



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI  
FACOLTÀ DI SCIENZE  
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

# IL PARADOSSO DI BANACH-TARSKI

Relatore

Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di

Marco Usula

ANNO ACCADEMICO 2011/2012

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Richiami</b>	<b>2</b>
1.1 Gruppo e monoide libero . . . . .	2
1.1.1 Monoide libero . . . . .	2
1.1.2 Gruppo libero . . . . .	4
1.2 Teoria della Misura . . . . .	8
<b>2 Insiemi paradossali</b>	<b>12</b>
2.1 Definizioni preliminari . . . . .	12
2.1.1 Azioni di un gruppo su un insieme . . . . .	12
2.1.2 Insiemi paradossali . . . . .	18
2.2 Azioni paradossali generiche . . . . .	20
2.2.1 Biezioni arbitrarie . . . . .	20
2.2.2 Orbite e insiemi paradossali . . . . .	20
2.3 Gruppi paradossali . . . . .	23
2.3.1 Gruppi e monoidi liberi . . . . .	23
2.3.2 Una rappresentazione grafica di $F_2$ . . . . .	25
2.3.3 Classificazione dei gruppi paradossali . . . . .	26
<b>3 Paradossi geometrici e Teoria della Misura</b>	<b>28</b>
3.1 Sottoinsiemi paradossali di $\mathbb{R}$ , $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ . . . . .	28
3.1.1 L'insieme di Vitali . . . . .	29
3.1.2 N-Paradossalità di $S^1$ . . . . .	30
3.1.3 Paradosso di Sierpinski-Mazurkiewicz . . . . .	32
3.1.4 Paradosso di Hausdorff . . . . .	34
3.2 Il ruolo del gruppo $G_n$ . . . . .	37

<i>INDICE</i>	iii
<b>4 Il paradosso di Banach-Tarski</b>	<b>41</b>
4.1 Il paradosso . . . . .	41
<b>Bibliografia</b>	<b>53</b>

# Introduzione

Il Paradosso di Banach-Tarski, nella sua forma più conosciuta, è noto come “paradosso della duplicazione della sfera”: in termini intuitivi, è possibile “spezzare” una sfera in un numero finito di pezzi, e poi “ricombinare” tali pezzi per ricostruire, come un puzzle, due copie identiche della sfera originale. Presenteremo gli strumenti di base per formalizzare questi concetti intuitivi nei Capitoli 1 e 2: al concetto intuitivo di “rottura” di un insieme  $X$  in un numero finito di pezzi, sarà associato il concetto formale di “partizione finita” di  $X$ ; al concetto intuitivo di “ricombinazione” dei pezzi, sarà associato il concetto formale di “azione di un gruppo di permutazioni di  $X$  su  $X$ ”. In questo senso, vedremo come le proprietà formali dei gruppi che agiscono sull’insieme considerato (in particolare, le proprietà dei monoidi liberi e dei gruppi liberi) “causino” paradossi come il famoso paradosso della duplicazione della sfera. I casi più interessanti sono quelli in cui  $X$  è uno spazio Euclideo, ed il gruppo considerato è un sottogruppo del gruppo delle isometrie di  $X$ . Nel Capitolo 3 utilizzeremo gli strumenti sviluppati nei Capitoli 1 e 2 per descrivere alcuni paradossi geometrici in spazi Euclidei. Confronteremo il caso di spazi Euclidei in dimensioni 1, 2 o in dimensioni maggiori, sottolineando che la presenza di paradossi in dimensione maggiore di 2, piuttosto che in dimensione minore, ha le sue radici nella differenza profonda che esiste tra i gruppi di isometrie  $G_1, G_2$  della retta e del piano, e i gruppi di isometrie in dimensioni maggiori. Vedremo inoltre come questi paradossi abbiano notevoli e profonde implicazioni in Teoria della Misura: mostreremo che, se si assume l’Assioma di Scelta, non è possibile estendere il concetto intuitivo di “volume” a tutti i sottoinsiemi dello spazio, a causa dell’esistenza di situazioni patologiche come il Paradosso di Banach-Tarski. Il Capitolo 4 è dedicato al Paradosso di Banach-Tarski vero e proprio, ed alle sue implicazioni geometriche: si dimostra che, in dimensioni maggiori di 2, *ogni* sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  limitato e con interno non vuoto può essere “spezzato” in un numero finito di pezzi, i quali possono essere ricombinati tramite isometrie per formare due copie identiche dell’insieme iniziale. Vengono inoltre citati alcuni risultati recenti e alcune domande ancora senza risposta collegate al Paradosso di Banach-Tarski.

# Capitolo 1

## Richiami

Nel seguito, quando parleremo di gruppi o monoidi, dove non specificato diversamente, verrà utilizzata la notazione moltiplicativa.

### 1.1 Gruppo e monoide libero

La definizione più “completa” di gruppo e monoide libero può essere data nel contesto della Teoria delle Categorie, come definizione universale, ma per i temi discussi in questa tesi è sufficiente dare una definizione meno astratta di queste due strutture.<sup>1</sup>

#### 1.1.1 Monoide libero

Sia  $S$  un insieme. Chiamiamo *lettere* gli elementi di  $S$ . Definiamo  $M$  come l'insieme delle stringhe di elementi di  $S$ , ovvero  $M$  sia l'insieme delle espressioni formali  $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$ , dove  $n \in \mathbb{N}$  e  $\{\sigma_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \subseteq S$ . Come suggerisce l'intuizione, chiamiamo *parola* un elemento di  $M$ , e *lunghezza* il naturale  $n$  che indica il numero di lettere che compongono la parola. Esiste un'unica parola di lunghezza 0, ovvero quella formata da 0 lettere: la chiameremo *parola vuota* e la indicheremo con  $1_M$ . Definiamo la seguente operazione su  $M$ , detta *concatenazione*:

$$\begin{aligned} * : \quad M \times M &\rightarrow M \\ (\sigma_1\dots\sigma_n) * (\rho_1\dots\rho_m) &\mapsto \sigma_1\dots\sigma_n\rho_1\dots\rho_m \end{aligned}$$

la quale, come si verifica facilmente, è ben definita. Mostriamo che tale operazione dota  $M$  della struttura di *monoide*:

1.  $*$  è associativa: infatti, per ogni tripla di parole  $w_1, w_2, w_3 \in M$ , si ha  $(w_1 * w_2) * w_3 = (w_1 w_2) * w_3 = w_1 w_2 w_3 = w_1 * (w_2 w_3) = w_1 * (w_2 * w_3)$ ;
2.  $1_M$  è evidentemente l'elemento neutro dell'operazione  $*$ .

---

<sup>1</sup>Per una trattazione più approfondita, si veda [ART].

**Definizione 1.1.1.** Il monoide  $(M, *)$  viene detto *monoide libero* su  $S$ . Si dirà inoltre che  $M$  è *generato da*  $S$ . La cardinalità di  $S$  viene detta *rango* del monoide libero  $M$ .

*Osservazione 1.1.2.* Se  $M$  è il monoide libero generato da un insieme  $S$ , allora discende direttamente dalla definizione che *ogni* elemento di  $M$  diverso da  $1_M$  ha ordine infinito. Ne consegue che se  $w_1, w_2$  sono parole di  $M$ , allora  $w_1 * w_2 \neq 1_M$ .

**Teorema 1.1.3.** Se  $S_1$  è un insieme equipotente ad  $S_2$ , allora, detti  $M_1$  e  $M_2$  i monoide liberi generati rispettivamente da  $S_1$  e  $S_2$ , allora  $M_1$  e  $M_2$  sono isomorfi.

*Dimostrazione.* Sia  $\phi : S_1 \rightarrow S_2$  una biezione. Costruiamo un isomorfismo di monoide tra  $M_1$  ed  $M_2$  indotto da  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \psi : M_1 &\rightarrow M_2 \\ \sigma_1 \dots \sigma_n &\mapsto \phi(\sigma_1) \dots \phi(\sigma_n) \quad \text{se } n > 0 ; \\ 1_{M_1} &\mapsto 1_{M_2} \quad \text{se } n = 0 \end{aligned}$$

verifichiamo che si tratta effettivamente di un isomorfismo:

1.  $\psi$  è un omomorfismo di monoide: infatti dette  $w_1 = \sigma_1 \dots \sigma_n$  e  $w_2 = \rho_1 \dots \rho_m$  parole di  $M_1$  di lunghezza, rispettivamente,  $n$  ed  $m$ , si ha  $\psi(w_1 * w_2) = \phi(\sigma_1) \dots \phi(\sigma_n) \phi(\rho_1) \dots \phi(\rho_m) = (\phi(\sigma_1) \dots \phi(\sigma_n)) * (\phi(\rho_1) \dots \phi(\rho_m)) = \psi(w_1) * \psi(w_2)$ ; inoltre, per definizione,  $\psi(1_{M_1}) = 1_{M_2}$ .
2.  $\psi$  è invertibile: difatti, come subito si verifica, l'applicazione

$$\begin{aligned} \psi' : M_2 &\rightarrow M_1 \\ \rho_1 \dots \rho_n &\mapsto \phi^{-1}(\rho_1) \dots \phi^{-1}(\rho_n) \quad \text{se } n > 0 \\ 1_{M_2} &\mapsto 1_{M_1} \quad \text{se } n = 0 \end{aligned}$$

è un'inversa completa di  $\psi$ .

□

**Corollario 1.1.4.** Due monoide liberi sono isomorfi se e solo se hanno lo stesso rango.

**Definizione 1.1.5.** Sia  $M$  un monoide. Se  $M$  è isomorfo ad un monoide  $M'$  libero generato da un insieme  $S$ , viene detto anch'esso *libero*. Chiameremo *rango* di  $M$  la cardinalità di  $S$ .

**Proposizione 1.1.6.** Sia  $(M, \cdot)$  un monoide.  $(M, \cdot)$  è un monoide libero se e solo se esiste un sottoinsieme  $S = \{\sigma_i\}_{i \in I}$  di elementi di  $M$  diversi da  $1_M$  e tali che ogni elemento di  $M$  diverso da  $1_M$  si possa scrivere in modo unico come moltiplicazione di un numero finito di elementi di  $S$ ; in tal caso, il rango di  $M$  è  $\#S$ .

*Dimostrazione.* La condizione necessaria è banale a partire dalla definizione di monoide libero. Dimostriamo la condizione sufficiente. A partire dall'insieme  $S$ , possiamo costruire il monoide libero  $(M', *)$  delle stringhe finite di elementi di  $S$ , ovvero  $M'$  è l'insieme delle espressioni formali del tipo  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  ( $\sigma_i \in S, n \in \mathbb{N}$ ).

Sottolineiamo che, a priori, l'espressione  $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$  è *diversa* dall'espressione  $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_n$  (la prima è riferita al monoide libero  $(M', *)$ , la seconda al monoide  $(M, \cdot)$ ). Mostriamo che  $M$  ed  $M'$  sono isomorfi. A tale scopo, consideriamo la seguente funzione:

$$\begin{aligned} \psi : \quad M &\rightarrow M' \\ \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_n &\mapsto \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n \quad \text{se } n > 0 ; \\ 1_M &\mapsto 1_{M'} \quad \text{se } n = 0 \end{aligned}$$

1.  $\psi$  è ben definita grazie al fatto che ogni elemento di  $M$  diverso da  $1_M$  può essere scritto in modo unico come moltiplicazione di elementi di  $S$ . Inoltre essa è chiaramente biunivoca per definizione;
2. dato che  $S$  genera  $M$ , detti  $s$  e  $r$  due elementi generici di  $M$  diversi da  $1_M$ , si può scrivere in modo unico  $s = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_n$  e  $r = \sigma_{n+1} \cdot \sigma_{n+2} \cdot \dots \cdot \sigma_m$  per opportuni  $\sigma_i \in S$ . Allora,  $\psi(s \cdot r) = \psi(\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_m) = \sigma_1\sigma_2\dots\sigma_m = \psi(s) * \psi(r)$ ; inoltre  $\psi(1_M) = 1_{M'}$  per definizione. Ne consegue che  $\psi$  è un omomorfismo;

dunque  $\psi$  è un isomorfismo tra  $M$  ed  $M'$ , e quindi  $M$  è un monoide libero di rango  $\#S$  in quanto  $\#S$  è proprio il rango di  $M'$ .

□

**Esempio 1.1.7.** Il monoide  $(\mathbb{R}, +)$  *non* è un monoide libero: infatti ogni elemento ha opposto additivo (e infatti  $(\mathbb{R}, +)$  è anche un gruppo).

**Esempio 1.1.8.** Il monoide  $(\mathbb{N}, +)$  è un monoide libero di rango 1. Difatti, detto  $S = \{a\}$ , e detto  $M$  il monoide libero generato da  $S$ , si verifica facilmente che la seguente applicazione  $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ :

$$f(n) = \begin{cases} 1_M & \text{se } n = 0 \\ \underbrace{a \dots a}_n & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

è un isomorfismo di monoidi. Ne consegue che ogni monoide di rango 1 è isomorfo ad  $(\mathbb{N}, +)$ .

### 1.1.2 Gruppo libero

Sia  $S$  un insieme. Consideriamo un insieme  $S'$ , equipotente ad  $S$  e ad esso disgiunto. Scegliamo una bigezione  $f : S \rightarrow S'$  e adottiamo la seguente convenzione tipografica: se  $x \in S$ , allora  $f(x) = x'$ ; se  $x \in S'$ , allora  $f^{-1}(x) = x'$ . Dunque è da intendersi che, se  $x \in S \cup S'$ , allora  $(x')' = x$ . Chiamiamo *lettere* gli elementi di  $S \cup S'$ . Definiamo  $W$  come l'insieme delle stringhe di elementi di  $S \cup S'$ , ovvero  $W$  sia l'insieme delle espressioni formali  $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n$ , dove  $n \in \mathbb{N}$  e  $\{\sigma_i\}_{i \in \{1, \dots, n\}} \subseteq S \cup S'$ . Usando la stessa terminologia del caso del monoide libero,  $W$  è l'insieme delle *parole* formate da lettere di  $S \cup S'$ . Definiamo ora una funzione  $r : W \rightarrow W$ , detta *funzione di riduzione*, che opera in questo modo: se  $w$  è una parola di  $W$ , allora  $r(w)$  è la parola ottenuta da  $w$  eliminando ogni coppia di lettere del tipo  $xx'$  che compaiono

nella parola  $w$ , e iterando questo procedimento finchè possibile. Ad esempio, dati  $a, b, c \in S$ , e considerata la parola  $abcc'b'd$ , allora  $r(abcc'b'd) = ad$ . Si può dimostrare (ad esempio per induzione) che la funzione  $r$  è ben definita, ovvero che non importa l'ordine con cui operiamo le eliminazioni di coppie di lettere del tipo  $aa'$  dalla parola considerata. Chiamiamo *parole ridotte* gli elementi dell'insieme  $F = r(W)$  e, analogamente al caso trattato precedentemente, chiamiamo *lunghezza* di una parola ridotta il naturale  $n$  che indica il numero di lettere che compongono la parola ridotta. L'unica parola ridotta di lunghezza 0 è la *parola vuota*, che indicheremo con  $1_F$ . Definiamo l'operazione di concatenazione su  $W$  analogamente al caso del monoide libero:

$$\begin{aligned} * : W \times W &\rightarrow W \\ w_1 * w_2 &\mapsto w_1 w_2 \end{aligned} ;$$

si dimostra, esattamente come nel caso precedente, che  $*$  è associativa. Definiamo ora un'operazione binaria su  $F$ :

$$\begin{aligned} \otimes : F \times F &\rightarrow F \\ w_1 \otimes w_2 &\mapsto r(w_1 * w_2) \end{aligned} ;$$

è immediato verificare che tale operazione è ben definita. Mostriamo che tale operazione dota  $F$  della struttura di *gruppo*:

1.  $\otimes$  è associativa: infatti, per ogni  $w_1, w_2, w_3 \in F$ , si ha  $(w_1 \otimes w_2) \otimes w_3 = r(r(w_1 * w_2) * w_3) = r(w_1 * w_2 * w_3) = r(w_1 * r(w_2 * w_3)) = w_1 \otimes (w_2 \otimes w_3)$ ;
2.  $1_F$  è evidentemente l'elemento neutro di  $\otimes$ ;
3. sia  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  una parola ridotta. Allora la parola  $\sigma'_n \dots \sigma'_1$  è chiaramente una parola ridotta (non lo è se e solo se, per qualche  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  si ha che  $\sigma'_i = \sigma_{i+1}$ ; ma in tal caso nemmeno  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  sarebbe una parola ridotta); inoltre,  $(\sigma_1 \dots \sigma_n) \otimes (\sigma'_n \dots \sigma'_1) = r(\sigma_1 \dots \sigma_n \sigma'_n \dots \sigma'_1) = 1_F$ . Ne consegue che  $\sigma'_n \dots \sigma'_1$  è l'inversa di  $\sigma_1 \dots \sigma_n$ . Inoltre, se  $\sigma$  è una lettera, allora  $\sigma'$  è il suo inverso in  $(F, \otimes)$ .

**Definizione 1.1.9.** Il gruppo  $(F, \otimes)$  viene detto *gruppo libero* su  $S$ . Si dirà inoltre che  $F$  è *generato da  $S$* . La cardinalità di  $S$  viene detta *rango* del gruppo libero  $F$ .

*Osservazione 1.1.10.* Se  $F$  è il gruppo libero generato da un insieme  $S$ , allora discende direttamente dalla definizione che *ogni* elemento di  $F$  diverso da  $1_F$  ha ordine infinito.

**Teorema 1.1.11.** *Se  $S_1$  è un insieme equipotente ad  $S_2$ , allora, detti  $F_1$  e  $F_2$  i gruppi liberi generati rispettivamente da  $S_1$  e  $S_2$ , allora  $F_1$  e  $F_2$  sono isomorfi.*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che sono definiti implicitamente degli insiemi  $S'_1$  e  $S'_2$ , equipotenti e disgiunti rispettivamente a  $S_1$  e  $S_2$ , e delle bigezioni:

$$f_1 : S_1 \rightarrow S'_1 \quad , \quad f_2 : S_2 \rightarrow S'_2 ;$$

per entrambe adottiamo la seguente convenzione tipografica: se  $x \in S_i$ , allora  $f_i(x) = x'$ , e se  $x \in S'_i$ , allora  $f_i^{-1}(x) = x'$  ( $i = 1, 2$ ). Ne consegue che, per ogni

$x \in S_i \cup S'_i$ , è da intendersi che  $(x')' = x$ . Definiamo una bigezione  $\alpha : S_1 \rightarrow S_2$ , e sia  $\beta : S'_1 \rightarrow S'_2$  la bigezione definita in questo modo: se, dato  $x_1 \in S_1$ , si ha  $\alpha(x_1) = x_2$ , allora  $\beta(x'_1) = x'_2$ . Definiamo ora la seguente bigezione:

$$\begin{aligned} \phi : S_1 \cup S'_1 &\rightarrow S_2 \cup S'_2 \\ s &\mapsto \alpha(s) && \text{se } s \in S_1 \text{ .} \\ s &\mapsto \beta(s) && \text{se } s \in S'_1 \end{aligned}$$

Costruiamo un isomorfismo di gruppi tra  $F_1$  ed  $F_2$  indotto da  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \psi : F_1 &\rightarrow F_2 \\ \sigma_1 \dots \sigma_n &\mapsto \phi(\sigma_1) \dots \phi(\sigma_n) && \text{se } n > 0 \text{ ;} \\ 1_{F_1} &\mapsto 1_{F_2} && \text{se } n = 0 \end{aligned}$$

prima di verificare che si tratta di un isomorfismo, dobbiamo verificare che la funzione è ben definita, ovvero che, se  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  è una parola ridotta di  $F_1$ , allora  $\phi(\sigma_1) \dots \phi(\sigma_n)$  è una parola ridotta di  $F_2$ . A tale scopo notiamo che se  $\phi(x_1) = x_2$ , allora  $\phi(x'_1) = x'_2 = \phi(x_1)'$ . Ora, supponiamo per assurdo che, per qualche  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  si abbia  $\phi(\sigma_k) = \phi(\sigma_{k+1})'$ , ovvero che  $\phi(\sigma_1) \dots \phi(\sigma_n)$  non sia ridotta: allora si avrebbe  $\phi(\sigma_k) = \phi(\sigma'_{k+1})$  e quindi  $\sigma_k = \sigma'_{k+1}$ , il che è assurdo perchè per ipotesi  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  è ridotta. Verifichiamo che si tratta effettivamente di un isomorfismo:

1.  $\psi$  è un omomorfismo di gruppi: infatti dette  $w_1 = \sigma_1 \dots \sigma_n$  e  $w_2 = \rho_1 \dots \rho_m$  parole ridotte di  $F_1$  di lunghezza, rispettivamente,  $n$  ed  $m$ , si ha  $\psi(w_1 \otimes w_2) = r(\phi(\sigma_1) \dots \phi(\sigma_n) \phi(\rho_1) \dots \phi(\rho_m)) = \psi(w_1) \otimes \psi(w_2)$ ; inoltre, per definizione,  $\psi(1_{F_1}) = 1_{F_2}$ .
2.  $\psi$  è invertibile: difatti, come subito si verifica, l'applicazione

$$\begin{aligned} \psi' : F_2 &\rightarrow F_1 \\ \rho_1 \dots \rho_n &\mapsto \phi^{-1}(\rho_1) \dots \phi^{-1}(\rho_n) && \text{se } n > 0 \\ 1_{F_2} &\mapsto 1_{F_1} && \text{se } n = 0 \end{aligned}$$

è un'inversa completa di  $\psi$ .

□

**Corollario 1.1.12.** *Due gruppi liberi sono isomorfi se e solo se hanno lo stesso rango.*

**Definizione 1.1.13.** Sia  $G$  un gruppo. Se  $G$  è isomorfo ad un gruppo libero  $F$  generato da un insieme  $S$ , viene detto anch'esso *libero*. Chiameremo *rango* di  $G$  la cardinalità di  $S$ .

**Proposizione 1.1.14.** *Sia  $(G, \cdot)$  un gruppo.  $(G, \cdot)$  è un gruppo libero se e solo se esiste un sottoinsieme  $S = \{\sigma_i\}_{i \in I}$  di elementi di  $G$  non contenente  $1_G$  e tale che:*

1. l'insieme  $S^{-1} = \{s^{-1} | s \in S\}$  è disgiunto dall'insieme  $S$ ;
2. ogni elemento di  $G$  diverso da  $1_G$  può essere espresso in modo essenzialmente unico (a meno di coppie del tipo  $x \cdot x^{-1}$ ) come moltiplicazione di un numero finito di elementi di  $S \cup S^{-1}$ ;

in tal caso, il rango di  $G$  è  $\#S$ .

*Dimostrazione.* La condizione necessaria è banale a partire dalla definizione di gruppo libero. Mostriamo la condizione sufficiente. A partire dall'insieme  $S$ , possiamo costruire il gruppo libero  $(F, \otimes)$  delle parole ridotte formate da lettere di  $S \cup S^{-1}$ , richiedendo che  $(\forall x \in S)(x' := x^{-1})$ :  $F$  è quindi l'insieme delle parole ridotte del tipo  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  ( $\sigma_i \in S \cup S^{-1}, n \in \mathbb{N}$ ). Mostriamo che  $G$  e  $F$  sono isomorfi. Dall'ipotesi (2), ogni  $s \in G$  può essere espresso in modo essenzialmente unico in questo modo:  $s = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n$ , per opportuni  $\sigma_i \in S \cup S^{-1}$ . Ne consegue che la seguente funzione:

$$\psi : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & F \\ \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n & \mapsto & r(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n) \end{array} ,$$

è ben definita. Mostriamo ora che si tratta di un isomorfismo:

1. per l'ipotesi (2), presi  $g, h \in G$  diversi da  $1_G$ , si può scrivere  $g = \sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n$  e  $h = \sigma_{n+1} \cdot \dots \cdot \sigma_m$  per opportuni  $\sigma_i \in S$  tali che  $(\forall i \in \{1, \dots, n-1\})(\sigma_i \neq \sigma_{i+1}^{-1})$  e  $(\forall j \in \{n+1, \dots, m-1\})(\sigma_j \neq \sigma_{j+1}^{-1})$ . Allora,  $\psi(g \cdot h) = \psi(\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_m) = r(\sigma_1 \dots \sigma_m) = (\sigma_1 \dots \sigma_n) \otimes (\sigma_{n+1} \dots \sigma_m) = \psi(g) \otimes \psi(h)$ , e questo prova che  $\psi$  è un omomorfismo;
2.  $\psi$  è chiaramente suriettiva; inoltre, essa è anche iniettiva (una parola ridotta può essere immagine di un solo elemento di  $G$ , per l'ipotesi (2));

ne consegue che  $G$  è un gruppo libero, ed inoltre ha rango  $\#S$  in quanto  $\#S$  è proprio il rango di  $F$ . □

*Osservazione 1.1.15.* Se il rango del gruppo libero  $F$  è maggiore di 1, allora  $F$  non è un gruppo abeliano, ed inoltre non esistono due elementi diversi da  $1_F$  che commutino: difatti, se ad esempio  $w_1, w_2 \in F$  commutassero, allora ci sarebbero almeno 2 modi distinti per scrivere la parola  $w_1 \otimes w_2$ .

**Esempio 1.1.16.** Il gruppo  $(\mathbb{R}, +)$  non è un gruppo libero: difatti, non esiste un insieme di generatori finito di  $\mathbb{R}$ , e quindi, data la commutatività dell'addizione tra numeri reali, per l'osservazione precedente,  $(\mathbb{R}, +)$  non può essere libero.

**Esempio 1.1.17.** Il gruppo  $(\mathbb{Z}, +)$  è un gruppo libero di rango 1. Difatti, detto  $S = \{a\}$  e  $S' = \{a'\}$ , e detto  $F$  il gruppo libero generato da  $S$ , si verifica facilmente che la seguente applicazione  $f : \mathbb{Z} \rightarrow F$ :

$$f(n) = \begin{cases} \underbrace{a \dots a}_{n \text{ volte}} & \text{se } n > 0 \\ \underbrace{a' \dots a'}_{-n \text{ volte}} & \text{se } n < 0 \\ 1_F & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

è un isomorfismo di gruppi. Ne consegue che ogni gruppo di rango 1 è isomorfo a  $(\mathbb{Z}, +)$ , e questo è l'unico gruppo libero che sia anche abeliano.

## 1.2 Teoria della Misura

**Definizione 1.2.1.** Sia  $X$  un insieme. Una famiglia  $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$  di sottoinsiemi di  $X$  si dice *algebra* su  $X$  se soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\emptyset \in \Sigma$ ;
2. (chiusura rispetto al passaggio al complementare) se  $S \in \Sigma$ , allora  $S^C \in \Sigma$ ;
3. (chiusura rispetto all'unione) se  $S_1, S_2 \in \Sigma$ , allora  $S_1 \cup S_2 \in \Sigma$ .

*Osservazione 1.2.2.* Si noti che, dalle proprietà (2) e (3),  $\Sigma$  è chiusa rispetto all'intersezione: difatti, per ogni  $S_1, S_2 \in \Sigma$ , si ha  $S_1 \cap S_2 = (S_1^C \cup S_2^C)^C$  per le formule di De Morgan.

**Definizione 1.2.3.** Sia  $X$  un insieme. Una famiglia  $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(X)$  di sottoinsiemi di  $X$  si dice  *$\sigma$ -algebra* su  $X$  se soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\emptyset \in \Sigma$ ;
2. (chiusura rispetto al passaggio al complementare) se  $S \in \Sigma$ , allora  $S^C \in \Sigma$ ;
3. (chiusura rispetto all'unione numerabile) se  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ , allora  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \in \Sigma$ .

*Osservazione 1.2.4.* Si noti che, dalle proprietà (2) e (3),  $\Sigma$  è chiusa rispetto all'intersezione numerabile: difatti, per ogni sottofamiglia numerabile  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \Sigma$ , si ha  $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i = (\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i^C)^C$  per le formule di De Morgan.

*Osservazione 1.2.5.* Chiaramente, se  $\Sigma$  è una  $\sigma$ -algebra su  $X$ , allora  $\Sigma$  è anche un'algebra su  $X$ .

*Osservazione 1.2.6.* Se  $X$  è un insieme,  $\mathcal{P}(X)$  è una  $\sigma$ -algebra su  $X$ .

*Osservazione 1.2.7.* Se  $X$  è un insieme e  $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \mathcal{P}(X)$  sono  $\sigma$ -algebre su  $X$ , allora la loro intersezione è ancora una  $\sigma$ -algebra su  $X$ . Questa proprietà vale anche se intersechiamo infinite  $\sigma$ -algebre.

**Esempio 1.2.8** ( $\sigma$ -algebra di Borel). Sia  $\mathbb{R}^n$  lo spazio Euclideo  $n$ -dimensionale. La  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , detta  $\sigma$ -algebra di Borel su  $\mathbb{R}^n$ , si definisce come la più piccola  $\sigma$ -algebra contenente gli aperti di  $\mathbb{R}^n$  (rispetto alla topologia Euclidea), ovvero come l'intersezione di tutte le  $\sigma$ -algebre contenenti gli aperti di  $\mathbb{R}^n$ . La  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  è ben definita in quanto l'intersezione di una famiglia arbitraria di  $\sigma$ -algebre su  $\mathbb{R}^n$  è ancora una  $\sigma$ -algebra su  $\mathbb{R}^n$ , ed inoltre esiste almeno una  $\sigma$ -algebra su  $\mathbb{R}^n$  contenente gli aperti di  $\mathbb{R}^n$  (ad esempio,  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ ). Elenchiamo alcune proprietà importanti di questa  $\sigma$ -algebra:

- tutti i punti di  $\mathbb{R}^n$  appartengono a  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ;
- tutti i chiusi di  $\mathbb{R}^n$  appartengono a  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ;
- se  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  è una funzione continua, e  $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ , allora  $f^{-1}(S) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ;
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  non coincide con  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ : nei prossimi capitoli incontreremo alcuni esempi di insiemi non appartenenti alla  $\sigma$ -algebra di Borel.

**Definizione 1.2.9.** Sia  $X$  un insieme, e sia  $\Sigma$  un'algebra su  $X$ . Una funzione  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  è detta *misura finitamente additiva* se soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2. (additività) se  $\{S_1, \dots, S_n\}$  è una famiglia finita di insiemi disgiunti appartenenti a  $\Sigma$ , allora  $\mu(S_1 \cup \dots \cup S_n) = \sum_{i=1}^n \mu(S_i)$ .

La misura  $\mu$  è detta *finita* se  $(\forall S \in \Sigma)(\mu(S) < +\infty)$ . Gli insiemi di  $\Sigma$  vengono detti *misurabili*.

*Osservazione 1.2.10.* Se, ragionevolmente, richiediamo che almeno un insieme  $S \in \Sigma$  abbia misura finita, allora la proprietà (1) è una conseguenza dell'additività: difatti  $\mu(S) = \mu(S \cup \emptyset) = \mu(S) + \mu(\emptyset)$ , da cui  $\mu(\emptyset) = 0$ .

**Definizione 1.2.11.** Sia  $X$  un insieme, e sia  $\Sigma$  una  $\sigma$ -algebra su  $X$ . Una funzione  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  è detta *misura numerabilmente additiva*, o più semplicemente *misura*, se soddisfa le seguenti proprietà:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2. (additività numerabile) se  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  è una famiglia numerabile di insiemi disgiunti appartenenti a  $\Sigma$ , allora  $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(S_i)$ .

La misura  $\mu$  è detta *finita* se  $(\forall S \in \Sigma)(\mu(S) < +\infty)$ . Gli insiemi di  $\Sigma$  vengono detti *misurabili*.

*Osservazione 1.2.12.* Se, ragionevolmente, richiediamo che almeno un insieme  $S \in \Sigma$  abbia misura finita, allora la proprietà (1) è una conseguenza dell'additività: difatti  $\mu(S) = \mu(S \cup \emptyset) = \mu(S) + \mu(\emptyset)$ , da cui  $\mu(\emptyset) = 0$ .

**Proposizione 1.2.13.** Sia  $X$  un insieme e  $\Sigma$  un'algebra su  $X$ . Sia  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  una misura. Valgono le seguenti proprietà:

- (monotonia) se  $A, B \in \Sigma$  e  $A \subseteq B$ , allora  $\mu(A) \leq \mu(B)$ ;
- (sottrattività condizionata) se  $A, B \in \Sigma$ ,  $A \subseteq B$  e  $\mu(B) < +\infty$ , allora  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ ;
- (subadditività) se  $A, B \in \Sigma$ , allora  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ ;

se, inoltre,  $\Sigma$  è anche una  $\sigma$ -algebra su  $X$  e  $\mu$  è anche una misura, vale la seguente proprietà:

- (subadditività numerabile) se  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ , allora  $\mu(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(S_i)$ ;

*Dimostrazione.* Dimostriamo le proprietà punto per punto:

- (monotonia) possiamo scrivere  $B = (B \setminus A) \cup A$ , da cui  $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$  per l'additività; ne consegue che  $\mu(A) \leq \mu(B)$ ;

- (sottrattività condizionata) possiamo scrivere  $B = (B \setminus A) \cup A$ , da cui  $\mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$ ; dato che  $B$  ha misura finita, anche  $A$  ha misura finita per la proprietà di monotonia; ne consegue che  $\mu(B) - \mu(A)$  è finito, e dall'identità appena ricavata, si ottiene  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ ;
- (subadditività) possiamo scrivere  $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ ; allora  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$ ; dalla monotonia si ha  $\mu(B \setminus A) \leq \mu(B)$ , da cui  $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$ ;
- (subadditività numerabile) si può facilmente adattare la dimostrazione della subadditività finita al caso numerabile;

□

## Misura di Lebesgue

Consideriamo lo spazio Euclideo  $\mathbb{R}^n$ :

**Definizione 1.2.14.** Un insieme  $R$  definito come prodotto cartesiano di  $n$  intervalli di  $\mathbb{R}$  si dice  *$n$ -rettangolo*.

**Definizione 1.2.15.** Se  $R$  è il prodotto cartesiano di  $n$  intervalli di estremi, rispettivamente,  $a_i$  e  $b_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), il *volume elementare* di  $R$  sarà definito come

$$\text{vol}(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

*Osservazione 1.2.16.* Come evidente, il concetto di volume elementare di un  $n$ -rettangolo generalizza quello di area di un rettangolo (nel piano) o di volume di un parallelepipedo retto (nello spazio).

*Osservazione 1.2.17.* Il volume elementare di un  $n$ -rettangolo  $R$  è finito se e solo se  $R$  è limitato, il che equivale a richiedere che sia prodotto cartesiano di  $n$  intervalli limitati di  $\mathbb{R}$ .

Il nostro obiettivo è mostrare che esiste una  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{L}$  su  $\mathbb{R}^n$ , contenente la  $\sigma$ -algebra di Borel su  $\mathbb{R}^n$ , ed una misura  $\mu : \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$  tale che, se  $R$  è un  $n$ -rettangolo di  $\mathbb{R}^n$ , allora  $\mu(R)$  coincide con il volume elementare di  $R$ . Chiameremo *misura di Lebesgue* la misura  $\mu$ . Nel seguito mostreremo un modo per definire la misura di Lebesgue.

**Definizione 1.2.18.** Sia  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Definiamo *misura esterna di Lebesgue* di  $E$  la seguente quantità:

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \text{vol}(R_k) \mid (R_k \text{ è un } n\text{-rettangolo}) \wedge (E \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k) \right\}.$$

La funzione  $\mu^*$  è definita per ogni sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  ed è non negativa, per la non negatività del volume elementare. Inoltre, essa coincide con il volume elementare sugli  $n$ -rettangoli. Tuttavia, essa *non* è una misura (lo dimostreremo nel Capitolo 3); in ogni caso, è facile verificare che essa possiede le seguenti proprietà, che tutte le misure possiedono:

1.  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ;
2. (monotonia) dati  $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $A \subseteq B$ , allora  $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ;
3. (subaddittività numerabile) per ogni famiglia numerabile  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ , si ha  $\mu^*(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(S_i)$ .

Costruiamo la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{L}$ :

**Definizione 1.2.19** (Carathéodory). Un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  si dirà *misurabile secondo Lebesgue* se per ogni insieme  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  si ha:

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C).$$

Chiameremo  $\mathcal{L}$  l'insieme dei sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  misurabili secondo Lebesgue.

**Teorema 1.2.20.**  ${}^2\mathcal{L}$  è una  $\sigma$ -algebra su  $\mathbb{R}^n$ , e la restrizione di  $\mu^*$  a  $\mathcal{L}$  è una misura.

**Definizione 1.2.21.** La misura  $\mu : \mathcal{L} \rightarrow [0, +\infty]$  ottenuta come restrizione di  $\mu^*$  a  $\mathcal{L}$  si dice *misura di Lebesgue*.

Citiamo, senza dimostrarle, alcune tra le più importanti proprietà della misura di Lebesgue:

- gli insiemi della classe di Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  sono misurabili secondo Lebesgue;
- la misura di Lebesgue è l'*unica* misura che coincide con il volume elementare sugli  $n$ -rettangoli;
- la misura di Lebesgue coincide con la misura di Jordan sugli insiemi Jordan-misurabili (e quindi tutti gli insiemi finiti o numerabili hanno misura nulla);
- la misura di Lebesgue è invariante per isometrie;
- ogni sottoinsieme di un insieme di misura nulla è misurabile (proprietà di completezza);
- se si assume l'Assioma di Scelta, esistono insiemi non misurabili secondo Lebesgue (lo vedremo nel Capitolo 3).

---

<sup>2</sup>Per una dimostrazione di questo teorema si veda [RUD], Teorema 2.20.

## Capitolo 2

# Insiemi paradossali

In questo capitolo, ci occuperemo di definire la struttura formale sulla quale si basa l'intera tesi: le azioni di un gruppo  $G$  su un insieme  $X$ , la paradossalità di  $X$  o di un suo sottoinsieme rispetto all'azione di  $G$  su  $X$ , ed il ruolo di  $G$  e delle sue proprietà astratte nell'esistenza di sottoinsiemi paradossali di  $X$ .

### 2.1 Definizioni preliminari

#### 2.1.1 Azioni di un gruppo su un insieme

**Definizione 2.1.1.** Sia  $X$  un insieme, e sia  $G$  un gruppo: un'azione sinistra di  $G$  su  $X$  è una legge

$$\begin{aligned} T : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto T(g, x) \end{aligned}$$

tale che valgano le seguenti proprietà:

1.  $(\forall g, h \in G)(T(g, T(h, x)) = T(gh, x))$ ;
2.  $(\forall x \in X)(T(1, x) = x)$ .

Sottintendendo la scelta dell'azione, indicheremo brevemente  $T(g, x)$  con  $g \cdot x$ . Con questa terminologia, le due proprietà enunciate in precedenza assumono la forma più elegante:

1.  $(\forall g, h \in G)(g \cdot (h \cdot x) = gh \cdot x)$ ;
2.  $(\forall x \in X)(1 \cdot x = x)$ .

Un insieme  $X$  sul quale agisce un gruppo  $G$  viene anche detto  $G$ -insieme.

Analogamente, può essere definita un'azione destra

$$\begin{aligned} T : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto T(g, x) \end{aligned}$$

scambiando la 1. con la

$$1. (\forall g, h \in G)(T(g, T(h, x)) = T(hg, x))$$

Nel seguito ci riferiremo per semplicità, se non precisato diversamente, ad azioni sinistre.

*Osservazione 2.1.2.* Chiaramente, se  $G$  agisce su  $X$ , qualsiasi suo sottogruppo agisce su  $X$ . Inoltre, se un sottoinsieme  $S$  di  $X$  è tale che  $(\forall g \in G)(g \cdot S \subseteq S)$ , allora la restrizione della  $T$  a  $S$

$$T|_S : G \times S \rightarrow S \\ (g, x) \mapsto g \cdot x$$

è ben definita, e quindi  $G$  agisce su  $S$ .

Ogni elemento di  $G$  induce una permutazione dell'insieme  $X$ : difatti, la funzione

$$T_g : X \rightarrow X \\ x \mapsto g \cdot x$$

è una bigezione da  $X$  in  $X$ . Questo può essere agevolmente verificato mostrando che  $T_g$  e  $T_{g^{-1}}$  sono una l'inversa dell'altra: infatti, dagli assiomi di azione di un gruppo, si ha

- $(\forall x \in X)((T_g \circ T_{g^{-1}})(x) = g \cdot (g^{-1} \cdot x) = (gg^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x = x)$ ;
- $(\forall x \in X)((T_{g^{-1}} \circ T_g)(x) = g^{-1} \cdot (g \cdot x) = (g^{-1}g) \cdot x = 1 \cdot x = x)$ .

L'insieme  $G' := \{T_g | g \in G\}$  delle permutazioni di  $X$  indotte dagli elementi di  $G$ , è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni: difatti,  $G'$  è un sottoinsieme del gruppo  $\text{Perm}(X)$  delle permutazioni di  $X$ , ed inoltre

$$(\forall T_g, T_h \in G')(T_g^{-1} \circ T_h = T_{g^{-1}} \circ T_h = T_{g^{-1}h} \in G')$$

e questo prova che  $G'$  è un sottogruppo di  $\text{Perm}(X)$ .

**Esempio 2.1.3.** Sia  $G_2$  il gruppo delle isometrie del piano. Allora  $G_2$  agisce in modo naturale sull'insieme dei punti del piano, sull'insieme delle rette del piano, sull'insieme dei triangoli del piano e così via.

**Esempio 2.1.4.** Sia  $X = \{1, \dots, n\}$  un insieme di  $n$  elementi. Allora il gruppo simmetrico  $S_n$  agisce in maniera naturale su  $X$  mediante l'azione

$$T : S_n \times X \rightarrow X \\ (\sigma, x) \mapsto \sigma(x) ;$$

difatti

1.  $(\forall x \in X)(1 \cdot x = \text{Id}(x) = x)$ ;
2.  $(\forall \sigma, \tau \in S_n)(\sigma \cdot (\tau \cdot x) = \sigma(\tau(x)) = (\sigma\tau)(x))$ ;

dove  $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$ .

Sia  $G$  un gruppo che agisce sull'insieme  $X$ . La funzione

$$\begin{aligned} \varphi: G &\rightarrow \text{Perm}(X) \\ g &\mapsto T_g \end{aligned}$$

è un omomorfismo di gruppi: difatti, per le proprietà dell'azione,  $\varphi(gh) = T_{gh} = T_g \circ T_h = \varphi(g) \circ \varphi(h)$ . Ora, dalla definizione di  $\varphi$  si ha  $\varphi(G) = G'$ ; se  $\varphi$  fosse iniettiva, allora  $G$  sarebbe isomorfo a  $G'$ ; tuttavia, potrebbe capitare che, per qualche  $g, h \in G, g \neq h$ , sia  $T_g = T_h$ . Questo è equivalente a dire che esiste un elemento  $l$  di  $G$  diverso dall'elemento neutro, tale che  $(\forall x \in X)(l \cdot x = x)$ : infatti, se  $(\forall x \in X)(g \cdot x = h \cdot x)$  allora  $(\forall x \in X)((h^{-1}g) \cdot x = x)$ , e, viceversa, se esistesse  $l \neq 1$  tale che  $(\forall x \in X)(l \cdot x = x)$ , allora sarebbe  $T_1 = T_l = \text{Id}(X)$ .

**Definizione 2.1.5.** Un'azione di un gruppo  $G$  su un insieme  $X$  si dice *fedele* se  $(\forall g \in G)((g \neq 1) \Rightarrow (\exists x \in X|g \cdot x \neq x))$ ; si dice anche che  $G$  *agisce fedelmente* su  $X$ .

**Proposizione 2.1.6.** *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *L'azione di  $G$  su  $X$  è fedele;*
2.  $(\forall g, h \in G)((g \neq h) \Rightarrow (\exists x \in X|g \cdot x \neq h \cdot x))$ ;
3.  $\varphi$  è iniettiva.

*Dimostrazione.* (2  $\Leftrightarrow$  3): per ogni coppia di elementi  $g, h$  distinti di  $G$ , esiste un elemento  $x$  di  $X$  in cui  $g \cdot x \neq h \cdot x$ : ne consegue che se  $g \neq h$ , allora  $T_g \neq T_h$  e quindi  $\varphi$  è iniettiva. Viceversa, se  $\varphi$  è iniettiva, allora  $g \neq h \Rightarrow T_g \neq T_h \Rightarrow (\exists x \in X \text{ t.c. } g \cdot x \neq h \cdot x)$ . (1  $\Leftrightarrow$  3): sia l'azione  $T$  fedele, e supponiamo che esistano  $g, h \in G$  tali che  $T_g = T_h$ : allora  $(\forall x \in X)(g \cdot x = h \cdot x)$ , il che implica  $(\forall x \in X)((h^{-1}g) \cdot x = x)$ . Allora, dato che l'azione è fedele,  $h^{-1}g = 1$  e quindi  $g = h$ , dunque  $\varphi$  è iniettiva. Viceversa, supponiamo che  $\varphi$  sia iniettiva: allora certamente, per ogni elemento di  $G$ ,  $((\forall x \in X)(g \cdot x = x)) \Rightarrow (g = 1)$ : ne consegue che  $(\forall g \in G)((g \neq 1) \Rightarrow (\exists x \in X|g \cdot x \neq x))$  e quindi l'azione è fedele.  $\square$

*Osservazione 2.1.7.* Se  $\varphi$  è iniettiva, allora in particolare è un isomorfismo tra  $G$  e la sua immagine, ovvero  $G' = \{T_g|g \in G\}$ : ne consegue che, tutte le volte che l'azione di  $G$  su  $X$  è fedele, allora  $G$  è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo  $\text{Perm}(X)$  delle permutazioni di  $X$ , e può essere quindi identificato ad esso.

**Esempio 2.1.8.** Questo esempio è una generalizzazione dell'Esempio 2.1.4. Sia  $X$  un insieme: un qualsiasi sottogruppo  $G$  del gruppo  $\text{Perm}(X)$  delle permutazioni di  $X$  agisce sull'insieme  $X$  mediante l'azione

$$\begin{aligned} T: G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

difatti:

1. l'identità di  $\text{Perm}(X)$  è l'applicazione identica da  $X$  a  $X$ : ne consegue che  $(\forall x \in X)(1 \cdot x = \text{Id}(x) = x)$ ;

2. siano  $f$  e  $g$  due permutazioni di  $X$ ; allora  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

Inoltre, l'azione è fedele: infatti se  $g \in \text{Perm}(X)$  e  $(\forall x \in X)(g(x) = x)$ , allora  $g = \text{Id}(X)$ . Con la Proposizione 2.1.6 abbiamo mostrato che se l'azione è fedele, allora il gruppo è isomorfo ad un gruppo di permutazioni di  $X$ : questo esempio mostra che vale anche il viceversa. Dunque  $G$  è un gruppo che agisce fedelmente sull'insieme  $X$  se e solo se  $G$  è isomorfo ad un sottogruppo di  $\text{Perm}(X)$ .

Spesso si è interessati ad azioni fedeli: difatti, in molti casi, l'interesse delle azioni di gruppi su insiemi è dovuto al modo in cui le permutazioni indotte trasformano l'insieme, e quindi è sufficiente considerare il gruppo delle permutazioni indotte, piuttosto che tutto il gruppo originale. Più precisamente, se  $G$  agisce su  $X$  tramite l'azione  $T$ , allora l'azione  $T$  induce in modo naturale un'azione  $T'$  del gruppo  $G'$  delle permutazioni indotte, su  $X$ . Consideriamo l'insieme  $H = \{g \in G \mid T_g = T_1\}$ : si verifica facilmente che

**Lemma 2.1.9.**  $H$  è un sottogruppo normale di  $G$ .

*Dimostrazione.*  $H$  è il nucleo dell'omomorfismo  $\varphi$ : difatti  $\text{Ker}(\varphi) = \{g \in G \mid T_g = \text{Id}(X)\} = H$ .  $\square$

Gli elementi di una generica classe del gruppo quoziente  $G/H$  sono tutti e soli gli elementi di  $G$  che inducono la stessa permutazione di  $X$ . Poiché ad ogni particolare classe di equivalenza corrisponde un'unica permutazione indotta, possiamo definire un'azione di  $G/H$  su  $X$  indotta dall'azione di  $G$  su  $X$ :

$$\begin{aligned} T' : G/H \times X &\rightarrow X \\ (gH, x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

l'azione sopra scritta è ben definita grazie al fatto che ogni elemento del laterale  $gH$  induce la stessa permutazione di  $X$  (e quindi  $(\forall p \in gH)(\forall x \in X)(p \cdot x = g \cdot x)$ ). Inoltre, stavolta l'azione è anche fedele: infatti, per il primo Teorema di isomorfismo,  $G/H \cong G'$ , e i due gruppi possono quindi essere identificati. Dato che  $(\forall g \in G)(T_g = T'_{gH})$ , allora l'azione  $T$  di  $G$  su  $X$  "corrisponde", per quanto riguarda le permutazioni indotte, all'azione  $T'$  di  $G'$  su  $X$ .

**Definizione 2.1.10.** Sia  $G$  un gruppo che agisce su un insieme  $X$ . Si definisce *orbita* dell'elemento  $x \in X$  l'insieme

$$O_x := \{g \cdot x \mid g \in G\}. \quad (2.1.2)$$

La suddivisione in orbite ci consente di comprendere meglio in che modo il gruppo agisce su  $X$ . Difatti, le permutazioni indotte dagli elementi di  $G$  mandano elementi di un'orbita in elementi della stessa: se  $y \in O_x$ , allora esiste  $h \in G$  tale che  $y = h \cdot x$ , quindi  $(\forall g \in G)(g \cdot y = g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x)$  e allora  $g \cdot y \in O_x$ . In altre parole,  $G$  agisce separatamente su ogni orbita.

**Esempio 2.1.11.** Come già fatto notare, il gruppo  $G_2$  delle isometrie del piano agisce in maniera naturale sull'insieme dei triangoli del piano. Sia  $\Delta$  un triangolo del piano: allora  $O_\Delta$  corrisponde esattamente ai triangoli ottenibili da  $\Delta$  tramite applicazione successiva di un numero finito di isometrie del piano. Si tratta cioè dell'insieme dei triangoli del piano *congruenti* a  $\Delta$ .

Notiamo che l'insieme delle orbite di elementi di  $X$  costituisce una partizione di  $X$ . Al fine di mostrare questo fatto, mostriamo che la relazione su  $X$

$$x \equiv y \Leftrightarrow x \in O_y$$

è una relazione di equivalenza:

1. ovviamente  $(\forall x \in X)(x \in O_x)$ : difatti,  $x = 1 \cdot x$ . La relazione è *riflessiva*;
2. se  $x \in O_y$ , allora per qualche  $g \in G$  si ha  $x = g \cdot y$ : ne consegue che  $y = g^{-1} \cdot x$  e quindi  $y \in O_x$ . La relazione è *simmetrica*;
3. se  $x \in O_y$  e  $y \in O_z$ , allora per qualche  $g, h \in G$  si ha  $x = g \cdot y$  e  $y = h \cdot z$ : ne consegue che  $x = (gh) \cdot z$  e quindi  $x \in O_z$ . La relazione è *transitiva*.

Come sono fatte le orbite  $O_x$ ?

**Definizione 2.1.12.** Sia  $x \in X$ : l'insieme  $H_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$  è detto *stabilizzatore* di  $x$ .

In sostanza, come fa intuire il nome, lo stabilizzatore di  $x$  è l'insieme degli elementi di  $G$  che inducono una permutazione di  $X$  che lascia fisso  $x$ . Non è difficile mostrare che  $H_x$  è un sottogruppo di  $G$ : difatti, dati  $g, h \in H_x$ , allora  $g \cdot x = g^{-1} \cdot x = h \cdot x = h^{-1} \cdot x = x$ , e dunque  $(gh^{-1}) \cdot x = x$ ; ne consegue che  $(g, h \in H_x) \Rightarrow (gh^{-1} \in H_x)$  e quindi  $H_x$  è un sottogruppo di  $G$ .

**Esempio 2.1.13.** Riprendiamo il nostro esempio del gruppo  $G_2$  delle isometrie del piano, che agisce sull'insieme dei triangoli del piano. Sia  $\Delta$  un triangolo equilatero del piano. Lo stabilizzatore di  $\Delta$  è il sottogruppo di  $G_2$  formato da tutte le isometrie del piano che mandano  $\Delta$  in se, ovvero le rotazioni attorno al centro del triangolo di angolo un multiplo di  $\pi/3$ .

In generale gli stabilizzatori non sono sottogruppi normali di  $G$ . Tuttavia, l'insieme quoziente  $G/H_x$  ha comunque notevole importanza: ogni classe di equivalenza  $gH_x$  dell'insieme quoziente  $G/H_x$  contiene precisamente tutti e soli gli elementi di  $G$  che mandano  $x$  nello stesso punto di  $X$ : difatti, se  $g \equiv h \pmod{H_x}$ , allora  $g^{-1}h \in H_x$ , da cui  $g^{-1} \cdot (h \cdot x) = x \Rightarrow g \cdot x = h \cdot x$ ; viceversa, se  $g \cdot x = h \cdot x$  allora  $(g^{-1}h) \cdot x = x$  e quindi  $g^{-1}h \in H_x$ , ovvero  $g \equiv h \pmod{H_x}$ .

**Proposizione 2.1.14.** *Esiste una bigezione naturale  $\phi_x$  tra l'insieme quoziente  $G/H_x$  e l'orbita  $O_x$ ; essa è compatibile con l'azione di  $G$  su  $X$ , ovvero:*

$$\phi_x(ghH_x) = g \cdot \phi_x(hH_x).$$

*Dimostrazione.* Definiamo l'applicazione in questo modo:

$$\phi_x : \begin{array}{ccc} G/H_x & \rightarrow & O_x \\ gH_x & \mapsto & g \cdot x \end{array} ;$$

---

<sup>1</sup>Ora e nel seguito, dove non specificato diversamente, per  $G/H_x$  intenderemo l'insieme delle classi laterali sinistre rispetto ad  $H_x$

essa è ben definita in quanto due elementi  $g, h \in G$  sono equivalenti modulo  $H_x$  se e solo se  $g^{-1}h \in H_x$ , ovvero se e solo se  $g \cdot x = h \cdot x$ ; l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi'_x : O_x &\rightarrow G/H_x \\ g \cdot x &\mapsto gH_x \end{aligned}$$

è anch'essa ben definita per lo stesso motivo, e perchè ogni elemento di  $O_x$  può essere espresso come  $g \cdot x$  per qualche  $g \in G$ : poichè le due applicazioni sono una l'inversa dell'altra, si tratta di bigezioni. Inoltre, per ogni  $g, h \in G$ , si ha che  $\phi_x(ghH_x) = (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x) = g \cdot \phi_x(hH_x)$ .  $\square$

In particolare, se  $H_x = \{1\}$ , allora  $G/H_x \cong G$  ed esiste la bigezione naturale

$$\begin{aligned} \phi_x : G &\rightarrow O_x \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

tra  $G$  e  $O_x$  compatibile con l'azione di gruppo.

**Definizione 2.1.15.** Un'azione di un gruppo  $G$  su un insieme  $X$  si dice *libera* se  $(\forall g \in G)((g \neq 1) \Rightarrow (\forall x \in X)(g \cdot x \neq x))$ , ovvero se per ogni  $g \in G$  diverso da 1,  $T_g$  non fissa alcun punto su  $X$ .

Dato che, in un'azione libera, ogni elemento di  $G$  diverso dall'identità muove almeno un punto di  $X$  (in effetti li muove tutti), allora un'azione libera è anche un'azione fedele.

**Proposizione 2.1.16.** *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. l'azione di  $G$  su  $X$  è libera;
2.  $(\forall x \in X)(\forall g, h \in G)((g \cdot x = h \cdot x) \Rightarrow (g = h))$ ;
3. tutti gli stabilizzatori  $H_x$  sono banali.

*Dimostrazione.*  $(1 \Leftrightarrow 2)$ : se vale la 1, allora, dati due elementi  $g, h \in G$  tali che per qualche  $x \in X$  si abbia  $T_g(x) = T_h(x)$ , si ha  $T_{h^{-1}g}(x) = x$  e quindi  $h^{-1}g = 1$ , da cui  $g = h$ . Viceversa, se vale la 2, ogni  $g$  tale che  $T_g$  fissa almeno un punto è uguale a 1, in quanto  $T_1$  fissa tutti i punti di  $X$ ; ne consegue che l'azione è libera.  $(1 \Leftrightarrow 3)$  se l'azione è libera ogni elemento di  $G$  diverso da 1 induce una permutazione che non fissa alcun punto, e quindi gli stabilizzatori sono tutti banali. Viceversa, se tutti gli stabilizzatori sono banali l'unico elemento che induce una permutazione che fissa qualche punto di  $X$  è l'elemento neutro, e quindi l'azione è libera.  $\square$

**Esempio 2.1.17.** Ogni sottogruppo  $S$  di un gruppo  $G$  agisce su se stesso mediante l'azione naturale

$$\begin{aligned} T : S \times G &\rightarrow G \\ (s, g) &\mapsto sg \end{aligned}$$

detta anche *traslazione a sinistra*. Mostriamo che si tratta di un'azione, e che tale azione in particolare è libera:

1.  $(\forall g \in G)(1g = g)$  (esistenza dell'elemento neutro del gruppo);
2.  $(\forall s, t \in S)(\forall g \in G)((st)g = s(tg))$  (associatività dell'operazione del gruppo);
3. sia  $s$  un elemento di  $S$ : se  $(\exists g \in G)(sg = g)$ , allora moltiplicando a destra per  $g^{-1}$  si ottiene  $s = 1$ , e questo prova che l'azione è libera.

In particolare, l'azione di un gruppo  $G$  su se stesso è libera. Sia  $g \in G$ : allora  $O_g = \{h \in G | (\exists l \in G)(h = lg)\}$ . Dato che ogni altro elemento  $h$  di  $G$  può essere scritto in questo modo:  $h = (hg^{-1})g$ , allora  $O_g = G$  e questo ovviamente vale per ogni elemento di  $G$ . Quando il gruppo è composto da una sola orbita, l'azione si dice *transitiva*. Quando un'azione è sia transitiva sia libera, come in questo caso, allora si dice *regolare*.

### 2.1.2 Insiemi paradossali

**Definizione 2.1.18.** Sia  $G$  un gruppo agente su un insieme  $X$  e sia  $E \subseteq X$  un suo sottoinsieme. L'insieme  $E$  si dice  *$G$ -paradossale*, o *paradossale rispetto a  $G$* , se esistono due interi positivi  $m, n$  e due famiglie  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$  di sottoinsiemi di  $E$  a due a due disgiunti, e due famiglie  $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m$  di elementi di  $G$  tali che

$$E = \bigcup_{i=1}^n g_i \cdot A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j \cdot B_j. \quad (2.1.3)$$

Chiameremo *pezzi* della decomposizione paradossale i sottoinsiemi  $A_i, B_j$ . L'insieme  $\{E, \{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m, \{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m\}$  (o, equivalentemente, l'espressione (2.1.3)) viene detto *decomposizione paradossale* di  $E \subseteq X$ .

*Osservazione 2.1.19.* Abbiamo fatto solo un'ipotesi sui pezzi  $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$  della decomposizione paradossale: che essi siano a due a due disgiunti. Se una decomposizione paradossale come la (2.1.3) esiste, potrebbe comunque accadere che la famiglia  $\{g_i \cdot A_i\}_{i=1}^n$  non sia una partizione di  $E$ . Tuttavia, è comunque possibile modificare agevolmente la decomposizione in modo che lo diventi. Supponiamo, senza perdita di generalità, che esistano solo 2 indici  $k, l \in \{0, \dots, n\}$  tali che si abbia  $g_k \cdot A_k \cap g_l \cdot A_l = C = \emptyset$ . Allora, detto  $S_k = g_k^{-1} \cdot C$ , si consideri l'insieme  $\tilde{A}_k = A_k \setminus S_k$ : si ha  $g_k \cdot A_k \cup g_l \cdot A_l = g_k \cdot \tilde{A}_k \cup g_k \cdot S_k \cup g_l \cdot A_l = g_k \cdot \tilde{A}_k \cup g_l \cdot A_l$  e stavolta  $g_k \cdot \tilde{A}_k \cap g_l \cdot A_l = \emptyset$ . Lo stesso discorso può essere fatto per la famiglia  $\{h_j \cdot B_j\}_{j=1}^m$ . Ne consegue che, se  $X$  è un  $G$ -insieme e  $E$  è un suo sottoinsieme  $G$ -paradossale, allora i pezzi della decomposizione possono essere scelti in modo che le  $\{g_i \cdot A_i\}_{i=1}^n$  e  $\{h_j \cdot B_j\}_{j=1}^m$  costituiscano ognuna una partizione di  $E$ . È vero, ma non altrettanto facile da dimostrare, che i pezzi della decomposizione possono essere scelti in modo che anche la  $\{A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m\}$  costituisca una partizione di  $E$ . Dimosteremo questa asserzione nel Capitolo 4, Corollario 4.1.12. Dalle righe precedenti si può ricavare un'interpretazione intuitiva del concetto di  $G$ -paradossalità: *un sottoinsieme  $E$  di un  $G$ -insieme  $X$  è  $G$ -paradossale quando è possibile partizionare l'insieme  $E$  e successivamente, tramite le permutazioni di  $X$  indotte dagli elementi di  $G$ , ricombinare i pezzi per ricomporre due copie dell'insieme  $E$  originale.*

La seguente proposizione deriva direttamente dalla definizione di insieme  $G$ -paradossale:

**Proposizione 2.1.20.** *Sia  $G$  un gruppo e  $X$  un  $G$ -insieme; sia  $S$  un sottogruppo di  $G$ . Se  $X$  è  $S$ -paradossale, allora  $X$  è  $G$ -paradossale.*

La condizione di paradossalità può essere rilassata, ammettendo che i pezzi della decomposizione paradossale e gli elementi di  $G$  utilizzati nella decomposizione siano un'infinità numerabile:

**Definizione 2.1.21.** Sia  $G$  un gruppo agente su un insieme  $X$ . Sia  $E \subseteq X$  un suo sottoinsieme. L'insieme  $E$  si dice *numerabilmente  $G$ -paradossale*, o  $\mathbb{N}$ -paradossale rispetto a  $G$ , se esistono due famiglie numerabili  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\{B_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  di sottoinsiemi di  $E$  a due a due disgiunti, e due famiglie numerabili  $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  di elementi di  $G$ , tali che

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} g_i \cdot A_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} h_j \cdot B_j. \quad (2.1.4)$$

Estendiamo in modo ovvio l'utilizzo della terminologia definita nel caso della paradossalità finita, al caso della paradossalità numerabile.

La seguente proposizione ci autorizza a considerare solo azioni fedeli (e quindi ad identificare  $G$  con il gruppo  $G'$  delle permutazioni indotte dagli elementi di  $G$ ):

**Proposizione 2.1.22.** *Sia  $X$  un  $G$ -insieme. Sia  $E \subseteq X$ . Allora  $E$  è  $G$ -paradossale se e solo se è  $G'$ -paradossale, dove  $G'$  denota il sottogruppo di  $\text{Perm}(X)$  delle permutazioni indotte dagli elementi di  $G$ , e l'azione è l'azione indotta (2.1.1).*

*Dimostrazione.* Se la decomposizione paradossale di  $E$  è la seguente,

$$E = \bigcup_{i=1}^n g_i \cdot A_i = \bigcup_{j=1}^m h_j \cdot B_j \quad (2.1.5)$$

allora può anche essere scritta così: se  $T_g$  è la permutazione di  $X$  indotta da  $g \in G$ , allora

$$E = \bigcup_{i=1}^n T_{g_i}(A_i) = \bigcup_{j=1}^m T_{h_j}(B_j); \quad (2.1.6)$$

ne consegue che  $E$  è  $G'$ -paradossale. Viceversa, se vale la decomposizione (2.1.6) per qualche  $\{g_i\}_{i=1}^n$  e  $\{h_j\}_{j=1}^m$ , allora vale banalmente anche la (2.1.5), e questo prova che  $E$  è  $G$ -paradossale.  $\square$

Nel seguito, nel contesto degli insiemi e delle decomposizioni paradossali, grazie alla Proposizione 2.1.22, saremo autorizzati ad usare senza ambiguità lo stesso simbolo  $g$  per indicare l'elemento  $g$  del gruppo o la permutazione  $T_g$  da esso indotta: in altre parole, identificheremo  $G$  con  $G'$ . La decomposizione paradossale in (2.1.3) potrà allora essere espressa equivalentemente in questo modo:

$$E = \bigcup_{i=1}^n g_i(A_i) = \bigcup_{j=1}^m h_j(B_j). \quad (2.1.7)$$

## 2.2 Azioni paradossali generiche

### 2.2.1 Bigezioni arbitrarie

Il primo esempio di azione paradossale è legato al concetto di infinito. Il seguente teorema fu dimostrato da Galileo su  $\mathbb{N}$ :

**Teorema 2.2.1.** *Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1.  $\#X = 2 \cdot \#X$ ;
2.  $X$  è paradossale rispetto al gruppo delle sue permutazioni.

*Dimostrazione.*  $(2 \Rightarrow 1)$  siano  $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$  e  $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m$  come nella Definizione 2.1.18; siano  $A = \bigcup A_i$  e  $B = \bigcup B_i$ ; ricordando il contenuto dell'Osservazione 2.1.19, siamo autorizzati a supporre  $A \cup B = X$ ; la funzione  $g : A \rightarrow X$ , definita come incollamento delle restrizioni delle funzioni  $g_i$  agli insiemi  $A_i$ , è una bigezione; analogamente, la funzione  $h : B \rightarrow X$ , definita come incollamento delle restrizioni delle funzioni  $h_i$  agli insiemi  $B_i$ , è una bigezione; poichè  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B = X$ , vale la 1;  $(1 \Rightarrow 2)$  consideriamo le bigezioni  $f : X \rightarrow A$  e  $g : X \rightarrow B$ , con  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \cup B = X$  (la loro esistenza è garantita dalla (1)): chiamiamo  $A_1 = f(A), A_2 = f(B), B_1 = g(A), B_2 = g(B)$ : essi chiaramente costituiscono una partizione di  $X$ , ed ognuno di essi è isomorfo ad  $X$ : ne consegue che esiste una bigezione  $f_1 : X \rightarrow X$  tale che  $f_1|_{A_1} = f|_A$ , in quanto  $B \simeq A_2 \cup B$ ; analogamente, possiamo definire una bigezione  $f_2 : X \rightarrow X$  tale che  $f_2|_{B_1} = f|_B$ , una bigezione  $g_1 : X \rightarrow X$  tale che  $g_1|_{A_1} = g|_A$  ed una bigezione  $g_2 : X \rightarrow X$  tale che  $g_2|_{B_1} = g|_B$ : ma allora  $f_1^{-1}(A_1) = A$ , e analogamente  $f_2^{-1}(A_2) = B$ ; inoltre  $g_1^{-1}(B_1) = A$ , e analogamente  $g_2^{-1}(B_2) = B$ : quindi  $X = f_1^{-1}(A_1) \cup f_2^{-1}(A_2) = g_1^{-1}(B_1) \cup g_2^{-1}(B_2)$ , e questo prova che  $X$  è paradossale.  $\square$

Questo risultato mostra come sia facile trovare esempi di insiemi paradossali: lo sono tutti quelli che soddisfano la proprietà (1). Quali sono questi insiemi? Certamente un insieme che soddisfa la (1) deve essere infinito: ad esempio, è banale mostrare che la proprietà vale per i naturali (sono isomorfi sia all'insieme dei numeri pari, sia a quello dei numeri dispari); non è altrettanto banale mostrare che questa proprietà è valida per *ogni* insieme infinito (è infatti necessario l'utilizzo dell'Assioma di Scelta).

### 2.2.2 Orbite e insiemi paradossali

Gli esempi ottenibili applicando il Teorema 2.2.1 sono solitamente difficili da ottenere costruttivamente: in particolare, ogni volta che abbiamo necessità di utilizzare l'Assioma di Scelta, significa che non siamo in grado di operare tale scelta in modo costruttivo. Inoltre, una permutazione generica di un insieme  $X$  in generale non mantiene alcuna struttura definita su  $X$ . Gli esempi più interessanti e concreti riguardano gli spazi metrici, in particolare gli spazi Euclidei dotati di metrica Euclidea: l'obiettivo principale di questa tesi è appunto ricavare,

e discutere, alcuni esempi notevoli di sottoinsiemi paradossali degli spazi Euclidei, rispetto a gruppi di permutazioni di tali spazi che ne conservino la struttura di spazio metrico: le *isometrie*. In questo paragrafo presenteremo le tecniche fondamentali per ricavare insiemi paradossali<sup>2</sup>, tecniche che utilizzeremo poi nel Capitolo 3 per trovare alcuni paradossi geometrici molto interessanti.

Sia  $G$  un gruppo agente su un insieme  $X$ . Abbiamo già visto nell'Esempio 2.1.17 come  $G$  agisca su se stesso mediante traslazione a sinistra. In questo paragrafo, mostreremo in che modo e sotto quali condizioni la paradossalità di un sottoinsieme di  $G$  (o di  $G$  stesso) possa essere "trasferita" ad un sottoinsieme di  $X$  (o ad  $X$  stesso). Quando parleremo di sottoinsiemi paradossali di  $G$ , è da intendersi che essi siano  $G$ -paradossali rispetto all'azione di traslazione a sinistra.

Nella Proposizione 2.1.14 è stato mostrato che, se lo stabilizzatore  $H_x$  di un elemento  $x \in X$  è banale, ovvero se non ci sono elementi di  $G$  diversi dall'identità che fissano  $x$ , allora esiste una biezione naturale

$$\begin{aligned} \phi_x : G &\rightarrow O_x \\ g &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

tra  $G$  e  $O_x$  compatibile con l'azione di gruppo, ovvero tale che

$$\phi_x(gh) = g \cdot \phi_x(h).$$

Cosa vuol dire che tale biezione è compatibile con l'azione di gruppo? Intuitivamente, possiamo dire che  $G$  agisce su  $O_x$  allo stesso modo con cui agisce su se stesso. In particolare, ci aspettiamo che se un certo sottoinsieme  $E \subseteq G$  è paradossale, allora il sottoinsieme  $\phi_x(E) \subseteq O_x \subseteq X$  sia  $G$ -paradossale. Mostriamo formalmente quello che abbiamo presentato in maniera intuitiva nelle righe precedenti:

**Teorema 2.2.2.** *Sia  $X$  un  $G$ -insieme, e sia  $E \subseteq G$  paradossale. Se esiste un elemento  $x \in X$  tale che non ci siano elementi di  $G$ , diversi dall'identità di  $X$ , che fissino  $x$  (ovvero tale che lo stabilizzatore  $H_x$  di  $x$  sia uguale a  $\{1\}$ ), allora  $X$  ha un sottoinsieme  $G$ -paradossale contenuto in  $O_x$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $E$  il sottoinsieme paradossale di  $G$ : allora, dalla definizione, esistono  $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$  sottoinsiemi a due a due disgiunti di  $E$ , e  $\{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m$  permutazioni  $\in G$ , tali che valga la (2.1.3); vogliamo dimostrare che  $\phi_x(E) = E^x$  è  $G$ -paradossale: si ha  $\phi_x(E) = \phi_x(\bigcup g_i A_i) = \bigcup \phi_x(g_i A_i)$ ; ora,  $\phi_x(g_i A_i) = \{\phi_x(g_i h) | h \in A_i\} = \{g_i(h(x)) | h \in A_i\} = g_i(A_i^x)$ , dove  $A_i^x := \{h(x) | h \in A_i\} \subseteq O_x$ ; dunque  $E^x = \bigcup g_i(A_i^x)$ ; allo stesso modo, definendo  $B_j^x := \{h(x) | h \in B_j\} \subseteq O_x$ , si ha  $E^x = \bigcup h_j(B_j^x)$ . Ci resta da mostrare che gli  $\{A_i^x\}_{i=1}^n, \{B_j^x\}_{j=1}^m$  sono a due a due disgiunti: supponiamo per assurdo che esista un  $y$  tale che  $y = g(x) = h(x)$ , dove  $g, h$  appartengono ognuno a due insiemi distinti appartenenti alla famiglia di insiemi  $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$ ; allora  $g \equiv h \pmod{H_x}$ , e dunque dato che  $H_x = \{1\}$ ,  $g = h$ ; ma questo è assurdo, in quanto per ipotesi gli  $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$  sono disgiunti. Ne consegue che gli  $\{A_i^x\}_{i=1}^n, \{B_j^x\}_{j=1}^m$  assieme alle funzioni  $\{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m$ , costituiscono una decomposizione paradossale di  $E^x$   $\square$

<sup>2</sup>Tutti i risultati relativi alla paradossalità contenuti in questo paragrafo possono essere agevolmente riportati al caso della  $\mathbb{N}$ -paradossalità.

Riguardando la dimostrazione del Teorema 2.2.2, ci accorgiamo che l'ipotesi " $H_x = \{1\}$  per qualche  $x \in X$ " è stata utilizzata solo per dimostrare che due qualsiasi permutazioni appartenenti, rispettivamente, a due pezzi distinti della decomposizione paradossale di  $E \subseteq G$ , non coincidono in  $x$ . Allora possiamo rendere più generale il Teorema, richiedendo solo che le permutazioni appartenenti ad  $E$  non fissino un certo punto  $x \in X$ :

**Corollario 2.2.3.** *Sia  $X$  un  $G$ -insieme, e sia  $E \subseteq G$  paradossale. Supponiamo che esista  $x \in X$  tale che due qualsiasi permutazioni appartenenti a due pezzi distinti della decomposizione di  $E$  non coincidano in  $x$ : allora  $X$  ha un sottoinsieme  $G$ -paradossale contenuto in  $O_x$ .*

Il seguente corollario è una immediata applicazione del Teorema 2.2.2:

**Corollario 2.2.4.** *Sia  $X$  un  $G$ -insieme: se  $G$  è paradossale e per qualche  $x \in X$  si ha  $H_x = \{1\}$ , allora  $O_x$  è  $G$ -paradossale.*

*Osservazione 2.2.5.* Naturalmente, se  $H_x = \{1\}$  e  $y \in O_x$ , allora anche  $H_y = \{1\}$ ; tuttavia, ovviamente la  $\phi_x$  è in generale diversa dalla  $\phi_y$ , per cui le decomposizioni paradossali trovate sono diverse.

Il Teorema 2.2.2 ed il Corollario 2.2.4 forniscono *esplicitamente* un modo per costruire la decomposizione paradossale di un sottoinsieme di  $X$ , a partire dalla decomposizione paradossale di un sottoinsieme di  $G$ . In particolare, sotto le ipotesi del Corollario 2.2.4 siamo in grado di fornire la decomposizione paradossale di un insieme  $X$  formato da una sola orbita. Il seguente corollario è ancora più "ambizioso", anche se richiede l'utilizzo dell'Assioma di Scelta:

**Corollario 2.2.6** (AS<sup>3</sup>). *Sia  $X$  un  $G$ -insieme: se  $G$  è paradossale e nessuna permutazione di  $X$ , appartenente a  $G$  e diversa da  $1_G \equiv Id(X)$ , fissa alcun punto di  $X$  (equivalentemente, se  $G$  è paradossale e l'azione di  $G$  su  $X$  è libera), allora  $X$  è  $G$ -paradossale.*

*Dimostrazione.* Sia  $M$  un insieme di scelta per le orbite  $\{O_x\}_{x \in X}$ : ciò significa che  $M$  contiene uno ed un solo elemento di ogni orbita. Siano  $\{A_i^x\}_{i=1}^n, \{B_j^x\}_{j=1}^m$ , assieme alle permutazioni  $\{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m$ , le decomposizioni paradossali delle orbite  $\{O_x\}_{x \in M}$  costruite come nel Teorema 2.2.2: ciò vuol dire che  $O_x = \bigcup_i g_i(A_i^x) = \bigcup_j h_j(B_j^x)$  per ogni  $x \in M$ : ma allora, dato che  $X = \bigcup_{\{x \in M\}} O_x$ , si ha  $X = \bigcup_{\{x \in M\}} \bigcup_i g_i(A_i^x) = \bigcup_i g_i(A_i^*)$ , dove  $A_i^* = \bigcup_{\{x \in M\}} A_i^x$ ; analogamente, definendo  $B_j^* = \bigcup_{\{x \in M\}} B_j^x$ , si ha  $X = \bigcup_j h_j(B_j^*)$ . Gli insiemi  $\{A_i^*\}_{i=1}^n, \{B_j^*\}_{j=1}^m$  sono a due a due disgiunti, in quanto unione di insiemi distinti e disgiunti. Ne consegue che essi, assieme alle permutazioni  $\{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m$ , costituiscono una decomposizione paradossale di  $X$ .  $\square$

*Osservazione 2.2.7.* Si noti che la decomposizione paradossale di  $X$  dipende dall'insieme di scelta  $M$ . Naturalmente, se si avesse la possibilità di definire esplicitamente come compiere tale scelta, l'assioma omonimo non sarebbe più necessario (ad esempio, se le orbite fossero finite). Nei casi più interessanti e ricchi di implicazioni, comunque, l'utilizzo dell'Assioma di Scelta è ineludibile.

<sup>3</sup>D'ora in poi indicheremo, con questa notazione, i risultati ottenuti utilizzando l'Assioma di Scelta

**Corollario 2.2.8** (AS). *Un gruppo  $G$  con un sottogruppo  $S$  paradossale è paradossale.*

*Dimostrazione.* Dato che l'azione di un sottogruppo  $S$  di  $G$  sul gruppo  $G$  è sempre libera, allora se  $S$  è paradossale anche  $G$  è paradossale.  $\square$

La seguente Proposizione è una sorta di inversa del Corollario 2.2.6, ma è valida per tutte le azioni e non dipende dall'Assioma di Scelta:

**Proposizione 2.2.9.** *Sia  $X$  un  $G$ -insieme. Se  $X$  è  $G$ -paradossale, allora  $G$  è  $G$ -paradossale.*

*Dimostrazione.* Sia  $X$  un  $G$ -insieme  $G$ -paradossale. Allora esistono degli insiemi  $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$  costituenti una partizione di  $X$ , e  $\{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m$  elementi di  $G$ , tali che le famiglie di insiemi  $\{g_i \cdot A_i\}_{i=1}^n, \{h_j \cdot B_j\}_{j=1}^m$  costituiscono ognuna una partizione di  $X$ . Sia  $x \in X$ , e si considerino gli insiemi  $A_i^* = \{g \in G \mid g \cdot x \in A_i\}$  e  $B_j^*$  definiti analogamente. Allora gli  $\{A_i^*\}_{i=1}^n, \{B_j^*\}_{j=1}^m$  costituiscono una partizione di  $G$ : infatti, se  $g \in G$ , allora  $g \cdot x$  appartiene a qualcuno degli  $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$ , in quanto essi costituiscono una partizione di  $X$ . Ne consegue che  $g$  appartiene a qualcuno degli  $\{A_i^*\}_{i=1}^n, \{B_j^*\}_{j=1}^m$ . Inoltre, sia  $g \in C_1^* \cap C_2^*$ , dove  $C_1, C_2$  sono insiemi distinti di  $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$ : allora  $g \cdot x \in C_1 \cap C_2$  e questo è assurdo in quanto gli  $A_i, B_j$  sono a due a due disgiunti.

Mostriamo ora che le famiglie  $\{g_i A_i^*\}_{i=1}^n, \{h_j B_j^*\}_{j=1}^m$  sono ognuna un ricoprimento di  $G$ . Sia  $g \in G$ , e supponiamo che  $g \neq g_i f$  per ogni  $f \in A_i^*$ : allora  $g \cdot y \neq g_i f \cdot y$  per ogni  $y \in X$ , ma questo è assurdo in quanto la famiglia  $\{g_i \cdot A_i\}_{i=1}^n$  è un ricoprimento di  $X$ . Ne consegue che  $g \in g_i A_i^*$  per qualche  $i$ . Analogamente si mostra che  $g \in h_j B_j^*$  per qualche  $j$ . Questo prova che  $G$  è  $G$ -paradossale.  $\square$

La precedente proposizione, assieme al Corollario 2.2.6, giustifica il nostro interesse verso i gruppi paradossali rispetto a se stessi: infatti, se  $X$  è un  $G$ -insieme e  $G$  non è paradossale, allora  $X$  non può essere  $G$ -paradossale!

## 2.3 Gruppi paradossali

Il nostro problema adesso è: quali condizioni implicano che un gruppo sia paradossale? In questa sezione ci occuperemo di ricavare esempi espliciti di gruppi paradossali, e di discutere almeno in parte la questione della classificazione dei gruppi paradossali. Grazie agli esempi di gruppi paradossali che troveremo, e al Teorema 2.2.2 assieme ai suoi corollari, nel Capitolo 3 utilizzeremo i risultati fin qui ottenuti per ricavare esempi espliciti di alcuni paradossi geometrici notevoli.

### 2.3.1 Gruppi e monoidi liberi

#### GRUPPI LIBERI

**Teorema 2.3.1.** *Il gruppo libero  $F_2$  di rango 2 è paradossale rispetto a se stesso.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\sigma, \tau$  siano generatori di  $F_2$ . Sia  $W(\rho)$  l'insieme delle parole di  $F_2$  la cui prima lettera (da sinistra) è  $\rho$ , dove  $\rho \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ : allora si ha  $F_2 = \{1\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$ , e tali insiemi costituiscono una partizione di  $F_2$ . Inoltre si ha  $\sigma(W(\sigma^{-1})) \cup W(\sigma) = F_2$ , e  $\tau(W(\tau^{-1})) \cup W(\tau) = F_2$ : infatti, sia  $h \in F_2 \setminus W(\rho)$ , con  $\rho \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$ : si ha  $\rho^{-1}h \in W(\rho^{-1})$  e quindi  $h \in \rho(W(\rho^{-1}))$ . La decomposizione trovata fa uso di soli quattro pezzi.  $\square$

Dal precedente teorema, e dal Corollario 2.2.8, otteniamo allora il seguente

**Corollario 2.3.2 (AS).** *Un gruppo con un sottogruppo libero di rango 2 è paradossale. Ne consegue che ogni gruppo libero di rango  $\geq 2$  è paradossale.*

La paradossalità di  $F_2$  è molto importante. Difatti, se  $G$  ha un sottogruppo libero, e l'azione di questo sottogruppo su qualche sottoinsieme di  $X$  è libera, allora possiamo utilizzare il Corollario 2.2.6 per mostrare la  $G$ -paradossalità di tale sottoinsieme di  $X$ . Nel Capitolo 3 mostreremo che esistono sottogruppi liberi di rango 2 del gruppo  $G_3$  delle isometrie di  $\mathbb{R}^3$  (in particolare, del gruppo ortogonale speciale  $SO_3$ ). Il problema che dovremo risolvere, allora, sarà riuscire a trovare un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$ , su cui il sottogruppo libero agisce, tale che le permutazioni indotte dal sottogruppo libero non fissino alcun suo punto. In generale, infatti, le isometrie fissano molti punti dello spazio su cui agiscono.

## MONOIDI LIBERI

**Proposizione 2.3.3.** *Ogni gruppo  $G$  che contiene un monoide libero di rango 2, ha un sottoinsieme paradossale.*

*Dimostrazione.* Sia  $G$  un gruppo, e supponiamo che  $G$  contenga due elementi  $\sigma, \tau$  che generano un monoide libero  $M$  di rango 2 ( $M$  è quindi l'insieme delle parole formate da  $\sigma$  e  $\tau$ , compresa la parola vuota ovvero  $1_G$ ). Sia  $S$  il sottoinsieme di  $M$  formato dalle parole che iniziano per  $\sigma$ ; sia  $T$  il sottoinsieme di  $M$  formato dalle parole che iniziano per  $\tau$ ; allora, chiaramente,  $\sigma^{-1}S = M$  e  $\tau^{-1}T = M$ . Ne consegue che  $M$  è paradossale, con decomposizione formata da soli 2 pezzi.  $\square$

Dalla seguente proposizione ricaviamo l'immediato corollario:

**Corollario 2.3.4.** *Ogni gruppo  $G$  che contiene un monoide libero di rango  $\geq 2$  ha un sottoinsieme paradossale.*

Ancora una volta, siamo interessati ad applicare questo teorema per trovare sottoinsiemi  $G$ -paradossali di un  $G$ -insieme  $X$ . La strategia è, stavolta, quella suggerita dal Corollario 2.2.3: se esiste un  $x \in X$  tale che, presi due qualsiasi elementi di  $G$  che appartengono a due pezzi distinti della decomposizione paradossale del monoide libero  $M$ , essi inducono permutazioni di  $X$  che non coincidono in  $x$ , allora sicuramente esiste un sottoinsieme  $G$ -paradossale di  $X$ , e sappiamo anche costruirlo a partire dalla decomposizione di  $M$ .

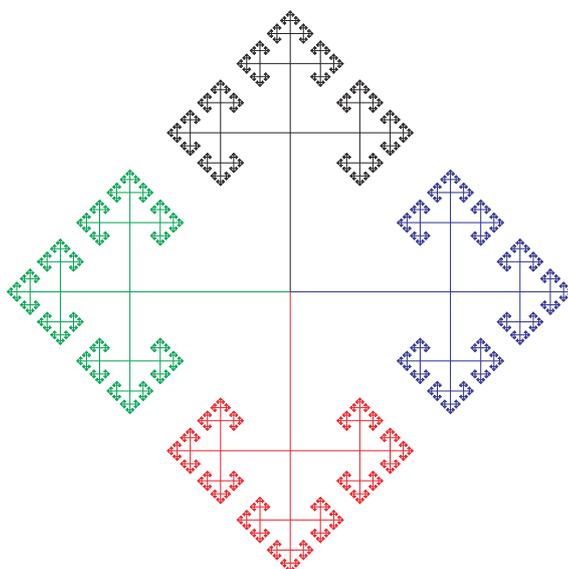


Figura 2.3.1: Rappresentazione grafica del gruppo libero di rango 2  
 Legenda: blu  $\rightarrow \sigma$ ; nero  $\rightarrow \tau$ ; verde  $\rightarrow \sigma^{-1}$ ; rosso  $\rightarrow \tau^{-1}$ ;

### 2.3.2 Una rappresentazione grafica di $F_2$

Consideriamo un gruppo libero di rango 2 generato dagli elementi  $\sigma, \tau$ : una possibile rappresentazione grafica del gruppo libero è data in figura 2.3.1. Al fine di spiegare meglio questa rappresentazione, chiamiamo *vertici* i punti di intersezione tra due segmenti, e *rami* i segmenti che congiungono due vertici adiacenti. Ogni vertice corrisponde ad un elemento del gruppo: da ognuno di tali vertici, si dipartono 4 rami, secondo la seguente regola:

- ramo verso destra: moltiplicazione a destra per  $\sigma$ ;
- ramo verso l'alto: moltiplicazione a destra per  $\tau$ ;
- ramo verso sinistra: moltiplicazione a destra per  $\sigma^{-1}$ ;
- ramo verso il basso: moltiplicazione a destra per  $\tau^{-1}$ .

Da ogni vertice (eccetto l'origine) partono 3 rami, che si sviluppano in ulteriori ramificazioni, ed un ramo che porta "indietro" nella struttura (corrisponde infatti alla moltiplicazione a destra per l'inversa dell'ultima lettera della parola corrispondente al vertice, quindi porta ad una parola già "costruita"). Chiameremo *albero* generato da un certo vertice, l'insieme composto dai vertici costruibili a partire da uno di questi 3 rami e da sue ulteriori ramificazioni. In base a queste regole, l'origine corrisponde all'elemento neutro del gruppo, ed ogni albero partente dall'origine corrisponde all'insieme delle parole del gruppo che cominciano rispettivamente per  $\sigma$  (blu),  $\tau$  (nero),  $\sigma^{-1}$  (verde),  $\tau^{-1}$  (rosso); la struttura, come si vede facilmente dalla figura, è ricorsiva, e quindi contiene copie di se stessa. Ad esempio, l'albero verde, costituito da tutte le parole che iniziano per

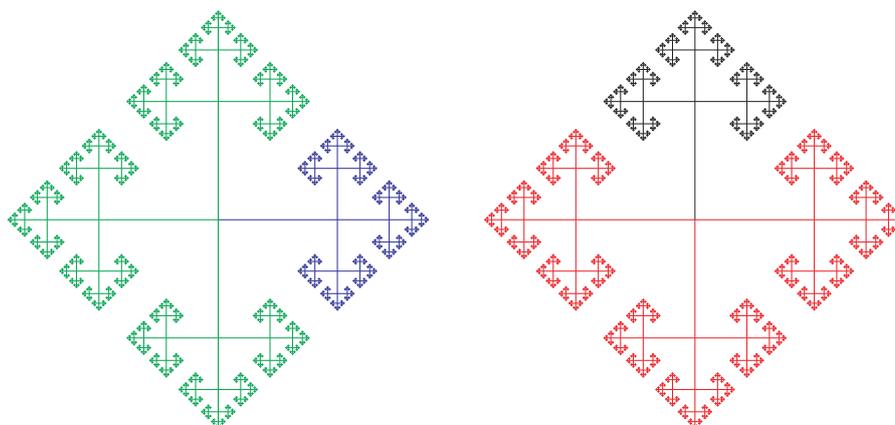


Figura 2.3.2: Rappresentazione grafica della decomposizione paradossale del gruppo libero di rango 2

$\sigma^{-1}$ , ha la stessa identica struttura dell'insieme composto dai 3 alberi restanti: difatti, moltiplicando l'albero verde a sinistra per  $\sigma$ , si ottiene esattamente l'insieme degli elementi appartenenti ai 3 alberi restanti (le parole che *non* iniziano per  $\sigma$ ). Allo stesso modo, l'albero rosso, costituito da tutte le parole che iniziano con  $\tau^{-1}$ , ha la stessa identica struttura dell'insieme composto dai tre alberi restanti: difatti, moltiplicando l'albero rosso a sinistra per  $\tau$ , si ottiene esattamente l'insieme degli elementi appartenenti ai 3 alberi restanti (le parole che *non* cominciano per  $\tau$ ). Abbiamo sostanzialmente descritto, in maniera non molto rigorosa ma con l'ausilio delle immagini, la decomposizione del gruppo libero mostrata nella dimostrazione del Teorema 2.3.1 utilizzando 4 pezzi (i 4 alberi principali generati dall'origine). Si veda la Figura 2.3.2 per la rappresentazione grafica. Come già accennato all'inizio di questo paragrafo, nel prossimo capitolo vedremo come la paradossalità di  $F_2$  possa essere trasportata ad alcuni sottoinsiemi dello spazio. Il paradosso di Hausdorff ed il celebre paradosso di Banach-Tarski (nella sua forma meno generale, ovvero il paradosso della duplicazione della sfera), si basano proprio sul fatto che il gruppo delle rotazioni di  $\mathbb{R}^3$  ha un sottogruppo libero di rango 2. Ci piacerebbe poter "visualizzare" graficamente come avviene concretamente la decomposizione paradossale della sfera. Purtroppo, questi paradossi, come vedremo, implicano (e questa è una delle implicazioni più importanti) l'impossibilità di definire il concetto di area per alcuni sottoinsiemi della sfera, in particolare per i sottoinsiemi che ne costituiscono la decomposizione paradossale. Non siamo in grado di "immaginare" un oggetto nello spazio che sia privo di area, figuriamoci disegnarlo! Ci dobbiamo accontentare di rappresentazioni astratte, come questa.

### 2.3.3 Classificazione dei gruppi paradossali

Vale anche il viceversa del Corollario 2.3.2? Ovvero, un gruppo paradossale possiede necessariamente un sottogruppo libero di rango 2? Il seguente teorema (che non dimostriamo) è dovuto ad Ol'shanskii, che lo formulò nel 1980:

**Teorema 2.3.5.** *Esiste un gruppo paradossale che non ha elementi di ordine infinito: ne consegue che tale gruppo non ha sottogruppi liberi di alcun rango.*

Il precedente teorema mostra come la classe dei gruppi paradossali sia più ampia del previsto. Il problema della classificazione dei gruppi paradossali ha notevoli implicazioni in Teoria della Misura: difatti, come vedremo più precisamente nel prossimo capitolo, la classe dei gruppi non paradossali coincide con la classe dei gruppi che ammettono una misura finitamente additiva, a misura totale 1, che sia definita su tutti i sottoinsiemi del gruppo. I gruppi che hanno questa proprietà vengono detti *amenabili*. Sia  $AG$  la classe dei gruppi amenabili, e sia  $NF$  la classe dei gruppi che non hanno un sottogruppo libero di alcun rango. Il Corollario 2.3.2 mostra che un gruppo amenabile non può avere sottogruppi liberi, ovvero

$$AG \subseteq NF \tag{2.3.1}$$

Il Teorema 2.3.5 mostra come l'inclusione  $AG \subseteq NF$  sia stretta. La congettura che  $AG = NF$  prende il nome di *congettura di Von Neumann*, il quale formulò per la prima volta nel 1920 il Corollario 2.3.2; nonostante il nome, la congettura non fu formulata dallo stesso Von Neumann (pare che egli non fosse convinto della veridicità di questa affermazione), ma da altri matematici, probabilmente ingannati dal fatto che la classe dei gruppi nella quale le due classi  $AG$  e  $NF$  coincidono è molto ampia, e contiene fra l'altro i casi più importanti: è stato infatti dimostrato recentemente che, per quanto riguarda i gruppi di matrici, ma anche per i gruppi  $G_n$  delle isometrie di  $\mathbb{R}^n$ , si ha  $EG = AG = NF$ , dove  $EG$  rappresenta la classe dei gruppi elementari. Ol'shanskii confutò la congettura di Von Neumann trovando un controesempio ad essa, dato da un particolare *gruppo mostro di Tarski*:

**Definizione 2.3.6.** Sia  $p$  un numero primo. Un gruppo infinito  $G$  si dice *gruppo mostro di Tarski* per  $p$  se ogni suo sottogruppo non banale è ciclico di ordine  $p$ .

Dato che un gruppo libero di qualunque rango non è ciclico,  $G \in NF$ : ciononostante, Ol'shanskii mostrò che esiste un gruppo mostro di Tarski che non è amenabile, e quindi che  $AG \subset NF$ .

## Capitolo 3

# Paradossi geometrici e Teoria della Misura

Il Teorema 2.2.2 svolge un ruolo centrale in questa tesi: in questo capitolo applicheremo tale Teorema, assieme ai suoi corollari, per trasferire la paradossalità di alcuni sottoinsiemi del gruppo  $G_n$  delle isometrie di  $\mathbb{R}^n$ , su alcuni sottoinsiemi dello spazio  $\mathbb{R}^n$  (con  $n = 1, 2, 3$ ). Alcuni di questi paradossi hanno notevoli implicazioni in Teoria della Misura, che verranno discussi al termine di ogni paragrafo. Il differente approccio ad ognuno dei casi che tratteremo, è dovuto essenzialmente alle differenze profonde che esistono tra i gruppi  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  delle isometrie, rispettivamente, della retta, del piano e dello spazio. Nella Sezione 3.2 tratteremo nello specifico questo argomento.

### 3.1 Sottoinsiemi paradossali di $\mathbb{R}$ , $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Alcuni degli insiemi paradossali che troveremo hanno importanti conseguenze sull'esistenza o meno di misure, finitamente o numerabilmente additive, definite su un'algebra di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ . In effetti, la maggior parte degli esempi seguenti di insiemi paradossali, fu trovata dai propri scopritori proprio al fine di dimostrare l'inesistenza di una certa classe di misure, finitamente o numerabilmente additive, definite su *tutti* i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ . Cerchiamo di chiarire qual è la connessione tra la  $G$ -paradossalità e la Teoria della Misura:

**Definizione 3.1.1.** Sia  $G$  un gruppo e  $X$  un  $G$ -insieme. Un sottoinsieme  $E \subseteq X$  si dice  *$G$ -trascurabile* (risp.  *$G$ -numerabilmente trascurabile*) se, per ogni misura  $\mu$ , definita su *tutti gli insiemi di*  $\mathcal{P}(X)$ , finitamente (risp. numerabilmente) additiva,  $G$ -invariante (ovvero tale che  $(\forall A \in \mathcal{P}(X))(\forall g \in G)(\mu(A) = \mu(g \cdot A))$ ), tale che  $\mu(E) < \infty$ , si abbia  $\mu(E) = 0$ .

**Proposizione 3.1.2.** *Se  $E$  è  $G$ -paradossale (risp.  $G$ -numerabilmente paradossale), allora  $E$  è  $G$ -trascurabile (risp.  $G$ -numerabilmente trascurabile).*

*Dimostrazione.* Dimostriamo la proposizione nel caso finito, in quanto la dimostrazione nel caso numerabile è perfettamente analoga. Sia  $E \subseteq X$  un insieme

$G$ -paradossale: allora questo significa che esistono  $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$  sottoinsiemi di  $E$  costituenti una partizione di  $E$ , e  $\{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m$  permutazioni di  $X$ , tali che le due famiglie di insiemi  $\{g_i(A_i)\}_{i=1}^n$  e  $\{h_j(B_j)\}_{j=1}^m$  costituiscano ognuna una partizione di  $E$ . Sia  $\mu$  una misura definita su  $\mathcal{P}(X)$ , finitamente additiva,  $G$ -invariante, tale che  $\mu(E) < \infty$ . Si ha  $\mu(E) = \mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) + \mu(\bigcup_{j=1}^m B_j) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m \mu(B_j)$ ; ma, essendo  $\mu$  una misura  $G$ -invariante, allora si ha  $\sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(g_i(A_i)) = \mu(\bigcup_{i=1}^n g_i(A_i)) = \mu(E)$ ; allo stesso modo si verifica che  $\sum_{j=1}^m \mu(B_j) = \mu(E)$ . Ma allora si ha  $\mu(E) = 2 \cdot \mu(E)$ . Poichè  $\mu(E) < \infty$ , l'unica possibilità è che  $\mu(E)$  sia 0.  $\square$

### 3.1.1 L'insieme di Vitali

Il primo paradosso geometrico che andiamo a descrivere è il classico esempio di sottoinsieme non misurabile secondo Lebesgue, come vedremo alla fine del paragrafo.

Consideriamo il gruppo additivo  $(\mathbb{R}, +)$ . L'insieme  $\mathbb{Q}$  dei razionali è un suo sottogruppo rispetto all'addizione.

**Proposizione 3.1.3.** *Il gruppo additivo  $(\mathbb{Q}, +)$  è  $\mathbb{N}$ -paradossale (rispetto a se stesso).*

*Dimostrazione.* Enumeriamo gli elementi di  $\mathbb{Q}$  in questo modo:  $\mathbb{Q} = \{q_i | i \in \mathbb{N}\}$ . Detti  $p_i = q_i - q_{2i}$  e  $d_i = q_i - q_{2i+1}$ , si ha  $(\forall i \in \mathbb{N})(p_i + q_{2i} = q_i) \wedge (d_i + q_{2i+1} = q_i)$ . Allora  $\mathbb{Q} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{p_i + q_{2i}\} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{d_i + q_{2i+1}\}$ . Ne consegue che  $\mathbb{Q}$  è  $\mathbb{N}$ -paradossale.  $\square$

Il Corollario 2.2.8 afferma che un gruppo che contiene un sottogruppo paradossale è a sua volta paradossale. Adattando questo risultato alla  $\mathbb{N}$ -paradossalità, si ottiene pertanto il seguente

**Teorema 3.1.4 (AS).** *Il gruppo additivo  $(\mathbb{R}, +)$  è  $\mathbb{N}$ -paradossale.*

Riguardando la dimostrazione del Teorema 2.2.2 e del Corollario 2.2.6, abbiamo in sostanza dimostrato che, preso un insieme  $M$  contenente un rappresentante di ogni laterale del gruppo quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ , allora, detti  $M_i = M + q_i$  per  $i \in \mathbb{N}$ , si ha:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_{2i} + p_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_{2i+1} + d_i,$$

dove i  $q_i, p_i, d_i$  sono i numeri razionali utilizzati nella dimostrazione della proposizione precedente. I pezzi della decomposizione paradossale sono pertanto  $\{M_{2i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  e  $\{M_{2i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$ , i quali costituiscono chiaramente una partizione di  $\mathbb{R}$ .

Possiamo ora richiedere che l'insieme di scelta  $M$  sia tutto contenuto in  $[0, 1)$ : infatti, preso un qualsiasi elemento  $x \in \mathbb{R}$ , esiste certamente un elemento  $x' \in [0, 1)$  tale che  $x - x'$  sia razionale.

**Definizione 3.1.5.** Un insieme  $V$ , tutto contenuto in  $[0, 1)$ , che contiene uno ed un solo elemento di ogni laterale del gruppo quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ , si dice *insieme di Vitali*.

**Teorema 3.1.6** (AS).  $[0, 1]$  è numerabilmente trascurabile (rispetto all'azione del gruppo additivo  $\mathbb{Q}$  su  $\mathbb{R}$ ).

*Dimostrazione.* Sia  $V$  un insieme di Vitali, e consideriamo l'insieme  $Q = \mathbb{Q} \cap [0, 1)$ . Allora, preso  $q \in Q$ , si ha  $V + q \subseteq [0, 2)$ . Enumeriamo gli elementi di  $Q$  nel seguente modo:  $Q = \{q_i | i \in \mathbb{N}\}$ . Sia  $V_i = V + q_i \subseteq [0, 2)$ . Chiamiamo  $A_i = V_i \cap [0, 1)$  e  $B_i = V_i \cap [1, 2) - 1$ . Gli  $A_i, B_j$  sono chiaramente a due a due disgiunti: ad esempio, se esistesse  $x \in A_i \cap B_j$ , allora sarebbe  $x = x_0 + q_i = y_0 + q_j - 1$ , con  $x_0, y_0 \in V$ : ma allora sarebbe  $x_0 \equiv y_0$ , e dunque, per la definizione di  $V$ , dovrebbe essere  $x_0 = y_0$  ovvero  $q_j - q_i = 1$ , assurdo in quanto  $Q \subset [0, 1)$  (gli altri casi sono analoghi). Consideriamo gli insiemi  $C_i = A_i \cup B_i$ : essi costituiscono una partizione di  $[0, 1)$ . Abbiamo già visto come essi siano disgiunti, ed inoltre ovviamente  $(\forall i \in \mathbb{N})(C_i \subset [0, 1)) \Rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i \subseteq [0, 1)$ . Mostriamo l'inclusione opposta: sia  $x \in [0, 1)$ , e supponiamo per assurdo che *non* appartenga ad alcun  $C_i$ : allora  $x$  non sarebbe congruente ad alcun elemento di  $V$ , assurdo in quanto  $V$  contiene un rappresentante di ogni classe. Dunque la famiglia  $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  costituisce una partizione di  $[0, 1)$ . Ora, sia  $\mu$  una misura definita su  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ , numerabilmente additiva, invariante per traslazioni di ampiezza razionale, tale che  $\mu([0, 1)) < \infty$ : dato che la famiglia  $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  costituisce una partizione di  $[0, 1)$ , ed inoltre  $\mu(C_i) = \mu(A_i) + \mu(B_i) = \mu(A_i) + \mu(B_i + 1) = \mu(V_i) = \mu(V)$  per ogni  $i \in \mathbb{N}$ , si ha  $\mu([0, 1)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(V)$ , e quindi, essendo  $\mu([0, 1))$  finita, deve essere  $\mu(V) = 0$  e quindi  $\mu([0, 1)) = 0$ , come volevasi dimostrare.  $\square$

**Corollario 3.1.7** (AS). Per  $n \geq 1$ , non esiste una misura  $\mu$  definita su  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , numerabilmente additiva, invariante per traslazioni, tale che  $\mu([0, 1]^n) = 1$ .

*Dimostrazione.* Dal Teorema 3.1.6, risulta che l'insieme  $[0, 1)$  è numerabilmente trascurabile rispetto alle traslazioni di ampiezza razionale. Poichè  $\mu([0, 1)) = \mu([0, 1])$  (se la misura di un insieme infinito è finita, ogni punto deve avere misura nulla), se ne deduce che non esiste una misura siffatta e allo stesso tempo tale che  $\mu([0, 1]) = 1$ . Per quanto riguarda  $n > 1$ , è sufficiente osservare che una misura  $\mu_n$  soddisfacente le ipotesi e definita su  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ , indurrebbe una misura  $\mu_1$  soddisfacente le ipotesi e definita su  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mu_1 : \mathcal{P}(\mathbb{R}) &\rightarrow [0, \infty] \\ A &\mapsto \mu_n(A \times [0, 1]^{n-1}) \end{aligned} \cdot$$

$\square$

*Osservazione 3.1.8.* La misura di Lebesgue è una misura a valori in  $[0, \infty]$ , numerabilmente additiva, invariante per isometrie di  $\mathbb{R}^n$  e tale che il cubo unitario  $[0, 1]^n$  abbia misura 1. Per poter esistere, come abbiamo visto, essa non può essere definita su tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ ; in particolare, per  $n = 1$ , non può essere definita per gli insiemi di Vitali, che sono appunto esempi classici di insiemi non misurabili secondo Lebesgue.

### 3.1.2 N-Paradossalità di $S^1$

Il primo esempio di paradossalità di un sottoinsieme del piano riguarda il cerchio unitario  $S^1$ : la dimostrazione della N-paradossalità di  $S^1$  è strettamente

collegata alla non esistenza di una misura su  $S^1$ , invariante rispetto a rotazioni, numerabilmente additiva, che sia definita su tutti i sottoinsiemi di  $S^1$ .

Il gruppo delle rotazioni del piano attorno all'origine (identificato con il gruppo ortogonale speciale  $SO_2$ ) agisce in maniera naturale sull'insieme dei punti di  $S^1$ : difatti, la funzione

$$\begin{aligned} T : SO_2 \times S^1 &\rightarrow S^1 \\ (A, x) &\mapsto Ax \end{aligned}$$

dove  $x = (x_1, x_2)^T \in S^1$ , soddisfa le proprietà di un'azione di un gruppo su un insieme: infatti  $SO_2$  è un sottogruppo del gruppo delle permutazioni del piano, e quindi agisce sui punti del piano in maniera naturale, come già descritto; inoltre, le permutazioni  $\in SO_2$  sono rotazioni attorno all'origine, e quindi portano  $S^1$  in  $S^1$ : ne consegue che  $T$  è ben definita.

**Teorema 3.1.9 (AS).**  $S^1$  è  $SO_2$ -numerabilmente paradossale.

Premettiamo alla dimostrazione del Teorema 3.1.9 il seguente lemma:

**Lemma 3.1.10.** Sia  $E \subseteq SO_2$  il sottogruppo di  $SO_2$  formato da tutte le rotazioni attorno all'origine di angolo un multiplo razionale di  $\pi$ :  $E$  è numerabilmente paradossale (rispetto a se stesso).

*Dimostrazione.* Poichè i multipli razionali di  $\pi$  sono un'infinità numerabile, gli elementi di  $E$  possono essere enumerati in questo modo:  $E = \{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ . Consideriamo l'insieme  $E_p = \{\rho_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  costituito dagli elementi di  $E$  con indice pari; analogamente definiamo  $E_d = \{\rho_{2n-1}\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ . Siano ora  $\rho_x, \rho_y \in E$ : esiste certamente un elemento  $\tau \in E$  tale che  $\rho_x = \tau\rho_y$ . Ne consegue che, in particolare, esistono  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subset E$  tali che  $\tau_n\rho_{2n} = \rho_n, \forall n \in \mathbb{N}^+$ : dunque  $E = \{\tau_1\rho_2, \dots, \tau_n\rho_{2n}, \dots\}$ ; analogamente, esistono  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^+} \subset E$  tali che  $v_n\rho_{2n-1} = \rho_n, \forall n \in \mathbb{N}^+$ : dunque  $E = \{v_1\rho_1, \dots, v_n\rho_{2n-1}, \dots\}$ . Questo mostra che  $E$  è  $\mathbb{N}$ -paradossale, la cui decomposizione paradossale è data dai singoletti di ogni suo elemento, e dagli elementi  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  e  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  (considerati come funzioni che agiscono su  $E$  mediante traslazione sinistra).  $\square$

Passiamo a dimostrare il teorema:

*Dimostrazione del Teorema 3.1.9.* Mostriamo che  $S^1$  è  $E$ - $\mathbb{N}$ -paradossale: a tal fine, ricordandoci il Corollario 2.2.6, ci basta dimostrare che gli elementi di  $E$  diversi dall'identità non fissano alcun punto su  $S^1$ . Ma questo è banale, in quanto ogni rotazione attorno all'origine che fissa un punto, sul piano, diverso dall'origine, ruota necessariamente il piano di un multiplo (intero) di  $2\pi$ , e quindi tale rotazione coincide con l'identità.  $\square$

A rigore, non ci sarebbe bisogno di dire altro riguardo alla dimostrazione del teorema; tuttavia, per maggiore chiarezza, almeno in questo primo caso esplicitiamo l'utilizzo del Corollario 2.2.6:

*Dimostrazione (esplicita) del Teorema (3.1.9).* Consideriamo l'azione del gruppo  $E$  su  $S^1$ . Sia  $x \in S^1$ : allora  $O_x = \{y \in S^1 \mid y = \rho(x) \wedge \rho \in E\}$ , ovvero  $O_x$  è l'insieme di tutti i punti di  $S^1$  che possono essere ottenuti da  $x$  tramite rotazioni di angolo un multiplo razionale di  $\pi$ . Sia  $M$  un insieme di scelta per la famiglia di orbite  $\{O_x\}_{x \in S^1}$ : ciò significa che  $M$  contiene uno e un solo elemento di ogni orbita. Dato che i razionali sono numerabili, le rotazioni di  $E$  possono essere enumerate in questo modo:  $E = \{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$ : siano  $M_i = \rho_i(M)$ . Allora la famiglia  $\{M_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  costituisce una partizione di  $S^1$ , ed inoltre, essendo ognuno degli  $M_i$  congruente agli altri mediante rotazioni, ne consegue che esistono  $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  e  $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^+}$  rotazioni appartenenti ad  $E$  tali che  $\tau_n(M_{2n}) = M_n, \forall n \in \mathbb{N}^+$ , e  $v_n(M_{2n-1}) = M_n, \forall n \in \mathbb{N}^+$ .  $\square$

Il Teorema 3.1.9 ha un'implicazione immediata in Teoria della Misura:

**Corollario 3.1.11 (AS).** *Non è possibile definire una misura  $\mu$  numerabilmente additiva, invariante per rotazioni, definita su tutti i sottoinsiemi di  $S^1$ , tale che  $\mu(S^1) = 1$ .*

*Dimostrazione.* Dalla Proposizione 3.1.2, discende immediatamente che  $S^1$  è  $SO_2$ -numerabilmente trascurabile. Questo implica che, se esistesse una misura  $\mu$  definita su tutti i sottoinsiemi di  $S^1$ , invariante per rotazioni, numerabilmente additiva, e tale che  $\mu(S^1) < \infty$ , allora dovrebbe essere  $\mu(S^1) = 0$ . Dunque non può esistere una misura  $\mu$  con le proprietà appena citate, e contemporaneamente tale che  $\mu(S^1) = 1$ .  $\square$

### 3.1.3 Paradosso di Sierpinski-Mazurkiewicz

La paradossalità numerabile di  $S^1$ , rispetto al gruppo di rotazioni del piano attorno all'origine, ha richiesto l'utilizzo dell'Assioma di Scelta, e di un'infinità numerabile di pezzi per la sua decomposizione paradossale. Ci si potrebbe chiedere se queste proprietà siano comuni a tutti i sottoinsiemi paradossali del piano. Il seguente esempio di paradossalità di un sottoinsieme del piano, invece, mostra come sia possibile ricavare (costruttivamente!) esempi di sottoinsiemi (finitamente) paradossali del piano senza utilizzare l'Assioma di Scelta. Il teorema prende il nome dai suoi scopritori, Sierpinski e Mazurkiewicz.

**Teorema 3.1.12 (Paradosso di Sierpinski-Mazurkiewicz).** *Sia  $G_2$  il gruppo delle isometrie del piano  $\mathbb{R}^2$ . Esiste un sottoinsieme  $G_2$ -paradossale di  $\mathbb{R}^2$ .*

Prima di dimostrare il teorema, spieghiamo l'idea di fondo. In base a quanto detto nel capitolo dedicato ai gruppi paradossali, un primo passo verso la scoperta di un paradosso di  $\mathbb{R}^2$  può essere la ricerca di un sottoinsieme paradossale di  $G_2$ : ad esempio, un sottogruppo libero di rango  $\geq 2$  o un sottomonoido libero di rango  $\geq 2$ ; a questo punto, dovremmo cercare di applicare il Teorema 2.2.2 ed i suoi corollari. Il problema è che, in generale, le isometrie di uno spazio Euclideo fissano molti punti dello spazio: ad esempio, ogni rotazione di  $\mathbb{R}^2$  fissa precisamente un punto, il centro della rotazione.

Supponiamo che  $G_2$  abbia un sottomonoido libero  $M$  di rango 2, generato, diciamo, da due elementi  $r, t$  di  $G_2$ : allora, la Proposizione 2.3.3 afferma che  $M$  è paradossale, la cui decomposizione è data da

$$M = r^{-1}(R) = t^{-1}(T),$$

dove  $R$  e  $T$  sono gli insiemi di parole di  $M$  che cominciano, rispettivamente, per  $r$  e  $t$ . A questo punto, se esistesse un punto  $\mathbf{x} = (x, y)$  del piano, per il quale, comunque siano date due isometrie  $w_r \in R, w_t \in T$ , si ha  $w_r(\mathbf{x}) \neq w_t(\mathbf{x})$ , allora potremmo applicare il Corollario 2.2.3 e ottenere che l'insieme  $\phi_{\mathbf{x}}(M) = M^{\mathbf{x}} = \{g(\mathbf{x}) | g \in M\}$  è un sottoinsieme  $G_2$ -paradossale del piano. Ora che conosciamo la strategia, al fine di dimostrare il teorema è sufficiente dimostrare il seguente

**Lemma 3.1.13.**  *$G_2$  contiene due isometrie  $\rho, \tau$  che generano un sottomonoido libero  $M$  di rango 2. Inoltre, se  $w_\tau, w_\rho$  sono parole di  $M$  che cominciano, rispettivamente, per  $\tau, \rho$ , allora  $w_\tau(0, 0) \neq w_\rho(0, 0)$ .*

*Dimostrazione.* Identifichiamo  $\mathbb{R}^2$  con il piano complesso  $\mathbb{C}$ : in questo contesto, una traslazione  $t$ , parallela all'asse  $x$  di ampiezza  $m$ , del punto  $z$ , può essere identificata con la funzione  $t(z) = z \pm m$ ; una rotazione  $r$  di centro l'origine e di angolo  $\theta$  del punto  $z$  può essere identificata con la funzione  $r(z) = e^{i\theta}z$ . Scegliamo  $\theta$  in modo che il complesso  $e^{i\theta}$  sia trascendente: siamo certi che un tale  $\theta$  esista, in quanto i numeri algebrici sul cerchio unitario sono un'infinità numerabile, mentre i numeri sul cerchio unitario sono un'infinità non numerabile. Si può dimostrare che, ad esempio,  $e^i =: u$  è trascendente. Sia  $\tau$  la traslazione  $\tau(z) = z + 1$ , e  $\rho$  la rotazione  $\rho(z) = uz$ . Sia  $M$  il monoido generato da  $\rho, \tau$ . Al fine di mostrare che  $\rho, \tau$  generano un monoido libero di rango 2, è sufficiente mostrare che se  $w_\tau, w_\rho$  sono parole di  $M$  che cominciano, rispettivamente, per  $\tau, \rho$ , allora  $w_\tau(0) \neq w_\rho(0)$ . Difatti, se  $w_1, w_2$  sono due parole qualunque di  $M$ , il fatto che  $w_1 = w_2$  implicherebbe che  $w'_1 = w'_2$ , dove  $w_1 = cw'_1, w_2 = cw'_2$  e  $c$  è il segmento iniziale comune a  $w_1, w_2$ ; ma allora  $w'_1$  e  $w'_2$  dovrebbero essere parole che iniziano con una "lettera" (tra  $\rho$  e  $\tau$ ) diversa, e  $w'_1 = w'_2$  sarebbe in contraddizione con l'ipotesi  $w_\tau(0) \neq w_\rho(0)$ . Dimostriamo dunque questa proprietà. Siano  $w_\tau, w_\rho$  parole di  $M$  che cominciano, rispettivamente, per  $\tau, \rho$ : non è restrittivo supporre che la prima lettera da destra delle parole  $w_\tau, w_\rho$  sia  $\tau$ , in quanto  $\rho(0) = 0$ . Allora  $w_\tau = \tau^{a_1}\rho^{a_2}\dots\tau^{a_n}$  (quindi  $n$  è dispari) e  $w_\rho = \rho^{b_1}\tau^{b_2}\dots\tau^{b_m}$  (quindi  $m$  è pari), con  $\{a_i\}_{i=1}^n, \{b_j\}_{j=1}^m \subseteq \mathbb{N}$ . Si ha dunque

$$w_\tau(0) = a_1 + a_3u^{a_2} + a_5u^{a_2+a_4} + \dots + a_nu^{a_2+a_4+\dots+a_{n-1}}$$

e

$$w_\rho(0) = b_2u^{b_1} + b_4u^{b_1+b_3} + \dots + b_mu^{b_1+b_3+\dots+b_{m-1}}.$$

Supponiamo per assurdo che  $w_\tau(0) = w_\rho(0)$ : allora il polinomio a coefficienti interi

$$p(x) = a_1 + a_3x^{a_2} + \dots + a_nx^{a_2+a_4+\dots+a_n} - b_2x^{b_1} - b_4x^{b_1+b_3} - \dots - b_mx^{b_1+b_3+\dots+b_{m-1}}$$

avrebbe uno zero in  $u$ : ma questo è assurdo, in quanto abbiamo supposto che  $u$  sia trascendente.  $\square$

*Osservazione 3.1.14.* La dimostrazione del Teorema 2.2.2 spiega come costruire il sottoinsieme paradossale di  $\mathbb{R}^2$  di cui si è appena dimostrata l'esistenza: se  $M$  è il sottomonoido libero di  $G_2$  generato dalla traslazione  $\tau$  e dalla rotazione  $\rho$  come nella precedente dimostrazione, allora  $\phi_{(0)}(M) = M^0 = \{\sigma(0) | \sigma \in M\}$  è il sottoinsieme paradossale desiderato: più precisamente, si ha

$$M^0 = \{a_0 + a_1e^i + a_2e^{2i} + \dots + a_n e^{ni} | (n \in \mathbb{N}) \wedge (a_i \in \mathbb{N})\}$$

e i pezzi della decomposizione paradossale sono dati da

$$T^0 = \{a_0 + a_1e^i + a_2e^{2i} + \dots + a_n e^{ni} | (n \in \mathbb{N}) \wedge (a_i \in \mathbb{N}) \wedge (a_0 > 0)\}$$

e

$$R^0 = \{a_1e^i + a_2e^{2i} + \dots + a_n e^{ni} | (n \in \mathbb{N}) \wedge (a_i \in \mathbb{N})\}.$$

A differenza dei risultati precedenti, il sottoinsieme paradossale  $M_0$  è formato da un'infinità numerabile di punti, ed inoltre è un insieme non limitato. Questo paradosso non ha implicazioni immediate in Teoria della Misura. Il fatto che  $M_0$  sia  $G_2$ -trascurabile è infatti concorde con la condizione, ragionevole, che ogni punto (e quindi ogni insieme numerabile) abbia misura zero (se così non fosse, tutti gli insiemi non finiti avrebbero misura infinita! Una misura non molto utile). Tuttavia, il paradosso di Sierpinski-Mazurkiewicz è comunque un importante esempio di sottoinsieme di uno spazio Euclideo, paradossale rispetto al gruppo delle sue isometrie, la cui esistenza non dipende dall'Assioma di Scelta.

### 3.1.4 Paradosso di Hausdorff

Il Paradosso di Hausdorff è il nostro primo esempio di sottoinsieme paradossale dello spazio Euclideo  $\mathbb{R}^3$ . Come abbiamo visto, il Paradosso di Sierpinski-Mazurkiewicz è una conseguenza del fatto che il gruppo  $G_2$  delle isometrie del piano contiene un sottomonoido libero di rango 2. Il Paradosso di Hausdorff, invece, è una conseguenza del fatto che il gruppo  $G_3$  delle isometrie dello spazio contiene un *sottogruppo* libero di rango 2.

La strategia, stavolta, è la seguente: supposto che  $F$  sia un sottogruppo libero di rango 2 del gruppo  $G_3$ , si cerca un insieme  $X \subseteq \mathbb{R}^3$  tale che  $F$  agisca su  $X$ , e tale che le isometrie di  $F$  non fissino alcun punto su  $X$ . A questo punto, dal Corollario 2.2.6 risulta che  $X$  è  $F$ -paradossale, e quindi anche  $G_3$ -paradossale.

Innanzitutto, se vogliamo che il gruppo  $F$  agisca su un sottoinsieme  $X$  di  $\mathbb{R}^3$ , è necessario che le isometrie di  $F$  portino punti di  $X$  in  $X$ : devono cioè essere delle permutazioni di  $X$ . Una strategia d'azione naturale è allora quella di cercare sottogruppi liberi del sottogruppo  $SO_3$  delle rotazioni dello spazio attorno ad un asse passante per l'origine: difatti, le rotazioni di  $SO_3$  portano punti dalla sfera bidimensionale unitaria  $S^2$  in  $S^2$  (ovviamente ciò funziona per sfere di qualunque raggio centrate nell'origine), e dunque  $SO_3$  agisce su  $S^2$ . Mostriamo che esiste un sottogruppo libero di rango 2 di  $SO_3$ :

**Teorema 3.1.15.** *Esistono due rotazioni  $\phi$  e  $\rho$  attorno ad assi passanti per l'origine, che generano un sottogruppo libero  $F$  di  $SO_3$ . Ne consegue che se  $n \geq 3$ , allora  $SO_n$  ha un sottogruppo libero di rango 2.*

*Dimostrazione.* Consideriamo le seguenti rotazioni di  $\mathbb{R}^3$  attorno agli assi  $z$  e  $x$  rispettivamente, di angolo  $\arccos(1/3)$ :

$$\phi^{\pm 1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rho^{\pm 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \mp \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Vogliamo mostrare che  $\phi$  e  $\rho$  generano un gruppo libero di rango 2: per farlo è sufficiente dimostrare che non esistono parole ridotte di lettere  $\phi^{\pm 1}, \rho^{\pm 1}$  che coincidano con l'elemento neutro di  $SO_3$ , ovvero con l'identità di  $\mathbb{R}^3$ . Basta quindi dimostrare che ogni parola ridotta muove almeno un punto dello spazio. Dato che  $w = 1 \Leftrightarrow \phi^{-1}w\phi = 1$ , è sufficiente considerare parole ridotte che terminano (a destra) con  $\phi^{\pm 1}$ . Consideriamo il punto  $(1, 0, 0)$  e mostriamo che, se  $w$  è una parola ridotta che termina con  $\phi^{\pm 1}$ , allora  $w(1, 0, 0) \neq (1, 0, 0)$ . Mostriamo per induzione sulla lunghezza di  $w$  che  $w(1, 0, 0) = (a, b\sqrt{2}, c) \cdot 3^{-k}$ , dove  $a, b, c, k \in \mathbb{Z}$ ,  $k$  è la lunghezza della parola e  $b \neq 0$ . Ricordando l'espressione matriciale di  $\phi^{\pm 1}$ , si ha  $\phi^{\pm 1}(1, 0, 0) = (1, 2\sqrt{2}, 0) \cdot 3^{-1}$ . Supponiamo vera ora l'ipotesi induttiva per  $k < n$ . Sia  $w$  una parola ridotta terminante per  $\phi^{\pm 1}$ , di lunghezza  $n$ : allora  $w = \phi^{\pm 1}w'$  oppure  $w = \rho^{\pm 1}w'$ , dove  $w'$  è una parola ridotta di lunghezza  $n - 1$ . Per l'ipotesi induttiva, si ha  $w'(1, 0, 0) = (a', b'\sqrt{2}, c') \cdot 3^{-(n-1)}$ , con  $b' \neq 0$ : allora si presenta uno dei 2 seguenti casi:

$$\begin{cases} w(1, 0, 0) = \phi^{\pm 1}(a', b'\sqrt{2}, c') \cdot 3^{-(n-1)} & \text{se } w = \phi^{\pm 1}w' \\ w(1, 0, 0) = \rho^{\pm 1}(a', b'\sqrt{2}, c') \cdot 3^{-(n-1)} & \text{se } w = \rho^{\pm 1}w' \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Eseguendo le moltiplicazioni di matrici, otteniamo che in entrambi i casi  $w(1, 0, 0) = (a, b\sqrt{2}, c) \cdot 3^{-n}$ , dove

$$\begin{cases} a = a' \mp 4b' \\ b = b' \pm 2a' \\ c = 3c' \end{cases} \quad \text{se } w = \phi^{\pm 1}w',$$

$$\begin{cases} a = 3a' \\ b = b' \mp 2c' \\ c = c' \pm 4b' \end{cases} \quad \text{se } w = \rho^{\pm 1}w'.$$

Dobbiamo solo dimostrare che  $b \neq 0$ : è sufficiente dimostrare, ad esempio, che  $b \not\equiv 0 \pmod{3}$ . Consideriamo solo il primo caso, in quanto il secondo è analogo. Rifacendo per  $w'$  il ragionamento che abbiamo appena fatto per  $w$ , ci sono due possibilità per  $a'$ : o  $a' = 3a''$ , o  $a' = a'' \mp 4b''$  (con  $b'' \neq 0$ ). Se  $a' = 3a''$ , allora  $b \equiv b' \pm 6a'' \equiv b' \pmod{3}$ , e quindi  $b \not\equiv 0$ . Se  $a' = a'' \mp 4b''$ , allora  $\pm 2a'' = b' - b'$ : dunque  $b = b' \pm 2a'' - 8b'' = 2b' - 9b''$ : ma allora  $b \equiv 2b' \not\equiv 0 \pmod{3}$ .  $\square$

Per inciso, la scelta delle rotazioni che generano il gruppo libero non è obbligatoria: esistono diverse coppie di rotazioni di  $\mathbb{R}^3$  rispetto ad un asse passante per l'origine, che sono indipendenti e quindi generano un gruppo libero di rango 2.

Ci resta da risolvere il secondo problema: le rotazioni di  $F$  fissano diversi punti sulla sfera: precisamente, ogni rotazione fissa i due punti di intersezione del suo

asse con la sfera. Per questo motivo, il Corollario 2.2.6 non può essere applicato su  $S^2$ . Tuttavia, possiamo aggirare questo problema, rendendo applicabile tale corollario: difatti, detto  $D$  il sottoinsieme di  $S^2$  formato da tutti i punti fissati da qualche rotazione di  $F$ , allora  $F$  agisce su  $S^2 \setminus D$  senza fissare alcun punto:

**Teorema 3.1.16** (Paradosso di Hausdorff). *Esiste un sottoinsieme numerabile  $D$  di  $S^2$  tale che  $S^2 \setminus D$  sia  $SO_3$ -paradossale.*

*Dimostrazione.* Sia  $D$  il sottoinsieme di  $S^2$  formato dai punti di intersezione degli assi delle rotazioni di  $F$  con  $S^2$ : poichè  $F$  è numerabile, anche  $D$  è numerabile. Inoltre  $F$  agisce su  $S^2 \setminus D$ : infatti, sia  $P \in S^2 \setminus D$  e supponiamo che esista  $g \in F$  tale che  $g(P) \notin S^2 \setminus D$  (quindi  $g$  non è l'identità); allora dovrebbe essere  $g(P) \in D$ , e quindi dovrebbe esistere  $h \in F$ , diverso dall'identità, tale che  $(h \circ g)(P) = g(P)$ . Ma allora,  $g^{-1}hg$  sarebbe un elemento di  $F$  diverso dall'identità e tale che  $(g^{-1}hg)(P) = P$ , e questo è in contraddizione con il fatto che  $P \in S^2 \setminus D$ . Ne consegue che  $F$  agisce su  $S^2 \setminus D$ , ed inoltre è evidente che gli elementi di  $F$  non fissano alcun punto su  $S^2 \setminus D$ . Allora, dal Corollario 2.2.6 discende che  $S^2 \setminus D$  è  $F$ -paradossale, e quindi  $SO_3$ -paradossale, come volevasi dimostrare.  $\square$

La natura paradossale di questo teorema può non apparire evidente a prima vista: difatti, un sottoinsieme numerabile della sfera potrebbe essere denso in essa. In realtà, nel Capitolo 4 vedremo come sia possibile mostrare che  $D$  è ininfluente ai fini della paradossalità:  $S^2$  è  $SO_3$ -paradossale.

**Teorema 3.1.17** (AS).  *$S^2$  è  $SO_3$ -trascurabile. Dunque non esistono misure, definite su tutti gli insiemi di  $P(S^2)$ , finitamente additive, invarianti per rotazione, tali che la misura di  $S^2$  sia 1.*

*Dimostrazione.* Benchè sia possibile mostrare tale teorema utilizzando solo il Paradosso di Hausdorff e la Proposizione 3.1.2, per semplicità utilizzeremo il fatto che  $S^2$  sia  $SO_3$ -paradossale, rimandando alla dimostrazione di quest'ultima affermazione contenuta nel Capitolo 4. Dato che  $S^2$  è  $SO_3$ -paradossale, dalla Proposizione 3.1.2 ricaviamo subito che  $S^2$  è  $SO_3$ -trascurabile. Ne consegue che per ogni misura  $\mu$  definita su  $P(S^2)$ , finitamente additiva,  $SO_3$ -invariante, e tale che  $\mu(S^2) < \infty$ , si ha  $\mu(S^2) = 0$ , e questo prova la tesi.  $\square$

Il seguente corollario rafforza il risultato già ottenuto nel Corollario 3.1.7, in dimensione  $n \geq 3$ . Hausdorff ricavò il paradosso che prende il suo nome proprio per dimostrare questo profondo risultato di Teoria della Misura.

**Corollario 3.1.18** (AS). *Per  $n \geq 3$ , non esiste una misura  $\mu$  definita su  $P(\mathbb{R}^n)$ , finitamente additiva, invariante per isometrie, tale che  $\mu([0, 1]^n) = 1$ .*

*Dimostrazione.* Come abbiamo visto nella dimostrazione del Corollario 3.1.7, è sufficiente mostrare che la tesi vale per  $n = 3$ , in quanto una misura con quelle proprietà in dimensioni maggiori ne indurrebbe una con quelle proprietà in  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $\mu$  una misura definita su  $P(\mathbb{R}^3)$ , finitamente additiva, invariante per isometrie, tale che  $\mu([0, 1]^3) = 1$ . Questo implica che ogni cubo ha misura finita e non nulla. Sia  $B^2$  la palla unitaria. Allora, poichè  $[-1/2, 1/2]^3 \subset B^2 \subset [-1, 1]^3$ ,

si ha  $0 < \mu(B^2) < \infty$ . Si consideri la seguente misura definita su  $P(S^2)$ :  $(\forall A \subseteq S^2)(\nu(A) = \mu(\{\alpha P | (P \in A) \wedge (0 < \alpha \leq 1)\}))$ . La misura  $\nu$  è ben definita, finitamente additiva, invariante per rotazioni, ed inoltre  $\nu(S^2) = \mu(B^2 \setminus \{0\}) = \mu(B^2)$  perchè, essendo la misura  $\mu$  finitamente additiva e finita per qualche insieme infinito, ogni punto deve avere misura nulla. Ma allora  $\nu$  è una misura definita su  $P(S^2)$ , finitamente additiva, invariante per rotazioni, e tale che  $\nu(S^2) \neq 0$ , il che contraddice la  $SO_3$ -trascurabilità di  $S^2$ . Ne consegue che una misura  $\mu$  definita su  $P(\mathbb{R}^3)$ , finitamente additiva, invariante per isometrie, tale che  $\mu([0, 1]^3) = 1$ , non può esistere.  $\square$

*Osservazione 3.1.19.* Dal precedente corollario discende immediatamente che, per  $n \geq 3$ , non esiste un'estensione, finitamente additiva, invariante per isometrie, della misura di Lebesgue, definita su tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ .

## 3.2 Il ruolo del gruppo $G_n$

Ora che abbiamo capito in che modo la paradossalità di un  $G$ -insieme (o di un suo sottoinsieme) si ripercuote sull'esistenza o meno di certe misure, riprendiamo in mano l'argomento trattato nel Paragrafo 2.3.3 dedicato alla classificazione dei gruppi paradossali. Enunciamo con più chiarezza la definizione di gruppo amenable:

**Definizione 3.2.1.** Un gruppo  $G$  si dice *amenable* se esiste una misura  $\mu$  definita su  $\mathcal{P}(G)$ , finitamente additiva,  $G$ -invariante, tale che  $\mu(G) = 1$ .

Le differenze profonde che intercorrono tra i paradossi in dimensioni 1 e 2, e i paradossi in dimensioni maggiori, sono essenzialmente causate dalle differenze che esistono tra i rispettivi gruppi di isometrie che agiscono sugli spazi. In particolare, quello che rende profondamente diversi  $G_1$  e  $G_2$  da  $G_n$ , con  $n \geq 3$ , è proprio il fatto che  $G_1$  e  $G_2$  sono *amenabili*. Mostriamo che la proprietà di amenabilità coincide con la proprietà di non paradossalità:

**Teorema 3.2.2 (AS).** *Un gruppo  $G$  è amenable se e solo se non è paradossale.*

*Dimostrazione.* La prima implicazione è semplice. Sia  $G$  amenable; sia  $\mu$  una misura definita su  $\mathcal{P}(G)$ , finitamente additiva,  $G$ -invariante, a misura totale 1. Se  $G$  fosse  $G$ -paradossale, allora sarebbe  $\mu(G) = 2 \cdot \mu(G)$ , contro l'ipotesi che  $\mu(G) = 1$ . Ne consegue che  $G$  non è paradossale.

Per quanto riguarda la seconda implicazione, ricordiamo l'enunciato della Proposizione 3.1.2: essa afferma che se  $X$  è un  $G$ -insieme e  $E$  un sottoinsieme di  $X$ , se  $E$  è  $G$ -paradossale allora  $E$  è  $G$ -trascurabile. Uno dei risultati più importanti di Tarski nell'ambito della Teoria della Misura e degli insiemi paradossali, è il seguente Teorema, di cui omettiamo la lunga dimostrazione<sup>1</sup>, che completa la Proposizione 3.1.2:

**Lemma 3.2.3 (Teorema di Tarski)(AS).** *Sia  $X$  un  $G$ -insieme. Sia  $E \subseteq X$ . Allora  $E$  è  $G$ -trascurabile se e solo se  $E$  è  $G$ -paradossale.*

<sup>1</sup>Si veda [WAG].

Ne consegue che, se  $G$  non è paradossale, allora  $G$  non è trascurabile, e quindi è possibile trovare una misura  $\mu$  definita su  $\mathcal{P}(G)$ , finitamente additiva,  $G$ -invariante, tale che  $\mu(G)$  sia finita e maggiore di 0; allora la misura su  $\mathcal{P}(G)$  definita da  $\mu^*(S) = \frac{\mu(S)}{\mu(G)}$  per ogni sottoinsieme  $S$  di  $G$ , è una misura definita su  $\mathcal{P}(G)$ , finitamente additiva,  $G$ -invariante e tale che  $\mu^*(G) = 1$ :  $G$  è dunque amenable.

□

Nel Paragrafo 2.3.3 abbiamo visto che la classe dei gruppi amenabili ( $AG$ ) è contenuta nella classe dei gruppi che non hanno un sottogruppo libero non abeliano ( $NF$ ), e abbiamo anche visto che l'inclusione non è, in generale un'uguaglianza. Tuttavia, per un'ampia classe di gruppi (come dimostrato da Tits), comprendente la classe dei gruppi di isometrie di  $\mathbb{R}^n$ , è vero che  $AG = NF$ . Come abbiamo visto, per dimostrare il Paradosso di Hausdorff, abbiamo trovato un sottogruppo libero di rango 2, e questo prova che  $G_n$  non è amenable per  $n \geq 3$ . Invece, per quanto riguarda  $G_1$  e  $G_2$ , questo non è vero, come mostra il seguente teorema:

**Teorema 3.2.4.**  $G_1$  e  $G_2$  sono amenabili.

*Dimostrazione.* Sfruttando il fatto che, per quanto riguarda gruppi di isometrie,  $AG = NF$ , è sufficiente dimostrare che  $G_1$  e  $G_2$  non hanno un sottogruppo libero di rango 2.

Per quanto riguarda  $G_1$ , sia  $\sigma \in G_1$ : allora  $\sigma(x) = \pm x + s$ , da cui  $\sigma^2(x) = x \pm s + s$ , ovvero  $\sigma^2$  è una traslazione. Dato che le traslazioni sono commutative, comunque siano presi  $\sigma, \tau \in G_1$ , si ha la relazione non banale  $\sigma^2\tau^2 = \tau^2\sigma^2$ , e questo implica che  $\sigma$  e  $\tau$  non possono generare un gruppo libero di rango 2. Dato che  $\sigma$  e  $\tau$  sono due elementi generici di  $G_1$ , se ne deduce che non esiste un sottogruppo libero di rango 2 (e quindi di nessun rango) del gruppo  $G_1$ , e quindi  $G_1$  è amenable.

Per quanto riguarda  $G_2$ , l'idea è simile. Vogliamo dimostrare che, presi due elementi  $\sigma, \tau \in G_2$ , l'elemento  $\sigma^2\tau^2\sigma^{-2}\tau^{-2}$  è una traslazione: allora  $\sigma^2\tau^2\sigma^{-2}\tau^{-2}$  commuta con  $\sigma^{-2}\tau^{-2}\sigma^2\tau^2$ , e quindi  $\sigma$  e  $\tau$  non possono generare un gruppo libero di rango 2. Dato che  $\sigma$  e  $\tau$  sono due elementi generici di  $G_2$ , se ne deduce che non esiste un sottogruppo libero di rango 2 (e quindi di nessun rango maggiore di 2) del gruppo  $G_2$ , e quindi  $G_2$  è amenable.

Mostriamo che, presi due elementi  $\sigma, \tau \in G_2$ , l'elemento  $\sigma^2\tau^2\sigma^{-2}\tau^{-2}$  è una traslazione. Se  $\sigma(x) = Sx + s$  e  $\tau(x) = Tx + t$ , dove  $S, T \in O_2$  e  $s, t$  sono dei vettori colonna, allora, tramite semplici prodotti matriciali, si mostra che

$$\sigma^2\tau^2\sigma^{-2}\tau^{-2} = S^2T^2S^{-2}T^{-2}x + c,$$

dove  $c$  è un vettore colonna. Ci basta quindi dimostrare che, comunque prendiamo due matrici ortogonali  $S, T$ , allora  $S^2T^2S^{-2}T^{-2} = I$ . Dato che, presa  $A \in O_2$ , allora  $A^2 \in SO_2$  (infatti  $A^2$  è ortogonale e  $\det(A^2) = 1$ ), si ha che  $S^2$  e  $T^2$  sono rotazioni, rispettivamente, di angolo  $\theta$  e  $\varphi$ . Utilizzeremo la notazione, di ovvia interpretazione,  $S^2 = R_\theta$  e  $T^2 = R_\varphi$ : allora  $S^{-2} = R_{-\theta}$  e  $T^{-2} = R_{-\varphi}$ . Ne consegue che  $S^2T^2S^{-2}T^{-2} = R_\theta R_\varphi R_{-\theta} R_{-\varphi} = R_{(\theta+\varphi-\theta-\varphi)} = I$ , come volevasi dimostrare. □

*Osservazione 3.2.5.* La dimostrazione, appena conclusa, del fatto che  $G_1$  e  $G_2$  sono amenabili, ha utilizzato strumenti i più elementari possibile. Va detto, in ogni caso, che è possibile<sup>2</sup> dimostrare che sono gruppi amenabili tutti i gruppi che soddisfano alcune condizioni astratte (come la risolubilità), le quali sono banalmente verificate da  $G_1$  e da  $G_2$ .

Per fare chiarezza, ricapitoliamo le proprietà riguardanti misure su  $G_n$  e su  $\mathbb{R}^n$  ricavate finora:

1. non esiste una misura  $\mu$ , definita su  $P(\mathbb{R}^n)$ , numerabilmente additiva, invariante per isometrie, tale che  $\mu([0, 1]^n) = 1$  (paradosso di Vitali);
2. non esiste una misura  $\mu$ , definita su  $P(\mathbb{R}^n)$  (con  $n \geq 3$ ), finitamente additiva, invariante per isometrie, tale che  $\mu([0, 1]^n) = 1$  (paradosso di Hausdorff);
3. esiste una misura  $\mu$ , definita su una sottoalgebra di  $P(\mathbb{R}^n)$ , numerabilmente additiva, invariante per isometrie, tale che  $\mu([0, 1]^n) = 1$  (misura di Lebesgue);
4.  $G_1$  e  $G_2$  sono amenabili. Per  $n \geq 3$ ,  $G_n$  non è amenabile.

Il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione<sup>3</sup>, chiarisce perchè l'amenabilità di un gruppo ha così tanta importanza nel contesto della Teoria della Misura e degli insiemi paradossali:

**Teorema 3.2.6** (Teorema di Estensione Invariante)(AS). *Sia  $X$  un insieme e  $G$  un gruppo di permutazioni di  $X$  che agisce su  $X$ . Se  $G$  è amenabile, e  $\mu$  è una misura definita su una sottoalgebra di  $\mathcal{P}(X)$ , finitamente additiva,  $G$ -invariante, allora esiste un'estensione di  $\mu$ , che chiameremo  $\bar{\mu}$ , che è definita su  $\mathcal{P}(X)$ , è finitamente additiva, ed è  $G$ -invariante.*

L'inesistenza della misura di cui al punto 1, su tutti gli spazi Euclidei, porta inevitabilmente ad una domanda: è possibile ottenere una misura analoga richiedendo meno ipotesi, ad esempio rinunciando all'additività numerabile e richiedendo solo l'additività finita? La risposta a questa domanda è negativa in dimensione  $\geq 3$ , come mostra il paradosso di Hausdorff (punto 2). Il Teorema di Estensione Invariante, invece, mostra che, grazie all'amenabilità di  $G_1$  e  $G_2$ , in queste due dimensioni un'estensione, finitamente additiva, della misura di Lebesgue a *tutti* i sottoinsiemi dello spazio, esiste.

**Corollario 3.2.7** (AS). *Se  $G$  è un gruppo amenabile di isometrie di  $\mathbb{R}^n$ , allora esiste un'estensione della misura di Lebesgue, definita su  $P(\mathbb{R}^n)$ , finitamente additiva, e  $G$ -invariante. In particolare, per  $n = 1, 2$ , esiste un'estensione della misura di Lebesgue, definita su  $P(\mathbb{R}^n)$ , finitamente additiva, ed invariante per isometrie.*

Il Corollario 3.2.7, oltre ad evidenziare gli effetti delle differenze tra  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_n$ , con  $n \geq 3$ , sull'esistenza di certe misure su  $P(\mathbb{R}^n)$ , mostra anche che gli

---

<sup>2</sup>Si veda [WAG].

<sup>3</sup>Si veda [WAG].

insiemi  $G_n$ -paradossali di  $\mathbb{R}^2$  sono profondamente diversi da quelli di  $\mathbb{R}^n$ , con  $n \geq 3$ . Come vedremo nel Capitolo 4, infatti, il Paradosso di Banach-Tarski nella sua forma più generale, afferma che, per  $n \geq 3$ , tutti i sottoinsiemi limitati e con interno non vuoto di  $\mathbb{R}^n$  sono  $G_n$ -paradossali. Questa situazione è ben lontana dalla situazione in dimensioni minori. Infatti, vale la seguente

**Proposizione 3.2.8 (AS).** *Nessun sottoinsieme, limitato e con interno non vuoto, di  $\mathbb{R}$  (risp.  $\mathbb{R}^2$ ), è  $G_1$ -paradossale (risp.  $G_2$ -paradossale).*

*Dimostrazione.* Sia  $X$  un insieme, limitato e con interno non vuoto, di  $\mathbb{R}$ . Allora  $X$  contiene un intervallo  $I$ , ed è contenuto in un intervallo  $J$ . Dato che esiste una misura  $\mu$  definita su  $P(\mathbb{R})$ , finitamente additiva, invariante per isometrie, che coincide con la misura di Lebesgue negli insiemi in cui quest'ultima è definita, ne consegue che  $0 < \mu(I) \leq \mu(J) < \infty$ . Per le proprietà delle misure, essendo  $I \subseteq X \subseteq J$ , si ha  $0 < \mu(I) \leq \mu(X) \leq \mu(J) < \infty$ , ovvero  $0 < \mu(X) < \infty$ . Se  $X$  fosse  $G_1$ -paradossale, allora sarebbe  $G_1$ -trascurabile, ma questo è in contraddizione con  $0 < \mu(X) < \infty$ . Segue dunque che  $X$  non è  $G_1$ -paradossale. Per quanto riguarda  $\mathbb{R}^2$ , si può ripetere lo stesso procedimento utilizzando quadrati anzichè intervalli.  $\square$

Per concludere questa sezione, facciamo notare che il risultato ottenuto dalla Proposizione 3.2.8 può essere migliorato nel caso di  $\mathbb{R}$ : infatti, si può dimostrare che *nessun* sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  è  $G_1$ -paradossale. Per quanto riguarda  $\mathbb{R}^2$ , invece, il paradosso di Sierpinski-Mazurkiewicz mostra che certamente esistono sottoinsiemi paradossali di  $\mathbb{R}^2$ : tuttavia, come già fatto notare, l'insieme paradossale del Paradosso di Sierpinski-Mazurkiewicz è illimitato e numerabile, quindi ha interno vuoto. La seguente domanda sorge quindi spontanea:

**Problema 3.2.9.** Esistono sottoinsiemi limitati di  $\mathbb{R}^2$  che sono  $G_2$ -paradossali?

Si tratta di un problema della matematica rimasto irrisolto per molto tempo, ed una risposta positiva a tale domanda è stata data nel 1987 da Just<sup>4</sup>. In ogni caso, l'esistenza di un tale insieme non può dirci più di quanto già sappiamo nell'ambito della Teoria della Misura: infatti, *qualunque* sottoinsieme  $G_2$ -paradossale e limitato del piano è  $G_2$ -trascurabile, come l'insieme paradossale di Sierpinski-Mazurkiewicz, a causa dell'esistenza di una misura finitamente additiva e  $G_2$ -invariante su  $P(\mathbb{R}^2)$ .

---

<sup>4</sup>Per un esempio di costruzione di un sottoinsieme del piano, limitato e  $G_2$ -paradossale, si veda [LAC3], pag. 161.

## Capitolo 4

# Il paradosso di Banach-Tarski

### 4.1 Il paradosso

L'idea di decomporre una figura geometrica (in due o in più dimensioni) è presente nella matematica fin dai tempi della geometria greca, nella quale per la prima volta il metodo di dissezione di un poligono in poligoni più piccoli viene utilizzato per derivare formule per le aree di poligoni qualunque. Tradizionalmente, nella decomposizione e ricomposizione del poligono, venivano considerati trascurabili i segmenti della frontiera di ogni poligono. Una nuova forma di “dissezione” delle figure piane (e delle figure di ogni dimensione, come vedremo) può essere descritta considerando anche i punti della frontiera degli insiemi della decomposizione, ed allargando la classe dei pezzi della decomposizione coinvolgendo insiemi più generali dei poligoni. Partiamo innanzitutto dalla nozione originale di congruenza per dissezione di una figura piana:

**Definizione 4.1.1.** Due poligoni  $P$  e  $Q$  nel piano si dicono *congruenti per dissezione* se esistono due famiglie finite  $\{P_i\}_{i \in I}$  e  $\{Q_i\}_{i \in I}$  di poligoni del piano, ed una famiglia  $\{g_i\}_{i \in I}$  di isometrie del piano, tali che:

1.  $(\forall i \in I)(g_i(P_i) = Q_i)$ ;
2.  $\bigcup_{i \in I} P_i = P$  e  $\bigcup_{i \in I} Q_i = Q$ ;
3.  $(\forall i, j \in I)((i \neq j) \Rightarrow ((\text{Int}(P_i) \cap \text{Int}(P_j) = \emptyset) \wedge (\text{Int}(Q_i) \cap \text{Int}(Q_j) = \emptyset)))$ .

Chiameremo *pezzi poligonali* della dissezione i poligoni  $\{P_i\}_{i \in I}$  e  $\{Q_i\}_{i \in I}$ .

Intuitivamente, due poligoni del piano si dicono *congruenti per dissezione* se ognuno di essi può essere decomposto in un numero finito di poligoni disgiunti (non tenendo conto della frontiera), i quali, riarrangiati tramite isometrie (e senza tenere conto della frontiera), formano l'altro poligono.

*Osservazione 4.1.2.* La relazione “essere congruenti per dissezione” (che indicheremo brevemente con  $\sim_d$ ) sull'insieme dei poligoni nel piano, è una relazione di equivalenza: difatti

1. (riflessività) chiaramente ogni poligono è congruente a se stesso usando 1 pezzo (se stesso);
2. (simmetria) se uno dei due poligoni può essere diviso in pezzi poligonali, i quali possono essere riarrangiati tramite isometrie per formare l'altro poligono, allora basta considerare gli stessi pezzi e le inverse delle isometrie appena utilizzate, per riottenere il primo poligono;
3. (transitività) la dimostrazione della transitività di  $\sim_d$  può essere data per *sovrapposizione*: supponiamo che  $A, B, C$  siano poligoni, e che  $A \sim_d B$ ,  $B \sim_d C$ . Allora  $A = \cup_{i=1}^n A_i$ ,  $B = \cup_{i=1}^n B_i = \cup_{j=1}^m \tilde{B}_j$  e  $C = \cup_{j=1}^m C_j$  dove gli  $A_i, B_i, \tilde{B}_j, C_j$  sono poligoni: per ipotesi, esistono  $\{g_i\}_{i=1}^n, \{h_j\}_{j=1}^m$  tali che  $g_i(A_i) = B_i$  e  $h_j(\tilde{B}_j) = C_j$ . Sia  $B_{ij} = B_i \cap \tilde{B}_j$ : allora, essendo l'intersezione di due poligoni un poligono, si ha che  $\{B_{ij}\}$  è una decomposizione in poligoni di  $B$ : inoltre, definiti  $A_{ij} = g_i^{-1}(B_{ij})$  e  $C_{ij} = h_j(B_{ij})$ , anche  $\{A_{ij}\}$  e  $\{C_{ij}\}$  sono decomposizioni in poligoni, rispettivamente, di  $A$  e  $C$ . Si ha dunque  $C_{ij} = h_j(g_i(A_{ij}))$ : ne consegue che  $A \sim_d C$ .

Dalla dimostrazione della transitività, emerge il fatto che se  $A$  e  $B$  sono congruenti per dissezione con  $n$  pezzi poligonali (detto più concisamente,  $A \sim_d^n B$ ), e  $B$  e  $C$  lo sono con  $m$  pezzi, allora  $A$  e  $C$  sono congruenti per dissezione e bastano  $nm$  pezzi per ottenere la decomposizione cercata. Chiaramente, è possibile che esistano decomposizioni che fanno uso di un numero minore di pezzi.

Due poligoni congruenti per dissezione hanno la stessa area<sup>1</sup>, data dalla somma delle aree dei singoli poligoni che formano la composizione. Il viceversa è ancora valido, sebbene non sia altrettanto immediato da verificare: la dimostrazione fa uso del fatto che  $\sim_d$  è una relazione di equivalenza.

**Teorema 4.1.3** (Teorema di Bolyai-Gerwien). *Due poligoni sono congruenti per dissezione se e solo se essi hanno la stessa area.*

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che se due poligoni hanno la stessa area allora sono congruenti per dissezione. Utilizzando il fatto che  $\sim_d$  è una relazione di equivalenza, ci basta dimostrare che ogni poligono è congruente per dissezione ad un quadrato: difatti, dato che la congruenza per dissezione preserva le aree, due poligoni con la stessa area sono congruenti per dissezione allo stesso quadrato, e quindi per la transitività di  $\sim_d$  essi sono congruenti per dissezione. Mostriamo prima che ogni triangolo è congruente per dissezione ad un quadrato: la figura (4.1.1 , a) mostra come si possa dissezionare un triangolo qualunque per ottenere un rettangolo. Ora, ogni rettangolo con base  $a$  e altezza  $h$  tali che  $a \leq 4h$  può essere dissezionato per formare un quadrato, come mostrato in figura (4.1.1 , b); se fosse  $a > 4h$ , allora è facile ottenere per dissezione un rettangolo di area  $a'$  e altezza  $h'$  che soddisfa la relazione  $a' \leq 4h'$ , come mostrato in figura (4.1.1 , c). Ne consegue che ogni triangolo è congruente per dissezione ad un quadrato: poichè ogni poligono può essere sempre dissezionato in triangoli, i quali a loro volta sono congruenti per dissezione ad un quadrato, per dimostrare la tesi è sufficiente dimostrare che è possibile dissezionare due

<sup>1</sup>Per "area" si sottintende la misura bidimensionale di Lebesgue, ricordando che un poligono nel piano ha sempre area misurabile

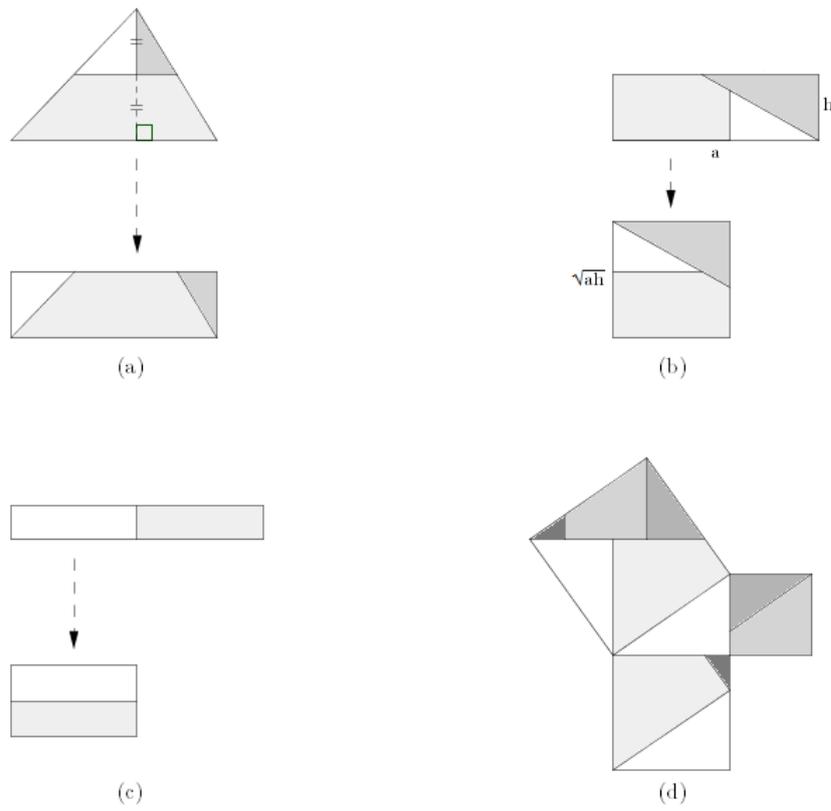


Figura 4.1.1: Teorema (4.1.3)

quadrati (quindi un numero finito di quadrati) di aree qualsiasi, per formare un altro quadrato. Per quest'ultima parte della dimostrazione, sfruttiamo una dimostrazione geometrica del celebre Teorema di Pitagora, mostrata in figura (4.1.1, d). Dunque, a partire da un poligono qualunque, esso può essere dissezionato in triangoli: ognuno di questi triangoli è congruente per dissezione ad un quadrato: dissezionando tali quadrati, e riarrangiando i pezzi, è possibile formare un unico quadrato, il quale è dunque congruente per dissezione al poligono di partenza.  $\square$

La dimostrazione del teorema precedente fornisce un metodo, costruttivo, per ottenere la congruenza per dissezione tra un qualunque poligono ed un quadrato di area uguale: tuttavia, la decomposizione trovata in generale fa uso di un numero di pezzi che può essere ridotto (per esempio, si può mostrare che un triangolo equilatero è congruente per dissezione ad un quadrato utilizzando solo 4 pezzi). Il Teorema di Bolyai-Gerwien mostra, sostanzialmente, che l'area è una proprietà delle classi di equivalenza modulo la relazione di equivalenza  $\sim_d$  sui poligoni del piano.

*Osservazione 4.1.4.* Si può generalizzare in modo ovvio la Definizione 4.1.1 al caso dei poliedri in  $\mathbb{R}^3$  o, più in generale, al caso dei politopi in  $\mathbb{R}^n$ . Analogamente al caso del piano, si può dimostrare che la relazione tra politopi  $n$ -dimensionali “essere congruenti per dissezione” è una relazione di equivalenza. Viene allora naturale chiedersi se anche in dimensione  $n$  valga l'analogo del Teorema 4.1.3: ad esempio, è vero che due poliedri hanno lo stesso volume se e solo se sono congruenti per dissezione? Chiaramente, è vero che due poliedri che sono congruenti per dissezione hanno lo stesso volume (dato dalla somma dei volumi dei poliedri della decomposizione). Il viceversa è un problema molto profondo della matematica: basti pensare al terzo dei famosi 23 problemi di Hilbert:

*Problema (Terzo problema di Hilbert).* È vero che ogni tetraedro regolare in  $\mathbb{R}^3$  è congruente per dissezione ad un cubo?

Nel 1900, Dehn dimostrò (utilizzando strumenti di algebra astratta) che la risposta al terzo problema di Hilbert è negativa. Questo, chiaramente, implica che due poliedri aventi lo stesso volume non sono necessariamente congruenti per dissezione: non esiste un analogo del Teorema 4.1.3 nello spazio. Tuttavia, ci si può chiedere se, allargando la classe dei “pezzi” ammissibili per la decomposizione del poliedro, sia possibile generalizzare tale teorema al caso dello spazio. Vedremo in che modo il Paradosso di Banach-Tarski implichi tale generalizzazione.

La seguente è una versione “insiemistica” della congruenza per dissezione: in essa, qualunque tipologia di insieme è ammessa. Per definire tale tipologia di “dissezione insiemistica” ci ricollegiamo a quanto visto nei precedenti capitoli, operando nell'ambito delle azioni di un gruppo su un insieme.

**Definizione 4.1.5.** Sia  $X$  un insieme, e  $G$  un gruppo che agisce su  $X$ . Siano  $A, B \subseteq X$  sottoinsiemi di  $X$ . Si dice che  $A$  e  $B$  sono  $G$ -equidecomponibili se esiste una partizione  $\{A_i\}_{i=1}^n$  di  $A$ , una partizione  $\{B_i\}_{i=1}^n$  di  $B$ , ed una famiglia  $\{g_i\}_{i=1}^n$  di elementi di  $G$  tali che si abbia

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})(g_i \cdot A_i = B_i). \quad (4.1.1)$$

Utilizzeremo la notazione  $A \sim_G B$  per indicare due sottoinsiemi  $A, B$  di  $X$  che sono  $G$ -equidecomponibili. Tradizionalmente,  $X$  è uno spazio metrico e  $G$  è il gruppo delle sue isometrie. Allora la (4.1.1) può essere scritta nel seguente modo equivalente:

$$(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\})(g_i(A_i) = B_i). \quad (4.1.2)$$

Utilizzeremo la notazione  $A \sim_G^n B$  per indicare due insiemi  $G$ -equidecomponibili utilizzando  $n$  pezzi. Nel seguito, riferendoci a spazi metrici, quando parleremo di equidecomponibilità, ci riferiremo alla  $G$ -decomponibilità, dove  $G$  è il gruppo delle isometrie dello spazio metrico.

La dimostrazione del fatto che  $\sim_G$  è una relazione di equivalenza è perfettamente analoga a quella riguardante la relazione  $\sim_d$  di congruenza per dissezione: in particolare, anche qui se  $A \sim_G^n B$  e  $B \sim_G^m C$ , allora  $A \sim_G C$  e sono sufficienti  $nm$  pezzi per la decomposizione. La definizione di  $G$ -equidecomponibilità ci consente di ridefinire il concetto di paradossalità di un  $G$ -insieme in termini di  $G$ -equidecomponibilità:

**Definizione 4.1.6.** Sia  $X$  un insieme e  $G$  un gruppo che agisce su  $G$ . Un sottoinsieme  $E \subseteq X$  si dice  $G$ -paradossale se esistono  $A, B \subseteq E$  disgiunti e tali che  $A \sim_G E$  e  $B \sim_G E$ .

Tenendo presente l'Osservazione (2.1.19), si verifica immediatamente che la definizione (4.1.6) è perfettamente equivalente alla definizione di  $G$ -paradossalità data nel Capitolo 2. La cosa interessante è che, così come l'area era una proprietà delle classi di equivalenza modulo  $\sim_d$  sull'insieme dei poligoni del piano, anche la  $G$ -paradossalità è una proprietà delle classi di equivalenza modulo  $\sim_G$  sull'insieme delle parti  $\mathcal{P}(X)$ , come mostra la seguente proposizione:

**Proposizione 4.1.7.** Sia  $G$  un gruppo e  $X$  un  $G$ -insieme. Siano  $E, E' \subseteq X$  sottoinsiemi di  $X$ . Se  $E$  è  $G$ -paradossale, ed  $E \sim_G E'$ , allora anche  $E'$  è  $G$ -paradossale.

*Dimostrazione.* sia  $I = \{1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ . Siano  $\{E_i\}_{i \in I}, \{E'_i\}_{i \in I}$  partizioni, rispettivamente, di  $E$  e di  $E'$ , tali che esista la famiglia  $\{g_i\}_{i \in I} \subseteq G$  di elementi di  $G$  tale che  $(\forall i \in I)(g_i(E_i) = E'_i)$ . Dato che  $E$  è  $G$ -paradossale, esistono  $A, B \subseteq E$  tali che  $A \cap B = \emptyset$  e  $A \sim_G E \sim_G B$ . Siano  $A' = \cup_{i \in I} g_i(A \cap E_i)$  e  $B' = \cup_{i \in I} g_i(B \cap E_i)$ : poichè gli  $A \cap E_i$  (risp. gli  $B \cap E_i$ ) sono disgiunti, si ha che  $A' \sim_G A \sim_G E \sim_G E'$  (risp.  $B' \sim_G B \sim_G E \sim_G E'$ ); inoltre, poichè  $(\forall i \in I)(g_i(E_i) = E'_i \subseteq E')$ , si ha  $A' \subseteq E'$  e  $B' \subseteq E'$ . Ci resta da dimostrare che  $A' \cap B' = \emptyset$ . Ma, dato che  $(\forall h, k \in I)((A \cap E_h) \cap (B \cap E_k) = \emptyset)$ , allora, dato che le  $g_i$  sono permutazioni di  $X$ ,  $(\forall h, k \in I)(g_h(A \cap E_h) \cap g_k(B \cap E_k) = \emptyset)$ , e quindi  $A' \cap B' = \emptyset$ .  $\square$

Qual è la correlazione tra equidecomponibilità e congruenza per dissezione (nel caso dei poligoni o dei poliedri)? Facciamo qualche osservazione:

*Osservazione 4.1.8.* Mentre la congruenza per dissezione conserva le aree (o i volumi, o le misure  $n$ -dimensionali di Lebesgue, se ci riferiamo a generalizzazioni in dimensione 3 o  $n$  del concetto di poligono), al contrario, il fatto che due sottoinsiemi  $A, B$  di  $\mathbb{R}^2$  (o più in generale di  $\mathbb{R}^n$ ) siano equidecomponibili non implica a priori che essi abbiano la stessa area (o la stessa misura

$n$ -dimensionale di Lebesgue): difatti, stavolta i pezzi della decomposizione potrebbero essere non misurabili secondo Lebesgue, e di conseguenza non sarebbe possibile applicare il fatto che la misura coincide con la somma delle misure dei singoli pezzi. Non è quindi, a priori, errata la congettura che diversi insiemi di misura differente possano essere equidecomponibili. Come vedremo, infatti, il Paradosso di Banach-Tarski implica addirittura che tutti i sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^3$  limitati e con interno non vuoto siano equidecomponibili! Tuttavia, il risultato non dipende solo dalle proprietà della relazione di equidecomponibilità, ma anche e soprattutto dalle proprietà astratte del gruppo di isometrie dello spazio e dalle proprietà astratte dell'azione del gruppo sullo spazio, come abbiamo già visto nella Sezione 3.2.

*Osservazione 4.1.9.* Poiché l'equidecomponibilità ammette l'utilizzo di insiemi qualsiasi per la decomposizione degli insiemi, si potrebbe pensare che la congruenza per dissezione implichi la  $G$ -equidecomponibilità. Questa proprietà, che potrebbe sembrare intuitivamente ovvia, nasconde invece una problematica. Nella congruenza per dissezione i pezzi *non* sono necessariamente disgiunti, anche se gli eventuali punti di intersezione tra due pezzi fanno certamente parte della loro frontiera, ed in questo caso non sono influenti. Invece, nella  $G$ -equidecomponibilità, i pezzi della decomposizione *devono* essere disgiunti, e *tutti* i punti contano, compresi quelli di frontiera. In altre parole, il concetto di equidecomponibilità non è una generalizzazione del concetto di congruenza per dissezione: ad esempio, dati due poligoni del piano  $P \sim_d^n Q$ , se  $\{P_i\}_{i=1}^n$  e  $\{Q_i\}_{i=1}^n$  sono i pezzi poligonali della dissezione, e  $\{g_i\}_{i=1}^n$  sono le isometrie, come nella Definizione 4.1.1, allora, detti  $\tilde{P} = \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(P_i)$  e  $\tilde{Q} = \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(Q_i)$ , è banalmente vero che  $\tilde{P} \sim_G^n \tilde{Q}$ , ma non è chiaro come tale relazione possa essere estesa naturalmente agli insiemi  $P$  e  $Q$  completi, in quanto bisogna fare attenzione a come le isometrie  $g_i$  agiscono sulle frontiere dei  $P_i$ . Nelle prossime righe mostreremo come, utilizzando una particolare tecnica di dimostrazione (che chiameremo *dimostrazione per assorbimento*), sia possibile dimostrare che, almeno nel caso dei poligoni, congruenza per dissezione implica equidecomponibilità (rispetto alle isometrie del piano). Tuttavia, è bene usare una certa cautela, nel generalizzare risultati relativi alla congruenza per dissezione al caso della  $G$ -equidecomponibilità.

Ci sono diversi modi per confrontare la “grandezza” di insiemi: la teoria matematica della misura è un'estensione formale di ciò che, nella pratica, è sempre stato fatto dall'uomo per misurare aree o volumi. Tuttavia, l'idea più “primitiva” per definire la grandezza di un insieme consiste certamente nel contare i suoi elementi. Detta  $\simeq$  la relazione di equipotenza tra insiemi, definita su un insieme di insiemi, è possibile definire una relazione  $\preceq$  tra cardinali, in questo modo:  $\#A \preceq \#B$  se e solo se  $A \simeq B_1 \subseteq B$  (la relazione non dipende dai rappresentanti scelti grazie alla transitività di  $\simeq$ ). Il celebre Teorema di Schröder-Bernstein afferma che la relazione  $\preceq$  tra cardinali è antisimmetrica, il che, unito al fatto che essa è anche riflessiva e transitiva, ne fa una relazione d'ordine parziale sui cardinali. Ammettendo l'Assioma di Scelta, inoltre, la relazione  $\preceq$  è addirittura un buon ordine, e quindi le cardinalità, di due insiemi possono sempre essere confrontate. Banach riuscì a generalizzare il Teorema di Schröder-Bernstein, mostrando che, dato un insieme  $X$  ed una relazione di equivalenza  $\sim$  definita su  $\mathcal{P}(X)$ , la relazione  $\preceq$  definita sulle classi dell'insieme quoziente  $\mathcal{P}(X)/\sim$  in questo modo: “[ $A$ ]  $\preceq$  [ $B$ ]  $\Leftrightarrow A$  è equivalente, modulo  $\sim$ , ad un sottoinsieme di

$B^n$  (e ben definita per la transitività di  $\sim$ ), è antisimmetrica ogni volta che la relazione  $\sim$  soddisfa due proprietà astratte:

**Teorema 4.1.10** (Teorema di Banach-Schröder-Bernstein). *Sia  $X$  un insieme, e  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $\mathcal{P}(X)$ . Sia  $\preceq$  la relazione definita sulle classi dell'insieme quoziente  $\mathcal{P}(X)/\sim$  in questo modo: “[ $A$ ]  $\preceq$  [ $B$ ]  $\Leftrightarrow$  ( $\exists B' \subseteq B$ )( $A \sim B'$ )”. La relazione  $\preceq$  è antisimmetrica ogni volta che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. se  $A \sim B$  allora esiste una bigezione  $f : A \rightarrow B$  tale che  $C \sim f(C)$  per ogni  $C \subseteq A$ ;
2. se  $A_1 \sim A_2$ ,  $B_1 \sim B_2$  e  $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = \emptyset$ , allora  $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$ .

*Dimostrazione.* Siano  $X$  e  $\sim$  come nell'enunciato del teorema. La relazione  $\sim$  soddisfi la (1) e la (2). È sufficiente mostrare che, dati  $A, B \in X$  tali che [ $A$ ]  $\preceq$  [ $B$ ] e [ $B$ ]  $\preceq$  [ $A$ ], allora  $A \sim B$ . Siano quindi  $A, B \subseteq X$  e  $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$  tali che  $A \sim B_1$  e  $B \sim A_1$ . La (1) garantisce che esistano le bigezioni  $f : A \rightarrow B_1$  e  $g : A_1 \rightarrow B$  con la proprietà di cui al punto 1. Sia  $C_0 = A \setminus A_1$ , e definiamo induttivamente ( $\forall n \in \mathbb{N}$ )( $C_{n+1} = g^{-1}(f(C_n))$ ). Sia  $C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$ . Dalla definizione di  $C_n$ , risulta che ( $\forall n \in \mathbb{N}^+$ )( $C_n \subseteq A_1$ ). Dunque  $(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \cap C_0 = \emptyset$ , e quindi  $g(A \setminus C) = g((A \setminus C_0) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = g(A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n)$ ; poichè  $g$  è una bigezione, si ha  $g(A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = g(A_1) \setminus g(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} g(C_n) = B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} f(C_{n-1}) = B \setminus f(C)$ . Riassumendo,  $g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$  e quindi, per la proprietà (1),  $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$ ; inoltre, per la stessa proprietà,  $C \sim f(C)$ : dalla proprietà (2) risulta allora che  $(A \setminus C) \cup C \sim (B \setminus f(C)) \cup f(C)$ , ovvero  $A \sim B$ .  $\square$

La relazione di equipotenza soddisfa le condizioni (1) e (2) e quindi il Teorema di Schröder-Bernstein è un corollario del Teorema di Banach-Schröder-Bernstein. Il seguente corollario, invece, mostra che anche la relazione di  $G$ -equidecomponibilità soddisfa le ipotesi del Teorema di Banach-Schröder-Bernstein:

**Corollario 4.1.11.** *Sia  $X$  un  $G$ -insieme. La relazione  $\sim_G$  definita su  $\mathcal{P}(X)$  soddisfa le (1) e (2) del Teorema di Banach-Schröder-Bernstein. Pertanto, se, dati  $A, B \subseteq X$ , esistono  $A_1 \subseteq A$  e  $B_1 \subseteq B$  tali che  $A \sim_G B_1$  e  $B \sim_G A_2$ , allora si ha  $A \sim_G B$ .*

*Dimostrazione.* La dimostrazione del fatto che  $\sim_G$  soddisfa la (2) deriva banalmente dalla definizione di  $\sim_G$ ; per quanto riguarda la (1), siano  $A, B \subseteq X$  tali che  $A \sim_G B$ . Allora esistono  $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^n$  partizioni, rispettivamente, di  $A$  e di  $B$ , e  $\{g_i\}_{i=1}^n$  elementi di  $G$  tali che ( $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ )( $g_i \cdot A_i = B_i$ ). Definiamo una funzione  $g : A \rightarrow B$  in questo modo:

$$g : \begin{array}{l} A \rightarrow B \\ x \mapsto g_i \cdot x \quad \text{sse } x \in A_i \end{array} ;$$

la funzione è ben definita in quanto  $\{A_i\}_{i=1}^n$  è una partizione di  $A$ . Analogamente, la funzione

$$g' : \begin{array}{l} B \rightarrow A \\ y \mapsto g_i^{-1} \cdot y \quad \text{sse } y \in B_i \end{array} ;$$

è ben definita in quanto  $\{B_i\}_{i=1}^n$  è una partizione di  $B$ . Inoltre, è immediato verificare che sono una l'inversa dell'altra, e questo prova che  $g$  è una bigezione. Sia ora  $C \subseteq A$ . Definito  $C_i = C \cap A_i$ , è evidente che  $\{C_i\}_{i=1}^n$  sia una partizione di  $C$ . Dunque  $g(C) = g(\bigcup_{i=1}^n C_i) = \bigcup_{i=1}^n g_i \cdot C_i$ ; ovviamente i  $g_i \cdot C_i$  sono a due a due disgiunti in quanto  $g_i \cdot C_i \subseteq B_i$ : ne consegue che  $g(C) \sim_G C$ .  $\square$

Una prima conseguenza di questo corollario nell'ambito della  $G$ -paradossalità, è data dal seguente

**Corollario 4.1.12.** *Sia  $X$  un  $G$ -insieme. Un sottoinsieme  $E$  di  $X$  è  $G$ -paradossale se e solo se esistono  $\tilde{A}, \tilde{B} \subseteq E$  costituenti una partizione di  $E$ , e tali che  $\tilde{A} \sim_G E \sim_G \tilde{B}$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $E$  sia  $G$ -paradossale: allora esistono  $A, B \subseteq E$ , disgiunti e tali che  $A \sim_G E \sim_G B$ . Si ha  $E \sim_G B \subseteq E \setminus A$  ed inoltre  $E \setminus A \sim_G E \setminus A \subseteq E$ : in termini della relazione  $\preceq_G$  indotta dalla  $\sim_G$  nel modo descritto nell'enunciato del Teorema 4.1.10, si ha  $E \preceq_G E \setminus A$  ed  $E \setminus A \preceq_G E$ : per il Corollario 4.1.11 allora si ha  $E \sim_G E \setminus A$ . Ponendo  $\tilde{A} = A$  e  $\tilde{B} = E \setminus A$  si ottiene la tesi.  $\square$

Il Corollario 4.1.11 fornisce un potente strumento: per dimostrare l'equidecomponibilità di due insiemi, è sufficiente dimostrare che ognuno di essi è equidecomponibile con un sottoinsieme dell'altro. Nell'Osservazione 4.1.9 abbiamo sottolineato come, riferendoci al caso del piano, le frontiere dei poligoni risultino essere ininfluenti rispetto alla congruenza per dissezione, mentre esse sono influenti nel contesto della  $G$ -equidecomponibilità. Grazie al Corollario 4.1.11, ora siamo in grado di "aggirare" gli ostacoli descritti nell'Osservazione 4.1.9: chiameremo la seguente tecnica di dimostrazione *dimostrazione per assorbimento*.

**Teorema 4.1.13.** *Siano  $P$  e  $Q$  poligoni del piano: allora  $P \sim_d Q$  implica che  $P \sim_G Q$  (dove  $G$  denota il gruppo delle isometrie del piano).*

*Dimostrazione.* Nell'Osservazione 4.1.9 abbiamo già visto che, se  $P \sim_d Q$ ,  $\{P_i\}_{i=1}^n$  sono i pezzi poligonali della dissezione, e  $\{g_i\}_{i=1}^n$  sono le isometrie, come nella Definizione 4.1.1, allora, detti  $\tilde{P} = \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(P_i)$  e  $\tilde{Q} = \bigcup_{i=1}^n \text{Int}(Q_i)$ , si ha  $\tilde{P} \sim_G \tilde{Q}$ . Se riuscissimo a dimostrare che  $\tilde{P} \sim_G P$  e  $\tilde{Q} \sim_G Q$ , allora per la transitività di  $\sim_G$  avremmo  $P \sim_G Q$ , come desiderato. Notiamo che  $P \setminus \tilde{P}$  (risp.  $Q \setminus \tilde{Q}$ ) è composto dall'unione di un numero finito di segmenti, corrispondenti ai segmenti di frontiera dei poligoni  $P_i$  (risp.  $Q_i$ ). È sufficiente allora mostrare una proprietà più generale: se  $A$  è un sottoinsieme, limitato e con interno non vuoto, del piano, e  $T$  è un insieme, disgiunto da  $A$ , contenente un numero finito di segmenti limitati, allora  $A \sim_G A \cup T$ .

Proviamo quest'ultima affermazione. Sia  $D$  un disco chiuso contenuto in  $A$  di raggio  $r$ . Non è restrittivo supporre che  $T$  contenga un numero finito di segmenti di lunghezza minore di  $r$ : sia  $s$  uno di questi. Sia  $R$  un raggio del disco (senza considerare il centro del disco), e sia  $\theta$  una rotazione del piano attorno al centro del disco di ordine infinito (siamo sicuri che una tale rotazione esista, basta scegliere l'angolo di rotazione in modo che non sia un multiplo razionale di  $\pi$ ). Consideriamo l'insieme  $\bar{R} = R \cup \theta(R) \cup \theta^2(R) \cup \dots$ : allora possiamo partizionare  $D = (D \setminus \bar{R}) \cup \bar{R}$ . Mostriamo che  $D \cup s \sim_G D$ : a tal

proposito, notiamo che si ha  $D = (D \setminus \bar{R}) \cup \theta(\bar{R}) \cup R$ , e che questi 3 insiemi costituiscono una partizione di  $D$ . Sia  $\sigma$  un'isometria del piano che porta  $s$  in un sottoinsieme di  $R$ : allora, essendo  $D \setminus \bar{R} \sim_G D \setminus \bar{R}$  e  $\bar{R} \sim_G \theta(\bar{R})$ , si ha  $D \cup s = (D \setminus \bar{R}) \cup \bar{R} \cup s \sim_G (D \setminus \bar{R}) \cup \theta(\bar{R}) \cup \sigma(s) \subseteq D$ , e quindi  $D \cup s \preceq D$ . Poichè, ovviamente,  $D \preceq D \cup s$ , allora per il Teorema di Banach-Schröder-Bernstein si ha  $D \sim_G D \cup s$ . Possiamo ripetere questo procedimento per tutti i segmenti contenuti in  $T$ , ottenendo perciò  $D \sim_G D \cup T$ . Allora, essendo  $A = (A \setminus D) \cup D$ , otteniamo  $A \sim_G A \cup T$ .  $\square$

*Osservazione 4.1.14.* Il teorema appena dimostrato mostra come due poligoni aventi la stessa area siano sempre equidecomponibili. Il viceversa è ancora vero, sebbene meno elementare da provare. Infatti, nella Sezione 3.2 abbiamo dovuto utilizzare il Teorema di Estensione Invariante, per provare che esiste una misura definita su  $P(\mathbb{R}^2)$  che è un'estensione della misura di Lebesgue, è finitamente additiva ed è  $G_2$ -invariante: ne consegue che due poligoni di area diversa *non possono* essere equidecomponibili. Dunque, due poligoni del piano sono  $G_2$ -equidecomponibili se e solo se hanno la stessa area, e questa è un'equivalenza che vale solo in dimensione 2, come vedremo tra poco. Ci si potrebbe chiedere se valga questa equivalenza se, oltre ai poligoni, allargassimo la classe dei sottoinsiemi del piano considerati a *tutti* i sottoinsiemi Lebesgue-misurabili del piano. Ad esempio:

**Problema** (Problema della quadratura del cerchio di Tarski). È vero che ogni disco è  $G_2$ -equidecomponibile ad un quadrato della stessa area?

Nel 1990, è stata data una risposta positiva<sup>2</sup> a tale domanda, utilizzando solo traslazioni ed un numero di pezzi dell'ordine di  $10^{50}$ . Più in generale, è stato dimostrato il seguente teorema<sup>3</sup>:

**Teorema.** *Due domini di Jordan, con frontiera rettificabile e area uguale, sono  $T_2$ -equidecomponibili, dove  $T_2$  denota il gruppo delle traslazioni del piano.*

Questo risultato, chiaramente, implica un rafforzamento del Teorema 4.1.13, in quanto i poligoni sono domini di Jordan con frontiera rettificabile. Allora due poligoni della stessa area sono equidecomponibili utilizzando solamente traslazioni.

Con il Paradosso di Hausdorff, abbiamo mostrato che esiste un sottoinsieme numerabile  $D \subset S^2$  tale che  $S^2 \setminus D$  sia  $SO_3$ -paradossale (e quindi  $G_3$ -paradossale). Ci piacerebbe poter completare questo risultato, mostrando che tutta la sfera unitaria  $S^2$  è  $G_3$ -paradossale. In altre parole, ci piacerebbe poter *assorbire*  $D$  in  $S^2 \setminus D$ , mostrando che  $S^2 \sim_{G_3} S^2 \setminus D$ : allora il risultato è garantito dal fatto che la  $G_3$ -paradossalità è una proprietà delle classi di equivalenza di  $P(\mathbb{R}^3) / \sim_{G_3}$ . Mostriamo che, se  $D$  è un *qualsunque* sottoinsieme numerabile di  $S^2$ , allora può essere assorbito:

**Teorema 4.1.15.** *Se  $D$  è un sottoinsieme al più numerabile di  $S^2$ , allora  $S^2$  e  $S^2 \setminus D$  sono  $SO_3$ -equidecomponibili.*

<sup>2</sup>Si veda [LAC1] per una trattazione approfondita, comprendente la dimostrazione originale.

<sup>3</sup>Si veda [LAC2] per la dimostrazione originale del teorema.

*Dimostrazione.* Sia  $P \in D$ . Dato che  $D$  è numerabile, esiste almeno una coppia di punti antipodali di  $S^2$  che non appartengono a  $D$ . Allora esiste una retta  $l$  passante per l'origine, che non interseca  $D$ . Sia  $\theta \in [0, 2\pi)$ : fissiamo ad arbitrio un verso positivo di rotazione attorno ad  $l$ , e chiamiamo  $\rho_\theta$  la rotazione attorno ad  $l$  di angolo  $\theta$  e verso positivo. Sia  $P \in D$ : allora l'insieme  $A_P = \{\theta \in [0, 2\pi) \mid (\exists n \in \mathbb{N})(\rho_{n\theta}(P) \in D)\}$  è numerabile, per la numerabilità di  $D$ ; ne consegue che l'insieme  $A = \bigcup_{P \in D} A_P$  è numerabile. Dato che  $[0, 2\pi)$  ha la cardinalità del continuo, esiste un angolo  $\alpha \in [0, 2\pi) \setminus A$ . Si ha allora  $(\forall P \in D)(\forall n \in \mathbb{N})(\rho_{n\alpha}(P) \notin D)$ : allora, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha  $\rho_\alpha^n(D) \cap D = \emptyset$ , e quindi per ogni  $n, m \in \mathbb{N}$  si ha  $\rho_\alpha^n(D) \cap \rho_\alpha^m(D) = \emptyset$ . Sia  $\bar{D} = D \cup \rho_\alpha(D) \cup \rho_\alpha^2(D) \cup \dots$ : allora  $S^2 = (S^2 \setminus \bar{D}) \cup \bar{D} \sim_{SO_3} (S^2 \setminus \bar{D}) \cup \rho_\alpha(\bar{D})$ . Ma, essendo  $\rho_\alpha(\bar{D}) = \rho_\alpha(D) \cup \rho_\alpha^2(D) \cup \dots = \bar{D} \setminus D$ , si ha  $S^2 \sim_{SO_3} (S^2 \setminus \bar{D}) \cup \rho_\alpha(\bar{D}) = S^2 \setminus D$ , come volevasi dimostrare.  $\square$

**Corollario 4.1.16** (Paradosso di Banach-Tarski)(AS).  $S^2$  è  $SO_3$ -paradossale. Inoltre, ogni sfera di  $\mathbb{R}^3$  e ogni palla di  $\mathbb{R}^3$  è  $G_3$ -paradossale, e lo stesso  $\mathbb{R}^3$  è  $G_3$ -paradossale.

*Dimostrazione.* Il fatto che  $S^2$  sia  $SO_3$ -paradossale deriva dal Paradosso di Hausdorff (Teorema 3.1.16) e dal fatto che, per ogni sottoinsieme numerabile  $D$  di  $S^2$ , si ha  $S^2 \sim_{SO_3} S^2 \setminus D$ . Per quanto riguarda la seconda parte dell'enunciato, è sufficiente mostrare che ogni sfera (risp. palla) centrata nell'origine è paradossale: infatti, una qualunque sfera (risp. palla) di  $\mathbb{R}^3$  è una traslazione di una sfera (risp. palla) centrata nell'origine.

I ragionamenti fatti per dimostrare la  $SO_3$ -paradossalità di  $S^2$  possono essere ripetuti per ogni sfera centrata nell'origine, in quanto  $SO_3$  agisce separatamente su ognuna di queste sfere. Ne consegue che tutte le sfere di  $\mathbb{R}^3$  sono  $G_3$ -paradossali.

Sia ora  $B(r)$  la palla aperta di raggio  $r$  centrata nell'origine. Sia  $S^2(r)$  la sfera centrata nell'origine di raggio  $r$ : allora  $S^2(r)$  è  $SO_3$ -paradossale, e quindi esiste una partizione  $\{A_i\}_{i=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$  di  $S^2(r)$ , e delle rotazioni  $\{\rho_i\}_{i=1}^n, \{\sigma_j\}_{j=1}^m$  di  $SO_3$  tali che  $\{\rho_i(A_i)\}_{i=1}^n$  e  $\{\sigma_j(B_j)\}_{j=1}^m$  costituiscano ognuna una partizione di  $S^2(r)$ . Siano  $\bar{A}_i = \{\lambda \mathbf{x} \mid (\mathbf{x} \in A_i) \wedge (0 < \lambda < r)\}$  e  $\bar{B}_j = \{\lambda \mathbf{x} \mid (\mathbf{x} \in B_j) \wedge (0 < \lambda < r)\}$ : allora gli  $\{\bar{A}_i\}_{i=1}^n, \{\bar{B}_j\}_{j=1}^m$ , assieme alle rotazioni  $\{\rho_i(A_i)\}_{i=1}^n$  e  $\{\sigma_j(B_j)\}_{j=1}^m$ , costituiscono chiaramente una decomposizione paradossale di  $B(r) \setminus \{0\}$ . Ne consegue che  $B(r) \setminus \{0\}$  è  $G_3$ -paradossale. Dobbiamo quindi dimostrare che  $B(r) \setminus \{0\} \sim_{G_3} B(r)$ . Sia  $l$  una retta non passante per l'origine e tale che la distanza tra  $l$  e l'origine sia minore di  $\frac{r}{2}$ : allora una qualunque rotazione dello spazio rispetto a  $l$  manda l'origine in un punto di  $B(r)$ . Sia  $\rho$  una rotazione attorno ad  $l$  di ordine infinito (ovvero di angolo non multiplo razionale di  $\pi$ ), e sia  $D = \{0\} \cup \{\rho(0)\} \cup \{\rho^2(0)\} \cup \dots$ . Chiaramente  $B(r) = (B(r) \setminus D) \cup D \sim_{G_3} (B(r) \setminus D) \cup \rho(D)$ : ma  $\rho(D) = D \setminus \{0\}$ , e quindi  $B(r) \sim_{G_3} B(r) \setminus \{0\}$ .

Possiamo ricavare la decomposizione paradossale di  $\mathbb{R}^3$  ponendo  $r = \infty$ , e ragionando in maniera identica al caso della palla di raggio  $r$ .  $\square$

La paradossalità intuitiva di tale risultato è evidente: è possibile dividere una palla tridimensionale, la quale possiede un volume ben definito, in un numero finito di pezzi, i quali possono essere ricombinati usando solo isometrie dello spazio (che preservano il volume!) per formare due palle tridimensionali disgiunte

identiche alla prima, ed aventi quindi volume complessivo doppio! È evidente che la nozione usuale di “volume” di un sottoinsieme dello spazio (inteso come misura 3-dimensionale di Lebesgue), non può essere applicata a tutti i pezzi della decomposizione paradossale della palla. Il Paradosso rende ancora più chiare le conseguenze del Paradosso di Hausdorff, per quanto riguarda l’inesistenza di certe misure definite su  $P(\mathbb{R}^3)$  (si veda la Sezione 3.2), e allo stesso tempo evidenzia le profonde differenze tra  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . Infatti, abbiamo visto che in  $\mathbb{R}^2$  due poligoni sono  $G_2$ -equidecomponibili se e solo se hanno la stessa area. La seguente generalizzazione del Paradosso di Banach-Tarski mostra, invece, che in  $\mathbb{R}^3$  la situazione è tutt’altro che simile a quella di  $\mathbb{R}^2$ :

**Teorema 4.1.17** (Paradosso di Banach-Tarski, forma forte)(AS). *Tutti i sottoinsiemi limitati e con interno non vuoto di  $\mathbb{R}^3$  sono  $G_3$ -equidecomponibili. Ne consegue che tutti i sottoinsiemi limitati e con interno non vuoto di  $\mathbb{R}^3$  sono  $G_3$ -paradossali.*

*Dimostrazione.* Sia  $X$  un sottoinsieme limitato e con interno non vuoto di  $\mathbb{R}^3$ . Per dimostrare il teorema, è sufficiente dimostrare che  $X \sim_{G_3} B$ , dove  $B$  è una qualunque palla aperta contenuta in  $X$  (l’esistenza di  $B$  è garantita dal fatto che  $X$  ha interno non vuoto). Infatti, da questa proprietà se ne ricava che tutte le palle aperte di  $\mathbb{R}^3$  sono equidecomponibili, e quindi, per la transitività di  $\sim_{G_3}$ , la tesi. Utilizzeremo il Teorema di Banach-Schröder-Bernstein (Teorema 4.1.10). Chiaramente,  $B \preceq X$  in quanto  $B \subseteq X$ . Per mostrare che  $X \preceq B$ , utilizziamo la paradossalità di  $B$ . Innanzitutto, detto  $r$  il raggio di  $B$ , esiste un certo naturale  $n$  tale che  $X$  possa essere ricoperto dall’unione di  $n$  palle aperte di raggio  $r$  (eventualmente sovrapposte), in quanto  $X$  è un insieme limitato. Allora, dette  $B_1, \dots, B_n$  tali palle, si ha  $X \preceq \bigcup_{i=1}^n B_i$ . Ma, dette  $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n$   $n$  palle aperte di raggio  $r$  e disgiunte, per il Paradosso di Banach-Tarski, si ha  $B \sim_{G_3} \bigcup_{i=1}^n \tilde{B}_i$ , e, chiaramente,  $\bigcup_{i=1}^n B_i \preceq \bigcup_{i=1}^n \tilde{B}_i$ : ne consegue che  $X \preceq B$ , come volevasi dimostrare. La seconda parte dell’enunciato discende dal fatto che la paradossalità è una proprietà delle classi di equivalenza modulo  $\sim_{G_3}$ .  $\square$

La forma forte del Paradosso di Banach-Tarski è intuitivamente ancora più paradossale: è possibile dividere una pallina da golf in un numero finito di pezzi, e, tramite isometrie che preservano il volume, ricombinarli per ottenere una palla delle dimensioni del sole! Inoltre, come abbiamo già accennato nell’Osservazione 4.1.4, non solo esistono poliedri di volume differente che sono  $G_3$ -equidecomponibili, ma addirittura *tutti* i poliedri sono tra di loro equidecomponibili! L’equidecomponibilità si comporta in modo molto diverso dalla congruenza per dissezione. Come già osservato, la paradossalità di questo risultato si deve al fatto che questo è in contraddizione con il concetto intuitivo di volume di un sottoinsieme dello spazio: deve accadere necessariamente che i pezzi della decomposizione paradossale non siano misurabili. Riallacciandoci al discorso iniziato nell’Osservazione 4.1.4, abbiamo visto che un tetraedro regolare non è congruente per dissezione ad alcun cubo, mentre è invece equidecomponibile con qualunque cubo dello spazio. È possibile fare qualche richiesta sui pezzi, ed ottenere una versione dell’equidecomponibilità in cui due poliedri che sono equidecomponibili hanno lo stesso volume? I sottoinsiemi “colpevoli” dei poliedri, che ci impediscono di generalizzare la situazione di  $\mathbb{R}^2$ , sono evidente-

mente i sottoinsiemi non misurabili secondo Lebesgue. Viene dunque naturale farsi la seguente domanda:

**Problema.** È vero che ogni tetraedro regolare è equidecomponibile a qualche cubo utilizzando solo pezzi misurabili secondo Lebesgue?

Chiaramente, se un tetraedro regolare fosse equidecomponibile a qualche cubo usando solo pezzi misurabili, allora i due solidi avrebbero lo stesso volume, dato dalla somma delle misure dei vari pezzi. Non è ancora stata data una risposta soddisfacente a questa domanda; tuttavia, una congettura molto più generale è stata avanzata da Gardner:

**Congettura.** *Siano  $A$  e  $B$  due sottoinsiemi Lebesgue-misurabili di  $\mathbb{R}^n$ . Se  $A \sim_G B$ , dove  $G$  è un sottogruppo amenabile di  $G_n$ , allora  $A$  e  $B$  sono equidecomponibili utilizzando solo pezzi Lebesgue-misurabili.*

Il problema dell'equidecomponibilità di due sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  utilizzando solo pezzi Lebesgue-misurabili, è in ogni caso solo uno dei tanti problemi aperti della Teoria della Misura, derivanti dalla scoperta del Paradosso di Banach-Tarski.

# Bibliografia

- [WAG] Stan Wagon, *The Banach-Tarski Paradox*, 1985
- [RUD] Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, 1986
- [GAR] R.J. Gardner, *Measure theory and some problems in geometry*, 1989
- [LAC1] Miklós Laczkovich, *Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem*, 1990
- [LAC2] Miklós Laczkovich, *Decomposition of sets with small boundary*, 1992
- [LAC3] Miklós Laczkovich, *Paradoxical decompositions: a survey of recent results*, 1994
- [ART] Michael Artin, *Algebra*, 1997