UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

IL TEOREMA DI TYCHONOFF

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di
Annalisa Sardu

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

Introduzione

Il Teorema di Tychonoff afferma che il prodotto di una qualsiasi famiglia di spazi topologici compatti è compatto.
In questa tesi proponiamo una dimostrazione del Teorema di Tychonoff che dipende dal concetto di rete e dalla convergenza di Moore-Smith.
Il Teorema di Tychonoff è uno dei risultati più importanti della topologia generale e tra gli aspetti più interessanti vi è la sua equivalenza con l'Assioma di Scelta. In questa tesi si dimostra che l'Assioma di Scelta implica il Teorema di Tychonoff.
La tesi è suddivisa in tre capitoli.
Nel Capitolo 1 si definiscono le reti per generalizzare il concetto di successioni in spazi topologici qualunque e la loro convergenza di Moore-Smith. Vengono proposti alcuni importanti risultati che danno conto delle relazioni tra le reti e gli spazi di Hausdorff. Si mostra anche come la convergenza delle reti sia sufficiente a descrivere la continuità delle funzioni. I concetti di rete e sottorete hanno un ruolo fondamentale nella dimostrazione del Teorema di Tychonoff.
Il Capitolo 2 tratta gli spazi compatti, offrendo anche una definizio-

ne che fa uso della proprietà dell'intersezione finita. Vengono illustrate le relazioni tra la compattezza e gli spazi di Hausdorff per poi arrivare a dimostrare il Teorema 2.4.1 il quale correla gli spazi compatti alle reti universali e alla loro convergenza e rappresenta uno dei tasselli chiave per la dimostrazione del Teorema di Tychonoff.
Infine il Capitolo 3 è dedicato alla dimostrazione del Teorema di Tychonoff. Nella prima parte (Paragrafo 3.1) viene fornita la definizione di topologia prodotto nel caso di prodotti finiti e infiniti e le sue principali proprietà. La seconda parte (Paragrafo 3.2) contiene la dimostrazione del Teorema di Tychonoff.

Indice

Introduzione **i**

1 Reti negli spazi topologici **1**

1.1 Definizione di rete 2

1.2 Reti e proprietà di separazione 3

1.3 Reti e applicazioni continue 4

1.4 Reti e sottoreti 6

1.5 Reti universali 8

2 Spazi topologici compatti **11**

2.1 Definizione di compattezza 11

2.2 Alcune proprietà degli spazi compatti 13

2.3 Compattezza negli spazi di Hausdorff 15

2.4 Compattezza e reti 16

3 Prodotti e teorema di Tychonoff **19**

3.1 Prodotti finiti di spazi compatti 19

3.2 Prodotti infiniti di spazi compatti 23

Bibliografia **26**

Capitolo 1

Reti negli spazi topologici

Per studiare la continuità delle funzioni negli spazi metrici si utilizza il concetto di successione convergente, dimostrando che un'applicazione tra uno spazio metrico e un qualsiasi spazio topologico è continua se e solo se è sequenzialmente continua. Tale ragionamento viene a cadere quando si passa da spazi metrici a spazi topologici qualsiasi. Per questo motivo si introduce una generalizzazione delle successioni in spazi topologici: le reti.
Ricordando che una successione in uno spazio topologico X è un'applicazione $f : \mathbb{N}^+ \to X$, per poter definire una rete in un qualsiasi spazio topologico occorre preliminarmente dare la definizione di insieme diretto su X, atto a svolgere il ruolo che l'insieme totalmente ordinato $\mathbb{N}^+$ assume nella definizione di successione.

1.1 Definizione di rete

Definizione 1.1.1. *Un insieme diretto D è un insieme parzialmente ordinato tale che, per ogni $\alpha, \beta \in D$, esiste un $\tau \in D$ tale che $\tau \geq \alpha$ e $\tau \geq \beta$.*

Si può dare così la:

Definizione 1.1.2. *Sia X uno spazio topologico. Si chiama rete in X la coppia (D, Φ) dove D è un insieme diretto e Φ è un'applicazione da D in X.*

Nello studio delle successioni, e quindi della loro eventuale convergenza, il fatto che $(\mathbb{N}^+, \leq)$ sia un insieme totalmente ordinato è di fondamentale importanza; il passaggio alle reti indebolisce la relazione $\leq$, la quale in $\mathbb{N}^+$ gode delle proprietà *riflessiva, antisimmetrica e transitiva*; in D invece la relazione d'ordine definita, non gode della proprietà *antisimmetrica*, bensì viene sostituita dalla proprietà *diretta*.

Definizione 1.1.3. *Sia X uno spazio topologico, $A \subset X$ e $\Phi : D \longrightarrow X$ una rete in X. Φ è frequentemente in A se, per ogni $\alpha \in D$, esiste $\beta \geq \alpha$ tale che $\Phi(\beta) \in A$.*

Φ è definitivamente in A se esiste $\alpha \in D$ tale che $\Phi(\beta) \in A$ per ogni $\beta \geq \alpha$.

Segue che se Φ è definitivamente in $U \subset X$ e $V \subset X$ allora lo è anche in $U \cap V$, con $U \cap V \neq \emptyset$.

Definizione 1.1.4. *(Convergenza di Moore-Smith)*
Sia X uno spazio topologico. Una rete $\Phi : D \longrightarrow X$ in X si dice convergente al punto $x \in X$ se, per ogni intorno $U \subset X$ di x si ha che Φ è definitivamente in U.

1.2 Reti e proprietà di separazione

Come per le successioni, anche nello studio della convergenza delle reti in spazi topologici, risulta utile richiedere che gli spazi in questione soddisfino proprietà di separazione come ad esempio quella di Hausdorff.

Definizione 1.2.1. *(Assioma di separazione di Hausdorff)*
Uno spazio topologico X è di Hausdorff (o T_2) se per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$, esistono $U, V \subset X$ aperti tali che $x \in U, y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Ha senso chiedersi, nel caso di reti convergenti ad un punto $x \in X$ (spazio topologico qualunque) se tale limite è unico. In generale (come nel caso delle successioni), non è possibile stabilire un criterio che leghi la convergenza delle reti in spazi topologici e unicità di tale limite; ma se lo spazio topologico è di Hausdorff si ha il seguente risultato:

Proposizione 1.2.1. *Uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se per ogni rete Φ convergente in X il suo limite è unico (o equivalentemente uno spazio topologico è di Hausdorff se e solo se ogni rete nello spazio converge al più ad un punto).*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia X di Hausdorff. Siano x e y due punti distinti di X allora esistono U e V aperti di X tali che $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$. Per definizione di rete convergente, essa non può essere definitivamente in U e V, poiché $U \cap V = \emptyset$. Segue che la rete non può convergere a entrambi i punti.
$\Leftarrow$ Procediamo per assurdo: supponiamo che X non sia di Hausdorff e siano $x, y \in X, x \neq y$, tali che $\forall\ U_x$ e V_y, intorni aperti di x e y, si abbia $U_x \cap V_y \neq \emptyset$.
Siano $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ due famiglie di intorni, rispettivamente, di x e y . Entrambe le famiglie sono ordinate dalla relazione $\subset$.
Consideriamo il prodotto $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ e definiamo il seguente ordine: $(U, V) \geq (T, W)$ sse $U \subset T$ e $V \subset W$, $\forall\ U, T \subset \mathbf{U}$ e $V, W \subset \mathbf{V}$. $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ é diretto secondo la $\geq$. Per costruzione ogni (U, V) di $\mathbf{U} \times \mathbf{V}$ è tale che $U \cap V \neq \emptyset$. Sia $S_{(U,V)}$ un punto di $U \cap V$. Se $(T, W) \geq (U, V)$ allora $T \subset U$ e $W \subset V$ quindi $S_{(U,V)} \in T \cap W \subset U \cap V$. La rete $\{S_{(T,U)}, (T, U) \in \mathbf{U} \times \mathbf{V}, \geq\}$ converge sia a x che a y.

□

1.3 Reti e applicazioni continue

Il prossimo risultato mostra come le reti in uno spazio topologico (e la loro convergenza) siano sufficienti a descrivere la continuità.

Definizione 1.3.1. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione tra due spazi topologici; f si dice continua per reti se per ogni rete Φ in*

X, con Φ che converge a $x \in X$, si ha che la rete $f \circ \Phi$ converge a $f(x)$.

Proposizione 1.3.1. *Siano X e Y due spazi topologici. Condizione necessaria e sufficiente affinché $f : X \longrightarrow Y$ sia continua è che f sia continua per reti.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $f : X \longrightarrow Y$ continua e $x \in X$. Sia inoltre Φ una rete in X convergente a x. Per la continuità di f, esiste un aperto V di Y tale che $V \ni f(x)$ e tale che $f^{-1}(V) \ni x$. Poniamo $f^{-1}(V) = U$; siccome Φ converge a x, per definizione, tale rete è definitivamente in U. Ciò implica che $(f \circ \Phi) : D \longrightarrow Y$ è definitivamente in V (poiché $f(\Phi(x)) \in V$) e questa è la definizione di convergenza delle rete $(f \circ \Phi)$ in V al punto $f(x) \in V \subset Y$.
$\Leftarrow$ Per dimostrare la condizione sufficiente procediamo per assurdo. Supponiamo che $f : X \longrightarrow Y$ sia continua per reti, ma non sia continua in X. Sia $V \subset Y$ un aperto tale che $K = f^{-1}(V)$ non sia aperto in X. Sia $x \in K \setminus Int(K)$. Consideriamo l'insieme diretto costituito dagli intorni aperti di x ordinati secondo la relazione $A \leq B \Rightarrow A \supset B$. Ogni intorno A di x non può essere completamente contenuto in K, allora prendiamo un punto $w \in A \setminus K$, e definiamo la rete Φ ponendo $\Phi(A) = w_A$. Sia N un qualsiasi intorno di x e $B \geq N$ (allora $B \subset N$) allora $\Phi(B) = w_B \in B \setminus K \subset N$ e ciò mostra che Φ così definita è definitivamente in N. Segue dalla definizione che Φ converge a x. Ma $(f \circ \Phi)(A)$ non appartiene a V per ogni A, allora la

rete $(f \circ \Phi)$ non è definitivamente in V. Segue che $(f \circ \Phi)$ non converge a $f(x)$, giungendo così alla contraddizione cercata. $\square$

1.4 Reti e sottoreti

Introduciamo una nuova notazione: sia X uno spazio topologico e sia $\Phi : D \longrightarrow X$ una rete in X; sia $x_\alpha = \Phi_\alpha$, $\alpha \in D$. Ha senso considerare la rete come l'insieme $\{x_\alpha\}$ al variare di α in D. Questa notazione permette di mettere in analogia le prossime definizioni con quelle comunemente usate per le successioni. La seguente proposizione mostra che in spazi topologici qualsiasi un punto di chiusura è anche il limite di una rete e viceversa.

Proposizione 1.4.1. *Sia X uno spazio topologico e $A \subset X$ un suo sottoinsieme. Allora $x \in \bar{A}$ se e solo se esiste una rete $\Phi : D \longrightarrow A$ tale che Φ converge a x.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \in \bar{A}$ allora per definizione ogni aperto U contenente x è tale che $U \cap A \neq \emptyset$. Sia $\Phi : D \longrightarrow A$ una rete definita sull'insieme degli aperti contenenti il punto x, ordinato dall'inclusione, tale che $U \mapsto \Phi(U) = x_U \in U \cap A$. Segue che Φ converge a x.

$\Leftarrow$ Sia $\{x_\alpha\}$ una rete in A convergente a $x \in X$. Segue dalla definizione che tale rete è definitivamente in ogni intorno di x. Quindi ogni intorno di x ha intersezione non vuota con A, ciò implica che $x \in \bar{A}$. $\square$

Nel caso delle successioni ordinarie in uno spazio topologico X, una sottosuccessione può essere pensata in due modi:

i) si scartano elementi della successione e si procede con una nuova numerazione;

ii) si compone la successione $f : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow X$ con la $h : \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ t.c. $i > j \Rightarrow h(i) > h(j)$.

Il primo dei casi risulta inadeguato per le reti in spazi topologici qualunque. Nel secondo, la monotonia di h può essere più forte di quanto effettivamente necessita una sottosuccessione. Per poter definire una *sottorete* generalizziamo il concetto di funzione crescente:

Definizione 1.4.1. *Siano D e D' due insiemi diretti e sia $h : D' \longrightarrow D$ un'applicazione; h è detta cofinale se per ogni $\delta \in D$ esiste un δ' appartenente a D' tale che se $\alpha' \in D'$ e se $\alpha' \geq \delta'$ allora $h(\alpha') \geq \delta$.*

Definizione 1.4.2. *Sia X uno spazio topologico , D e D' due insiemi diretti e $\mu : D \longrightarrow X$ una rete. La funzione $(\mu \circ h)$ è detta sottorete della rete μ, con $h : D' \longrightarrow D$ cofinale.*

Proposizione 1.4.2. *Una rete $\{x_\alpha\}$ in uno spazio topologico X è frequentemente in ogni intorno di un punto $x \in X$ se e solo se possiede una sottorete convergente a x.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \in X$ e sia x_α una rete in X frequentemente in ogni intorno del punto x. Definiamo D' come l'insieme costituito dalle coppie ordinate (α, U), dove $\alpha \in D$, U

è un intorno di x e $x_\alpha \in U$, ordinato secondo l'ordine e l'inclusione definiti sull'insieme D. Se (α, U) è (β, V) sono due elementi di D' allora, dato che x_α è frequentemente in $U \cap V$, esiste $\gamma \geq \alpha, \beta$ con $x_\gamma \in U \cap V$. Quindi, $(\gamma, U \cap V) \in D'$ e $(\gamma, U \cap V) \geq (\alpha, U), (\beta, V)$, mostrando che D' è diretto.
Consideriamo l'applicazione $h : D' \longrightarrow D$, $(\alpha, U) \mapsto \alpha$. Per ogni $\delta \in D$ segue che $(\delta, X) \in D'$. Ora, $(\alpha, U) \geq (\delta, X)$ implica $\alpha \geq \delta$, ciò significa che h è cofinale e che $\{x_{(\alpha,U)}\}$ è una sottorete di $\{x_\alpha\}$. Dobbiamo dimostrare che $\{x_{(\alpha,U)}\}$ converge a x.
Sia N un qualsiasi intorno di x, per ipotesi esiste $x_\beta \in N$. Se $(\alpha, U) \geq (\beta, N)$ allora $x_{(\alpha,U)} = x_\alpha \in U \subset N$. Ciò implica che la sottorete $\{x_{(\alpha,U)}\}$ è definitivamente in N e quindi converge al punto x.
$\Leftarrow$ Sia $\{x_{(\alpha,U)}\}$ una sottorete di $\{x_\alpha\}$, con $(\alpha, U) \in D'$ definito come nella precedente parte, definitivamente in ogni intorno di $x \in X$, cioè esiste $(\alpha, U) \in D'$ tale che $x_\beta \in V \subset U$, per ogni $(\beta, V) \geq (\alpha, U)$. Questo vale per ogni (α, U) che varia in D'. Segue che $\{x_\alpha\}$ è frequentemente in ogni intorno U del punto $x \in X$. $\square$

1.5 Reti universali

Definizione 1.5.1. *Sia X uno spazio topologico; una rete in X è detta universale se per ogni $A \subset X$ essa è o definitivamente in A o definitivamente in $X \setminus A$.*

Proposizione 1.5.1. *Siano X e Y due spazi topologici, sia $\Phi : D \longrightarrow X$ una rete universale in X e $f : X \longrightarrow Y$ una funzione. Allora $(f \circ \Phi)$ è una rete universale in Y.*

Dimostrazione. Sia $A \subset Y$ allora Φ è o definitivamente in $f^{-1}(A)$ o in $X \setminus f^{-1}(A)$. Ma $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$ ciò implica che $(f \circ \Phi)$ è definitivamente o in A o in $Y \setminus A$. Quindi $(f \circ \Phi)$ è una rete universale in Y. □

Il seguente risultato è equivalente all'assioma di scelta:

Teorema 1.5.2. *Ogni rete ammette una sottorete universale.*

Dimostrazione. Sia $\{x_\alpha \mid \alpha \in P\}$ una rete in X. Consideriamo tutti gli insiemi $\mathbf{C}$ di sottoinsiemi di X tali che:

1) $A \in \mathbf{C} \Rightarrow \{x_\alpha\}$ è frequentemente in A ;

2) $A, B \in \mathbf{C} \Rightarrow A \cap B \in \mathbf{C}$.

Ad esempio lo stesso $\mathbf{C} = \{X\}$ soddisfa i punti 1) e 2).
Ordiniamo la famiglia di tutti gli insiemi $\mathbf{C}$ con l'inclusione.
L'unione tra insiemi qualunque di $\mathbf{C}$ è ancora un insieme che soddisfa le condizioni 1) e 2). Per il Principio di Massimalità la collezione dei $\mathbf{C}$ ammette elemento massimale, diciamo, $\mathbf{C}_0$. Sia $P_0 = \{(A, \alpha) \in \mathbf{C}_0 \times P \mid x_\alpha \in A\}$, ordinato secondo la relazione $(B, \beta) \geq (A, \alpha) \Leftrightarrow B \subset A$ e $\beta \geq \alpha$. Quest'ultima dota P_0 della struttura di insieme diretto. Consideriamo l'applicazione $h : P_0 \longrightarrow P$, $(A, \alpha) \mapsto \alpha$; h è cofinale, segue che $\{x_{(A,\alpha)}\}$ è una sottorete di $\{x_\alpha\}$. Dobbiamo dimostrare che $\{x_{(A,\alpha)}\}$ è

universale.
Sia S un sottoinsieme di X in cui $\{x_{(A,\alpha)}\}$ è frequentemente, allora per ogni $(A,\alpha) \in P_0$ esiste $(B,\beta) \geq (A,\alpha)$ in P_0 tale che $x_\beta = x_{(B,\beta)}$, con $B \subset A$, $\beta \geq \alpha$ e $x_\beta \in B$. Segue che $x_\beta \in S \cap B \subset S \cap A$ e $\{x_\alpha\}$ è frequentemente in $S \cap A$, per ogni $A \in \mathbf{C}_0$.
Possiamo considerare tutti gli insiemi della forma $S \cap A$, con $A \in \mathbf{C}_0$, come elementi di $\mathbf{C}_0$: le condizioni 1) e 2) continuano ad essere rispettate. Per la massimalità di $\mathbf{C}_0$ si ha che $S \in \mathbf{C}_0$. Se $\{x_{(A,\alpha)}\}$ fosse frequentemente in $X \setminus S$ allora $X \setminus S$ sarebbe un insieme di $\mathbf{C}_0$ con $\emptyset = S \cap (X \setminus S)$ ancora in $\mathbf{C}_0$ per la condizione 2), ma ciò contraddirebbe la condizione 1). Diciamo che $\{x_{(A,\alpha)}\}$ non è frequentemente in $X \setminus S$ e quindi è definitivamente in S. Abbiamo mostrato che se $\{x_{(A,\alpha)}\}$ è frequentemente in un insieme S allora è definitivamente in S . Segue che $\{x_{(A,\alpha)}\}$ è una sottorete universale di $\{x_\alpha\}$.

$\square$

Segue dal precedente teorema che:

Corollario 1.5.3. *Una sottorete di una rete universale è universale.*

Capitolo 2

Spazi topologici compatti

La compattezza è definita per fare in modo che gli spazi compatti soddisfino proprietà analoghe a quelle a cui rispondono gli insiemi chiusi e limitati di $\mathbb{R}^n$, proprietà espresse, ad esempio, dal teorema di Heine-Borel, dal teorema di Weierstrass e di Bolzano-Weierstrass.

2.1 Definizione di compattezza

Per poter definire quando uno spazio topologico si dice compatto occorre dare la:

Definizione 2.1.1. *Sia X uno spazio topologico. Un ricoprimento aperto di X è una famiglia $\boldsymbol{U}$ di sottoinsiemi aperti di X tali che la loro unione sia X. Un sottoricoprimento di un ricoprimento $\boldsymbol{U}$ di X è una sottofamiglia di $\boldsymbol{U}$ che sia ancora un ricoprimento di X.*

Definizione 2.1.2. *(proprietà di Heine-Borel)*
Uno spazio topologico X si dice compatto se ogni ricoprimento aperto di X ammette un sottoricoprimento finito di aperti.

Gli spazi topologici compatti si definiscono tramite ricoprimenti aperti (e quindi unione di aperti). In termini di insiemi chiusi si può dare una definizione equivalente di spazio compatto. Diamo prima la:

Definizione 2.1.3. *Si dice che una famiglia di insiemi $\boldsymbol{C}$ gode della proprietà dell'intersezione finita se ogni famiglia di sottoinsiemi finiti di $\boldsymbol{C}$ ha intersezione non vuota.*

Teorema 2.1.1. *Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni famiglia di sottoinsiemi chiusi di X che gode della proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Procediamo per assurdo. Sia X uno spazio compatto e sia $\mathbf{U}$ un suo ricoprimento aperto.
Sia $\{C_i\}_{i\in I}$ una qualunque famiglia di insiemi chiusi di X che gode della proprietà dell'intersezione finita tale che $\bigcap_{i\in I} C_i = \emptyset$.
Passando ai complementari si ha:
$X = (X \setminus \bigcap_{i\in I} C_i) = \bigcup_{i\in I} U_i$, dove $U_i \in \mathbf{U}$, per ogni $i \in I$ e $X = \bigcup_{j=1}^{k} U_j = (X \setminus \bigcap_{j=1}^{k} C_j)$. Complementando quest'ultima relazione si ottiene: $\bigcap_{j=1}^{k} C_j = \emptyset$, contro la proprietà dell'intersezione finita, il che à assurdo. Segue che $\bigcap_{i\in I} C_i \neq \emptyset$.
$\Leftarrow$ Sia $\mathbf{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X e sia
$C_i = X \setminus U_i$, $\forall i \in I$, allora $\{C_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di chiusi

tale che $\bigcap_{i\in I} C_i = \bigcup_{i\in I}(X \setminus U_i) = \emptyset$. Quindi, per ipotesi, la famiglia $\{C_i\}_{i\in I}$ non gode della proprietà dell'intersezione finita. Esiste, allora, un sottoinsieme finito $C_1, ..., C_k$ di $\{C_i\}_{i\in I}$ tale che $\bigcap_{j=1}^{k} C_j = \emptyset$ e quindi $(X \setminus \bigcap_{j=1}^{k} C_j) = \bigcup_{j=1}^{k} U_j = X$. Segue che $U_1, ..., U_k$ è un sottoricoprimento finito di X e per l'arbitrarietà del ricoprimento $\mathbf{U}$ si ha che X è compatto. $\square$

2.2 Alcune proprietà degli spazi compatti

Teorema 2.2.1. *(Teorema principale sulla compattezza)*
Sia X uno spazio topologico compatto e $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione continua. Allora $f(X)$ è compatto.

Dimostrazione. Sia $\boldsymbol{U}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$; gli elementi di $\boldsymbol{U}$ sono aperti di Y la cui unione contiene $f(X)$. Per la continuità di f si ha che $f^{-1}(U)$ è aperto in X per ogni $U \in \boldsymbol{U}$. $\boldsymbol{U}$ ricopre $f(X)$ segue che ogni $x \in X$ sta in qualche $f^{-1}(U)$ e quindi la famiglia $\{f^{-1}(U) \mid U \in \boldsymbol{U}\}$ è un ricoprimento aperto di X. X è compatto, ciò implica che un numero finito degli aperti di $\boldsymbol{U}$ ricopre X, cioè $X \subset f^{-1}(U_1) \cup ... \cup f^{-1}(U_k)$. Allora $U_1, ..., U_k$ è un ricoprimento aperto di $f(X)$, poiché $f(X) \subset f(f^{-1}(U_1) \cup ... \cup f^{-1}(U_k)) = f(f^{-1}(U_1)) \cup ... \cup f(f^{-1}(U_k)) \subset U_1 \cup ... \cup U_k$. $\square$

Una proprietà sui compatti è espressa dal:

Teorema 2.2.2. *Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio compatto e sia $C \subset X$ un sottoinsieme chiuso di X. Sia $\mathbf{U}$ un ricoprimento aperto di C, cioè $C \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, con $U_i \in \mathbf{U}$, $\forall i \in I$. Segue che $\mathbf{U} \cup (X \setminus C)$ è un ricoprimento aperto di X per il quale esiste un sottoricoprimento aperto e finito, diciamo, $U_1, ..., U_k, X \setminus C$ con $U_j \in \mathbf{U}$, $\forall j = 1, ..., k$. Si ha che $C \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j$, C è quindi compatto. □

Definizione 2.2.1. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ una funzione tale che per ogni sottoinsieme compatto K di Y si ha $f^{-1}(K)$ compatto in X. Allora f è detta propria.*

Teorema 2.2.3. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un'applicazione chiusa e $f^{-1}(y)$ compatto per ogni $y \in Y$. Allora f è propria.*

Dimostrazione. Sia C un sottoinsieme compatto di Y e sia $\mathbf{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ una famiglia di aperti di X tale che $f^{-1}(C) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Per ogni $y \in C$ esistono $U_1, ..., U_k$, con $U_j \in \mathbf{U}$, per ogni $j = 1, ..., k$, tali che $f^{-1}(y) \in \bigcup_{j=1}^{k} U_j$.
Poniamo $W_y = \bigcup_{j=1}^{k} U_j$. L'insieme $X \setminus W_y$ è un chiuso di X, segue, per ipotesi, che $f(X \setminus W_y)$ è un chiuso di Y. L'insieme $V_y = Y \setminus f(X \setminus W_y)$, aperto di Y, è tale che $f^{-1}(V_y) \subset W_y$ e $y \in V_y$. Dato che C è compatto, ed è ricoperto da V_y, con $y \in C$, esiste un numero finito di punti $y_1, ..., y_n$ tale che $C \subset V_{y_1} \cup ... \cup V_{y_n}$. Quindi $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(V_{y_1}) \cup ... \cup f^{-1}(V_{y_n}) \subset W_{y_1} \cup ... \cup W_{y_n} = \bigcup_{j,i} U_{j_{y_i}}$, per $j = 1, ..., k$ e $i = 1, ..., n$, che è unione finita di aperti della famiglia $\mathbf{U}$. Allora $f^{-1}(C)$ è compatto, da cui la tesi. □

2.3 Compattezza negli spazi di Hausdorff

Per gli insiemi compatti in spazi di Hausdorff si ha:

Teorema 2.3.1. *Se X è uno spazio topologico di Hausdorff allora per ogni K_1, K_2 sottoinsiemi compatti di X, tali che $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, esistono due aperti $U, V \subset X$ tali che $K_1 \subset U, K_2 \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$.*

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso in cui $K_2 = \{q\}$ è solo un punto. Per ogni $p \in K_1$ esistono insiemi aperti e disgiunti U_p e V_p contenenti rispettivamente p e q, in quanto X è uno spazio di Hausdorff. La famiglia $\{U_p \mid p \in K_1\}$ è un ricoprimento aperto di K_1 e quindi ha un sottoricoprimento finito $\{U_{p_1}, ..., U_{p_k}\}$. Sia $U = U_{p_1} \cup ... \cup U_{p_k}$ e $V = V_{p_1} \cap ... \cap V_{p_k}$. Allora U e V sono insiemi aperti e disgiunti tali che $K_1 \subset U$ e $\{q\} \subset V$.
Consideriamo ora il caso generale, quello in cui K_2 è un insieme costituito da più punti. La parte precedente della dimostrazione porge che per ogni $q \in K_2$ esistono due insiemi aperti e disgiunti di X, U_q e V_q, tali che $K_1 \subset U_q$ e $q \in V_q$. Per la compattezza di K_2 esiste un numero finito di questi aperti, $\{V_{q_1}, ..., V_{q_m}\}$, che ricopre K_2. Allora $U = U_{q_1} \cap ... \cap U_{q_m}$ e $V = V_{q_1} \cup ... \cup V_{q_m}$ sono due insiemi aperti e disgiunti tali che $K_1 \subset U$ e $K_2 \subset V$. □

Teorema 2.3.2. *Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Allora ogni sottoinsieme compatto di X è chiuso.*

Dimostrazione. Sia K un sottoinsieme compatto di X. Sia $x \in X \setminus K$. $x \notin K$ allora esistono U, V_x aperti di X tali che $K \subset U$,

$x \in V_x$ e $U \cap V_x = \emptyset$. Segue che $X \setminus K = \bigcup_{x \in X \setminus K} V_x$ è aperto quindi K è chiuso. $\square$

Definizione 2.3.1. *Uno spazio topologico X si dice normale o T_4 se ogni punto è un chiuso e se per ogni coppia di sottoinsiemi chiusi e disgiunti C_1 e C_2 di X, esistono due aperti disgiunti U e V di X tali che $C_1 \subset U$ e $C_2 \subset V$.*

Teorema 2.3.3. *Sia X uno spazio topologico compatto e di Hausdorff. Allora X è normale.*

Dimostrazione. Ogni punto dello spazio X è chiuso in quanto X è di Hausdorff. Siano C_1 e C_2 due chiusi disgiunti di X. Per il Teorema 2.2.2 C_1 e C_2 sono compatti e la conclusione segue dal Teorema 2.3.1.

$\square$

2.4 Compattezza e reti

Il seguente risultato mette in relazione gli spazi compatti con le reti universali e la loro convergenza:

Teorema 2.4.1. *Sia X uno spazio topologico; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) X è compatto;

2) ogni famiglia di sottoinsiemi chiusi di X che soddisfa la proprietà dell'intersezione finita ammette intersezione non vuota;

3) ogni rete universale in X è convergente;

4) ogni rete in X ammette una sottorete convergente.

Dimostrazione. 1) $\Leftrightarrow$ 2) Segue direttamente dal Teorema 2.1.1.
1) $\Rightarrow$ 3) Procediamo per assurdo. Sia X compatto e sia $\{x_\alpha\}$ una rete universale in X non convergente. Sia $x \in X$ allora esiste un intorno aperto U_x di x tale che $\{x_\alpha\}$ non è definitivamente in U_x. Ciò implica che $\{x_\alpha\}$ è definitivamente in $X \setminus U_x$, poiché $\{x_\alpha\}$ è una rete universale. Quindi esiste β_x tale che $\alpha \geq \beta_x$, questo implica che $\{x_\alpha\}$ non appartiene a U_x . Essendo X compatto esiste un ricoprimento finito di aperti della forma U_{x_i} e cioè $X = U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}$. Sia $\alpha \geq \beta_{x_i}$, per ogni i, allora $\{x_\alpha\}$ non appartiene a U_{x_i}, per ogni i. Segue che $\{x_\alpha\}$ non appartiene a X, ma ciò è assurdo. $\{x_\alpha\}$ converge quindi in X.
3) $\Rightarrow$ 4) Sia $\{x_\alpha\}$ una rete universale di X convergente allora ogni sottorete è universale e per definizione è convergente.
4) $\Rightarrow$ 2) Sia $\mathbf{F}= \{C\}$ una famiglia di insiemi chiusi di X che gode della proprietà dell'intersezione finita. Nel considerare tutte le finite intersezioni si può supporre che $\mathbf{F}$ sia chiuso rispetto ad esse. Considerato l'ordine $C \geq C' \Leftrightarrow C \subset C'$, l'insieme $\mathbf{F}$ risulta essere diretto. Per ogni $C \in \mathbf{F}$ sia $x_C \in C$; viene così definita una rete: $(\mathbf{F}, \mu)$, con $\mu : \mathbf{F} \longrightarrow X$. Per ipotesi tale rete ammette una sottorete convergente $(\mu \circ f)$, con $f : D \longrightarrow \mathbf{F}$ cofinale e D insieme diretto: per $\alpha \in D$ segue che $f(\alpha) \in \mathbf{F}$ e $x_{f(\alpha)} \in f(\alpha)$. Supponiamo che $x_{f(\alpha)}$ converga a x e sia $C \in \mathbf{F}$ allora per la definizione di convergenza $\exists\ \beta \in D$ tale che, $\forall \alpha \geq \beta$, si ha

$f(\alpha) \subset C$. Così da avere $x_{f(\alpha)} \in f(\alpha) \subset C$. Dato che C è un insieme chiuso dello spazio X la Proposizione 1.4.1 porge che $x \in C$, mostrando così che $x \in \cap\{C \in \mathbf{F}\}$ e per l'arbitrarietà di $\mathbf{F}$ segue la tesi. $\square$

Capitolo 3

Prodotti e teorema di Tychonoff

In questo capitolo viene dimostrato il teorema di Tychonoff usando il concetto di rete universale.

3.1 Prodotti finiti di spazi compatti

Occupiamoci dapprima della topologia prodotto nel caso del prodotto di un numero finito di spazi topologici.

Definizione 3.1.1. *Siano $X_1, ..., X_n$ spazi topologici e sia B una famiglia di sottoinsiemi del prodotto cartesiano $X_1 \times ... \times X_n$ definita come:*
$B = \{ U_1 \times ... \times U_n \ \mid U_i$ *è aperto in* X_i, $\forall i = 1, ..., n\}$.
B per costruzione è tale che:

1) è un ricoprimento di $X_1 \times ... \times X_n$;

2) $\forall\ B_1, B_2 \in B$ si ha che $B_1 \cap B_2$ è data dall'unione di elementi di B.

Segue che esiste, ed è unica, una topologia T su $X_1 \times ... \times X_n$ che ha B come base. T prende il nome di topologia prodotto.

Ogni aperto della topologia prodotto è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $X_1 \times ... \times X_n$ che si può scrivere come unione degli elementi di B, dove quest'ultima è la base sopra definita.

Il prossimo risultato mostra una proprietà valida sia nel caso di prodotti finiti che infiniti.

Proposizione 3.1.1. *Siano $X_1, ..., X_n$ spazi topologici e sia $X_1 \times ... \times X_n$ lo spazio prodotto (cioè lo spazio topologico con la topologia prodotto). Allora le proiezioni*

$$\pi_i : X_1 \times ... \times X_n \longrightarrow X_i, \ (x_1, ..., x_n) \mapsto x_i, \ \textit{per } i = 1, ..., n$$

sono applicazioni continue e la topologia prodotto è la meno fine tra le topologie su $X_1 \times ... \times X_n$ che rendono continue le π_i.

Dimostrazione. Si rimanda il lettore al testo [1] della bibliografia. □

La seguente proposizione e i suoi due corollari danno conto di importanti relazioni tra compattezza, topologia prodotto e proiezioni tra spazi topologici. Restiamo, per ora, nell'ambito dei prodotti finiti; per semplicità di trattazione si consideri il caso del prodotto tra due spazi topologici.

Proposizione 3.1.2. *Siano X e Y due spazi topologici e sia X compatto. Allora la proiezione $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ è chiusa.*

Dimostrazione. Si deve dimostrare che π_Y manda i chiusi di $X \times Y$ in chiusi di Y. Sia $C \subset X \times Y$ un insieme chiuso. Vorremmo che $Y \setminus \pi_Y(C)$ fosse un aperto di Y. Sia $y \notin \pi_Y(C)$, ovvero, $(x, y) \notin C$, $\forall x \in X$. Allora per qualche $x \in X$ esistono due aperti $U_x \subset X$ e $V_x \subset Y$ tali che $x \in U_x$, $y \in Y$ e $(U_x \times V_x) \cap C = \emptyset$. Dato che X è compatto esistono dei punti $x_1, ..., x_n \in X$ tali che $U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n} = X$ in cui gli U_{x_j} sono aperti di X, $\forall j = 1, ..., n$. Sia $V = V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_n}$, segue che $(X \times V) \cap C = (U_{x_1} \cup ... \cup U_{x_n}) \times (V_{x_1} \cap ... \cap V_{x_n}) \cap C = \emptyset$; é chiaro che $y \in V \subset Y \setminus \pi_Y(C)$ e V è un aperto di Y. Per l'arbitrarietà del punto y ne consegue che $Y \setminus \pi_Y(C)$ è un aperto (può essere pensato come unione di aperti contenenti il punto y) ciò implica che $\pi_Y(C)$ è chiuso.

$\square$

Corollario 3.1.3. *Siano X e Y due spazi topologici e si consideri la proiezione $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$. Se X è compatto allora π_Y è un'applicazione propria.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente la π_Y è chiusa. Ogni sottoinsieme chiuso di X è compatto, segue dal Teorema 2.2.3 che π_Y è propria. $\square$

Corollario 3.1.4. *Il prodotto finito $X_1 \times ... \times X_n$ di spazi topologici è uno spazio compatto se e solo se ogni X_i è compatto, per $i = 1, ..., n$.*

Dimostrazione. Consideriamo il prodotto $X \times Y$ di due spazi topologici e usiamo l'induzione per dimostrare il corollario nel

caso di n spazi topologici.
$\Leftarrow$ Supponiamo che X e Y siano compatti e sia $\mathbf{U}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$. Sia $x \in X$ un punto arbitrario di X. Allora essendo $Y \simeq \{x\} \times Y$ compatto esiste un numero finito $U_1, ..., U_k$ di elementi di $\mathbf{U}$ tali che $\{x\} \times Y \subset U_1 \cup ... \cup U_k$. Per definizione di topologia prodotto su $X \times Y$, per ogni $y \in Y$ esistono due aperti V e W, con $V \subset X$ e $W \subset Y$, tali che $(x, y) \in V \times W \subset U_1 \cup ... \cup U_k$.
Gli aperti della forma $V \times W$ ricoprono $\{x\} \times Y$ e quindi, dato che Y è compatto, esistono $V_1, ..., V_m$ aperti di X contenenti x e $W_1, ..., W_m$ aperti di Y tali che

$$\{x\} \times (V_1 \times W_1) \cup ... \cup (V_m \times W_m) \subset U_1 \cup ... \cup U_k.$$

Sia $Z_x = V_1 \cap ... \cap V_m$. Allora la striscia $Z_x \times Y$ è contenuta in $U_1 \cup ... \cup U_k$. Quindi per ogni $x \in X$ esiste un sottoinsieme aperto $Z_x \subset X$ tale che $Z_x \times Y$ può essere ricoperto da un numero finito di aperti di $\mathbf{U}$. La famiglia di aperti $\{Z_x \mid x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X. Essendo X compatto esiste un numero finito di questi aperti, $\{Z_{x_1}, ..., Z_{x_s}\}$, che ricoprono ancora X e quindi

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{s} Z_{x_i} \times Y.$$

Siccome un numero finito di insiemi di $\mathbf{U}$ ricopre ciascuna striscia $Z_{x_i} \times Y$ segue che un numero finito di aperti di $\mathbf{U}$ ricopre $X \times Y$. $X \times Y$ è dunque compatto.

$\Rightarrow$ Sia $X \times Y$ compatto. Le proiezioni $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ e $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ sono continue e suriettive, segue dal Teorema 2.2.1 che X e Y sono compatti. □

3.2 Prodotti infiniti di spazi compatti

Definizione 3.2.1. *(Topologia prodotto o topologia di Tychonoff, caso infinito)*
Sia $\times\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ il prodotto tra infiniti spazi topologici. Si definisce topologia prodotto per lo spazio $\times\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ quella per la quale gli aperti di base sono della forma $\times\{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$, tali che:

1) ogni U_α è un aperto;

2) $U_\alpha = X_\alpha$ per al più un numero finito di α.

La famiglia di insiemi della forma $U_\alpha \times \prod_{\beta \in A}\{X_\beta \mid \beta \neq \alpha\}$ è una *sottobase* per la topologia prodotto su $\times\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Utilizzando unicamente le proprietà di convergenza delle reti e del prodotto infinito di spazi topologici, si dimostra il seguente importante risultato:

Proposizione 3.2.1. *Sia $X = \times\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ uno spazio prodotto. Siano Φ una rete in X e $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ le proiezioni al variare di $\alpha \in A$. Φ converge al punto $(..., x_\alpha, ...) \in X$ se e solo se $(\pi_\alpha \circ \Phi)$ converge al punto $x_\alpha \in X_\alpha$, $\forall \alpha \in A$.*

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia Φ una rete in X convergente al punto $(..., x_\alpha, ...)$. Data la:
$\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$, con $(..., x_\alpha, ...) \mapsto \pi_\alpha(..., x_\alpha, ...) = x_\alpha$, ed essendo un' applicazione continua, per la Proposizione 1.3.1 , si ha che è continua per reti. Segue dalla definizione 1.3.1 che per ogni Φ convergente al punto $(..., x_\alpha, ...)$ si ha che $(\pi_\alpha \circ \Phi)$ converge al punto $\pi_\alpha(..., x_\alpha, ...)$ cioè a x_α.
$\Leftarrow$ Sia Φ una rete in $X = \times\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Per ipotesi $(\pi_\alpha \circ \Phi)$ converge a x_α, $\forall \alpha \in A$, cioè, per definizione, $(\pi_\alpha \circ \Phi)$ è definitivamente in ogni intorno aperto U_α di X_α tale che $x_\alpha \in U_\alpha$. Per la continuità di π_α si ha che

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \prod_{\beta \in A}\{U_\beta \mid \beta \neq \alpha\} \ni (..., x_\alpha, ...)$$

dove $U_\alpha \times \prod_{\beta \in A}\{U_\beta \mid \beta \neq \alpha\}$ è un aperto per la topologia prodotto su X. Sfruttando la convergenza di $(\pi_\alpha \circ \Phi)$ si ha che Φ è definitivamente in ogni intorno aperto $U_\alpha \times \prod_{\beta \in A}\{U_\beta \mid \beta \neq \alpha\}$ contenente il punto $(..., x_\alpha, ...)$. Segue che Φ converge a $(..., x_\alpha, ...)$. $\square$

Avendo a disposizione gli strumenti necessari si può enunciare e dimostrare il:

Teorema 3.2.2. *(Teorema di Tychonoff)*
Il prodotto di infiniti spazi compatti è uno spazio compatto.

Dimostrazione. Sia $X = \times\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ uno spazio topologico in cui ogni X_α è compatto e sia $f : D \longrightarrow X$ una rete universale in X. Considerate le proiezioni $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ segue per la Proposizione 1.5.1 che $(\pi_\alpha \circ f)$ è una rete universale in X_α ed essendo X_α uno spazio compatto, per il Teorema 2.4.1, essa converge in X_α, diciamo, al punto x_α. La convergenza di $(\pi_\alpha \circ f)$ a x_α implica che la rete universale f tende al punto $(..., x_\alpha, ...)$ perciò X è compatto. $\square$

Bibliografia

[1] J.L. Kelley , *General Topology*, *Springer-Verlag*, (1955).

[2] Andrea Loi, *Appunti di Topologia Generale*, *Dipartimento di Matematica-Università di Cagliari*, (2008-2009).