Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

SPAZI TOPOLOGICI METRIZZABILI

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di
Silvia Schirra

Anno Accademico 2010/2011

Introduzione

In questa tesi affronteremo il problema della metrizzabilità di uno spazio topologico, cioè analizzeremo sotto quali condizioni uno spazio topologico è metrizzabile. Ricordiamo che uno spazio topologico $(X, \mathscr{T})$ è metrizzabile quando è possibile trovare una metrica d che induce su X la topologia $\mathscr{T}$.

Il fatto che uno spazio sia metrizzabile è un'importante punto d'arrivo: poter definire una metrica rende possibile la dimostrazione di importanti teoremi e proprietà relativi allo spazio dato. Quindi è di fondamentale importanza in topologia trovare delle condizioni che ci garantiscano che uno spazio sia metrizzabile, dato che in generale non è semplice stabilirlo. Un primo importante risultato è stato ottenuto negli anni '20 da Urysohn, ma il problema è stato interamente risolto negli anni '50 da Nagata e Smirnov in modo indipendente.

Il Teorema di Urysohn afferma che uno spazio regolare che possiede una base numerabile è metrizzabile. Tuttavia questo teorema ci fornisce delle condizioni che sono sufficienti ma non necessarie. Infatti, esistono degli spazi metrizzabili che sono regolari ma non possiedono una base numerabile: uno di questi è $\mathbb{R}$ con la topologia discreta. Ricordiamo che richiedere che lo spazio abbia una base numerabile significa dire che esiste una base

$$\mathscr{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathscr{B}_n,$$

dove ogni $\mathscr{B}_n$ è finita.

Il Teorema di Nagata-Smirnov, che è il risultato più importante, asserisce che uno spazio X è metrizzabile se e solo se è regolare e possiede una base numerabile localmente finita, ovvero se esiste una base

$$\mathscr{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \mathscr{B}_n,$$

dove ogni $\mathscr{B}_n$ è localmente finita. [1]

La tesi è suddivisa in 2 capitoli.

Nel primo vengono ripresi i concetti di spazio topologico, spazio metrico, assiomi di numerabilità, assiomi di separazione e applicazioni tra spazi topologici.

Il secondo capitolo è il cuore della tesi, nel quale vengono dimostrati il Teorema di Urysohn e di Nagata-Smirnov.

L' idea della dimostrazione del Teorema di Nagata-Smirnov è la seguente. Dopo aver dimostrato che uno spazio regolare con una base numerabile localmente finita è normale, costruiamo una famiglia di funzioni a variabili reali $\{f_{n,B}(x)\}_{(n,B)\in J}$ su X che separa punti da insiemi chiusi. Utilizziamo queste funzioni per definire la funzione $F : X \to [0,1]^J$ come segue

$$F(x) = (f_{n,B}(x))_{(n,B)\in J}.$$

Infine, dimostriamo che se queste funzioni sono scelte in modo opportuno, F è effettivamente un imbedding da X allo spazio metrico $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$.

[1] Ricordiamo che una famiglia $\mathscr{A}$ di sottoinsiemi di X è detta localmente finita in X se ogni punto di X ha un intorno che interseca solo un numero finito di elementi di $\mathscr{A}$.

Indice

Capitolo 1

Richiami

1.1 Spazi topologici

Sia X un insieme non vuoto. Una **topologia** su X è una classe non vuota $\mathscr{T}$ di sottoinsiemi di X, soddisfacenti le seguenti proprietà:

1. $\emptyset, X \in \mathscr{T}$;

2. l'unione di un numero qualsiasi di insiemi di $\mathscr{T}$ appartiene a $\mathscr{T}$;

3. l'intersezione finita di insiemi qualsiasi di $\mathscr{T}$ appartiene a $\mathscr{T}$.

Gli elementi di $\mathscr{T}$ si chiamano **insiemi aperti** o **aperti** della topologia $\mathscr{T}$. Uno **spazio topologico** è un insieme X dotato di una topologia $\mathscr{T}$, ed è denotato con $(X, \mathscr{T})$. Gli elementi di X sono chiamati **punti** e l'insieme X **supporto** dello spazio topologico $(X, \mathscr{T})$.

Definizione 1.1.1. *Siano $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}'$ due topologie su un insieme non vuoto X. Diremo che $\mathscr{T}$ è più* **fine** *di $\mathscr{T}'$ se ogni aperto di $\mathscr{T}'$ è anche aperto di $\mathscr{T}$.*

Esempio 1.1.2. La topologia $\mathscr{T}_{ban} = \{\emptyset, X\}$ è chiamata la **topologia banale** e lo spazio $(X, \mathscr{T}_{ban})$ è chiamato spazio topologico banale.

Esempio 1.1.3. La topologia $\mathscr{T}_{dis} = P(X)$ è detta la **topologia discreta** e $(X, \mathscr{T}_{dis})$ è uno spazio topologico discreto. In uno spazio topologico discreto tutti gli insiemi sono aperti.

Osservazione 1.1.4. Osserviamo che la topologia banale è la meno fine tra tutte le topologie su un insieme non vuoto X, mentre la topologia discreta è la più fine.

Definizione 1.1.5. *Sia $(X, \mathscr{T})$ uno spazio topologico. Un insieme $C \subset X$ è detto* **chiuso** *se il suo complementare $X \setminus C$ è aperto, cioè se $X \setminus C \in \mathscr{T}$.*

Definizione 1.1.6. *Sia X un insieme. Una base per una topologia su X è una collezione $\mathscr{B}$ di sottoinsiemi di X, chiamati elementi di base, tale che*

1. *per ogni $\in X$, esiste almeno un elemento di base B che contiene x;*
2. *se x appartiene all'intersezione di due elementi di base B_1 e B_2, allora esiste un elemento di base B_3 contenente x tale che $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Se $\mathscr{B}$ soddisfa queste due condizioni, possiamo definire la topologia $\mathscr{T}$ generata da $\mathscr{B}$ come segue: Un sottoinsieme U di X è un aperto in X se per ogni $x \in U$, esiste un elemento di base $B \in \mathscr{B}$ tale che $x \in B$ e $B \subset U$.

Osservazione 1.1.7. Ogni elemento di base è un elemento di $\mathscr{T}$.

Esempio 1.1.8. Sia X un insieme qualsiasi e sia $\mathscr{B}$ la collezione di tutti i sottoinsiemi di X costituiti da un solo punto; $\mathscr{B}$ è una base per la topologia discreta su X. Infatti, prendiamo un qualsiasi aperto U non vuoto e prendiamo $x_0 \in U$; $\{x_0\}$ è un elemento di base che contiene x_0 e che è contenuto in U. Dunque $\mathscr{B}$ è una base per la topologia discreta.

Lemma 1.1.9. *Siano $\mathscr{B}$ e $\mathscr{B}'$ le basi per le topologie $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}'$, rispettivamente, su X.Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *$\mathscr{T}'$ è più fine di $\mathscr{T}$;*
2. *per ogni $x \in X$ e ogni elemento di base $B \in \mathscr{B}$ contenente x, esiste un elemento di base $B' \in \mathscr{B}'$ tale che $x \in B' \subset B$.*

Dimostrazione. 2. $\Longrightarrow$ 1. Dato un elemetno U di $\mathscr{T}$, vogliamo mostrare che $U \in \mathscr{T}'$. Sia $x \in U$. Poichè $\mathscr{B}$ genera $\mathscr{T}$, esiste per definizione di base, un elemento $B \in \mathscr{B}$ tale che $x \in B \subset U$. Per la condizione 2 esiste $B' \in \mathscr{B}'$ tale che $x \in B' \subset B$. Allora, $x \in B' \subset U$, so $U \in \mathscr{T}'$, per definizione.

1. $\Longrightarrow$ 2. Sia $x \in X$ e $B \in \mathscr{B}$, con $x \in B$. B appartiene a $\mathscr{T}$ per definizione e, per la condizione 1., $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$; segue che $B \in \mathscr{T}'$. Poichè $\mathscr{T}'$ è generato da $\mathscr{B}'$, allora esiste un elemento $B' \in \mathscr{B}'$ tale che $x \in \mathscr{B}' \subset B$. □

1.2 Spazi metrici

Uno **spazio metrico** è una coppia (X, d) costituita da un insieme non vuoto X sul quale è definita una distanza o metrica d, cioè un'applicazione

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

tale che:

$$\forall v, w, z \in X$$

1. $d(v, w) \geq 0$
2. $d(v, w) = 0 \Rightarrow v = w$
3. $d(v, w) = d(w, v)$
4. $d(v, w) + d(w, z) \geq d(v, z)$ (disuguaglianza triangolare)

Dato $\epsilon > 0$, l'insieme

$$B_d(x, \epsilon) = \{y | d(x, y) < \epsilon\}$$

di tutti i punti y la cui distanza da x è inferiore a ϵ, è detto **bolla di centro x e raggio** ϵ.

Definizione 1.2.1. *Data una metrica d su un insieme X, la famiglia di tutte le bolle $B_d(x, \epsilon)$, per $x \in X$ e $\epsilon > 0$, è una base per una topologia su X, chiamata* **topologia della metrica** *indotta da d.*

Un insieme U è aperto nella topologia della metrica indotta da d se e solo se per ogni $y \in U$, esiste $\delta > 0$ tale che $B_d(y, \delta) \subset U$.

Definizione 1.2.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme A di X è* **limitato** *se esiste un numero M tale che*

$$d(a_1, a_2) \leq M$$

per ogni coppia di punti a_1, a_2 di A. Se A è limitato e non vuoto, il diametro di A è dato da

$$diam A = sup\{d(a_1, a_2) | a_1, a_2 \in A\}.$$

La limitatezza non è una proprietà topologica, ma dipende dalla metrica che si utilizza. Tuttavia, se X è uno spazio topologico con una metrica d, è sempre possibile trovare una metrica $\bar{d}$, equivalente a d, rispetto alla quale ogni sottoinsieme di X è limitato, come mostra il seguente teorema.

Teorema 1.2.3. *Sia X uno spazio metrico nel quale è definita una metrica d. Definiamo $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ come*

$$\bar{d}(x, y) = min\{d(x, y), 1\}$$

Allora la metrica $\bar{d}$ induce la stessa topologia di ded è chiamata **metrica standard limitata**.

Dimostrazione. Per prima cosa mostriamo che $\bar{d}$ soddisfa le proprietà della metrica:

1. $\bar{d}(x, y) \geq 0$ e $\bar{d}(x, y) = 0$ *sse* $x = y$.

   Se $d(x, y) \geq 1$, allora $\bar{d}(x, y) = 1 > 0$.

   Se $d(x, y) < 1$, allora $\bar{d}(x, y) = d(x, y)$, che è ≥ 0 per definizione e vale l'uguale se e solo se $x = y$.

2. $\bar{d}(x, y) = \bar{d}(y, x)$.

   Se $d(x, y) < 1$, allora $\bar{d}(x, y) = d(x, y) = d(y, x) = \bar{d}(y, x)$.

   Se $d(x, y) \geq 1$, allora $d(y, x) \geq 1$ e quindi $\bar{d}(x, y) = 1 = \bar{d}(y, x)$.

3. $\bar{d}(x, z) \leq \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z)$.

   Se $d(x, y) \geq 1$ o $d(y, z) \geq 1$, allora $\bar{d}(x, y)+\bar{d}(y, z) \geq 1$ e dato che $\bar{d}(x, z) \leq 1$ per definizione, la disuguaglianza è verificata.

   Se invece sia $d(x, y)$ che $d(y, z)$ sono minori di 1 abbiamo $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z)$. Poichè $\bar{d}(x, z) \leq d(x, z)$ per definizione, la disuguaglianza risulta verificata.

   Dobbiamo, ora verificare che le due metriche inducono la stessa topologia. Osserviamo che in un qualsiasi spazio metrico la collezione delle bolle di raggio $\epsilon < 1$ forma una base per la topologia metrica, ogni elemento di base contenente x contiene una tale bolla di raggio ϵ e centro x. Ne segue che d e $\bar{d}$ inducono la stessa topologia su X, poichè le collezioni di bolle di raggio $\epsilon < 1$, rispetto alle 2 metriche, sono la stessa collezione.

□

Lemma 1.2.4. *Siano d e d' due metriche su un insieme X; siano $\mathscr{T}$ e $\mathscr{T}'$ le topologie da loro indotte, rispettivamente. Allora $\mathscr{T}'$ è più fine di $\mathscr{T}$ se e solo se per ogni $x \in X$ e ogni $\epsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che*

$$B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon).$$

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathscr{T}'$ sia più fine di $\mathscr{T}$. Dato l'elemento di base $B_d(x, \epsilon)$ per $\mathscr{T}$, esiste per il Lemma 1.1.9 un elemento di base B' per la topologia $\mathscr{T}'$ tale che $x \in B' \subset B_d(x, \epsilon)$. All'interno di B' possiamo trovare una bolla $B_{d'}(x, \delta)$ centrata in x.

Viceversa, supponiamo che esistano le due bolle di raggio ϵ e δ. Dato un elemento di base B per $\mathscr{T}$ contenente x, possiamo trovare all'interno di B una bolla $B_d(x, \epsilon)$ centrata in x. Allora esiste un δ tale che $B_{d'}(x, \delta) \subset B_d(x, \epsilon)$. Allora per il Lemma 1.1.9 $\mathscr{T}'$ è più fine di $\mathscr{T}$. □

Definizione 1.2.5. *Dato un insieme di indici J e dati i punti $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ e $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ di $\mathbb{R}^J$, definiamo la metrica $\bar{\rho}$ su $\mathbb{R}^J$ come segue*

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) | \alpha \in J\},$$

dove $\bar{d}$ è la metrica limitata standard su $\mathbb{R}$; $\bar{\rho}$ è chiamata **metrica uniforme** *di $\mathbb{R}^J$ e la topologia che induce è chiamata* **topologia uniforme***.*

Definizione 1.2.6. *Siano X e Y due spazi topologici. La* **topologia prodotto** *su $X \times Y$ è la topologia avente come base la collezione $\mathscr{B}$ di tutti gli insiemi della forma $U \times V$, dove U è un sottoinsieme aperto di X e V è un sottoinsieme aperto di Y.*

Lemma 1.2.7. *La topologia uniforme su $\mathbb{R}^J$ è più fine della topologia prodotto.*

Dimostrazione. Supponiamo che siano dati un punto $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ e un elemento di base per la topologia prodotto $\prod U_\alpha$ su $\mathbf{x}$. Siano $\alpha_1, ..., \alpha_n$ gli indici per i quali $U_\alpha \neq \mathbb{R}$. Allora per ogni i, scegliamo $\epsilon_i > 0$ tale che la bolla di raggio ϵ_i centrata in x_{α_i} rispetto alla metrica $\bar{d}$ sia contenuto in U_{α_i}; segue dal fatto che U_{α_i} è aperto in $\mathbb{R}$. Sia $\epsilon = min\{\epsilon_1, ..., \epsilon_n\}$; allora la bolla di raggio ϵ centrata in $\mathbf{x}$ nella metrica $\bar{\rho}$ è contenuta in $\prod U_\alpha$. Se $\mathbf{z}$ è un punto di $\mathbb{R}^J$ tale che $\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \epsilon$, allora $\bar{d}(x_\alpha, z_\alpha) < \epsilon$

per ogni α, dunque $\mathbf{z} \in \prod U_\alpha$. Segue che la topologia uniforme è più fine della topologia prodotto. □

1.3 Assiomi di Separazione e Numerabilità

1.3.1 Assiomi di Numerabilità

Definizione 1.3.1. *Diciamo che uno spazio X possiede una* **base locale** *in x numerabile se esiste una collezione numerabile $\mathscr{B}$ di intorni di x, tale che ogni intorno di x contenga almeno un elemento di $\mathscr{B}$. Se questo vale per ogni punto di X si dice che X è $\mathbf{N_1}$ o che soddisfa il primo assioma di numerabilità.*

Definizione 1.3.2. *Se uno spazio topologico $(X, \mathscr{T})$ possiede una base numerabile per la topologia $\mathscr{T}$, diciamo che X è $\mathbf{N_2}$ o che soddisfa il secondo assioma di numerabilità.*

Definizione 1.3.3. *Uno spazio topologico è detto uno spazio $\mathbf{N_3}$, o che soddisfa il terzo assioma di numerabiltà, se esiste un sottoinsieme numerabile $S \subset X$ tale che $\bar{S} = X$.*

1.3.2 Assiomi di Separazione

Definizione 1.3.4. *Uno spazio topologico X è uno* **spazio di Hausdorff** *(o spazio T_2) se dati due punti x e y in X con $x \neq y$ esistono due aperti U e V di X contenenti rispettivamente x e y, tali che $U \cap V = \emptyset$.*

Proposizione 1.3.5. *In uno spazio di Hausdorff X costituito da almeno due punti, ogni punto è un sottoinsieme chiuso.*

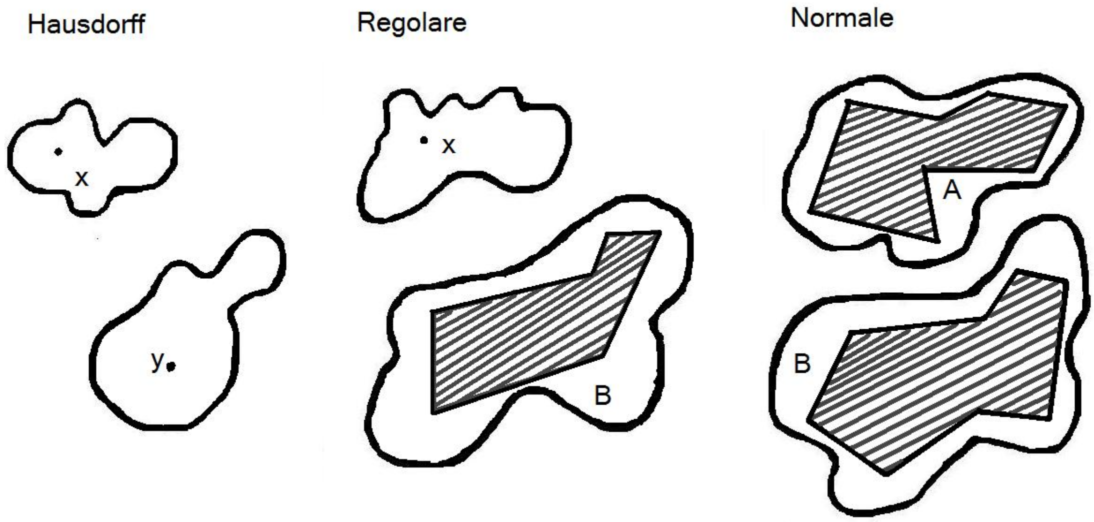
Dimostrazione. Siano x e y due punti di X con $x \neq y$. Esistono allora due aperti U_x e V_y disgiunti di X, tali che $x \in U_x$ e $y \in V_y$. In particolare $y \in V_y \subset X \setminus \{x\}$. Segue che $X \setminus \{x\}$ è unione degli aperti V_y e quindi è aperto. Dunque x è chiuso. □

Definizione 1.3.6. *Uno spazio topologico X dove ogni punto è un chiuso è detto T_1.*

Definizione 1.3.7. *Sia X uno spazio T_1. Diciamo che X è* **regolare** *o T_3, se per ogni coppia costituita da un punto x e da un insieme chiuso B disgiunto da x, esistono insiemi aperti e disgiunti contenenti x e B rispettivamente.*

Definizione 1.3.8. *Sia X uno spazio T_1. Lo spazio X è detto* **normale** *o T_4 se per ognil coppia A, B di sottoinsiemi chiusi disgiunti di X esistono insiemi aperti disgiunti che contengono A e B rispettivamente.*

Osservazione 1.3.9. Normale $\Longrightarrow$ Regolare $\Longrightarrow$ Hausdorff.



1.4 Applicazioni tra Spazi Topologici

Definizione 1.4.1. *Siano X e Y due spazi topologici. Diciamo che un'applicazione $f : X \to Y$ è* **continua** *nel punto $x \in X$ se, per ogni aperto V di Y contenente $f(x)$, esiste un aperto U di X contenente x, tale che $f(U) \subset V$.*

Definizione 1.4.2. *Siano X e Y due spazi topologici. Diaciamo che un'applicazione $f : X \to Y$ è un* **omeomorfismo** *se f è continua, biunivoca e l'inversa $f^{-1} : Y \to X$ è continua.*

Definizione 1.4.3. *Un'applicazione* $f : X \to Y$ *è detta* **imbedding topologico** *se l'applicazione* $X \to f(X)$ *indotta da f su f(X) è un omeomorfismo. In particolare un omeomorfismo* $f : X \to Y$ *è un imbedding topologico.*

Capitolo 2

Spazi topologici metrizzabili

2.1 Spazi metrizzabili

Definizione 2.1.1. *Uno spazio topologico X è* **metrizzabile** *se esiste una metrica d sull'insieme X che induce la topologia di X. Uno spazio metrico è uno spazio metrizzabile X insieme ad una metrica d che induce la topologia di X.*

Non tutti gli spazi son metrizzabili.

Esempio 2.1.2. Prendiamo uno spazio metrico (X, d) contenente almeno due elementi. Per ogni coppia di elementi x, y con $x \neq y$ esistono sempre 2 apert disgiunti che contengono rispettivamente x e y. Infatti, se $d(x, y) = \epsilon$ basterà prendere come aperti le bolle centrate rispettivamente in x e y di raggio $\epsilon/2$. Prendiamo $X = \{a, b\}$ con la topologia $\mathscr{T} = \{X, \emptyset\}$. Non esistono 2 aperti disgiunti che contengano rispettivamente a e b. Quindi non esiste una metrica che induca $\mathscr{T}$ e quindi $(X, \mathscr{T})$ non è metrizzabile.

Osservazione 2.1.3. Uno spazio discreto $(X, \mathscr{T}_{dis})$ è sempre metrizzabile. Infatti, basta prendere la metrica così definita: $d(x, y) = 0$ se $x = y$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$.

d è chiamata metrica discreta e induce, appunto, la topologia discreta. Mostriamo prima di tutto che ogni singoletto è un disco aperto di (X, d). Sia $x_0 \in X$ ed $r = 1$. Allora si ha che $B(x_0, r) = \{y \in X : d(x_0, y) < r\} = \{y \in X : y = x_0\} = \{x_0\}$.

Poiché un disco aperto è un aperto di (X, d) allora vuol dire che ogni singoletto di X è un aperto. Da tale fatto segue che ogni sottoinsieme di $A \subset X$ è un aperto in (X, d) in quanto unione di singoletti. Concludendo d induce la topologia $\mathscr{T}_{dis}$.

Osservazione 2.1.4. Ogni spazio metrizzabile è di Hausdorff. Scegliamo una distanza d e sia $x \neq y$. Allora $d(x, y) > 0$. Se $0 < r < \frac{d(x,y)}{2}$, allora le bolle $B(x, r)$ e $B(y, r)$ sono disgiunte: infatti se esistesse $z \in B(x, r) \cap B(y, r)$, dalla disuguaglianza triangolare seguirebbe la contraddizione $d(x, y) \leqslant d(x, z) + (z, y) < 2r < d(x, y)$.

2.2 Finitezza locale

Definizione 2.2.1. *Sia X uno spazio topologico. Una famiglia $\mathscr{A}$ di sottoinsiemi di X è detta* **localmente finita** *in X se ogni punto di X ha un intorno che interseca solo un numero finito di elementi di $\mathscr{A}$.*

Lemma 2.2.2. *Sia $\mathscr{A}$ una collezione localmente finita di sottoinsiemi di X. Allora*

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} \bar{A}.$$

Dimostrazione. Sia Y l'unione di tutti gli elementi di $\mathscr{A}$:

$$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A = Y.$$

In generale $\bigcup \bar{A} \subset \bar{Y}$. Verifichiamo che vale anche l'inclusione inversa $\bar{Y} \subset \bigcup \bar{A}$, sfruttando il fatto che $\mathscr{A}$ è localmente finita. Sia $x \in \bar{Y}$; sia U un intorno di x che interseca solo un numero finito di elementi di $\mathscr{A}$, chiamiamoli $A_1, ..., A_k$. Allora x appartiene a uno degli insiemi $\bar{A}_1, ..., \bar{A}_k$ e quindi appartiene a $\bigcup \bar{A}$. Infatti, se così non fosse, l'insieme $U - \bar{A}_1 - ... - \bar{A}_k$ poterbbe essere un intorno di x che non interseca nessun elemento di $\mathscr{A}$ e quindi non interseca Y, contraddicendo il fatto che $x \in \bar{Y}$. □

Definizione 2.2.3. *Una famiglia $\mathscr{B}$ di sottoinsiemi di X è detta* **numerabile localmente finita** *se $\mathscr{B}$ può essere espresso come unione numerabile di famiglie $\mathscr{B}_n$, ognuna delle quali è localmente finita.*

Definizione 2.2.4. *Sia $\mathscr{A}$ una collezione di sottoinsiemi dello spazio X. Una collezione $\mathscr{B}$ di sottoinsiemi di X è detta* **raffinamento** *di $\mathscr{A}$ se per ogni elemento*

$B \in \mathscr{B}$, esiste un elemento A di $\mathscr{A}$ che contiene B. Se gli elementi di $\mathscr{B}$ sono aperti $\mathscr{B}$ è un raffinamento aperto di $\mathscr{A}$, se sono chiusi è un raffinamento chiuso di $\mathscr{A}$.

Lemma 2.2.5. *Sia X uno spazio metrizzabile. Se $\mathscr{A}$ è un ricoprimento aperto di X, allora esiste un ricoprimento aperto ϵ di X che raffina $\mathscr{A}$ che è numerabile localmente finito.*

Dimostrazione. Scegliamo un buon ordinamento $<$ per la collezione $\mathscr{A}$. denotiamo con le lettere $U, V, W, ...$ gli elementi di $\mathscr{A}$. Mettiamo una metrica su X. Sia n un intero positivo fissato. Dato un elemento U di $\mathscr{A}$, sia $S_n(U)$ il sottoinsieme di U ottenuto contraendo U, più precisamente

$$S_n(U) = \{x | B(x, 1/n) \subset U\}.$$

Utilizziamo il buon ordinamento $<$ su $\mathscr{A}$ per passare ad un insieme ancora più piccolo. Per ogni U in $\mathscr{A}$ definiamo

$$T_n(U) = S_n(U) - \bigcup_{V<U} V.$$

Gli insiemi che otteniamo sono disgiunti. Infatti, sono separati da una distanza di almeno 1/n, cioè se V e W sono elementi distinti di $\mathscr{A}$, segue che, per ogni $x \in T_n(V)$ e per ogni $y \in T_n(W)$, $d(x, y) \geqslant 1/n$. Per provarlo, supponiamo che $V < W$.Poichè x sta in $T_n(V)$, allora x appartiene a $S_n(V)$, e quindi gli intorni di x di raggio $1/n$ stanno in V. D'altra parte, essendo $V < W$ e $y \in T_n(W)$, la definizione dell'ultimo insieme ci dice che y non può stare in V. Segue che y non appartiene all'intorno di x di raggio $1/n$. Gli insiemi $T_n(U)$ non sono ancora gli insiemi che cerchiamo, perchè non sappiamo se sono aperti. Quindi estendiamo ognuno di questi leggermente per ottenere un insieme aperto $E_n(U)$. Più precisamente, sia $E_n(U)$ l'intorno di raggio 1/3n di $T_n(U)$, cioè l'unione di tutte le bolle aperte di$B(x, 1/3n)$, per $x \in T_n(U)$. Gli insiemi ottenuti sono disgiunti. Infatti, se V e W sono elementi distinti di $\mathscr{A}$, facciamo vedere che $d(x, y) \geqslant 1/3n$ per $x \in E_n(V)$ e $y \in E_n(W)$; segue dalla disuguaglianza triangolare. Osserviamo che per ogni $V \in \mathscr{A}$, l'insieme $E_n(V)$ è contenuto in V. Definiamo

$$\xi_n = \{E_n(U) | U \in \mathscr{A}\}.$$

ξ_n è una collezione localmente finita di aperti che raffina $\mathscr{A}$. Infatti, ξ_n raffina $\mathscr{A}$, dato che $E_n(V) \subset V$ per ogni $V \in \mathscr{A}$. Inoltre, ξ_n è localmente finita, dato che, per ogni $x \in X$, l'intorno di raggio 1/6n di x può intersecare al più un elemento di ξ_n. Tuttavia, ξ_n non ricopre X, ma la collezione

$$\xi = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \xi_n$$

si. Sia x un punto di X e sia $\mathscr{A}$ la collezione con cui abbiamo ricoperto X; scegliamo U in modo che sia il primo elemento di $\mathscr{A}$ (nel buon ordinamento $<$) che contiene x. Essendo U aperto, possiamo scegliere n in modo tale che $B(x, 1/n) \subset U$. Allora, per definizione, $x \in S_n(U)$. Poichè U è il primo elemento di $\mathscr{A}$ che contiene x, il punto x appartiene a $T_n(U)$. Allora anche x appartiene all'elemento $E_n(U)$ di ξ_n, come volevasi dimostrare.

□

2.3 Teorema di Urysohn

In questo paragrafo vedremo il teorema di Urysohn, il quale ci da delle condizioni sufficienti affinchè uno spazio topologico sia metrizzabile.

Definizione 2.3.1. *Se A e B sono due sottoinsiemi di uno spazio topologico X e se esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$, tale che $f(A) = 0$ e $f(B) = 1$, diciamo che A e B possono essere separati da una funzione continua.*

Lemma 2.3.2. ***(Lemma di Urysohn)*** *Sia X uno spazio normale; siano A e B sottoinsiemi di X chiusi e disgiunti. Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso della retta reale. Allora esiste una mappa continua*

$$f : X \to [a, b]$$

tale che $f(x) = a$ per ogni $x\, in\, A$, e $f(x) = b$ per ogni x in B.

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso in cui l'intervallo sia [0,1]; il caso generale è una conseguenza. Sfruttando il fatto che X è normale, possiamo costruire una famiglia di aperti U_p di X, indicizzata dai numeri razionali. Utilizziamo questi insiemi per definire la funzione continua f.

Sia P l'insieme di tutti i numeri razionali nell'intervallo [0,1]. Definiamo, per ogni $p \in P$, un aperto U_p di X in modo che per $p < q$ abbiamo $\bar{U}_p \subset U_q$. Quindi, gli insiemi U_p sono ordinati con l'inclusione nello stesso modo in cui i loro pedici sono ordinati nella retta reale. Essendo P numerabile, possiamo utilizzare l'induzione per definire gli insiemi U_p. Disponiamo gli elementi di P in una sequenza infinita, supponendo per comodità che 0 e 1 siano i primi due numeri di tale sequenza. Definiamo gli insiemi U_p come segue: sia $U_1 = X - B$. Essendo A un insieme chiuso contenuto in un insieme aperto, per la normalità di X, possiamo scegliere un aperto U_0 tale che $A \subset U_0$ e $\bar{U}_0 \subset U_1$. In generale, sia P_n l'insieme dei primi n numeri naturali sulla sequenza. Supponiamo che U_p sia definito per tutti i numeri razionali $p \in P_n$, tali che

$$p < q \Longrightarrow \bar{U}_p \subset U_q. \tag{2.1}$$

Sia r il numero successivo alla sequenza; defianiamo U_r. Consideriamo l'insieme $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. E' un sottoinsieme finito dell'intervallo [0,1], e come tale ha l'ordine indotto dalla relazione d'ordine usuale della retta reale. In un insieme finito semplicemente ordinato ogni elemento ha un elemento che lo precede immediatamente e uno che lo segue immediatamente. Lo zero e 1 sono, rispettivamente, il più piccolo e il più grande elemento dell'insieme semplicemente ordinato P_{n+1} e r non è nè 0 ne 1. Quindi, r ha, in P_{n+1}, un numero p che lo precede immediatamente e un numero q che lo segue immediatamente. Gli insiemi U_p e U_q sono già stati definiti e $\bar{U}_p \subset U_q$ per l'ipotesi induttiva. Utilizzando la normalità di X, possiamo trovare un aperto U_r di X tale che $\bar{U}_p \subset U_r$ e $\bar{U}_r \subset U_q$. Adesso dimostriamo che la (2.1) vale per ogni coppia di elementi di P_{n+1}. Se entrambi gli elementi stanno in P_n la (2.1) vale per l'ipotesi induttiva. Se uno di questi è r e l'altro è un punto s di P_n , allora o $s \leqslant p$, e in questo caso

$$\bar{U}_s \subset \bar{U}_p \subset U_r,$$

oppure $s \geqslant q$, in questo caso

$$\bar{U}_r \subset U_q \subset U_s.$$

Quindi la relazione (2.1) vale per ogni coppia di elementi di P_{n+1}. Per induzione, abbiamp definito U_p per ogni $p \in P$.

Estendiamo questa definizione a tutti i numeri razionali $p \in \mathbb{R}$ definendo:

$$U_p = \emptyset \; se \; p < 0$$

$$U_p = X \ se \ p > 1.$$

E' ancora verificata la (2.1), per ogni coppia di numeri razionali p e q . Dato x in X, sia $\mathbb{Q}(x)$ l'insieme di tutti i razionali p tali che il corrispondente aperto U_p contenga x:

$$\mathbb{Q}(x) = \{p \mid x \in U_p\}.$$

Quest'insieme contiene i numeri che non sono inferiori a zero, poichè x non sta in U_p per $p < 0$. Inoltre, contiene tutti i numeri più grandi di 1, poichè x è in U_p per $p > 1$. Quindi $Q(x)$ è limitato inferiormente e l'estremo inferiore è un punto dell'intervallo [0,1].Definiamo

$$f(x) = inf\mathbb{Q}(x) = inf\{p|x \in U_p\}.$$

Mostriamo che f è la funzione cercata. Se $x \in A$, allora $x \in U_p$ per ogni $p \geqslant 0$, quindi $\mathbb{Q}(x)$ equivale all'insieme di tutti razionali non negativi, e $f(x) = inf\mathbb{Q}(x) = 0$. Similmente, se $x \in B$, allora $x \in U_p$, per $p > 1$, quindi $\mathbb{Q}(x)$ è costituito da tutti i razionali maggiori di 1, e $f(x) = 1$. Per dimostrare che f è continua dimostriamo prima i seguenti fatti:

1. $x \in \bar{U}_r \Longrightarrow f(x) \leqslant r.$

2. $x \notin \bar{U}_r \Longrightarrow f(x) \geqslant r.$

Per dimostrare la 1. osserviamo che se $x \in \bar{U}_r$, allora $x \in U_s$, per ogni $s > r$. Quindi $\mathbb{Q}(x)$ contiene tutti i razionali maggiori di r, quindi segue che

$$f(x) = inf\mathbb{Q}(x) \leqslant r.$$

Per provare la 2. osserviamo che se $x \notin U_r$, allora x non appartiene a U_s, per ogni $s < r$. Quindi, $\mathbb{Q}(x)$ non contiene alcun numero razionale inferiore a r, tale che

$$f(x) = inf\mathbb{Q}(x) \geqslant r.$$

Adesso possiamo provare la continuità di f. Dato un punto x_0 in X e un intervallo aperto (c,d) in $\mathbb{R}$ contenente il punto $f(x_0)$, vorremo trovare un intorno U di x_0 tale che $f(U) \subset (c,d)$. Scegliamo due numeri razionali p e q tali che:

$$c < p < f(x_0) < q < d.$$

Dimostriamo che $U = U_q - \bar{U}_p$ è l'intorno di x_0 cercato. Osserviamo che $x_0 \in U$. Il fatto che $f(x_0) < q$ implica con la condizione 2. che $x_0 \in U_q$, mentre il fatto che $f(x_0) > p$ implica con la condizione 1. che $x_0 \notin \bar{U}_p$. Inoltre, vediamo che $f(U) \subset (c, d)$. Sia $x \in U$. Allora $x \in U_p \subset \bar{U}_q$, affinchè $f(x) \leqslant q$, per la 1. E $x \notin \bar{U}_p$ e $f(x) \geqslant p$, per la 2. Quindi, $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$, come desiderato. □

Teorema 2.3.3. ***(Teorema di Urysohn)*** *Ogni spazio regolare X con una base numerabile è metrizzabile.*

Dimostrazione. Per provare che X è metrizzabile si utilizziamo l'imbedding di X in uno spazio metrizzabile Y, cioè si dimostra che X è omeomorfo a un sottospazio di Y. Come spazio Y prendiamo $\mathbb{R}^n$ con la topologia prodotto.

Innanzitutto proviamo il seguente fatto: Esiste una famiglia numerabile di funzioni continue $f_n : X \to [0, 1]$ tali che, dato un qualsiasi punto x_0 di X e un qualsiasi intorno U di x_0 , esiste un indice n tale che f_n sia positiva se calcolata in x_0 e nulla fuori da U.

Data una coppia (x_0, U) tale funzione esiste per il Lemma di Urysohn.Tuttavia se scegliamo una tale funzione per ogni coppia (x_0, U), non è detto che la famiglia di funzioni continue che si ottiene sia numerabile. Si procede come segue: Sia B_n una base numerabile di X. Per ogni coppia di indici n, m per la quale vale $\bar{B_n} \subset B_m$ applichiamo il Lemma di Urysohn: esiste una funzione continua $g_{n,m} : X \to [0, 1]$ tale che $g_{n,m}(\bar{B_n}) = \{1\}$ e $g_{n,m}(X - B_m) = \{0\}$. $\{g_{n,m}\}$ ha le proprietà richieste. Dati x_0 e U si può scegliere un elemento di base B_m che contiene x_0 e contenuto in U; utilizzando il fatto che X è regolare è possibile scegliere B_n tale che $x_0 \in B_n$ e $\bar{B_n} \subset B_m$. Quindi (n,m) è una coppia di indici per la quale la funzione $g_{n,m}$ è definita; inoltre, risulta essere positiva in x_0 e nulla fuori da U. La famiglia $\{g_{n,m}\}$ è numerabile, in quanto indicizzata da un sottoinsieme di $\mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$. Si può reindicizzarla con interi positivi ottenendo la famiglia cercata $\{f_n\}$.

Ora prendiamo $\mathbb{R}^n$ con la topologia prodotto e definiamo una mappa

$F : X \to \mathbb{R}^n$ come segue

$$F(x) = (f_1(x), f_2(x), ...).$$

Vogliamo dimostrare che F è un imbedding. F è continua perchè $\mathbb{R}^n$ ha la topologia prodotto e ogni f_n è continua. F è iniettiva poichè dati $x \neq y$, sappiamo che esiste un indice n tale che $f_n(x) > 0$ e $f_n(y) \neq 0$ e quindi $F(x) \neq F(y)$. Infine, proviamo che F è un omeomorfismo da X alla sua immagine $Z = F(X)$. Sappiamo che F definisce una bigezione continua da X a Z. Ci resta da dimostrare che F^{-1} è continua e cioè che se prendiamo un aperto U in X l'insieme $F(U)$ in Z è un aperto. Dobbiamo dimostrare quindi che esiste un aperto W di Z tale che $z_0 \in W \subset F(U)$. Sia x_0 la controimmagine di z_0. Scegliamo l'indice N per il quale $f_N(x_0) > 0$ e $f_N(X - U) = \{0\}$. Prendiamo l'intervallo aperto $(0, +\infty)$ di $\mathbb{R}$, e sia V l'insieme aperto di $\mathbb{R}^n$

$$V = {\pi_N}^{-1}((0, +\infty))$$

dove $\pi_N : \mathbb{R}^n \longrightarrow (0, +\infty)$ è la proiezione, definita come segue:

$$\pi_N(f_1(x), f_2(x), ...) = f_N(x).$$

Sia $W = V \cap Z$; allora W è aperto in Z per la definizione di sottospazio topologico. $z_0 \in W$ perchè

$$\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0.$$

Inoltre, $W \subset F(U)$. Infatti, se $z \in W$, allora $z = F(x)$ per qualche $x \in X$, e $\pi_N(z) \in (0, +\infty)$. Poichè $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$, e f_N è zero fuori da U, il punto x deve stare in U. Allora $z = F(x)$ appartiene a $F(U)$ come richiesto. Quindi F è un imbedding da X in $\mathbb{R}^n$. $\square$

Osservazione 2.3.4. Tuttavia, il fatto che uno spazio sia regolare e possieda una base numerabile è una condizione sufficiente, ma non necessaria. Infatti, esistono spazi che sono metrizzabili e ciò nonostante non possiedono una base numerabile.

Esempio 2.3.5. Uno di questi è $\mathbb{R}$ con la topologia discreta. Essendo uno spazio discreto, $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{dis})$ è metrizzabile (Osservazione 2.1.3).

Tuttavia, $\mathbb{R}$ non possiede una base numerabile. Supponiamo per assurdo che $\mathscr{B}$ sia una base numerabile per $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_{dis})$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\mathscr{B}$ dovrebbe contenere l'insieme $\{x\}$. Ma la famiglia $\mathscr{F} = \{\{x\}, x \in \mathbb{R}\}$ costituita da tutti gli insiemi con un solo elemento, ha la stessa cardinalità di $\mathbb{R}$, il quale non è numerabile. Segue che $\mathscr{B}$ non è numerabile.

2.4 Teorema di Nagata-Smirnov

Lemma 2.4.1. ***(Lemma di imbedding)*** *Sia X uno spazio nel quale ogni insieme costituito da un solo punto è chiuso. Supponiamo che $\{f_\alpha\}_{\alpha \in J}$ sia una famiglia indicizzata di funzioni continue $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ tali che per ogni $x_0 \in X$ e ogni intorno U di x_0, esiste un indice α tale che f_α sia positiva in x_0 e nulla fuori da U. Allora la mappa $F : X \to R^J$ definita da $F(x) = (f_\alpha(x))_{\alpha \in J}$ è un imbedding di X in $\mathbb{R}^J$. Se $f_\alpha : X \to [0,1]$ per ogni α, allora F è un imbedding di X in $[0,1]^J$.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che F è un imbedding, cioè che F è un omeomorfismo da X alla sua immagine $Z = F(X)$. F è continua perchè $\mathbb{R}^J$ ha la topologia prodotto e ogni f_α è continua. F è iniettiva poichè dati $x \neq y$, sappiamo che esiste un indice n tale che $f_\alpha(x) > 0$ e $f_\alpha(y) \neq 0$ e quindi $F(x) \neq F(y)$. Ci resta da dimostrare che F^{-1} è continua e cioè che se prendiamo un aperto U in X l'insieme $F(U)$ in Z è un aperto. Dobbiamo dimostrare, quindi, che esiste un aperto W di Z tale che $z_0 \in W \subset F(U)$. Sia x_0 la controimmagine di z_0. Scegliamo l'indice N per il quale $f_N(x_0) > 0$ e $f_N(X - U) = \{0\}$. Prendiamo l'intervallo aperto $(0, +\infty)$ di $\mathbb{R}$, e sia V l'insieme aperto di $\mathbb{R}^J$

$$V = {\pi_N}^{-1}((0, +\infty))$$

dove $\pi_N : \mathbb{R}^J \longrightarrow (0, +\infty)$ è la proiezione, definita come segue:

$$\pi_N(f_1(x), f_2(x), ...) = f_N(x).$$

Sia $W = V \cap Z$; allora W è aperto in Z per la definizione di sottospazio topologico. $z_0 \in W$ perchè

$$\pi_N(z_0) = \pi_N(F(x_0)) = f_N(x_0) > 0.$$

Inoltre, $W \subset F(U)$. Infatti, se $z \in W$, allora $z = F(x)$ per qualche $x \in X$, e $\pi_N(z) \in (0, +\infty)$. Poichè $\pi_N(z) = \pi_N(F(x)) = f_N(x)$, e f_N è zero fuori da U, il punto x deve stare in U. Allora $z = F(x)$ appartiene a $F(U)$ come richiesto. Quindi F è un imbedding da X in $\mathbb{R}^J$. □

Definizione 2.4.2. *Un sottoinsieme A di uno spazio X è detto insieme G_δ se è intersezione di una collezione numerabile di aperti di X.*

Lemma 2.4.3. *Sia X uno spazio regolare con una base $\mathscr{B}$ numerabile localmente finita. Allora X è normale ed ogni chiuso di X è un insieme G_δ.*

Dimostrazione. Sia W un aperto di X. Facciamo vedere che esiste una collezione numerabile $\{U_n\}$ di insiemi aperti di X tale che

$$W = \bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n.$$

Poichè la base $\mathscr{B}$ di x è localmente finita, può essere scritta come $\mathscr{B} = \cup \mathscr{B}_n$, dove ogni $\mathscr{B}_n$ è localmente finita. Sia $\mathscr{C}_n$ la collezione di quegli elementi di base B tali che $B \in \mathscr{B}_n$ e $\bar{B} \subset W$. Allora anche $\mathscr{C}_n$ è localmente finita, essendo una sottocollezione di $\mathscr{B}_n$. Definiamo

$$U_n = \bigcup_{B \in \mathscr{C}_n} B.$$

Allora U_n è un insieme aperto, e per il lemma 2.2.2

$$\bar{U}_n = \bigcup_{B \in \mathscr{C}_n} \bar{B}.$$

Quindi, $\bar{U}_n \subset W$, in modo tale che

$$\bigcup U_n \subset \bigcup \bar{U}_n \subset W.$$

Segue che $W \subset \bigcup U_n$,.

Adesso dimostriamo che ogni insieme chiuso C in X è un insieme G_δ in X. Dato C, sia $W = X - C$. Esistono degli insiemi U_n in X tali che $W = \cup \bar{U}_n$. Allora

$$C = \bigcap (X - \bar{U}_n),$$

e quindi C può essere espresso come intersezione numerabile di insiemi aperti di X.

Resta da dimostrare che X è normale. Siano C e D due chiusi disgiunti in X. Consideriamo $X - D$ e costruiamo una famiglia numerabile $\{U_n\}$ di aperti, tale che $\bigcup U_n = \bigcup \bar{U}_n = X - D$. Allora $\{U_n\}$ ricopre C e ogni insieme $\bar{U}_n$ è disgiunto da D. Possiamo ripetere lo stesso ragionamento a $X - C$ e dunque esisterà una famiglia numerabile di aperti $\{V_n\}$ che ricopre D e ogni insieme $\bar{V}_n$ sarà disgiunto da C. Adesso definiamo

$$U'_n = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{V}_i \qquad e \qquad V'_n = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_i.$$

Allora gli insiemi

$$U' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} U'_n \qquad e \qquad V' = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} V'_n$$

sono insiemi aperti disgiunti contenenti C e D, rispettivamente. □

Lemma 2.4.4. *Sia X uno spazio normale e sia A un chiuso G_δ in X. Allora esiste una funzione continua $f : X \to [0, 1]$ tale che $f(x) = 0$ se $x \in A$ e $f(x) > 0$ se $x \notin A$.*

Dimostrazione. Essendo A un insieme G_δ, può essere scritto come intersezione di insiemi aperti $U_n, n \in \mathbb{Z}_+$. Per ogni n possiamo scegliere, per il lemma di Urysohn, una funzione $f_n : X \to [0, 1]$ tale che $f_n(x) = 0$ per $x \in A$ e $f_n(x) = 1$ per $x \in X - U_n$. Definiamo $f(x) = \sum \frac{f_n(x)}{2^n}$. Applicando il teorema del confronto possiamo maggiorarla con la serie geometrica $\sum \frac{1}{2^n}$, la quale converge uniformemente e dunque anche la serie $\sum \frac{f_n(x)}{2^n}$ converge uniformemente. Segue che f è continua e quindi è nulla in A e positiva in $X - A$. □

Teorema 2.4.5. ***(Teorema di Nagata-Smirnov)*** *Uno spazio X è metrizzabile se e solo se X è regolare e ha una base numerabile localmente finita.*

Dimostrazione. Primo passo: X è regolare e ha una base numerabile localmente finita $\Longrightarrow$ X è metrizzabile.

Supponiamo che X sia regolare con una base numerabile localmente finita $\mathscr{B}$. Allora, per il Lemma 2.4.3, X è normale e ogni chiuso di X è un G_δ insieme in X. Mostriamo che X è metrizzabile attraverso l'imbedding di X nello spazio metrico $(\mathbb{R}^J, \bar{\rho})$ per qualche J. Sia $\mathscr{B} = \cup \mathscr{B}_n$, dove ogni $\mathscr{B}_n$ è localmente finito. Per ogni intero positivo n e ogni elemento di base $B \in \mathscr{B}_n$, scegliamo una funzione continua $f_{n,B} : X \to [0, 1/n]$ tale che $f_{n,B}(x) > 0$ per $x \in B$ e $f_{n,B} = 0$ per $x \notin B$. La famiglia $\{f_{n,B}\}$ separa punti da chiusi in X: dato un punto x_0 e un intorno U di x_0, c'è un elemento di base B tale che $x_0 \in B \subset U$. Allora, $B \in \mathscr{B}_n$ per qualche n, tale che $f_{n,B}(x_0) > 0$ e $f_{n,B} = 0$ fuori da U. Sia J il sottoinsieme di $\mathbb{Z}_+ \times B$ costituito da tutte le coppie (n, B) tali che$B \in \mathscr{B}_n$. Definiamo $F : X \to [0, 1]^J$ come segue

$$F(x) = (f_{n,B}(x))_{(n,B) \in J}.$$

Per il Lemma 2.4.1, relativamente alla topologia prodotto su $[0, 1]^J$, la mappa F è un imbedding.

Dotiamo $[0,1]^J$ della topologia indotta dalla metrica uniforme $\bar{\rho}$ e facciamo vedere che F è un imbedding relativamente a questa topologia. Utilizziamo il fatto che $f_{n,B}(x) < 1/n$. La topologia uniforme è più fine della topologia prodotto. Quindi rispetto alla metrica uniforme, la mappa F è iniettiva e porta aperti in aperti. Proviamo che F è continua: Nel sottospazio $[0,1]^J$ di $\mathbb{R}^J$ la metrica uniforme coincide con la metrica:

$$\rho((x_\alpha),(y_\alpha)) = sup\{|x_\alpha - y_\alpha|\}.$$

Per provare che F è continua prendiamo un punto x_0 di X e un numero $\epsilon > 0$ e cerchiamo un intorno W di x_0 tale che $x \in W \implies \rho(F(x), F(x_0)) < \epsilon$. Supponiamo che n sia fissato. Scegliamo un intorno U_n di x_0, il quale interseca solo un numero finito di elementi di $\mathscr{B}_n$. Questo significa che tutte le funzioni $f_{n,B}$, tranne un numero finito, sono identicamente nulle su U_n. Poichè ogni funzione $f_{n,B}$ è continua, possiamo scegliere un intorno V_n di x_0 contenuto in U_n sul quale ognuna delle rimanenti funzioni $f_{n,B}$ per $B \in \mathscr{B}_n$, varia al massimo fino a $\epsilon/2$. Scegliamo tale intorno V_n di x_0 per ogni n $\in \mathbb{Z}_+$. Allora scegliamo N tale che $1/N \leqslant \epsilon/2$ e definiamo $W = V_1 \cap V_2 \cap ... \cap V_N$. Mostriamo che W è l'intorno di x_0 cercato. Sia $x \in W$. Se $n \leqslant N$, allora

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leqslant \epsilon/2$$

poichè la funzione $f_{n,B}$ o è identicamente nulla oppure vale al massimo $\epsilon/2$ su W. Se $n > N$ allora

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leqslant 1/n < \epsilon/2,$$

poichè $f_{n,B}$ va da X a [0, 1/n]. Quindi $\rho(F(x), F(x_0)) \leqslant \epsilon/2 < \epsilon$, come desiderato.

Secondo passo: X è regolare e ha una base numerabile localmente $\implies$ finita X è metrizzabile. Supponiamo che X sia metrizzabile. Sappiamo che è regolare; facciamo vedere che X ha una base numerabile localmente finita. Scegliamo una metrica per X. Dato m sia $\mathscr{A}_m$ il ricoprimento di X costituito da tutte le bolle aperte di raggio 1/m. Per il lemma 1.2.4. esiste un ricoprimento aperto $\mathscr{B}_m$ di X che raffina $\mathscr{A}_m$ tale che $\mathscr{B}_m$ sia numerabile localmente finito. Ogni elemento di $\mathscr{B}_m$ ha diametro al massimo pari a 2/m. Sia $\mathscr{B}$ l'unione di tutte le collezioni $\mathscr{B}_m$, con $m \in \mathbb{Z}_+$. Poichè ogni collezione $\mathscr{B}_m$ è numerabile localmente finita, lo è anche $\mathscr{B}$. Rimane da dimostrare che $\mathscr{B}$ è una base per X. Dato $x \in X$ e dato

$\epsilon > 0$, mostriamo che esiste un elemento $B \in \mathscr{B}$ contenente x che è contenuto in $B(x, \epsilon)$. Scegliamo m tale che $1/m < \epsilon/2$. Allora, poichè $\mathscr{B}_m$ ricopre X, possiamo scegliere un elemento B di $\mathscr{B}_m$ che contiene x. Poichè B contiene x e ha diametro al massimo pari a $2/m < \epsilon$, è contenuto in $B(x, \epsilon)$ come volevasi dimostrare.

□

Osservazione 2.4.6. La condizione richiesta dal Teorema di Nagata- Smirnov di possedere una base numerabile localmente finita è molto più debole di quella richiesta dal Teorema di Urysohn, e ha risolto il problema della metrizzabilità di uno spazio topologico, risultando essere, insieme alla regolarità, condizione sia necessaria che sufficiente.

Bibliografia

[1] James.R.Munkres *Topology*

[2] Andrea Loi *Appunti di Topologia Generale*, A.A. 2009-10

[3] Kosniowski C.*Introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli 1989