.2. Il prodotto così definito su $\Omega^p(M)$ e bilineare e definito positivo.

Definiamo anche la norma L^2

$$\|\alpha\| := (\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

Finora abbiamo considerato solamente sezioni differenziabili di fibrati vettoriali, e in particolare p-forme differenziabili. Tuttavia in seguito avremo bisogno anche di spazi L^p e di Sobolev di sezioni su fibrati. Quindi d'ora in avanti non richiediamo più che le sezioni siano differenziabili.

Sia E un fibrato vettoriale su una varietà Riemanniana M, e sia $s : M \to E$ una sezione di E a supporto compatto. Diciamo che s è contenuta nello spazio di Sobolev $H^{k,r}(E)$, se per ogni atlante fibrato tale che tutti i cambi di coordinate e le loro derivate siano limitati (si può ottenere un tale altante ad esempio considerando intorni coordinati più piccoli), e per ogni carta fibrata ϕ del suddetto atlante ($\phi : E_{|U} \to U \times \mathbb{R}^n$), si ha che

$$\phi \circ s_{|U} \in H^{k,r}(U) \ .$$

Abbiamo anche un ulteriore proprietà: se $\phi_1 : E_{|U_1} \to U_1 \times \mathbb{R}^n$, $\phi_2 : E_{|U_2} \to U_2 \times \mathbb{R}^n$ sono due di queste carte, allora $\phi_1 \circ s_{|U \cap U_2} \in H^{k,r}(U_1 \cap U_2)$ se e solo se $\phi_2 \circ s_{|U \cap U_2} \in H^{k,r}(U_1 \cap U_2)$. Questo perchè i cambi di coordinate $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ sono di classe C^∞, tutte le derivate sono limitate e s ha supporto compatto. Possiamo estendere il prodotto $(\cdot, \cdot)$ su $L^2(\Omega^p(M))$, rimanendo questo bilineare e definito positivo.

Supponiamo ora che M sia una varietà Riemanniana orientata e che sia compatta, in modo da non dover sempre considerare forme a supporto compatto.

Definizione 3.4.1. *L'operatore d^* è l'operatore aggiunto dell'operatore d su $\bigoplus_{p=0}^d \Omega^p(M)$ rispetto a $(\cdot, \cdot)$. Ovvero, se $\alpha \in \Omega^{p-1}(M), \beta \in \Omega^p(M)$,*

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta); \tag{3.15}$$

Quindi $d^* : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$.

Lemma 3.4.4. *L'operatore $d^* : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ soddisfa la seguente proprietà:*

$$d^* = (-1)^{d(p+1)+1} * d * \ . \tag{3.16}$$

Dimostrazione. Siano $\alpha \in \Omega^{p-1}(M), \beta \in \Omega^p(M)$,

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge *\beta) &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d * \beta = \\ &= d\alpha \wedge *\beta + (-1)^{p-1}(-1)^{(p-1)(d-p+1)} \alpha \wedge * * (d * \beta) = \\ &= d\alpha \wedge *\beta - (-1)^{d(p+1)+1} \alpha \wedge * * d * \beta \ . \end{aligned}$$

Se integriamo quest'espressione, il membro a sinistra si annulla per il Teorema di Stokes, e otteniamo

$$\int_M d\alpha \wedge *\beta = \int_M (-1)^{d(p+1)+1} \alpha \wedge * * d * \beta,$$

ovvero, per la definizione del prodotto L^2 e di d^*,

$$(\alpha, d^*\beta) = (d\alpha, \beta) = (\alpha, (-1)^{d(p+1)+1} * d * \beta),$$

e da qui la tesi, per l'arbitrarietà di α, β. $\square$

Definizione 3.4.2. *L'operatore di Laplace-Beltrami su $\Omega^p(M)$ è definito da*

$$\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M).$$

Una p-forma $\omega \in \Omega^p(M)$ è detta armonica se

$$\Delta\omega = 0.$$

Osservazione
Se volessimo essere più precisi, dovremmo indicare

$$d_p : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$
$$d_p^* : \Omega^{p+1}(M) \to \Omega^p(M)$$

e inoltre

$$\Delta_p = d_{p-1}d_{p-1}^* + d_p^* d_p : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M).$$

Tuttavia, per semplicità di notazione, ometteremo il pedice p.

Lemma 3.4.5. *L'operatore di Laplace-Beltrami Δ è autoaggiunto, ovvero*

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^p(M).$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di Δ. □

Lemma 3.4.6. *Δ è non negativo e*

$$\Delta\alpha = 0 \Longleftrightarrow d\alpha = 0 \text{ e } d^*\alpha = 0. \tag{3.17}$$

Dimostrazione. Dalle definizioni di $\Delta, d^*, (\cdot,\cdot)$ segue che

$$(\Delta\alpha, \alpha) = (dd^*\alpha, \alpha) + (d^*d\alpha, \alpha) = (d^*\alpha, d^*\alpha) + (d\alpha, d\alpha) \geq 0.$$

Siccome entrambi i termini a destra sono non negativi e si annullano solo se $d\alpha = 0 = d^*\alpha$, allora $\Delta\alpha = 0$ equivale a $d\alpha = 0 = d^*\alpha$. □

Corollario 3.4.1. *Su una varietà Riemanniana compatta, ogni funzione armonica è costante.*

Lemma 3.4.7. *L'operatore di Laplace-Beltrami commuta con l'operatore star di Hodge, ovvero*

$$*\Delta = \Delta * .$$

Dimostrazione. Si calcola in modo diretto a partire dalle rispettive definizioni. □

Corollario 3.4.2. *Se ω è armonica, lo è anche $*\omega$.*

Dimostrazione. Sia $\Delta\omega = 0$. Allora

$$\Delta * \omega = *\Delta\omega = 0,$$

ovvero anche $*\omega$ è armonica. $\square$

Possiamo infine verificare che l'operatore di Laplace qui definito sulle p-forme coincide con quello definito sulle funzioni. Cominciamo con il caso Euclideo. Sia $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Abbiamo che

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

e se $\phi = \phi_i dx^i$ ha supporto compatto e $*\phi = \sum_{i=1}^{d} (-1)^{i-1} \phi_i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^d$ (con $\widehat{dx^i}$ intendiamo che l'i-esimo termine viene escluso dal prodotto esterno), allora

$$\begin{aligned}(f, d^*\phi) = (df, \phi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x^i} \phi_i dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = \\ &= -\int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial \phi_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d \ .\end{aligned}$$

Allora ne consegue che $d^*\phi = -\frac{\partial \phi_i}{\partial x^i} = -\operatorname{div}\phi$, e (siccome $d^*f = 0$ sulle 0-forme)

$$\Delta f = d^* df = -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2} = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f),$$

che coincide con la (3.8).

Consideriamo ora una funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{R}$, con M varietà Riemanniana di dimensione d e tensore metrico g_{ij}. Abbiamo definito l'operatore di Laplace-Beltrami come

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \Big(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big),$$

con $g = \det(g_{ij})$, e vogliamo ora verificare che questo coincide con $d^* df$. Sia $\phi : M \to \mathbb{R}$ differenziabile a supporto compatto,

$$\begin{aligned}\int d^* df \phi \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d &= (d^* df, \phi) = (df, d\phi) = \\ &= \int \langle df, d\phi \rangle * (1) = \\ &= \int g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial \phi}{\partial x^j} \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d = \\ &= -\int \frac{\partial}{\partial x^j} \Big(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big) \phi \sqrt{g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^d \ .\end{aligned}$$

Siccome ciò è valido $\forall \phi \in C_c^\infty(M,\mathbb{R})$, questo implica che $d^* d = \Delta$.

Cerchiamo ora l'espressione in coordinate Euclidee dell'operatore di Laplace sulle p-forme. Indichiamo quest'ultimo con Δ_e e indichiamo anche con $*_e$ l'operatore star rispetto alla metrica Euclidea e d^* l'operatore aggiunto di d rispetto al prodotto scalare Euclideo.
Consideriamo una p-forma

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_p \le d\ ,$$

definita su un aperto di $\mathbb{R}^d$ e siano $j_1, \dots, j_{d-p}$ scelti in modo che $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_{d-p}}}$ sia una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^d$. In seguito supporremo sempre

$$l \in \{1, \dots, p\}, k \in \{1, \dots, d-p\}.$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{k=1}^{d-p} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_k} \wedge dx^{i_1} \dots \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\
*_e d\omega &= \sum_{k=1}^{d-p} (-1)^{p+k-1} \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{j_k}} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{d-p}} \\
d *_e d\omega &= \sum_{k=1}^{d-p} (-1)^{p+k-1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_p}}{(\partial x^{j_k})^2} dx^{j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{d-p}} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{d-p} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{p+k-1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{j_k} \partial x^{i_l}} dx^{l} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{j_k}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{d-p}} \\
*_e d *_e d\omega &= \sum_{k=1}^{d-p} (-1)^{p+p(d-p)} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_p}}{(\partial x^{j_k})^2} x^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{d-p} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{pd+l} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{j_k} \partial x^{i_l}} dx^{j_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_l}} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\ .
\end{aligned}$$

Infine, ricordando la (3.16), otteniamo

$$\begin{aligned}
d^* d\omega =& \sum_{k=1}^{d-p} (-1) \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_p}}{(\partial x^{j_k})^2} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + \\
&+ \sum_{k=1}^{d-p} \sum_{l=1}^{p} (-1)^{l+1} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_p}}{\partial x^{j_k} \partial x^{i_l}} dx^{j_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{dx^{i_l}} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\ .
\end{aligned} \tag{3.18}$$

In modo simile si trova che

$$dd^*\omega = \sum_{l=1}^{p}(-1)\frac{\partial^2\omega_{i_1\dots i_p}}{(\partial x^{i_l})^2}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}+$$
$$+\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{d-p}(-1)^{l+1}\frac{\partial^2\omega_{i_1\dots i_p}}{\partial x^{i_l}\partial x^{j_k}}dx^{j_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge\widehat{dx^{i_l}}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\ . \tag{3.19}$$

Mettendo insieme le (3.19) e (3.18) otteniamo

$$\Delta_e\omega = d^*d\omega + dd^*\omega = -\sum_{m=1}^{d}\frac{\partial^2\omega_{i_1\dots i_p}}{(\partial x^m)^2}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p},$$

che, a meno del segno, coincide col classico operatore Laplaciano $\sum_{m=1}^{d}\frac{\partial^2}{(\partial x_m)^2}$. O meglio l'operatore di Laplace-Beltrami è un estensione alle generiche varietà Riemanniane del classico operatore Laplaciano.

Riportiamo anche alcune formule in coordinate locali nel caso Riemanniano.
Introduciamo alcune notazioni. Per la forma volume poniamo

$$\eta := \sqrt{g}dx^1\wedge\dots\wedge dx^d =: \eta_{i_1\dots i_d}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_d}.$$

Per $\beta = \beta_{j_1\dots j_p}dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_p}$, definiamo i sollevamenti di indici

$$\beta^{i_1\dots i_p} := g^{i_1j_1}g^{i_2j_2}\dots g^{i_pj_p}\beta_{j_1\dots j_p}.$$

Allora utilizzando queste notazioni, se $\alpha = \alpha_{i_1\dots i_p}dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}$, abbiamo

$$(*\alpha)_{i_{p+1}\dots i_d} = \frac{1}{p!}\eta_{i_1\dots i_p}\alpha^{i_1\dots i_p}$$

e

$$(d^*\alpha)_{i_1\dots i_{p-1}} = -g^{kl}\Big(\frac{\partial\alpha_{ki_1\dots i_{p-1}}}{\partial x^l} - \Gamma^j_{kl}\alpha_{ji_1\dots i_{p-1}}\Big),$$

dove

$$\Gamma^j_{kl} = \frac{1}{2}g^{jm}(g_{km,l}+g_{lm,k}-g_{kl,m})$$

sono i *simboli di Christoffel di seconda specie* e $g_{km,l} = \frac{\partial}{\partial x^l}g_{km}$.
Abbiamo inoltre

$$\langle\alpha,\beta\rangle = \alpha_{i_1\dots i_p}\beta^{i_1\dots i_p}$$
$$\langle d\alpha, d\beta\rangle = \frac{\partial\alpha_{i_1\dots i_p}}{\partial x^k}\frac{\partial\beta_{j_1\dots j_p}}{\partial x^l}g^{kl}g^{i_1j_1}\dots g^{i_pj_p}$$

$$
\begin{aligned}
\langle d^*\alpha, d^*\beta\rangle = \langle g^{kl}\Big(&\frac{\partial \alpha_{ki_1\dots i_{p-1}}}{\partial x^l} - \Gamma^j_{kl}\alpha_{ji_1\dots i_{p-1}}\Big)dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_{p-1}},\\
&g^{mn}\Big(\frac{\partial \beta_{mj_1\dots j_{p-1}}}{\partial x^n} - \Gamma^r_{mn}\beta_{rj_1\dots j_{p-1}}\Big)dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_{p-1}}\rangle =\\
= \frac{\partial \alpha_{ki_1\dots i_{p-1}}}{\partial x^l}&\frac{\partial \beta_{mj_1\dots j_{p-1}}}{\partial x^n} g^{kl}g^{mn}g^{i_1j_1}\dots g^{i_{p-1}j_{p-1}}\\
&- \frac{\partial \alpha_{ki_1\dots i_{p-1}}}{\partial x^l}\Gamma^i_{mn}\beta_{ij_1\dots j_{p-1}}g^{kl}\dots g^{i_{p-1}j_{p-1}}\\
&- \frac{\partial \beta_{mj_1\dots j_{p-1}}}{\partial x^n}\Gamma^j_{kl}\alpha_{ji_1\cdots_{p-1}}g^{kl}g^{mn}g^{i_1j_1}\dots g^{i_{p-1}j_{p-1}}\\
&+ \Gamma^j_{kl}\Gamma^r_{mn}\alpha_{ji_1\dots i_{p-1}}\beta_{rj_1\dots j_{p-1}}g^{kl}\dots g^{i_{p-1}j_{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Capitolo 4

Teorema di Hodge

4.1 Classi di coomologia di de Rham

Sia M una varietà differenziabile di dimensione d. Ricordiamo che l'operatore lineare differenziale esterno o derivata esterna $d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$ soddisfa la proprietà

$$d \circ d = 0 \quad (d \circ d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+2}(M)).$$

Una $p-$forma $\alpha \in \Omega^p(M)$ è detta *chiusa* se $d\alpha = 0$, mentre è detta *esatta* se esiste una $(p-1)-$forma $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$ tale che $d\eta = \alpha$. Siccome $d \circ d = 0$, ogni forma esatta è anche chiusa.
Denotiamo ora l'insieme di tutte le $p-$forme chiuse su M con $Z^p(M)$ e l'insieme di tutte le $p-$forme esatte con $B^p(M)$, ovvero

$$\begin{aligned} Z^p(M) &= \ker(d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)), \\ B^p(M) &= \mathrm{Im}(d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M)). \end{aligned}$$

Il nucleo $Z^p(M)$ e l'immagine $B^p(M)$ dell'applicazione lineare d sono entrambi sottospazi di $\Omega^p(M)$.

Definizione 4.1.1. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione d. Lo spazio quoziente*

$$H^p_{dR}(M) := \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}$$

è detto p-esimo gruppo di coomologia di de Rham di M. Definiamo inoltre la somma diretta

$$H^*_{dR}(M) := \bigoplus_{p=0}^{d} H^p_{dR}(M)$$

come gruppo di coomologia di de Rham di M.

Se $\omega \in \Omega^p(M)$ è una $p-$forma chiusa, denotiamo la classe di cui ω è un rappresentante con $[\omega] \in H^p_{dR}(M)$. Due forme chiuse $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ vengono dette *coomologhe* se la $p-$forma $\alpha - \beta$ è esatta, ovvero

$$[\alpha] = [\beta] \Longleftrightarrow \exists \eta \in \Omega^{p-1}(M) \text{ tale che } \alpha - \beta = d\eta.$$

Per semplicità, indicheremo il p-esimo gruppo di coomologia di de Rham di M solamente con $H^p(M)$.

4.2 Il Teorema di Hodge

In questa sezione dimostreremo il seguente

Teorema 4.2.1 (Di Hodge). *Sia M una varietà Riemanniana compatta orientata. Allora ogni classe di coomologia in $H^p(M)$ $(0 \leq p \leq d = \dim M)$ contiene una ed una sola forma armonica.*

L'idea di base per la dimostrazione è quella di selezionare un rappresentante specifico in una classe di oggetti geometrici, in questo caso una forma armonica in una classe di coomologia, imponendo un'opportuna equazione differenziale o, equivalentemente, minimizzando un certo funzionale definito sulla suddetta classe.
L'equazione differenziale da considerare nel nostro caso è, se η è una forma chiusa, $d^*\eta = 0$ che, insieme alla condizione $d\eta = 0$ per le forme chiuse, implica l'equazione per le forme armoniche $\Delta\eta = 0$.
Dimostreremo qui il teorema di Hodge con metodi variazionali e nella prossima sezione con il metodo del flusso del calore.
Dimostreremo separatamente l'esistenza e l'unicità. Iniziamo con l'unicità in quanto più semplice.

Dimostrazione unicità. Siano $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^p(M)$ due p-forme coomologhe ed entrambe armoniche. Se $p = 0$ dal fatto che sono coomologhe, cioè $\omega_1 - \omega_2 = 0$, segue che $\omega_1 = \omega_2$. Altrimenti, sia $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$ tale che $\omega_1 - \omega_2 = d\eta$ e consideriamo il prodotto scalare

$$\begin{aligned}(\omega_1 - \omega_2, \omega_1 - \omega_2) &= (\omega_1 - \omega_2, d\eta) = \\ &= (d^*(\omega_1 - \omega_2), \eta) = 0\end{aligned}$$

perchè ω_1, ω_2 sono armoniche e perciò $d^*\omega_1 = 0 = d^*\omega_2$. Essendo il prodotto $(\cdot, \cdot)$ definito positivo, concludiamo che $\omega_1 = \omega_2$, cioè l'unicità cercata. $\square$

Per dimostrare l'esistenza, che è più complicata, faremo uso del principio di Dirichlet. Facciamo prima alcuni passaggi introduttivi.

Sia ω_0 una forma differenziale chiusa, scelta come rappresentante della propria classe di coomologia in $H^p(M)$. Ogni forma ad essa coomologa sarà del tipo

$$\omega = \omega_0 + d\alpha \quad \alpha \in \Omega^{p-1}(M).$$

Vogliamo minimizzare all'interno della classe $[\omega_0]$ la norma L^2, definendo il funzionale

$$D(\omega) := (\omega, \omega).$$

Va mostrato che il minimo viene raggiunto da una forma differenziale η che dovrà quindi soddisfare l'equazione di Eulero-Lagrange per D, ovvero

$$0 = \frac{d}{dt}(\eta + td\beta, \eta + td\beta)_{|t=0} = 2(\eta, d\beta) = 2(d^*\eta, \beta) \quad \forall \beta \in \Omega^{p-1}(M) \quad (4.1)$$

Questa implica che $d^*\eta = 0$. Siccome ovviamente $d\eta = 0$, si ha che η sarà armonica.

Per iniziare, dobbiamo considerare lo spazio delle forme L^2 e non quello delle forme di classe C^∞. Infatti se vogliamo minimizzare la norma L^2 abbiamo bisogno di uno spazio completo rispetto alla convergenza L^2. Inoltre avremo anche bisogno degli spazi di Sobolev.

Definiamo su $\Omega^p(M)$ un nuovo prodotto scalare

$$((\omega, \omega)) := (d\omega, d\omega) + (d^*\omega, d^*\omega) + (\omega, \omega)$$

e la relativa norma

$$\|\omega\| := ((\omega, \omega))^{\frac{1}{2}}. \quad (4.2)$$

Consideriamo la chiusura dello spazio $\Omega^p(M)$ rispetto a questa nuova norma e denotiamo il relativo spazio di Hilbert con $H_p^{1,2}(M)$, o anche con $H^{1,2}(M)$ quando p è chiaro dal contesto.

Ad esempio, nel caso Euclideo, siano $V \subset \mathbb{R}^d$ un aperto e $f : V \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione differenziabile. La norma di Sobolev Euclidea è data da

$$\|f\|_{H^{1,2}_{\text{eucl.}}(V)} := \Big(\int_V f \cdot f + \int_V \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big)^{\frac{1}{2}},$$

dove $\cdot$ indica il prodotto scalare Euclideo.

Utilizzando carte su M e carte fibrate su $\Lambda^p(M)$, abbiamo che per ogni $x \in M$ esistono un intorno aperto U e un diffeomorfismo

$$\phi : \Lambda^p(M)_{|U} \to V \times \mathbb{R}^n,$$

con V aperto di $\mathbb{R}^d$, $n = \binom{d}{p}$ dimensione delle fibre su $\Lambda^p(M)$, tali che la fibra su $x \in U$ viene mandata in una fibra $\{\pi(\phi(x))\} \times \mathbb{R}^n$, con $\pi : V \times \mathbb{R}^n \to V$ proiezione sul primo fattore.

Per il seguente Lemma possiamo far coincidere gli spazi di Sobolev definiti dalle norme $\|\cdot\|_{H^{1,2}(M)}$ e $\|\cdot\|_{H^{1,2}_{\text{eucl.}}(V)}$. Per la dimostrazione rimandiamo a [1, Sez. 3.4]

Lemma 4.2.1. *Per ogni $U' \Subset U$, le norme $\|\omega\|_{H^{1,2}(U')}$ e $\|\phi(\omega)\|_{H^{1,2}_{eucl.}(V')}$, con $V = \pi(\phi(U'))$, sono equivalenti.*

Possiamo quindi utilizzare i risultati sugli spazi di Sobolev Euclidei nel caso Riemanniano. Tra questi, in particolare abbiamo il Teorema di compattezza di Rellich (dal teorema 2.1.8 e corollario 2.1.4):

Lemma 4.2.2. *Sia $(\omega_m)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^{1,2}(M)$ limitata, ovvero*

$$\|\omega_n\|_{H^{1,2}(M)} \leq K.$$

Allora (ω_n) ammette una sottosuccessione convergente, nella norma L^2 ($\|\cdot\|_{L^2(M)} = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$), ad una forma $\omega \in H^{1,2}(M)$.

Corollario 4.2.1. *Esiste una costante c, che dipende solo dalla metrica Riemanniana su M, tale che, per ogni forma chiusa β ortogonale al nucleo di d^*,*

$$(\beta,\beta) \leq c(d^*\beta, d^*\beta).$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista una successione di forme chiuse β_n ortogonali al nucleo di d^*, tale che

$$(\beta_n,\beta_n) \geq n(d^*\beta_n, d^*\beta_n). \tag{4.3}$$

Definiamo

$$\lambda_n := (\beta_n,\beta_n)^{-\frac{1}{2}}.$$

Allora

$$1 = (\lambda_n\beta_n, \lambda_n\beta_n) \geq n(d^*(\lambda_n\beta_n), d^*(\lambda_n\beta_n)). \tag{4.4}$$

Questa implica che, siccome $d\beta_n$=0,

$$\|\lambda_n\beta_n\|_{H^{1,2}} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

Allora, per il Lemma 4.2.2, $\lambda_n\beta_n$, a meno di una sottosuccessione, converge in L^2 a una forma ψ. Per la relazione (4.4), $d^*(\lambda_n\beta_n) \to 0$ in L^2. Ciò implica che $d^*\psi = 0$, infatti: per ogni $\phi \in \Omega^p(M)$

$$0 = \lim_{n\to\infty}(d^*(\lambda_n\beta_n), \phi) = \lim_{n\to\infty}(\lambda_n\beta_n, d\phi) == (\psi, d\phi) = (d^*\psi, \phi)$$

e quindi $d^*\psi = 0$. In modo simile si dimostra che, se $d\beta_n = 0$ per ogni n, allora $d\psi = 0$.

Ora, siccome $d^*\psi = 0$ e β_n è ortogonale al nucleo di d^*,

$$(\psi, \lambda_n\beta_n) = 0.$$

Ma d'altra parte, siccome $(\lambda_n\beta_n, \lambda_n\beta_n) = 1$ e $\lambda_n\beta_n \to \psi$ in L^2,

$$\lim_{n\to\infty}(\psi, \lambda_n\beta_n) = 1.$$

Abbiamo ottenuto una contraddizione e quindi la (4.3) è impossibile. □

Possiamo ora completare la dimostrazione del Teorema 4.2.1.

Dimostrazione esistenza. Sia $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione minimizzante per $D(\omega)$ all'interno della classe $[\omega_0]$, ossia

$$\omega_n = \omega_0 + d\alpha_n$$
$$D(\omega_n) \to k := \inf_{\omega=\omega_0+d\alpha} D(\omega)\ .$$

Senza perdita di generalità possiamo considerare ω_n tale che

$$(\omega_n, \omega_n) = D(\omega_n) \leq k + 1.$$

Allora, a meno di una sottosuccessione, ω_n converge debolmente a una certa ω. Inoltre, per ogni $\phi \in \Omega^p(M)$ tale che $d^*\phi = 0$, abbiamo

$$(\omega_n - \omega_0, \phi) = (d\alpha_n, \phi) = (\alpha_n, d^*\phi) = 0,$$

e quindi

$$(\omega - \omega_0, \phi) = 0 \tag{4.5}$$

ovvero $\omega - \omega_0$ è *debolmente esatta.*

Poniamo ora

$$\eta := \omega - \omega_0.$$

Definiamo un funzionale lineare su $d^*(\Omega^p(M))$ ponendo

$$l(d^*\phi) := (\eta, \phi).$$

l è ben definito: infatti se $d^*\phi_1 = d^*\phi_2$, per la (4.5) abbiamo

$$l(d^*\phi_1 - d^*\phi_2) = (\eta, \phi_1 - \phi_2) = 0$$

e quindi

$$l(d^*\phi_1) = l(d^*\phi_2).$$

Mostriamo che è anche limitato. Siano $\phi \in \Omega^p(M), \pi(\phi)$ la proiezione ortogonale di ϕ sul nucleo di d^* e poniamo $\psi := \phi - \pi(\phi)$. Quindi $d^*\psi = d^*\phi$.

Allora

$$l(d^*\phi) = l(d^*\psi) = (\eta, \psi).$$

Siccome ψ è ortogonale al nucleo di d^*, per il Corollario 4.2.1 abbiamo che

$$\|\psi\|_{L^2} \leq c\|d^*\psi\|_{L^2} = c\|d^*\phi\|_{L^2}$$

e quindi

$$|l(d^*\phi)| \leq c\|\eta\|_{L^2}\|d^*\phi\|_{L^2}.$$

Possiamo estendere l alla chiusura nella norma L^2 di $d^*(\Omega^p(M))$. Per il Teorema di rappresentazione di Riesz ogni funzionale lineare limitato su uno spazio di Hilbert può essere rappresentato da un unico elemento dello spazio stesso tramite il prodotto scalare. Quindi esiste α tale che

$$(\alpha, d^*\phi) = (\eta, \phi) \quad \forall \phi \in \Omega^p(M) \ .$$

Allora abbiamo che debolmente

$$d\alpha = \eta.$$

Quindi la forma $\omega = \omega_0 + \eta$, limite debole della successione minimizzante per D, appartiene alla chiusura L^2 della classe $[\omega_0]$, ovvero allo spazio delle forme ω per cui esiste α tale che

$$(\alpha, d^*\phi) = (\omega - \omega_0, \phi) \quad \forall \phi \in \Omega^p(M).$$

Mostriamo che ω realizza l'inf D. Sia $\omega_n = \omega_0 + d\alpha_n$ debolmente, ossia

$$(\alpha_n, d^*\phi) = (\omega_n - \omega_0, \phi) \quad \forall \phi \in \Omega^p(M),$$

definiamo come prima degli operatori

$$l_n(d^*\phi) := (\alpha_n, d^*\phi).$$

Calcolando le stime come prima, abbiamo che i funzionali lineari l_n convergono a un funzionale l, rappresentato ancora da una forma α. Siccome D è debolmente semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole, allora $\omega_n \rightharpoonup \omega$ implica che

$$k \leq D(\omega) \leq \liminf_{n\to\infty} D(\omega_n) = k,$$

e quindi

$$D(\omega) = k.$$

Inoltre, dall'equazione di Eulero-Lagrange (4.1), ricaviamo

$$(\omega, d\beta) = 0 \quad \forall \beta \in \Omega^{p-1}(M), \tag{4.6}$$

ovvero ω è debolmente armonica.

Ora vogliamo utilizzare il teorema di regolarità per concludere che la soluzione sia differenziabile. Se nella (4.6) potessimo porre $\beta = d^*\omega$, integrando per parti, otterremmo che

$$(d^*\omega, d^*\omega) = 0 \ ,$$

e quindi $d^*\omega = 0$. Le derivate di ordine maggiore si annullerebbero anch'esse e quindi per il Teorema di embedding di Sobolev (teorema 2.1.7 e corollario 2.1.3) avremmo ω di classe C^∞. Tuttavia non possiamo fare la sostituzione $\beta = d^*\omega$ se non sappiamo che la derivata $dd^*\omega$ esiste. Possiamo ovviare a questo problema seguendo il metodo descritto in [1, p.150 e A.2]. In questo modo otteniamo la regolarità e completiamo la dimostrazione. $\square$

Vediamo alcune applicazioni di questo teorema, a partire dal seguente corollario, conosciuto anche col nome di Teorema di *decomposizione di Hodge.*

Corollario 4.2.2 (Hodge). *Siano B_p la chiusura L^2 di*

$$\{d\alpha : \alpha \in \Omega^{p-1}(M)\},$$

e B_p^* la chiusura L^2 di

$$\{d^*\beta : \beta \in \Omega^{p+1}(M)\}.$$

Allora lo spazio di Hilbert $L_p^2(M)$ delle p-forme al quadrato sommabili ammette la seguente decomposizione ortogonale

$$L_p^2(M) = B_p \oplus B_p^* \oplus \mathcal{H}_p \tag{4.7}$$

dove $\mathcal{H}_p := B_p^\perp \cap B_p^{*\perp}$ è lo spazio delle p-forme armoniche.

Dimostrazione. Siccome $d^2 = 0$, allora $(d\alpha, d^*\beta) = (d^2\alpha, \beta) = 0$: ciò implica che gli spazi B_p e B_p^* sono ortogonali tra di loro. Otteniamo quindi la seguente decomposizione ortogonale

$$L_p^2(M) = B_p \oplus B_p^* \oplus (B_p^\perp \cap B_p^{*\perp}).$$

Inoltre, se ω è una forma differenziale $(\omega, d\alpha) = (d^*\omega, \alpha)$, e allora abbiamo che $\omega \in \Omega^p(M)$ è contenuta in $B_p^\perp$ se e solo se $d^*\omega = 0$. Analogamente, $\omega \in \Omega^p(M)$ appartiene a $B_p^{*\perp}$ se e solo se $d\omega = 0$. Di conseguenza, $\omega \in \Omega^p(M)$ è contenuta in $B_p^\perp \cap B_p^{*\perp}$ se e solo se è armonica. Ora, questo è valido per una forma differenziale ω, ma come osservato nella dimostrazione del teorema 4.2.1, se $\omega \in L^2(M)$ e $\forall \alpha, \beta$ differenziali si ha che $(\omega, d\alpha) = 0 = (w, d^*\beta)$ allora ω stessa è differenziale e armonica. Con ciò la dimostrazione è conclusa. □

Corollario 4.2.3. *Sia M una varietà differenziabile compatta. Allora ogni gruppo di coomologia $H_{dR}^p(M)$ $(0 \leq p \leq d := \dim M)$ ha dimensione finita.*

Dimostrazione. Ricordiamo che per il teorema 1.4.1 possiamo introdurre una metrica Riemanniana su M. Per il teorema di Hodge 4.2.1 ogni classe di coomologia può essere rappresentata da una forma armonica rispetto a questa metrica. Supponiamo ora per assurdo che $H^p(M)$ abbia dimensione infinita. Allora esisterà una successione ortonormale di forme armoniche $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^p(M)$, ovvero

$$(\eta_n, \eta_m) = \delta_{nm} \text{ per } n, m \in \mathbb{N}. \tag{4.8}$$

Essendo le η_n armoniche, $d\eta_n = 0 = d^*\eta_n$. Allora per il teorema di Rellich del lemma 4.2.2, a meno di una sottosuccessione,(η_n) converge in L^2 ad una

certa η.
Tuttavia ciò è in contrasto con la (4.8), perchè quest'ultima implica che

$$\|\eta_n - \eta_m\| \geq 1 \quad \forall n \neq m$$

e quindi (η_n) non è una successione di Cauchy in L^2. Questa contraddizione implica la finitezza dimensionale. $\square$

Ora consideriamo una varietà differenziabile M compatta e orientata di dimensione d. Definiamo un'applicazione bilineare

$$H^p_{dR}(M) \times H^{d-p}_{dR}(M) \to \mathbb{R}$$

ponendo

$$(\omega, \eta) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta \tag{4.9}$$

per due rappresentanti ω, η nelle relative classi di coomologia. Mostriamo che è effettivamente ben definita, ovvero che dipende solo dalle classi di coomologia e non dai loro rappresentanti. Siano ω e ω' coomologhe, ovvero esiste una $(p-1)$-forma α tale che $\omega' = \omega + d\alpha$; allora

$$\begin{aligned}\int_M \omega' \wedge \eta &= \int_M (\omega + d\alpha) \wedge \eta = \\ &= \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d(\alpha \wedge \eta) = \\ &= \int_M \omega \wedge \eta,\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che η è chiusa e il teorema di Stokes. Quindi la (4.9) dipende solo dalla classe di coomologia di ω. In modo analogo si dimostra per la classe di η.

Ricordiamo ora un risultato di algebra lineare. Siano V, W spazi vettoriali reali di dimensione finita e sia

$$(\cdot, \cdot) : V \times W \to \mathbb{R}$$

bilineare e non degenere, nel senso che per ogni $v \in V, v \neq 0$, esiste $w \in W$ tale che $(v, w) \neq 0$, e viceversa. Allora V può essere identificato con lo spazio duale W^* di W, e W può essere identicato con V^*. Allora possiamo definire le due applicazioni lineari iniettive

$$\begin{aligned} i_1 : V \to W^* \qquad &\text{con } i_1(v)(w) := (v, w), \\ i_2 : W \to V^* \qquad &\text{con } i_2(w)(v) := (v, w). \end{aligned}$$

Quindi V e W devono essere della stessa dimensione, e i_1 e i_2 sono isomorfismi.

Teorema 4.2.2. *Sia M una varietà differenziabile compatta e orientata di dimensione d. La forma bilineare (4.9) è non degenere e quindi $H^p_{dR}(M)$ è isomorfo a $(H^{d-p}_{dR}(M))^*$.*

Dimostrazione. Per ogni classe di coomologia non banale in $H^p(M)$ rappresentata da una certa ω (ovvero $d\omega = 0$ ma non vale $\omega = d\alpha$ per nessuna $(p-1)$-forma α), dobbiamo trovare una classe di coomologia in $H^{d-p}(M)$, rappresentata da una certa η, tale che

$$\int_M \omega \wedge \eta \neq 0.$$

Per fare ciò introduciamo una metrica Riemannianana su M (possiamo farlo ancora per il teorema 1.4.1), e per il teorema di Hodge 4.2.1 possiamo considerare ω armonica (rispetto alla metrica introdotta). Per il corollario 3.4.2 abbiamo che anche $*\omega$ è armonica. Ora

$$\int_M \omega \wedge *\omega = (\omega, \omega) \neq 0$$

perchè ω non è identicamente nulla. Quindi $*\omega$ è un rappresentante della classe di coomologia in $H^{d-p}(M)$ con la proprietà cercata. Allora la forma bilineare è non degenere e i due spazi sono isomorfi. □

Definizione 4.2.1. *Il p-esimo gruppo di omologia $H_p(M)$ di una varietà differenziabile M compatta è $(H^p_{dR}(M))^*$. Il p-esimo numero di Betti di M è $b_p(M) := \dim H^p(M)$.*

Tramite questa definizione il teorema 4.2.2 si può riformulare dicendo che

$$H_p(M) \cong H^{d-p}_{dR}(M)$$

ed è conosciuto anche col nome di Teorema di *dualità di Poincaré*.

Corollario 4.2.4. *Sia M una varietà differenziabile compatta e orientata di dimensione d. Allora*

$$H^d_{dR}(M) \cong \mathbb{R} \tag{4.10}$$

e

$$b_p(M) = b_{d-p}(M) \quad \text{per } 0 \leq p \leq d. \tag{4.11}$$

Dimostrazione. Per il corollario 3.4.1 e il teorema di Hodge 4.2.1,

$$H^0_{dR}(M) \cong \mathbb{R}.$$

Applicando il teorema 4.2.2 si mostrano le (4.10) e (4.11). □

4.3 Dimostrazione tramite flusso del calore

In questa sezione presentiamo una dimostrazione alternativa del Teorema 4.2.1, basata sulla risoluzione di un'equazione lineare alle derivate parziali parabolica, la cosiddetta equazione del calore, secondo il metodo del flusso del calore . L'idea di base è quella di considerare le p-forme dipendenti, non solo dalla posizione x sulla varietà M, ma anche da un'altra variabile "temporale" $t \in [0, \infty)$, e di sostituire l'equazione ellittica relativa all'operatore di Laplace-Beltrami con una equazione parabolica, da risolvere per un fissato valore iniziale all'istante $t = 0$. Vogliamo cioè risolvere l'equazione del calore

$$\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} + \Delta \beta(x,t) = 0 \tag{4.12}$$

$$\beta(x,0) = \beta_0(x) \tag{4.13}$$

con β_0 p-forma nella classe di coomologia considerata. Intuitivamente, l'operatore Δ rappresenta una sorta di gradiente per il funzionale (β, β) da minimizzare, e il flusso descritto dall'equazione parabolica (4.12) avviene nella direzione del gradiente negativo del funzionale da minimizzare, ipotizzando che ci conduca ad un minimo per $t \to \infty$.
Procederemo quindi mostrando che la (4.12) può essere risolta in modo unico per ogni t positivo (esistenza globale o nel lungo periodo) e che, per $t \to \infty$, la soluzione $\beta(x,t)$ converge ad una p-forma armonica nella stessa classe di coomologia.

La (4.12) è un equazione differenziale parabolica lineare (o, meglio, un sistema di equazioni differenziali lineari, visto che, a parte casi banali, la dimensione delle fibre Λ^p è maggiore di 1) e quindi l'esistenza e l'esistenza globale delle soluzioni derivano dalla teoria delle equazioni differenziali paraboliche lineari.
L'esistenza al tempo finito, o esistenza locale, è data (si veda, ad esempio, in [3]) dal seguente

Lemma 4.3.1. *Sia $\beta_0 \in \Omega^p$ di classe $C^{2,\alpha}$ per qualche $0 < \alpha < 1$. Allora, per un certo $\epsilon > 0$, l'equazione (4.12) ammette una soluzione $\beta(x,t)$ per $0 \le t < \epsilon$, e anche questa soluzione è di classe $C^{2,\alpha}$.*

Per dimostrare anche l'esistenza globale, consideriamo la norma L^2

$$\|\beta(\cdot,t)\|^2 = (\beta, \beta) = \int_M \beta(x,t) \wedge *\beta(x,t)$$

e l'energia

$$E(\beta(\cdot,t)) := \frac{1}{2}\|d\beta(\cdot,t)\|^2 + \frac{1}{2}\|d^*\beta(\cdot,t)\|^2 = \frac{1}{2}(d\beta, d\beta) + \frac{1}{2}(d^*\beta, d^*\beta).$$

Osserviamo che $(\|\beta(\cdot,t)\|^2 + 2E(\beta(\cdot,t)))^{1/2}$ è la norma di Sobolev di $\beta(\cdot,t)$ introdotta in (4.2).

Il lemma seguente ci dice che $\|\beta(\cdot,t)\|^2$ è una funzione decrescente e convessa rispetto al parametro t.

Lemma 4.3.2.

$$\frac{d}{dt}\|\beta(\cdot,t)\|^2 \leq 0 \tag{4.14}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\|\beta(\cdot,t)\|^2 \geq 0 \tag{4.15}$$

$$\frac{d}{dt}E(\beta(\cdot,t)) \leq 0 \ . \tag{4.16}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\beta(\cdot,t)\|^2 &= 2(\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t),\beta(\cdot,t)) = \\
&= -2(\Delta\beta(\cdot,t),\beta(\cdot,t)) = \\
&= -2(d\beta(\cdot,t),d\beta(\cdot,t)) - 2(d^*\beta(\cdot,t),d^*\beta(\cdot,t)) = \\
&= -4E(\beta(\cdot,t)) \leq 0 \ .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\beta(\cdot,t)) &= (d\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t),d\beta(\cdot,t)) + (d^*\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t),d^*\beta(\cdot,t)) = \\
&= (\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t),\delta\beta(\cdot,t)) = \\
&= -(\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t),\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t)) \leq 0 \ .
\end{aligned}$$

Da quest'ultima e dalla (4.17) segue in modo ovvio la (4.15). □

La (4.14) implica, in particolare, che se $\beta(x,0)=0$, allora $\beta(x,t)=0, \forall t$ per cui la soluzione esiste. Questo implica che

Corollario 4.3.1. *Le soluzioni dell'equazione (4.12) sono uniche (se $\beta_1(x,t)$ e $\beta_2(x,t)$ sono soluzioni di (4.12) per $0 \leq t \leq T$ con gli stessi valori iniziali, ovvero $\beta_1(x,0)=\beta_2(x,0)$, allora coincidono per ogni $0 \leq t \leq T$) e inoltre soddisfano una proprietà di semigruppo: se $\beta(\cdot,t)$ risolve la (4.12), allora $\beta(\cdot,t+s)=\beta_s(\cdot,t)$, con $\beta_s(\cdot,t)$ soluzione di (4.12) al valore iniziale $\beta_s(\cdot,0)=\beta(\cdot,s)$.*

Abbiamo inoltre un risultato sulla stabilità:

Corollario 4.3.2. *Sia $\beta(x,t,s)$ una famiglia di soluzioni di (4.12) con una dipendenza differenziabile dal parametro $s \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\frac{d}{dt}\|\frac{\partial}{\partial s}\beta(\cdot,t,s)\|^2 \leq 0 \ . \tag{4.18}$$

Dimostrazione. Ovviamente $\frac{\partial}{\partial s}\beta(x,t,s)$ risolve la (4.12). La (4.18) allora segue immediatamente dalla (4.14). □

Avremo anche bisogno delle seguenti stime a priori:

Lemma 4.3.3. *Una soluzione $\beta(x,t)$ della (4.12), definita per $0 \leq t \leq T$, con valore iniziale $\beta_0(x) \in L^2(M)$, soddisfa, per $\tau \leq t \leq T$, $\forall \tau > 0$, delle stime a priori del tipo*

$$\|\beta(\cdot,t)\|_{C^{2,\alpha}(M)} + \|\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t)\|_{C^{0,\alpha}(M)} \leq c_1 \ , \tag{4.19}$$

con c_1 costante che dipende solo da $\|\beta_0\|_{L^2(M)}$, τ e dalla geometria di M, e non dalla particolare soluzione $\beta(x,t)$.

Dimostrazione. La (4.14) implica che

$$\|\beta(\cdot,t)\|_{L^2(M)} \leq \|\beta_0\|_{L^2(M)}.$$

Se nella (4.18) poniamo $s = t$, otteniamo che $\|\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t)\|_{L^2(M)}$ è non crescente rispetto a t. Il risultato di regolarità segue dalle stime di Schauder del Teorema 2.2.6 e dalla relazione (2.9). □

Osservazione
Una conseguenza importante di questo lemma è che dalle stime possiamo dedurre dei risultati di convergenza. Infatti il teorema di Ascoli-Arzela [2, Cap.5] implica che una successione (f_n) limitata nello spazio di Hölder $C^{0,\alpha}(M)$, con $0 < \alpha < 1$, ammette una sottosuccessione convergente in $C^{0,\alpha'}(M)$, con $\alpha' < \alpha$.

Ne consegue ora l'esistenza globale delle soluzioni:

Corollario 4.3.3. *Sia $\beta_0 \in C^{2,\alpha}$ per $0 < \alpha < 1$. Allora la soluzione della (4.12) con valore iniziale β_0 esiste per ogni $t \geq 0$.*

Dimostrazione. Per il Lemma 4.3.1 di esistenza locale, la soluzione $\beta(x,t)$ esiste in un intervallo temporale positivo $0 \leq t < \epsilon$. Quando esiste in un intervallo $0 \leq t \leq T$, per $t \to T$, allora per il Lemma 4.3.3, $\beta(x,t)$ converge a una forma $\beta(x,T)$ in $C^{2,\alpha'}$ per $0 < \alpha' < \alpha$.Ma allora per la proprietà di semigruppo del Corollario 4.3.1 e applicando ancora l'esistenza locale, la soluzione può essere prolungata ad un intervallo che si estende oltre T, ovvero esiste per $0 \leq t < T + \epsilon$. Quindi l'intervallo di esistenza è contemporaneamente aperto e chiuso, ed essendo non vuoto coincide con l'intera semiretta reale. □

Infine verifichiamo il comportamento asintotico delle soluzioni per $t \to \infty$.
Con ciò avremo dimostrato il seguente

Teorema 4.3.1 (Milgram-Rosenbloom). *Sia $\beta_0(x)$ una p-forma su M di classe $C^{2,\alpha}$, per $0 < \alpha < 1$. Allora esiste un'unica soluzione dell'equazione*

$$\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} + \Delta\beta(x,t) = 0 \quad \forall t \in [0,\infty) \tag{4.20}$$

$$\text{con } \beta(x,0) = \beta_0(x). \tag{4.21}$$

Per $t \to \infty, \beta(\cdot,t)$ converge in $C^{2,\alpha}$ ad una forma armonica $H\beta$.
Se β_0 è chiusa, ovvero $d\beta_0 = 0$, allora ogni forma $\beta(\cdot,t)$ è anch'essa chiusa, $d\beta(\cdot,t) = 0$. Inoltre, sempre in questo caso, se ω è una $(d-p)$-forma co-chiusa, cioè $d^*\omega = 0$, allora $\int_M \beta(x,t) \wedge \omega(x)$ non dipende da t, e si ha che $\int_M H\beta(x) \wedge \omega(x) = \int_M \beta_0(x) \wedge \omega(x)$.

All'interno di questo teorema rientra anche il teorema di Hodge e di conseguenza ne fornisce una dimostrazione alternativa.

Dimostrazione. Abbiamo già mostrato l'esistenza e unicità nei Corollari 4.3.3 e 4.3.1. Vediamo la convergenza della soluzione ad una forma armonica. Siccome $E(\beta(\cdot,t)) \geq 0$, la (4.14) implica che deve esistere una sucessione $t_n \to \infty$ tale che

$$\|\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t_n)\| \to 0. \tag{4.22}$$

Il controllo sulle norme del Lemma 4.3.3 applicato a $\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t_n)$ ci garantisce che $\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t_n)$ è limitata in $C^{2,\alpha}$ e quindi convergente (sempre a meno di una sottosuccessione) a 0 in qualche spazio di Hölder $C^{2,\alpha'}, 0 < \alpha' < \alpha$. Allora anche $\Delta\beta(\cdot,t_n) = -\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t_n)$ converge a 0 in $C^{2,\alpha'}$, ovvero $\beta(\cdot,t_n)$ converge in $C^{2,\alpha'}$ ad una forma armonica $H\beta$. Se poniamo

$$\beta_1(x,t) := \beta(x,t) - H\beta(x)$$

allora anche $\beta_1(x,t)$ risolve la (4.20). Applicando nuovamente la (4.22) e la (4.14) abbiamo che

$$\|\beta(\cdot,t) - H\beta(\cdot)\| \to 0$$

per $t \to \infty$, e quindi, per il Lemma 4.3.3, $\beta(x,t)$ converge a $H\beta$ in $C^{2,\alpha'}$.

Siccome, come si verifica facilmente, la derivata esterna d commuta con Δ e con $\frac{\partial}{\partial t}$, se $\beta(x,t)$ risolve la (4.20), allora anche $d\beta(x,t)$ la risolve. Allora, usando ancora la (4.14), se $d\beta_0 = 0$, anche $d\beta(\cdot,t) = 0$.

Se inoltre $d^*\omega = 0$, allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\int_M \beta(x,t) \wedge \omega(x) &= -\int_M \Delta\beta(x,t) \wedge \omega(x) = \\ = -\int_M dd^*\beta(x,t) \wedge \omega(x) &= -\int_M d^*\beta(x,t) \wedge d^*\omega(x) = 0, \end{aligned}$$

e quindi l'integrale $\int_M \beta(x,t) \wedge \omega(x)$ non dipende da t. $\square$

Il metodo del flusso del calore inoltre ci consente di perfezionare i risultati del teorema 4.3.1. Vale infatti il seguente lemma sulla convergenza della soluzione.

Lemma 4.3.4. *Nelle ipotesi del teorema 4.3.1, la soluzione $\beta(x,t)$ dell'equazione (4.12) converge esponenzialmente alla forma armonica $H\beta_0(x)$, ovvero*

$$\|\beta(\cdot,t) - H\beta_0(\cdot)\| \leq ce^{-\lambda t}, \tag{4.23}$$

con c, λ costanti positive e λ non dipende da β.

Dimostrazione. Per $t > 0$, cerchiamo una forma β con $\|\beta\| = 1, H\beta = 0$ tale che per la soluzione $\beta(x,t)$ della (4.12) ai valori iniziali $\beta(x,0) = \beta(x)$ si abbia $\|\beta(\cdot,t)\|$ massimale.
Per il teorema 2.2.6, anche la norma $C^{1,\alpha}$ di $\beta(\cdot,t)$ è limitata da $\|\beta(x,0)\|$ e perciò il massimo viene raggiunto. Sia $b(t)$ questo valore massimo. Siccome $H\beta = 0$, nella disuguaglianza (4.14) vale il minore stretto, e quindi $b(t) < 1$.
La proprietà di semigruppo del corollario 4.3.1 allora implica che

$$b(nt) \leq b(t)^n \ \forall n \in \mathbb{N},$$

e da questa

$$b(t) \leq e^{-\lambda t} \text{ per qualche } \lambda > 0.$$

Di conseguenza, per una generica $\beta(x,0) \in L^2$ otteniamo la (4.23). □

Mostriamo infine il seguente teorema sulla risolubilità di PDE.

Teorema 4.3.2. *L'equazione*

$$\Delta\nu = \eta, \tag{4.24}$$

con η p-forma di classe L^2, è risolvibile se e solo se

$$(\eta, \omega) = 0 \quad \forall \omega \text{ tale che } \Delta\omega = 0. \tag{4.25}$$

La soluzione è unica a meno dell'aggiunta di una forma armonica.

Inoltre, lo spazio delle p-forme di classe L^2 ammette la decomposizione

$$\Omega^p_{L^2}(M) = \ker\Delta \oplus \operatorname{Im}\Delta \tag{4.26}$$

(osserviamo che il primo addendo, $\ker\Delta$, ha dimensione finita).

Dimostrazione. Consideriamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu + \Delta\mu = \eta$$
$$\mu(\cdot,0) = \mu_0.$$

Poniamo

$$T_t\mu_0 = \beta(\cdot, t)$$

per la soluzione di

$$\frac{\partial}{\partial t}\beta + \Delta\beta = 0$$
$$\beta(\cdot, 0) = \mu_0.$$

Abbiamo allora

$$\mu(x,t) = T_t\mu_0 + \int_0^t T_{t-s}\eta(x)ds = T_t\mu_0(x) + \int_0^t T_s\eta(x)ds,$$

perchè η non dipende da t. Per la convergenza esponenziale in (4.23) abbiamo

$$\|T_s\eta - H\eta\| \leq ce^{-\lambda s}$$

per una costante c, da cui

$$\|\mu - tH\eta - T_t\mu_0\| \leq c\int_0^t e^{-\lambda s}ds.$$

Allora

$$\nu(x) := \lim_{t\to\infty}(\mu(x,t) - tH\eta(x))$$

esiste, sia in L^2 che in $C^{2,\alpha}$, secondo le solite stime. Siccome $\Delta H\eta = 0$, otteniamo che

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\Big)(\mu(x,t) - tH\eta(x)) = \eta(x) - H\eta(x).$$

Perciò

$$\Delta\nu = \eta - H\eta.$$

Questo implica la risolubilità della (4.24) sotto la condizione (4.25), perchè $\eta - H\eta$ è la proiezione ortogonale sul complemento L^2-ortogonale del nucleo di Δ.

□

Bibliografia

[1] Jost, J. (2017), *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Springer

[2] Jost, J. (2005), *Postmodern Analysis*, Springer

[3] Jost, J. (1991), *Nonlinear Methods in Riemannian and Kählerian Geometry*, Springer

[4] Loi, A. (2013), *Introduzione alla topologia generale*, Aracne

[5] Lee, J.M. (2018), *Introduction to Riemannian Manifolds*, Springer

[6] Madsen I. and Tornehave J. (1997), *From Calculus to Cohomology*, Cambridge University Press

[7] Morita, S. (2001), *Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Society

[8] Brezis, H. (2011), *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer

Università degli studi di Cagliari
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Il Teorema di Hodge e il flusso del calore

Vincenzo Farina

21 Luglio 2022

Relatore: Prof. Andrea Loi

Introduzione

Teorema di Hodge

Sia M una varietà Riemanniana compatta orientata. Allora ogni classe di coomologia in $H^p(M)$ $(0 \leq p \leq n = \dim M)$ contiene una ed una sola forma armonica.

Flusso del calore

Metodo del flusso del calore

L'obiettivo è risolvere l'equazione del calore

$$\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} + \Delta \beta(x,t) = 0$$

$$\beta(x,0) = \beta_0(x) \qquad t \in [0,\infty)$$

con x posizione sulla varietà e t rappresenta la variabile temporale.

Nozioni fondamentali

- Varietà Riemanniane
- Forme differenziali
- Operatore di Laplace-Beltrami
- Spazi di coomologia di de Rham

Varietà Riemanniane

Varietà Riemanniana

Una varietà Riemanniana (M, g) è una varietà differenziabile M dotata di una metrica Riemanniana g, ovvero un prodotto scalare su ognuno degli spazi tangenti $T_x M$ che dipende in modo differenziabile dal punto base x.

$$g_{ij} = g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) \qquad i, j = 1, \dots n$$

Se $v, w \in T_x M$ e localmente $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}, w = w^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

$$\langle v, w \rangle := g_{ij} v^i w^j$$

Spazio cotangente

Spazio cotangente

Lo spazio duale dello spazio tangente T_xM è detto spazio cotangente di M nel punto x e denotato con T_x^*M

$$T_x^*M := (T_xM)^* = \{\alpha : T_xM \to \mathbb{R} \text{ lineari}\}$$

Sia T^*M il fibrato cotangente su M le cui fibre sono gli spazi cotangenti di M. Le sezioni di T^*M sono dette 1-forme.

Se $\omega = \omega_i dx^i, \eta = \eta_j dx^j \in T_x^*M$

$$\langle \omega, \eta \rangle = g^{ij}\omega_i\eta_j$$

con (g^{ij}) inversa della matrice (g_{ij})

Forme differenziali

Sia

$$\Lambda^p(T_x^*M) := \underbrace{T_x^*M \wedge \cdots \wedge T_x^*M}_{p \text{ volte}}$$

l'algebra esterna generata dal prodotto esterno $\wedge$.
Sia

$$\omega \in \Lambda^p(T_x^*M)$$

Allora

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

con $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ e tale che:

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$
$$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$$
$$dx^i \wedge dx^i = 0$$

Forme differenziali

Il fibrato vettoriale su M con fibre $\Lambda^p(T^*_x M)$ su x è denotato con $\Lambda^p(M)$.

Forme differenziali

Lo spazio delle sezioni di $\Lambda^p(M)$ è denotato con $\Omega^p(M)$. Gli elementi di $\Omega^p(M)$ sono detti p-forme differenziali.

Se $\omega \in \Omega^p(M)$

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$$

con le $\omega_{i_1 \dots i_p}$ di classe C^∞.
Per $p = 0$ una 0-forma è una funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{R}$

Forme differenziali

- Differenziale esterno
- Operatore di Hodge
- Prodotto L^2
- Operatore aggiunto d^*
- Operatore di Laplace-Beltrami Δ
- Forme armoniche

Differenziale esterno

Differenziale esterno

Il differenziale esterno, o derivata esterna, è l'applicazione lineare

$$d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

così definita: se $\omega = f dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$, poniamo

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}.$$

Una delle sue proprietà fondamentali è la seguente:

$$d \circ d = 0$$

Operatore di Hodge

Su $\Lambda^p(T_x^*M)$ definiamo, per $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_p \in \Lambda^1(T_x^*M)$

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle)$$

Se $e_1, \ldots, e_n$ è b.o.n. di $T_x^*(M)$, allora gli elementi

$$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \quad \text{con } 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$$

formano una b.o.n di $\Lambda^p(T_x^*M)$.

Operatore di Hodge

Operatore $*$ di Hodge

Definiamo l'operatore lineare $*$ (star) di Hodge

$$* : \Lambda^p(T_x^* M) \to \Lambda^{n-p}(T_x^* M)$$

ponendo

$$* \, (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-p}},$$

con $j_1, \ldots, j_{n-p}$ scelti in modo che $e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_{n-p}}$ sia una base positiva di $T_x^* M$.

In modo analogo si definisce sulle sezioni

$$* : \Omega^p(M) \to \Omega^{n-p}(M)$$

Operatore di Hodge

Proprietà principali:

- forma volume: $*(1) = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$
- $\mathrm{Vol}(M) := \int_M *(1)$
- $** = (-1)^{p(n-p)} : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M)$
- $v, w \in \Omega^p(M) \Rightarrow \langle v, w \rangle = *(w \wedge *v) = *(v \wedge *w)$

Prodotto L^2

Siano ora $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$

Prodotto L^2

Definiamo il prodotto scalare L^2

$$(\alpha, \beta) := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle * (1) = \int_M \alpha \wedge * \beta$$

Definiamo anche la norma L^2

$$\|\alpha\| := (\alpha, \alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

Operatore aggiunto d^*

Operatore d^*

L'operatore d^* è l'operatore aggiunto dell'operatore d rispetto al prodotto L^2 $(\cdot,\cdot)$. Ovvero, se $\alpha \in \Omega^{p-1}(M), \beta \in \Omega^p(M)$,

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta);$$

Quindi $d^* : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$.

Una sua proprietà fondamentale è che

$$d^* = (-1)^{n(p+1)+1} * d *$$

Operatore di Laplace-Beltrami

Operatore Δ

L'operatore di Laplace-Beltrami Δ su $\Omega^p(M)$ è definito da

$$\Delta = dd^* + d^*d : \Omega^p(M) \to \Omega^p(M).$$

Forma armonica

Una p-forma $\omega \in \Omega^p(M)$ è detta armonica se

$$\Delta\omega = 0.$$

Proprietà di Δ

- Δ è autoaggiunto: $(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta) \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^p(M)$
- $\Delta\alpha = 0 \iff d\alpha = 0$ e $d^*\alpha = 0$.
- $*\Delta = \Delta *$
- ω armonica $\Rightarrow *\omega$ armonica

Esempio funzioni

Funzioni su $\mathbb{R}^n$

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile.

$$\Delta f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{(\partial x^i)^2} = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

Funzioni su varietà Riemanniana

Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile su M.

$$\Delta f := -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)$$

con $g = \det(g_{ij})$

Δ nello spazio Euclideo

Consideriamo una p-forma

$$\omega = \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n \ ,$$

definita su un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora:

$$\Delta\omega = d^* d\omega + dd^*\omega = -\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \dots i_p}}{(\partial x^m)^2} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

Spazi di coomologia di de Rham

Forme chiuse

Una $p-$forma $\alpha \in \Omega^p(M)$ è detta *chiusa* se $d\alpha = 0$.

$$Z^p(M) := \ker(d : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M))$$

Forme esatte

Una $p-$forma $\alpha \in \Omega^p(M)$ è detta *esatta* se esiste una $(p-1)-$forma $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$ tale che $d\eta = \alpha$.

$$B^p(M) := \operatorname{Im}(d : \Omega^{p-1}(M) \to \Omega^p(M))$$

$Z^p(M)$ e $B^p(M)$ sono sottospazi di $\Omega^p(M)$ tali che

$$B^p(M) \subset Z^p(M)$$

Spazi di coomologia di de Rham

Spazi di coomologia di de Rham

Lo spazio quoziente

$$H^p(M) := \frac{Z^p(M)}{B^p(M)}$$

è detto p-esimo spazio, o gruppo, di coomologia di de Rham di M.

Classi di coomologia

Se $\omega \in \Omega^p(M)$ è chiusa, denotiamo la classe di ω con $[\omega] \in H^p(M)$. Due forme chiuse $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ vengono dette *coomologhe* se la $p-$forma $\alpha - \beta$ è esatta, ovvero

$$[\alpha] = [\beta] \iff \exists \eta \in \Omega^{p-1}(M) \text{ tale che } \alpha - \beta = d\eta.$$

Il Teorema di Hodge

Teorema di Hodge

Sia M una varietà Riemanniana compatta orientata. Allora ogni classe di coomologia in $H^p(M)$ $(0 \leq p \leq n = \dim M)$ contiene una ed una sola forma armonica.

Il Teorema di Milgram-Rosembloom

Teorema di Milgram-Rosembloom

Sia $\beta_0(x)$ una p-forma su M di classe $C^{2,\alpha}$, per $0 < \alpha < 1$. Allora esiste un'unica soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} + \Delta \beta(x,t) = 0 \quad \forall t \in [0,\infty)$$
$$\text{con } \beta(x,0) = \beta_0(x).$$

Per $t \to \infty, \beta(\cdot,t)$ converge in $C^{2,\alpha}$ ad una forma armonica $H\beta$.
Se β_0 è chiusa, ovvero $d\beta_0 = 0$, allora ogni forma $\beta(\cdot,t)$ è anch'essa chiusa, $d\beta(\cdot,t) = 0$. Inoltre, sempre in questo caso, se ω è una $(d-p)$-forma cochiusa, cioè $d^*\omega = 0$, allora $\int_M \beta(x,t) \wedge \omega(x)$ non dipende da t, e si ha che $\int_M H\beta(x) \wedge \omega(x) = \int_M \beta_0(x) \wedge \omega(x)$.

Spazi di Hölder

Siano $D \subset \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1$

Hölder-continuità

f è detta Hölder-continua, $f \in C^{0,\alpha}(D)$, se per ogni intevallo chiuso limitato $I \subset D$ esiste c tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x-y|^{\alpha}, \ \forall x, y \in I$$

Hölder-derivabilità

Sia $k \in \mathbb{N}$,

$$f \in C^{k,\alpha}(D) \text{ se } f \in C^{k}(D) \text{ e } f^{(k)} \in C^{0,\alpha}(D)$$

Schema della dimostrazione

- Esistenza locale
- Unicità
- Stime
- Esistenza globale
- Convergenza

Esistenza locale

Lemma di esistenza locale

Sia $\beta_0 \in \Omega^p$ di classe $C^{2,\alpha}$ per qualche $0 < \alpha < 1$. Allora, per un certo $\epsilon > 0$, l'equazione

$$\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} + \Delta \beta(x,t) = 0 \quad \forall t \in [0,\infty)$$

$$\text{con } \beta(x,0) = \beta_0(x).$$

ammette una soluzione $\beta(x,t)$ per $0 \leq t < \epsilon$, e anche questa soluzione è di classe $C^{2,\alpha}$.

Unicità

Ricordiamo la norma L^2

$$\|\beta(\cdot,t)\|^2 = (\beta,\beta) = \int_M \beta(x,t) \wedge *\beta(x,t)$$

e definiamo l'energia

$$E(\beta(\cdot,t)) := \frac{1}{2}\|d\beta(\cdot,t)\|^2 + \frac{1}{2}\|d^*\beta(\cdot,t)\|^2 = \frac{1}{2}(d\beta,d\beta) + \frac{1}{2}(d^*\beta,d^*\beta)$$

Lemma di decrescenza

$$\frac{d}{dt}\|\beta(\cdot,t)\|^2 \leq 0$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\|\beta(\cdot,t)\|^2 \geq 0$$
$$\frac{d}{dt}E(\beta(\cdot,t)) \leq 0 \,.$$

Unicità

Corollario di unicità

Le soluzioni dell'equazione sono uniche (se $\beta_1(x,t)$ e $\beta_2(x,t)$ sono soluzioni per $0 \leq t \leq T$ con gli stessi valori iniziali, ovvero $\beta_1(x,0) = \beta_2(x,0)$, allora coincidono per ogni $0 \leq t \leq T$) e inoltre soddisfano una proprietà di semigruppo: se $\beta(\cdot,t)$ risolve l'equazione, allora $\beta(\cdot,t+s) = \beta_s(\cdot,t)$, con $\beta_s(\cdot,t)$ soluzione al valore iniziale $\beta_s(\cdot,0) = \beta(\cdot,s)$.

Stime

Lemma sulle stime di Schauder

Una soluzione $\beta(x,t)$, definita per $0 \le t \le T$, con valore iniziale $\beta_0(x) \in L^2(M)$, soddisfa, per $\tau \le t \le T$, $\forall \tau > 0$, delle stime a priori del tipo

$$\|\beta(\cdot,t)\|_{C^{2,\alpha}(M)} + \|\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot,t)\|_{C^{0,\alpha}(M)} \le c_1$$

con c_1 costante che dipende solo da $\|\beta_0\|_{L^2(M)}$, τ e dalla geometria di M, e non dalla particolare soluzione $\beta(x,t)$.

Per il Teorema di Ascoli-Arzela una successione (f_n) limitata nello spazio di Hölder $C^{0,\alpha}(M)$, con $0 < \alpha < 1$, ammette una sottosuccessione convergente in $C^{0,\alpha'}(M)$, con $\alpha' < \alpha$.

Esistenza globale

Corollario di esistenza globale

Sia $\beta_0 \in C^{2,\alpha}$ per $0 < \alpha < 1$. Allora la soluzione dell'equazione con valore iniziale β_0 esiste per ogni $t \geq 0$

Dimostrazione del Teorema di Milgram-Rosembloom

Esistenza, locale e globale, e unicità nei rispettivi Lemmi e Corollari.
Verifichiamo il comportamento asintotico delle soluzioni per $t \to \infty$.
Siccome $E(\beta(\cdot, t)) \geq 0$, per il Lemma di decrescenza deve esistere una successione $t_n \to \infty$ tale che

$$\|\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot, t_n)\| \to 0.$$

Il controllo sulle norme del Lemma sulle stime ci garantisce che $\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot, t_n)$ è limitata in $C^{2,\alpha}$ e quindi convergente,a meno di una sottosuccessione, a 0 in qualche spazio di Hölder $C^{2,\alpha'}, 0 < \alpha' < \alpha$. Allora anche

$$\Delta\beta(\cdot, t_n) = -\frac{\partial}{\partial t}\beta(\cdot, t_n) \longrightarrow 0 \quad \text{in } C^{2,\alpha'}$$

ovvero $\beta(\cdot, t_n)$ converge in $C^{2,\alpha'}$ ad una forma armonica $H\beta$.

Dimostrazione del Teorema di Milgram-Rosembloom

Se poniamo

$$\beta_1(x,t) := \beta(x,t) - H\beta(x)$$

allora anche $\beta_1(x,t)$ risolve l'equazione iniziale. Applicando nuovamente la decrescenza abbiamo che

$$\|\beta(\cdot,t) - H\beta(\cdot)\| \to 0$$

per $t \to \infty$, e quindi, per il Lemma sulle stime, $\beta(x,t)$ converge a $H\beta$ in $C^{2,\alpha}$.

Dimostrazione del Teorema di Milgram-Rosembloom

Dal momento che la derivata esterna d commuta con Δ e con $\frac{\partial}{\partial t}$, se $\beta(x,t)$ risolve l'equazione

$$\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} + \Delta\beta(x,t) = 0$$
$$\text{con } \beta(x,0) = \beta_0(x).$$

allora anche $d\beta(x,t)$ la risolve. Allora, usando ancora la decrescenza, se $d\beta_0 = 0$, anche $d\beta(\cdot,t) = 0$.
Se inoltre $d^*\omega = 0$, allora

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int_M \beta(x,t)\wedge\omega(x) &= -\int_M \Delta\beta(x,t)\wedge\omega(x) = \\ &= -\int_M dd^*\beta(x,t)\wedge\omega(x) = -\int_M d^*\beta(x,t)\wedge d^*\omega(x) = 0,\end{aligned}$$

e quindi l'integrale $\int_M \beta(x,t)\wedge\omega(x)$ non dipende da t. □

Alcune applicazioni del Teorema di Hodge

Teorema

L'equazione

$$\Delta\nu = \eta,$$

con η p-forma di classe L^2, è risolvibile se e solo se

$$(\eta, \omega) = 0 \quad \forall\omega \text{ tale che } \Delta\omega = 0.$$

La soluzione è unica a meno dell'aggiunta di una forma armonica.

Alcune applicazioni del Teorema di Hodge

Teorema di decomposizione di Hodge

Siano B_p la chiusura L^2 di $\{d\alpha : \alpha \in \Omega^{p-1}(M)\}$
B_p^* la chiusura L^2 di $\{d^*\beta : \beta \in \Omega^{p+1}(M)\}$.
Allora lo spazio di Hilbert $L_p^2(M)$ delle p-forme al quadrato sommabili ammette la seguente decomposizione ortogonale

$$L_p^2(M) = B_p \oplus B_p^* \oplus \mathcal{H}_p$$

dove $\mathcal{H}_p := B_p^{\perp} \cap B_p^{*\perp}$ è lo spazio delle p-forme armoniche.

Alcune applicazioni del Teorema di Hodge

Gruppi di omologia e dualità di Poincaré

Il p-esimo gruppo di omologia $H_p(M)$ di una varietà differenziabile M di dimensione n compatta è $H^p(M)^*$.

$$H_p(M) \cong H^p(M)^* \cong H^{n-p}(M)$$

Grazie per l'attenzione