UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

MOVIMENTI RIGIDI FINITI NEL PIANO E NELLO SPAZIO

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di
Silvia Schirra

ANNO ACCADEMICO 2007/2008

Introduzione

Questa tesi è dedicata allo studio dei sottogruppi finiti dei movimenti rigidi nel piano e nello spazio. La tesi è suddivisa in due capitoli.

Nel primo capitolo, dopo aver richiamato la definizione di movimento rigido di uno spazio vettoriale metrico $(V, \cdot)$, si dimostra che i movimenti rigidi sono tutti e soli quelli della forma $m = t_a \circ f$, dove $t_a : V \longrightarrow V$ è la traslazione di vettore a e $f : V \longrightarrow V$ è un'isometria lineare. Vengono inoltre classificati i movimenti rigidi del piano e dello spazio (cioè quando dim V = 2 oppure dim V = 3). Più precisamente si dimostra che i movimenti rigidi del piano sono: *traslazioni*, *rotazioni* e *glissosimmetrie*, mentre quelli dello spazio sono: *traslazioni*, *glissosimmetrie*, *rototraslazioni* e *rotosimmetrie*.

Nel secondo capitolo, che è il cuore della tesi, si ottengono i seguenti risultati, i quali forniscono una classificazione completa dei sottogruppi finiti dei movimenti rigidi del piano e dello spazio:

Teorema 0.0.1. *Sia G un sottogruppo finito del gruppo* $\boldsymbol{O}$ *dei movimenti rigidi che lasciano fissa l'origine, allora G è uno dei seguenti gruppi:*

(a) $G = C_n$, *il gruppo ciclico di ordine n, generato dalla rotazione R_φ, con* $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$.

(b) $G = D_n$, *il gruppo diedrale di ordine $2n$, generato dalla rotazione R_φ, con* $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$, *e da una simmetria S_ϑ intorno a una retta passante per l'origine.*

Teorema 0.0.2. *Ogni sottogruppo finito G di SO_3 è uno dei seguenti gruppi:*

1. *C_k: gruppo ciclico delle rotazioni di multipli di* $\dfrac{2\pi}{k}$ *intorno ad una retta;*
2. *D_k: gruppo diedrale delle simmetrie di un poligono regolare di k lati;*
3. *T: gruppo tetraedrale delle 12 rotazioni che portano un tetraedro regolare in se stesso.*

4. *O: gruppo ottaedrale di ordine 24 delle rotazioni di un cubo, oppure di un ottaedro regolare.*

5. *I: gruppo icosaedrale delle 60 rotazioni di un dodecaedro regolare oppure di un icosaedro regolare.*

La dimostrazione del Teorema 0.0.2 si basa sul concetto di azione di gruppo e in particolare della formula delle classi.

Indice

Capitolo 1

Classificazione dei Movimenti Rigidi nel Piano e nello Spazio

1.1 Movimenti rigidi

Il contesto nel quale si parla di movimenti rigidi è quello in cui si parla di spazi vettoriali metrici, cioè spazi vettoriali nei quali è definita una distanza. Consideriamo uno spazio vettoriale metrico (V,·) di dimensione n. Il prodotto scalare canonico $v \cdot w$ associa ai vettori v, w

$$v \cdot w = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i$$

dove le v^i, w^i sono rispettivamente le coordinate di v e w rispetto alla base canonica. La norma di un vettore è la radice del prodotto scalare del vettore v per se stesso:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} \qquad \forall v \in V.$$

La norma rappresenta la distanza del vettore v dall'origine. Definiamo la distanza fra due vettori v e w come la norma della loro differenza:

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

La distanza gode delle seguenti proprietà:

1. $d(v, w) \geq 0$
2. $d(v, w) = 0 \Rightarrow v = w$
3. $d(v, w) = d(w, v)$
4. $d(v, w) + d(w, z) \geq d(v, z) \qquad \forall v, w, z \in V \qquad$ (disuguaglianza triangolare)

Ci interessa vedere quali sono le applicazioni (non necessariamente lineari) che preservano le distanze, cioè quelle applicazioni $m : V \longrightarrow V$ tali che:

$$d(m(v), m(w)) = d(v, w) \qquad \forall v, w \in V.$$

Vediamo alcuni esempi.

Esempio 1.1.1 (Le isometrie lineari). *In uno spazio metrico $(V, \cdot)$ consideriamo le isometrie lineari $f : V \longrightarrow V$, cioè quelle applicazioni che preservano il prodotto scalare:*

$$f(v) \cdot f(w) = v \cdot w \qquad \forall v, w \in V.$$

Quindi f preserva la norma $\|f(v)\| = \|v\|$ e di conseguenza le distanze:

$$d(f(v), f(w)) = \|f(v) - f(w)\| = \|f(v - w)\| = \|v - w\| = d(v, w).$$

Esempio 1.1.2 (La traslazione di vettore a). *Sia $(V, \cdot)$ uno spazio vettoriale metrico;fissiamo un vettore $a \in V$ e definiamo l'applicazione:*

$$t_a : V \longrightarrow V$$

$$v \longmapsto t_a(v) = v + a \qquad \forall v \in V$$

Quindi traslare un vettore v di un vettore a fissato consiste nel sommare a v il vettore a.

Osservazione 1.1.3. *La traslazione t_a non è lineare,a meno che a non sia il vettore nullo:*

$$t_a(v + w) = v + w + a$$

$$t_a(v) + t_a(w) = (v + a) + (w + a) = v + w + 2a$$

$$\textit{da cui} \qquad t_a(v + w) = t_a(v) + t_a(w) \Longleftrightarrow a = 0$$

cioè se e solo se a è il vettore nullo.

Ciò nonostante t_a preserva le distanze.Infatti

$$d(t_a(v), t_a(w)) = d(v + a, w + a) = \|v + a - (w + a)\| =$$

$$= \|v + a - w - a\| = \|v - w\| = d(v, w)$$

Quindi sia le isometrie lineari che le traslazioni conservano le distanze.

Osservazione 1.1.4. *Se consideriamo due applicazioni*

$$f : V \longrightarrow V \qquad g : V \longrightarrow V$$

che preservano le distanze; è abbastanza intuitivo che la loro composizione conservi le distanze:

$$d(f(g(v)), f(g(w))) = d(g(v), g(w)) = d(v, w) \qquad \forall v, w \in V.$$

Definizione 1.1.5. *Le applicazioni della forma $(t_a \circ f) : V \longrightarrow V$ sono detti 'movimenti rigidi'.*

Osservazione 1.1.6. $t_a \circ f \neq f \circ t_a$:

$$(t_a \circ f)(v) = a + f(v) \qquad \textit{mentre} \qquad (f \circ t_a)(v) = f(a + v) = f(a) + f(v)$$

Si ha, invece, che $\qquad t_a \circ f = f \circ t_{f^{-1}(a)}$:

$$(f \circ t_{f^{-1}(a)})(v) = f(v + f^{-1}(a)) = f(v) + f(f^{-1}(a)) = f(v) + a$$

Dunque l'insieme dei movimenti rigidi è contenuto nell'insieme delle applicazioni che conservano la distanza. Vogliamo dimostrare che in effetti i due insiemi coincidono.

Teorema 1.1.7. *Sia V uno spazio vettoriale metrico $(V, \cdot)$ e sia $m : V \longrightarrow V$ un'applicazione che preserva le distanze. Allora $m = t_a \circ f$ per un certo $a \in V$ e f isometria lineare di V.*

Dimostrazione. Definiamo $f = m - m(0)$, $0 \in V$, cioè $f : V \longrightarrow V$ che ad ogni vettore v di V associa $f(v) = m(v) - m(0)$. f gode delle seguenti proprietà:

1. $f(0) = 0$. Infatti, $m(v) - m(0) = m(0) - m(0) = 0$.

2. $m = t_a \circ f$, dove $a = m(0)$. Infatti: $m(v) = (t_a \circ f)(v) = t_a(f(v)) = t_a(m(v) - m(0)) = (m(v) - m(0) + a) \Longleftrightarrow a = m(0)$.

3. f preserva la distanza. Infatti, per ipotesi m conserva la distanza e quindi si ha:

$$d(f(v), f(w)) = d(m(v) - m(0), m(w) - m(0)) = d(m(v), m(w)) = d(v, w)$$

Vediamo se f preserva la norma, cioè se

$$\|f(v)\| = \|v\| \qquad \forall v \in V.$$

Posso scrivere $f(v) = f(v) - f(0)$ perchè $f(0) = 0$. Allora

$$\|f(v) - f(0)\| = d(f(v), f(0)) = d(v, 0) = \|v - 0\| = \|v\|.$$

Quindi f preserva la norma.

Vediamo se f preserva anche il prodotto scalare, cioè se

$$f(v) \cdot f(w) = v \cdot w, \qquad \forall v, w \in V.$$

Sapiamo che f preserva la distanza:

$$d(v, w)^2 = d(f(v), f(w))^2 \Longleftrightarrow \|v - w\|^2 = \|f(v) - f(w)\|^2$$

ma

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2v \cdot w$$

e

$$\|f(v) - f(w)\|^2 = \|f(v)\|^2 + \|f(w)\|^2 - 2f(v) \cdot f(w).$$

Quindi abbiamo che

$$-2v \cdot w = -2f(v) \cdot f(w) \Longrightarrow v \cdot w = f(v) \cdot f(w),$$

cioè f preserva il prodotto scalare.

Dobbiamo dimostrare che f è lineare, cioè che:

1. $f(v + w) - f(v) - f(w) = 0$, $\forall v, w \in V$. (addittività)

2. $f(\lambda v) - \lambda f(v) = 0$, $\forall v \in V$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (omogeneità)

Considero una base ortonormale $\{e_1, ..., e_n\}$ di V. Siccome f preserva sia la norma sia il prodotto scalare, anche $\{f(e_1), ..., f(e_n)\}$ è una base ortonormale di V. Vogliamo dimostrare l'addittività di f; moltiplico scalarmente la relazione $f(v+w) - f(v) - f(w)$ per $f(e_i)$ con i $= 1, \ldots$,n.

$$f(e_i) \cdot (f(v+w) - f(v) - f(w)) = f(e_i) \cdot f(v+w) - f(e_i) \cdot f(v) - f(e_i) \cdot f(w) =$$

$$= (e_i) \cdot (v+w) - (e_i) \cdot (v) - (e_i) \cdot (w) = 0.$$

Quindi $f(e_i) \cdot (f(v+w) - f(v) - f(w)) = 0$ per ogni vettore $f(e_i)$ della base $B = \{f(e_1), ..., f(e_n)\}$. Questo implica che il vettore $f(v+w) - f(v) - f(w)$ deve essere ortogonale ad ogni vettore della base B, quindi deve essere il vettore nullo: $f(v+w) - f(v) - f(w) = 0$.

Allo stesso modo dimostriamo l'omogeneità:

$$f(e_i) \cdot (f(\lambda v) - \lambda f(v)) = f(e_i) \cdot (f(\lambda v)) - f(e_i) \cdot (\lambda f(v)) = (e_i) \cdot (\lambda v)) - (e_i) \cdot (\lambda(v)) = 0$$

L'unico vettore ortogonale a tutti i vettori dello spazio è il vettore nullo, quindi f è omogenea, e quindi è lineare. $\square$

1.1.1 Movimenti rigidi in $\mathbb{R}^n$

Fissiamo un sistema di riferimento ortonormale in $\mathbb{R}^n$. Definiamo la *traslazione* t_a mediante un vettore a come:

$$t_a(x) = x + a = \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \\ ... \\ x_n + a_n \end{pmatrix}$$

dove $(x_1, ..., x_n)$ e $(a_1, ..., a_n)$ sono rispettivamente le coordinate di x e di a rispetto alla base fissata.

L'applicazione f, invece, è un isometria lineare; la sua matrice rispetto a una base ortonormale è una matrice ortogonale. Quindi i movimenti rigidi $m = t_a \circ f$

sono definiti da
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto Ax + a$$
dove A è una matrice ortogonale nxn e $a, x \in \mathbb{R}^n$.

1.2 Movimenti rigidi in $\mathbb{R}^2$

1.2.1 Isometrie lineari in $\mathbb{R}^2$

Vogliamo classificare i movimenti rigidi in $\mathbb{R}^2$. Sappiamo esattamente come sono fatte le traslazioni:
$$t_a(x) = x + a = \begin{pmatrix} x_1 + a_1 \\ x_2 + a_2 \end{pmatrix} \qquad \forall a, x \in \mathbb{R}^2$$

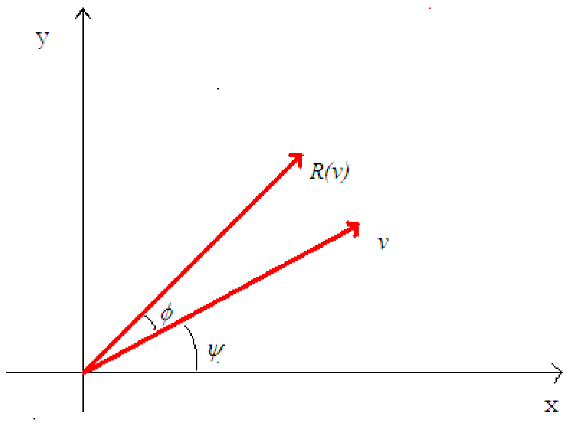
Essendo la matrice delle isometrie lineari una matrice ortogonale (rispetto a una base ortonormale), per studiare i movimenti rigidi del piano, basterà andare a vedere come sono fatte le matrici di O_2, cioè le matrici ortogonali 2x2. Esse sono della forma:

1. $R_\varphi = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi \in \mathbb{R}$

2. $S_\varphi = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ sin\varphi & -cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi \in \mathbb{R}$

Vediamo il significato geometrico delle matrici ortogonali R_φ e S_φ. Se prendiamo un vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e lo scriviamo in coordinate polari vediamo subito cosa rappresenta $R_\varphi(v)$: rappresenta la rotazione di angolo φ in senso antiorario del vettore v intorno all'origine.

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rcos\psi \\ rsin\psi \end{pmatrix}$$



dove $r = \|v\|$ e ψ è l'angolo che il vettore v forma con l'asse delle x.Calcoliamo $R_\varphi(v)$:

$$R_\varphi(v) = R_\varphi \begin{pmatrix} rcos\psi \\ rsin\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} rcos\psi \\ rsin\psi \end{pmatrix} =$$

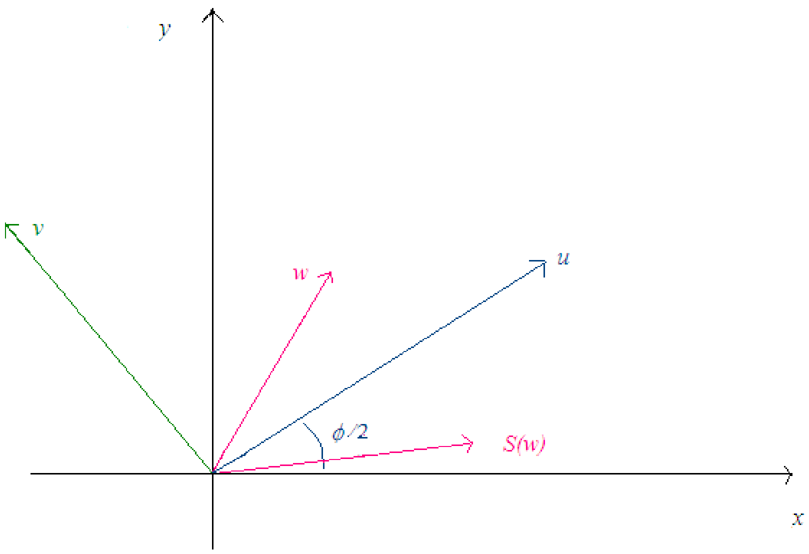
$$= r \begin{pmatrix} cos\varphi cos\psi - sin\varphi sin\psi \\ sin\varphi cos\psi + cos\varphi sin\psi \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} cos(\varphi + \psi) \\ sin(\varphi + \psi) \end{pmatrix}$$

cioè è esattamente la rotazione del vettore v di un angolo φ in senso antiorario.

Vediamo che cosa rappresenta geometricamente la matrice S_φ. Consideriamo un vettore u di coordinate $(cos\frac{\varphi}{2}, sin\frac{\varphi}{2})$, che forma cioè un angolo $\frac{\varphi}{2}$ con l'asse x. Prendiamo il vettore v ortogonale a u. Allora $S_\varphi(u) = u$, cioè u viene trasformato in se stesso e $S_\varphi(v) = -v$, dove $-v$ è il vettore che ha stessa direzione e modulo di v e verso opposto. Consideriamo ora un qualunque vettore w; sarà della forma $w = \lambda u + \mu v$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Allora:

$$S_\varphi(w) = S_\varphi(\lambda u + \mu v) = \lambda S_\varphi(u) + \mu S_\varphi(v) = \lambda u - \mu v.$$

La componente lungo u non si accorge della rotazione, mentre quella lungo v cambia segno. S_φ, dunque, rappresenta la simmetria rispetto all'asse u passante per O e che forma un angolo $\frac{\varphi}{2}$ con l'asse x.



Queste sono tutte e sole le isometrie lineari di $\mathbb{R}^2$, cioè le isometrie sono o delle rotazioni o delle simmetrie. R_φ è detto movimento diretto, cioè conserva l'orientazione e ha determinante uguale a 1, mentre S_φ è detto movimento indiretto, cioè ribalta l'orientazione e ha determinante uguale a -1.

Osservazione 1.2.1. *La simmetria S_φ è diagonalizzabile e u e v sono due autovettori con autovalori +1 e -1. Questo risultato è in accordo col fatto che le matrici ortogonali hanno tutti autovalori +1 e -1. La rotazione R_φ, invece, non ha autovettori. Un vettore viene mandato in sè soltanto quando è l'identità. Quindi se $\cos\varphi \neq 1$ nessun vettore viene mandato in sè stesso e neanche in un multiplo di se stesso.*

Vediamo alcune proprietà di S_φ e R_φ.

1. S_φ^2 è uguale all'identità;

2. $S_\varphi^{-1} = {}^t S_\varphi = S_\varphi$ (la prima uguaglianza è valida perchè S_φ è ortogonale);

3. $R_\vartheta R_\varphi = R_{\vartheta+\varphi}$ (se ruoto di un angolo ϑ e poi di un angolo φ ho ruotato di un angolo $\vartheta + \varphi$);

4. $R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$, cioè l'inversa della rotazione di angolo φ è la rotazione di angolo $-\varphi$.

Se prendiamo la simmetria rispetto all'asse x, allora la sua matrice sarà:

$$S_0 = \begin{pmatrix} cos0 & sin0 \\ sin0 & cos0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La simmetria rispetto ad una retta passante per l'origine e che forma un angolo $\frac{\varphi}{2}$ con l'asse x, può essere vista come composizione della simmetria rispetto all'asse x e della rotazione attorno all'origine di angolo φ.

$$S_\varphi = R_\varphi \circ S_0 = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\varphi & sin\varphi \\ sin\varphi & -cos\varphi \end{pmatrix}$$

Vediamo che cosa otteniamo se consideriamo la composizione $S_\vartheta \circ S_\varphi$.

$$S_\vartheta \circ S_\varphi = R_\vartheta S_0 S_\varphi^{-1} = R_\vartheta S_0 S_0^{-1} R_\varphi^{-1} = R_\vartheta S_0 S_0 R_{-\varphi} = R_\vartheta I R_{-\varphi} = R_\vartheta R_{-\varphi} = R_{\vartheta-\varphi}$$

Dunque la composizione di due simmetrie S_ϑ (simmetria rispetto alla retta che forma un angolo $\frac{\vartheta}{2}$ con l'asse x) e S_φ (simmetria rispetto alla retta che forma un angolo $\frac{\varphi}{2}$ con l'asse x) è una rotazione attorno all'origine in senso antiorario di un angolo $(\vartheta - \varphi)$.

Osservazione 1.2.2. *Questo risultato è in accordo col fatto che le rotazioni hanno det uguale a 1. Infatti:*

$$det(S_\vartheta S_\varphi) = det(S_\vartheta)det(S_\varphi) = (-1)(-1) = 1$$

Dunque $S_\vartheta \circ S_\varphi$ è una rotazione.

1.2.2 Classificazione dei movimenti rigidi in $\mathbb{R}^2$

Siamo in grado di descrivere tutti i movimenti rigidi $m = (t_a \circ f) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Abbiamo tre casi:

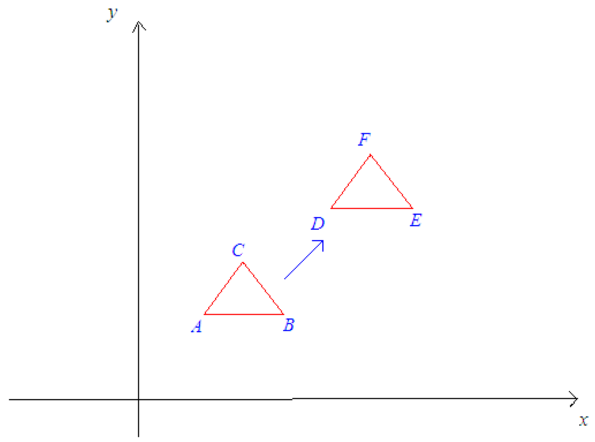
1. $m = t_a$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}$ (traslazione);

2. $m = t_a \circ R_\varphi$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto R_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (rotazione +traslazione);

3. $m = t_a \circ S_\varphi$: $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto S_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (glissosimmetria);

Ogni movimento rigido di $\mathbb{R}^2$ può essere ricondotto a uno dei tre casi appena elencati.

Il primo movimento rigido è la traslazione. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano; prendo un triangolo di vertici A,B,C e la traslazione verso gli assi positivi. I vertici D, E, F del triangolo traslato saranno i corrispondenti dei vertici



A, B, C del triangolo di partenza. Il triangolo traslato è esattamente lo stesso triangolo: lati uguali e angoli uguali. Non ci sono punti uniti, cioè punti che m trasforma in se stessi, a meno che a non sia uguale al vettore nullo.

Il secondo movimento rigido $m = t_a \circ R_\varphi$ è ottenuto effettuando prima una rotazione e poi una traslazione. Vogliamo vedere se ci sono punti uniti. Denoto con $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ le coordinate del punto $m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Allora:

$$\begin{cases} x' = xcos\varphi - ysin\varphi + a \\ y' = xsin\varphi + ycos\varphi + b \end{cases} \tag{1.1}$$

Per vedere se ci sono punti uniti dobbiamo vedere se esiste un punto $P(x_0, y_0)$ che viene mandato in se stesso, cioè tale che

$$\begin{cases} x_0 = x_0cos\varphi - y_0sin\varphi + a \\ y_0 = x_0sin\varphi + y_0cos\varphi + b \end{cases}$$

Siccome a, b, cosφ, sinφ sono dati, si tratta di risolvere un sistema di due equazioni in due incognite, nelle incognite x_0, y_0.

$$\begin{cases} x_0(cos\varphi - 1) - y_0 sin\varphi = -a \\ x_0 sin\varphi + y_0(cos\varphi - 1) = -b \end{cases} \tag{1.2}$$

Per sapere se ammette soluzione controlliamo il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} cos\varphi - 1 & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi - 1 \end{pmatrix}$$

$detA = (cos\varphi-1)^2+sin^2\varphi = cos^2\varphi-2cos\varphi+1+sin^2\varphi = 2-2cos\varphi = 2(1-cos\varphi) \neq 0$ (nell'ipotesi che $cos\varphi \neq 1$). Il sistema, allora, ammette un'unica soluzione. Applicando Cramer ottengo:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{-a(cos\varphi - 1) - bsin\varphi}{2 - 2cos\varphi} \\ y_0 = \dfrac{-b(cos\varphi - 1) + asin\varphi}{2 - 2cos\varphi} \end{cases}$$

Ricavando i coefficienti a e b dall'equazione (1.2) e sostituendo nella (1.1) otteniamo:

$$\begin{cases} x' = xcos\varphi - ysin\varphi + (-cos\varphi + 1)x_0 + y_0 sin\varphi \\ y' = ycos\varphi - xsin\varphi + (-cos\varphi + 1)y_0 + x_0 sin\varphi \end{cases}$$

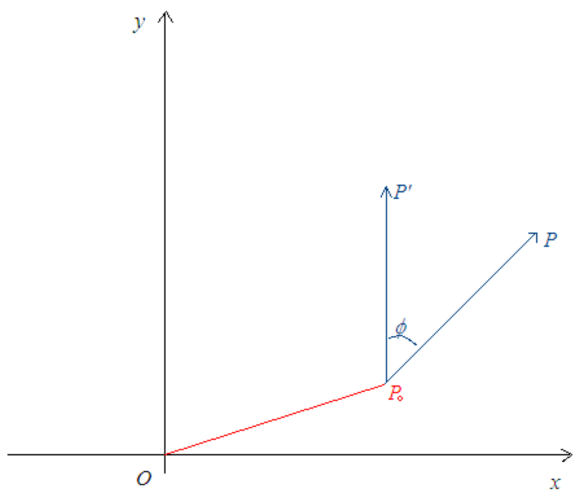
$$\begin{cases} x' = cos\varphi(x - x_0) - sin\varphi(y - y_0 + x_0 \\ y' = cos\varphi(y - y_0) - sin\varphi(x - x_0 + y_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

La (1.3) rappresenta l'espressione del secondo movimento rigido in funzione del punto fisso $P(x_0, y_0)$. Se $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $P_0 = \begin{pmatrix} x_o \\ y_0 \end{pmatrix}$ allora la (1.3) diventa:

$$P' = R_\varphi(P - P_0) + P_0,$$

cioè P' lo posso scrivere uguale alla matrice R_φ applicata a $(P - P_0)$ più P_0. Si capisce come è fatto il movimento rigido:

Prendo un punto P qualunque e considero il vettore $P - P_0$. Allora R_φ fa ruotare in senso antiorario il vettore $P - P_0$ di un angolo φ intorno alla nuova origine, che è il punto fisso P_0. Quindi il secondo movimento rigido, che indichiamo con $R_{P_o,\varphi}$ rappresenta la rotazione in senso antiorario di angolo φ atorno a P_0. $R_{P_o,\varphi}$ non



è lineare. Infatti, non porta l'origine nell'origine, che viene ruotata di un certo angolo φ intorno a P_0.

Il terzo movimento rigido è composto da una simmetria e da una traslazione. Se prendo come base la base ortonormale (u, v) dove u, v sono autovettori di S_φ, allora la sua matrice rispetto a questa base sarà: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Allora posso scrivere m come:

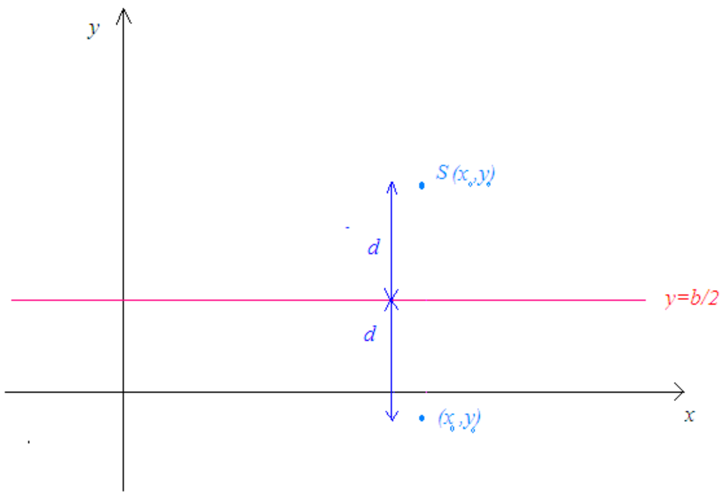
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = x + a \\ y = -y + b \end{cases}$$

Se avessi avuto:

$$\begin{cases} x = x + a \\ y = y + b \end{cases}$$

avrei avuto una traslazione. Posso vedere questo movimento rigido come composizione di due movimenti, prima a (x, y) associo $(x, -y + b)$ tramite S e poi applico la traslazione di vettore $(a, 0)$,dove S è la simmetria rispetto alla retta $y = \frac{b}{2}$.



Prendiamo un punto qualunque P(x_0, y_0); la sua immagine attraverso S sarà P'$(x_0, -y_0 + b)$. Verifichiamo che S è la simmetria rispetto alla retta $y = \frac{b}{2}$. Allora la distanza di P dalla retta $y = \frac{b}{2}$ deve essere uguale alla distanza di P' dalla retta $y = \frac{b}{2}$.

$$d(P', y = \frac{b}{2}) = |(-y_0 + b) - \frac{b}{2}| = |-y_0 + \frac{b}{2}| = |y_0 - \frac{b}{2}| = d(P, y = \frac{b}{2}) = d$$

I punti sulla retta sono punti uniti; infatti, se prendo un generico punto sulla retta $(x_0, \frac{b}{2})$, questo viene mandato in $(x_0, -\frac{b}{2} + b)$, cioè in se stesso. Dunque, la retta $y = \frac{b}{2}$ è esattamente l'asse di simmetria e S è la simmetria rispetto a tale retta. Quindi prima faccio la simmetria S e poi una traslazione in direzione (a,0), cioè parallela all'asse x e quindi all'asse di simmetria. Questo movimento rigido prende il nome di glissosimmetria.

Osservazione 1.2.3. $S \circ t_{(a,0)} = t_{(a,0)} \circ S$ *Infatti, sia la S che la t lavorano solamente sulla y, quindi posso scambiare l'ordine delle operazioni.*

Osservazione 1.2.4. *L'asse di simmetria può essere qualsiasi, non deve essere necessariamente parallela all'asse x. E'stata scelta in questo modo per semplificare i calcoli.*

Quindi qualunque movimento rigido si prenda in considerazione rientra in uno dei tre casi descritti. Se si fa la composizione di due simmetrie rispetto a due rette diverse si ottiene uno dei casi del teorema. Infatti, la composizione di due simmetrie rispetto a due rette parallele è una traslazione (Fig.1), mentre rispetto a due rette perpendicolari è una rotazione (Fig.2).

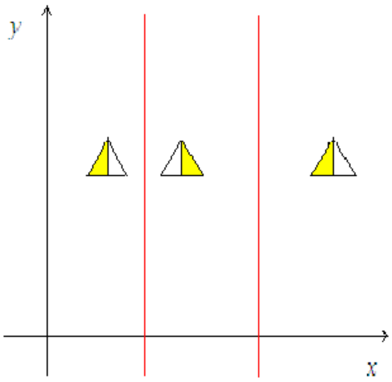


Fig. 1

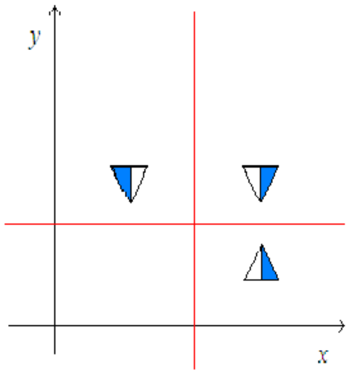


Fig. 2

La glissosimmetria invece, essendo la composizione di una simmetria e di una traslazione, può essere vista come composizione di tre simmetrie. Si deduce che i movimenti rigidi del piano formano un gruppo, cioè:

(a) rispetto alla legge di composizione, componendo due movimenti rigidi, si ottiene ancora un movimento rigido;

(b) vale la proprietà associativa, perchè la composizione è sempre associativa;

(c) $\exists$ l'elemento neutro (l'identità);

(d) $\exists$ l'inverso.

Questo gruppo che indichiamo con M, è generato dalle simmetrie, cioè componendo tra di loro le simmetrie si ottiengono tutti i movimenti rigidi del piano.

1.3 Movimenti rigidi in $\mathbb{R}^3$

1.3.1 Isometrie lineari in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo ora, il caso in cui V sia uno spazio di dimensione 3. Vogliamo classificare i movimenti rigidi, come fatto in $\mathbb{R}^2$. Sappiamo gia come sono fatte le traslazioni, dobbiamo vedere come sono fatte le isometrie $f : V \longrightarrow V$. Per fare questo definiamo uno spazio molto importante che è lo spazio dei vettori invarianti, ovvero dei vettori che f manda in sè:

$$I = \{v \in V | f(v) = v\}.$$

I è l'insieme di tutti quei vettori che hanno autovalore 1, cioè è l'autospazio relativo all'autovalore 1.

Osservazione 1.3.1. *I è un sottospazio di V. Infatti, I è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalari:*

$$f(v+w) = f(v) + f(w) = v + w \qquad \forall v, w \in I$$

$$f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda v \qquad \forall v \in I \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

I contiene il vettore nullo; infatti, se λ è uguale a zero abbiamo:

$$f(0) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0.$$

Se V è uno spazio di dimensione 3, allora I può avere dimensione 3, 2, 1 oppure 0. Esaminiamo i vari casi:

1. dim $I = 3 =$ dim V. In questo caso qualunque vettore viene mandato in se stesso $\Longrightarrow I = V$. Quindi, $f(v) = v$, $\forall v \in V$. Allora f è l'applicazione identità. Rispetto a una base qualunque f è rappresentato dalla matrice identità I_3 :
$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. dim $I = 2$. Sia $\{u, v\}$ una base ortonormale di I, cioè $\|v\|^2 = \|u\|^2 = 1$ e $v \cdot u = 0$. Per definizione di I abbiamo che $f(u) = u$ e $f(v) = v$. Vediamo

come agisce f sui vettori che non appartengono ad I. Consideriamo l'insieme dei vettori ortogonali a I.

$$I^{\perp} = \{w \in V | w \cdot v = 0, \forall v \in I\} \subset V$$

Osservazione 1.3.2. *$I^{\perp}$ è un sottospazio vettoriale di V. Infatti, l'ortogonale di uno spazio vettoriale è ancora uno spazio vettoriale. Inoltre, $I \oplus I^{\perp} = V$, cioè V è la somma diretta di I e $I^{\perp}$. Quindi la dimensione di $I^{\perp}$ sarà:*

$$dim I^{\perp} = dim V - dim I = 3 - 2 = 1$$

Se prendo un vettore $w \in I^{\perp}$ la sua immagine tramite f sarà ancora un vettore appartenente a $I^{\perp}$, cioè $f(w) \cdot v = 0 \ \forall v \in I$. Infatti:

$$f(w) \cdot v = f(w) \cdot f(v) = w \cdot v = 0.$$

Sia $\{w\}$ una base ortonormale per $I^{\perp}$, cioè $\|w\| = 1$. Essendo f un isometria conserva le norme: $\|f(w)\| = \|w\| = 1$. Inoltre $f(w)$ sarà $\perp$ a $f(v)$ e a $f(u)$, essendo w $\perp$ a u e v.

$$w \cdot v \Longrightarrow f(w) \cdot f(v) = f(w) \cdot v = 0.$$

$$w \cdot u \Longrightarrow f(w) \cdot f(u) = f(w) \cdot u = 0.$$

Quindi $f(w)$ è ortogonale a u e a v. Siccome siamo in uno spazio di dimensione 3, $f(w) \perp u, v \Longrightarrow f(w) = \pm w$. Ma si deve escludere $f(w) = w$ perchè se così fosse w apparterrebbe a I e essendo u, v, w linearmente indipendenti si avrebbe dim I = 3 e non dim I = 2; quindi $f(w) = -w$. Allora l'applicazione f, rispetto alla base $\{u, v, w\}$, è rappresentata dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

E' una matrice diagonale e u, v sono autovettori relativi all'autovalore 1, mentre w è l'autovettore relativo all'autovalore -1. f rappresenta la simmetria rispetto ad un piano (in questo caso z = 0); x e y rimangono fisse e z cambia in - z.

3. dim I = 1. Se dim I = 1 esiste un vettore v di norma unitaria tale che $f(v) = v$, ed è esattamente l'autospazio relativo all'autovalore 1. Stavolta la $dimI^{\perp}$ sarà $dimI^{\perp} = dimV - dimI = 3 - 1 = 2$. Anche in questo caso $f_{|_{I^{\perp}}}$ associa a un vettore $w \in I^{\perp}$ un vettore $f(w)$ ancora $\in I^{\perp}$.

$$f(w) \cdot v = f(w) \cdot f(v) = w \cdot v = 0.$$

Ho un'isometria lineare $f_{|_{I^{\perp}}} : I^{\perp} \longrightarrow I^{\perp}$. Abbiamo già classificato nel paragrafo precedente le isometrie lineari in uno spazio di dim 2. Possiamo avere tre casi:

(a) $f_{|_{I^{\perp}}} = id_{I^{\perp}}$ (f è l'identità). Dobbiamo escludere questo caso perchè se così fosse ogni vettore di $I^{\perp}$ verrebbe mandato in se stesso e quindi I avrebbe dim 3 e non dim 1. Quindi $f_{|_{I^{\perp}}} \neq id_{I^{\perp}}$.

(b) $f_{|_{I^{\perp}}}$ è una simmetria. Se così fosse dovrebbe esistere un vettore $\in I^{\perp}$ che viene mandato in se stesso, ma in tal caso si avrebbe dim I = 2. Quindi $f_{|_{I^{\perp}}}$ non è una simmetria.

(c) $f_{|_{I^{\perp}}}$ è una rotazione.

Dunque, se $\{u, v\}$ è una base ortonormale per $I^{\perp}$ e $B = \{u, v, w\}$ una base ortonormale per V, la matrice che rappresenta f rispetto alla base B è della forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (cos\varphi \neq 1 \text{ altrimenti avrei l'identità}).$$

Dove la prima, la seconda e la terza colonna della matrice sono rispettivamente le coordinate di $f(u), f(v), f(w)$ rispetto alla base $B = \{u, v, w\}$:

$$\begin{cases} f(u) = u \\ f(v) = vcos\varphi + wsin\varphi \\ f(w) = -vsin\varphi + wcos\varphi \end{cases}$$

f è la rotazione di angolo φ intorno a una retta (in questo caso l'asse x); la x rimane la stessa variano la y e la z.

4. dim I = 0. In questo caso non c'è nessun vettore $v \in V$ tale che $f(v) = v$. Vogliamo cercare gli autovalori e gli autovettori di $f : V \longrightarrow V$; dobbiamo trovare le radici del polinomio caratteristico. Essendo dim V = 3, il polinomio caratteristico sarà di terzo grado e dunque ammette almeno una radice reale (Teorema fondamentale dell'algebra). Questo ci garantisce che esiste un certo autovettore $v \neq 0$ con relativo autovalore λ, cioè tale che $f(v) = \lambda v$. Nel nostro caso f è un isometria lineare, deve preservare le norme, quindi:

$$\|v\| = \|f(v)\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\| \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Ma λ non può essere uguale a 1, perchè dim I = 0, quindi λ = -1. Dunque $\exists v \neq 0, \| v\| = 1 | f(v) = -v$. Chiamiamo $w = span\{v\}$ lo span di v, con dim w = 1. Prendiamo $w^{\perp}$ che avrà dim 2:

$$dim w^{\perp} = dim V - dim w = 3 - 1 = 2$$

$f_{|_{w^{\perp}}}$ è un'isometria in uno spazio di dim 2, ma non può essere l'identità, nè una simmetria, è una rotazione. Quindi se $\{v, w\}$ è una base ortonormale di $w^{\perp}$ e $B = \{u, v, w\}$ è una base ortonormale di V, la matrice che rappresenta f rispetto a B è:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (cos\varphi \neq 1 \text{ altrimenti avrei l'identità}),$$

dove la prima, la seconda e la terza colonna della matrice sono rispettivamente le coordinate di $f(u), f(v), f(w)$ rispetto alla base $B = \{u, v, w\}$:

$$\begin{cases} f(u) = -u \\ f(v) = vcos\varphi + wsin\varphi \\ f(w) = -vsin\varphi + wcos\varphi \end{cases}$$

La f è composta da una rotazione di angolo φ intorno a una retta r (in questo caso l'asse delle x) e da una simmetria rispetto a un piano perpendicolare alla retta r (in questo caso rispetto al piano x = 0):

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, la f, rispetto a un' opportuna base ortonormale (tranne nel caso dell'identità in cui si può scegliere una base qualunque), si può scrivere come uno dei quattro casi precedenti. Ovviamente, siccome la matrice di f dipende dalla base scelta, le matrici che rappresentano f non sono solo quelle elencate sopra. Per esempio, se prendiamo in esame il caso 3, una rotazione di angolo φ può essere espressa da una matrice della forma:

$$\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi & 0 \\ sin\varphi & cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Questa matrice rappresenta la rotazione di angolo φ in senso antiorario attorno all'asse z: vedo ruotare il piano xy in senso antiorario.

1.3.2 Classificazione dei movimenti rigidi in $\mathbb{R}^3$

Tutti i movimenti rigidi in $\mathbb{R}^3$ sono della forma $m = t_a \circ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ Se $\{u, v, w\}$ è una base ortonormale in $\mathbb{R}^3$, allora m è definito da:

$$m(x) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Dove $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, (a, b, c) e $A \in \mathbf{O}(3)$ sono rispettivamente le coordinate di x, le coordinate di a e la matrice di f rispetto alla base scelta. Una volta definite le isometrie lieari f in $\mathbb{R}^3$ possiamo classificare i movimenti rigidi $m = t_a \circ f$.

1. Se dim I = 3 A è la matrice identità:

$$A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Quindi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Facendo la composizione con la traslazione di vettore a = (a, b, c), si ottiene:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$

m è la traslazione di vettore a = (a, b, c) ed è l'identità se a = b = c = 0.

2. Se dim I = 2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

facendo la composizione con la traslazione di vettore a = (a, b, c) abbiamo:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = -z + c \end{cases}$$

Possiamo distinguere due casi:

(a) a = b = 0 e c varia come vuole.Allora:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z + c \end{cases}$$

Se c = 0 m è la simmetria rispetto al piano z = 0. Se $c \neq 0$ m è la simmetria rispetto al piano $z = \frac{c}{2}$. Supponiamo che c sia positivo e prendiamo un punto $P_0(x_0, y_0, z_0,$ allora $m(P_0 = P_0' = (x_0, y_0, -z_0 + c)$ Il punto P_0' ottenuto è il simmetrico del punto P_0 rispetto al piano $z = \frac{c}{2}$. Infatti, la distanza di P_0 dal piano $z = \frac{c}{2}$ è la stessa di quest'ultimo dal punto P_0' :

$$d(P_0, z = \frac{c}{2}) = |z_0 - \frac{c}{2}|$$

$$d(P_0', z = \frac{c}{2}) = |-z_0 + c - \frac{c}{2}| = |-z_0 + \frac{c}{2}| = |z_0 - \frac{c}{2}|$$

Quindi

$$d(P_0, z = \frac{c}{2}) = d(P_0', z = \frac{c}{2}).$$

(b) $(a, b) \neq (0, 0)$,cioè o a o b è diverso da zero.Allora:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = -z + c \end{cases}$$

Posso scriverla come composizione di due applicazioni: $m = t \circ S$, definita da

$$(x, y, z) \longrightarrow (x, y, -z + c) \longrightarrow (x + a, y + b, -z + c).$$

S è la simmetria rispetto al piano $z = \frac{c}{2}$, e t è la traslazione di vettore (a, b, 0) parallela al piano $z = \frac{c}{2}$. Questo movimento rigido, composizione di una simmetria piana con una traslazione parallela al piano di simmetria, prende il nome di glissosimmetria.

Osservazione 1.3.3. *In generale la simmetria non commuta con la traslazione, ma in questo caso si, perchè la traslazione avviene parallelamente al piano di simmetria (in questo caso, infatti, la traslazione lavora con la x e la y, mentre la simmetria con la z).*

3. Se dim I = 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}.$$

La trasformazione corrispondente è

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = ycos\varphi - zsin\varphi + b \\ z' = ysin\varphi + zcos\varphi + c \end{cases}$$

Se a = b = c = 0 ottengo la rotazione attorno all'asse delle x. Se $a, b, c \neq 0$, considerando solo la seconda e la terza equazione, abbiamo la composizione di una rotazione con una traslazione. In dimensione due abbiamo trovato che si otteneva ancora una rotazione, però attorno a un altro punto diverso dall'origine. Consideriamo i casi in cui a = 0 e $a \neq 0$.

(a) a = 0. In dim 2 avevo la rotazione di angolo φ attorno a un punto P_0 diverso dall'origine. In dimensione tre ho la rotazione di angolo φ attorno a una retta passante per P_0 e parallela all'asse x.

(b) $a \neq 0$ posso scrivere il movimento rigido come $m = r \circ t$ definito da:

$$(x, y, z) \longrightarrow (x + a, y, z) \longrightarrow (x + a, ycos\varphi + b, ysin\varphi + zcos\varphi + c)$$

t è la traslazione di vettore (a, 0, 0) e r la rotazione attorno a una retta parallela all'asse delle x. Quindi, m è la composizione di una rotazione attorno a una retta e una traslazione parallela alla retta stessa: è una rototraslazione. E' commutativo, in quanto t lavora su x, r su y e z.

4. dim I = 0. Allora A è della forma:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\varphi & -sin\varphi \\ 0 & sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}.$$

La trasformazione corrispondente è

$$\begin{cases} x' = -x + a \\ y' = ycos\varphi - zsin\varphi + b \\ z' = ysin\varphi + zcos\varphi + c \end{cases}$$

Posso scrivere $m = r \circ S = S \circ r$:

$$(x, y, z) \longrightarrow (-x + a, y, z) \longrightarrow (-x + a, ycos\varphi - zsin\varphi + b, ysin\varphi + zcos\varphi + c)$$

S è la simmetria rispetto al piano $x = \frac{a}{2}$, r è una rotazione intorno ad una retta parallela all'asse delle x. m è una rotosimmetria, cioè è la composizione di una simmetria rispetto a un piano π con la rotazione rispetto alla retta perpendicolare a π.

Abbiamo classificato tutti i movimenti rigidi di $\mathbb{R}^3$: m può essere o l'identità, o una glissosimmetria, o una rototraslazione o una rotosimmetria.

Capitolo 2

Movimenti rigidi finiti nel piano e nello spazio

2.1 Movimenti rigidi finiti nel piano

In questo paragrafo vogliamo studiare i sottogruppi finiti G del gruppo M dei movimenti rigidi del piano. Per poterli classificare enunciamo il seguente teorema:

Teorema 2.1.1. ***(Teorema del punto fisso)****. Sia G un sottogruppo finito del gruppo dei movimenti M. Allora esiste un punto p del piano che è lasciato fisso da ogni elemento di G, ossia esiste un punto p tale che $g(p) = p$ per ogni $g \in G$.*

Dimostrazione. Sia S l'insieme dei punti che sono immagini di s attraverso i vari elementi di G, cioè sia S l'orbita di s sotto l'azione di G. Se elenchiamo gli elementi di S in un ordine arbitrario, $S = \{s_1, ..., s_n\}$, il punto fisso è il centro di gravità dell'orbita, definito da

$$p = \frac{1}{n}(s_1 + ... + s_n)$$

cioè rappresenta una media dei punti $s_1, ..., s_n$.

Lemma 2.1.2. *Sia $S = \{s_1, ..., s_n\}$ un insieme finito di punti del piano, e sia p il suo centro di gravità. Sia m un movimento rigido tale che $m(s_i) = s'_i$ e $m(p) = p'$. Allora $p' = \frac{1}{n}(s'_1 + ... + s'_n)$, cioè i movimenti rigidi mandano centri di gravità in centri di gravità.*

Dimostrazione. Distinguiamo i casi $m = t_a$, $m = R_\varphi$ e $m = S_{\varphi\varphi}$.

1. $m = t_a$. Allora $p' = p + a$ e $s'_i = s_i + a$ e quindi:
$$p + a = \frac{1}{n}((s_1 + a) + ... + (s_n + a)).$$

2. $m = S_\varphi$ oppure $m = R_\varphi$. Allora m è un isometria lineare. Dunque:
$$p' = m(\frac{1}{n}(s_1 + ... + s_n)) = \frac{1}{n}(m(s_1) + ... + m(s_n)) = \frac{1}{n}(s'_1 + ... + s'_n)$$

□

Quindi il centro di gravità dell' insieme S è un punto fisso rispetto all'azione di G. Infatti, ogni elemento g di G permuta l orbita S e il lemma 2.1.2 assicura che g manda il centro di gravità in sè. □

Questo teorema è molto importante; per esempio, mostra che ogni sottogruppo di M che contiene rotazioni intorno a due punti distinti non può essere un sottogruppo finito. Inoltre ci assicura che se G è un sottogruppo finito di M esiste un punto lasciato fisso da ogni elemento di G. Possiamo scegliere un sistema di riferimento opportuno in modo che questo punto sia l'origine. In questo modo G risulta essere un sottogruppo di **O**, gruppo dei movimenti rigidi che lasciano fissa l'origine. Allora per classificare i movimenti rigidi finiti di $\mathbb{R}^2$ ci basterà studiare i sottogruppi finiti di **O**, ossia dei sottogruppi finiti di O_2 (gruppo delle matrici ortogonali 2x2), dato che **O** e O_2 sono isomorfi. Tali sottogruppi sono descritti dal seguente teorema:

Teorema 2.1.3. *Sia G un sottogruppo finito del gruppo* **O** *dei movimenti rigidi che lasciano fissa l'origine. Allora G è uno dei seguenti gruppi:*

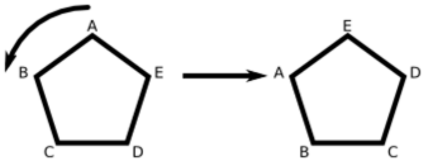
(a) *$G = C_n$, il gruppo ciclico di ordine n, generato dalla rotazione R_φ, con $\varphi = \frac{2\pi}{n}$.*

(b) *$G = D_n$, il gruppo diedrale di ordine 2n, generato dalla rotazione R_φ, con $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, e da una simmetria S_ϑ intorno a una retta passante per l'origine.*

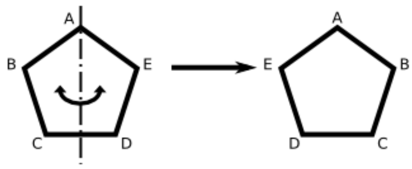
Se G è un sottogruppo finito di M, per poter applicare il teorema è necessario scegliere un sistema di riferimento opportuno che sposti l'origine nel punto fisso.

Ecco un esempio di rotazione e simmetria di un pentagono regolare

Una rotazione del pentagono di $\frac{360°}{5} = 72° = \frac{2\pi}{5}\mathrm{rad}$



Una riflessione del pentagono attorno al proprio asse di simmetria



Corollario 2.1.4. *Sia G un sottogruppo finito del gruppo M dei movimenti rigidi del piano. Allora, introdotto un sistema di riferimento opportuno, G diventa uno dei gruppi C_n o D_n, dove C_n è generato da R_φ, con $\varphi = \frac{2\pi}{n}$, e D_n è generato da R_φ e S_0 (simmetria rispetto all'asse delle x).*

Denotiamo la rotazione R_φ con x e la simmetria S_0 con y.

Proposizione 2.1.5. *Il gruppo diedrale D_n è generato da due elementi x, y che soddisfano le relazioni:*

$$x^n = 1, \qquad y^2 = 1, \qquad yx = x^{-1}y$$

. Gli elementi di D_n sono:

$$\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}; y, xy, x^2y, ..., x^{n-1}y\} = \{x^iy^j | 0 \leq i < n, 0 \leq j < 2\}$$

Dimostrazione. Per definizione, gli elementi x e y generano D_n. Le relazioni $y^2 = 1$, $yx = x^{-1}y$ sono quelle viste nel paragrafo 1.2.1: $S_0^2 = 1$ e $S_0R_\varphi = R_\varphi^{-1}S_0$.

La relazione $x^n = 1$ invece segue dal fatto che $\varphi = \frac{2\pi}{n}$; questo implica anche che gli elementi $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$ sono tutti distinti e dunque lo sono anche $y, xy, x^2y, ..., x^{n-1}y$. Le potenze di x sono rotazioni, mentre $y, xy, x^2y, ..., x^{n-1}y$ sono simmetrie, quindi non vi sono ripetizioni nella lista degli elementi di D_n. Le relazioni possono essere utilizzate per ridurre un qualunque prodotto di x, y, x^{-1}, y^{-1} nella forma x^iy^j con $0 \leq i < n, 0 \leq j < 2$. L'elenco contiene tutti gli elementi del gruppo generato da x, y e siccome questi ultimi generano D_n l'elenco è completo. □

Possiamo ora dimostrare il teorema 2.1.3.

Dimostrazione. Sia G un sottogruppo finito di **O**. Ricordiamo che gli elementi di **O** sono le rotazioni R_φ e le simmetrie $R_\varphi S_0$. Distinguiamo due casi:

1. Tutti gli elementi di G sono rotazioni. Dobbiamo provare che G è ciclico. Se G $=\{1\}$, allora G $= C_n$. Altrimenti G contiene una rotazione non banale R_φ. Sia φ il più piccolo angolo di rotazione positivo tra gli elementi di G, allora G è generato da R_φ. Infatti, sia R_α un qualunque elemento di G, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Sia $n\varphi$ il più grande multiplo intero di φ minore di α. Allora $\alpha = n\varphi + \beta$, con $0 \leq \beta < \varphi$. R_φ e R_α sono elementi di G, ma essendo un gruppo deve contenere anche il prodotto $R_\beta = R_\alpha R_{-n\varphi}$. Ma, per ipotesi, φ è il più piccolo angolo di rotazione positivo in G, dunque $\beta = 0$ e $\alpha = n\varphi$. Questo dimostra che G è ciclico.

   Sia $n\varphi$ il più piccolo multiplo di φ che sia $\geq 2\pi$, allora $2\pi \leq n\varphi < 2\pi + \varphi$. Poichè φ è il più piccolo angolo di rotazione positivo in G, si ha: $n\varphi = 2\pi$. Dunque $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ per qualche intero n.

2. G contiene una simmetria. Scegliendo un sistema di riferimento opportuno, possiamo supporre che S_0 appartenga a G. Indichiamo con H il sottogruppo delle rotazioni di G; utilizzando il ragionamento fatto per il caso 1, possiamo concludere che H è ciclico: $H = C_n$. Quindi i 2n prodotti R_φ^i e $R_\varphi^i S_0$, $0 \leq i \leq n-1$, appartengono a G, quindi $G \supseteq D_n$.

   Dobbiamo dimostrare che ogni elemento di G appartiene a D_n. Se g è una rotazione allora $g \in H$ per definizione di H, dunque $g \in D_n$. Se g è una riflessione, possiamo scriverlo nella forma $R_\alpha S_0$, per qualche rotazione R_α.

Siccome $S_0 \in G$, anche $R_\alpha S_0 S_0 = R_\alpha \in G$. Quindi R_α è una potenza di R_φ, e questo dimostra che anche g appartiene a D_n, dunque $G = D_n$.

□

2.2 Movimenti rigidi finiti nello spazio

Per poter classificare i sottogruppi finiti del gruppo SO_3 delle rotazioni di $\mathbb{R}^3$ è necessario introdurre il concetto di azione di gruppo e la formula delle classi.

Definizione 2.2.1. *Dati un gruppo G e un insieme S, un'*azione di G *su S è una legge che associa ad elementi $g \in G$ e $s \in S$ un elemento $gs \in S$.*

$$G \times S \longrightarrow S$$

$$g, s \longmapsto gs$$

Soddisfa i seguenti assiomi.

1. *$1s = s$, per ogni s (1 è l' identità di G);*
2. *proprietà associativa: $(gg')(s) = g(g'(s))$, per ogni $g, g' \in G$ e $s \in S$.*

Un insieme S, con un'azione di G è chiamato un G-insieme.

Definizione 2.2.2. *Sia s un elemento di S. L'*orbita *di s in S rispetto al'azione di G è l'insieme:*

$$O_s = \{s' \in S | s' = gs \text{ per qualche } g \in G\}$$

Anche s appartiene all'orbita, poichè G essendo un gruppo contiene l'elemento neutro 1 e s = 1(s).

Ogni elemento di G permuta l'orbita di s, cioè $\forall x \in G$ se $s' \in S$ allora anche $x(s') \in S$. Infatti, supponiamo $s' = g(s)$, con $g \in G$; essendo G un gruppo $xg \in G$ e quindi $xg(s) \in S$ per definizione. Ma xg(s) = $x(s')$, quindi $x(s') \in S$.

Siccome gli elementi di G operano su S mediante permutazioni, O_s è l'insieme delle immagini di s rispetto alle varie permutazioni:

$$m_g : S \longrightarrow S$$

$$s \longmapsto m_g(s) = gs$$

Le orbite relative all'azione di un gruppo sono classi di equivalenza rispetto alla relazione: $s \sim s'$ se $s' = gs$, per qualche $g \in G$. Quindi le orbite costituiscono una partizione dell'insieme S: S è unione di orbite disgiunte. Se G è costituito da una sola orbita, si dice che G agisce *transitivamente* su S, cioè ogni elemento di S viene portato in un qualsiasi altro elemento di S da qualche elemento del gruppo.

Definizione 2.2.3. *Lo* stabilizzatore *di un elemento $s \in S$ è il sottogruppo G_s di G costituito dagli elementi di G che lasciano fisso s.*

$$G_s = \{g \in G | gs = s\}.$$

Definizione 2.2.4. *Sia H un sottogruppo di G. Una* classe laterale sinistra *è un sottoinsieme della forma:*

$$aH = \{ah | h \in H\}$$

Denotiamo con G/H lo spazio delle classi laterali sinistre. Il gruppo G agisce sullo spazio delle classi laterali in modo del tutto naturale.

Se g è un elemento del gruppo G e se C è una classe laterale, allora gC è la classe laterale:

$$gC = \{gc | c \in C\}$$

Dunque, se C = aH, allora gC è la classe laterale gaH.

Proposizione 2.2.5. *Sia S un G-insieme, e sia s un elemento di S. Sia H lo stabilizzatore di s e sia O_s l'orbita di s. Allora $\exists$ un'applicazione biettiva naturale:*

$$\varphi : G/H \longrightarrow O_s$$

$$aH \longmapsto as$$

Si ha che $\varphi(g(C)) = g\varphi(C) \forall$ classe laterale C e $\forall g \in G$.

Se H è un sottogruppo di G, le classi laterali di H in G hanno tutte lo stesso numero di elementi: $|H| = |aH|$. G è l'unione di classi laterali disgiunte e il numero delle classi laterali è l'indice $|G/H|$. Quindi abbiamo che l'ordine del gruppo G (cioè il numero di elementi di G) è dato da:

$$|G| = |H||G/H| \tag{2.1}$$

Combinando la proposizione 2.2.5 e l'equazione 2.1 si ottiene il seguente risultato:

Proposizione 2.2.6. ***(Formula delle classi)*** *Sia $s \in S$. Allora si ha:*

$$\textit{(ordine di G)} = \textit{(ordine dello stabilizzatore)(ordine dell'orbita)}$$

$$|G| = |G_s||O_s|$$

Utilizzando la formula delle classi, possiamo ora, classificare i sottogruppi finiti del gruppo delle rotazioni di $\mathbb{R}^3$.

Teorema 2.2.7. *Ogni sottogruppo finito G di SO_3 è uno dei seguenti gruppi:*

1. *C_k: gruppo ciclico delle rotazioni di multipli di $\frac{2\pi}{k}$ intorno ad una retta;*
2. *D_k: gruppo diedrale delle simmetrie di un poligono regolare di k lati;*
3. *T: gruppo tetraedrale delle 12 rotazioni che portano un tetraedro regolare in se stesso.*
4. *O: gruppo ottaedrale di ordine 24 delle rotazioni di un cubo, oppure di un ottaedro regolare.*
5. *I: gruppo icosaedrale delle 60 rotazioni di un dodecaedro regolare oppure di un icosaedro regolare.*

Diamo un'idea della dimostrazione.

Dimostrazione. Sia G un sottogruppo finito di SO_3, di ordine N. Ogni $g \in G$, diverso dall'identità è una rotazione attorno a una retta l, che è unica. Quindi, g lascia fissi due punti della sfera unitaria S di $\mathbb{R}^3$, cioè i due punti $l \cap S$. Questi punti sono detti poli di g. Un polo è un punto $\in S$ tale che gp = p per qualche $g \neq 1$ di G.

Lemma 2.2.8. *.L'insieme P dei poli è portato in sè dall'azione di G sulla sfera.*

Contiamo i poli per avere informazioni sul gruppo. Ogni elemento di G diverso dall'identità ha due poli, quindi si potrebbe concludere che vi sono in tutto 2N - 2 poli. Questo non è del tutto corretto dal momento che un punto p può essere polo per più di un elemento del gruppo. Lo stabilizzatore G_p di un polo p è il gruppo di tutte le rotazioni $\in G$ intorno alla retta l = (0, p). Si tratta di un gruppo ciclico, generato dalla rotazione di ϑ (angolo minimo in G). Se l'ordine di G_p è r_p, allora $\vartheta = \frac{2\pi}{r_p}$.

Essendo p un polo, lo stabilizzatore G_p contiene un elemento diverso da 1, quindi $r_p > 1$. Utilizzando la formula delle classi abbiamo:

$$|G_p||O_p| = |G|$$

o equivalentemente

$$r_p n_p = N$$

dove n_p è il numero dei poli dell'orbita O_p di p. Facendo alcune considerazioni si ottiene la formula:

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{i=1}^{N}(1 - \frac{1}{r_i})$$

dalla quale si deduce che non si possono avere più di tre orbite. Distinguiamo i tre casi:

1. 1 sola orbita: $2 - \frac{2}{N} = 1 - \frac{1}{r} \Longrightarrow$ impossibile, perchè $2 - \frac{2}{N} \geq 1$ mentre $1 - \frac{1}{r} <$;

2. 2 orbite: $2 - \frac{2}{N} = (1 - \frac{1}{r_1}) + (1 - \frac{1}{r_2}) \Longrightarrow \frac{2}{N} = \frac{1}{r_1}) + \frac{1}{r_2})$. Siccome $r_i \leq N$, l'equazione precedente può essere soddisfatta solo se $r_1 = r_2 = N = 1$. Vi sono due poli p e p' lasciati fissi da ogni elemento di G, quindi $G = C_n$, gruppo ciclico delle rotazioni attorno alla retta l, passante per i poli p e p';

3. 3 orbite :
$$\frac{2}{N} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \Longrightarrow r_1 = 2$$
Abbiamo due casi:

   Caso 1. Almeno 2 degli ordini valgono : $r_1 = r_2 = 2$. $G = D_r$, gruppo diedrale delle rotazioni che lasciano fisso un poligono regolare di r lati. Caso 2. Uno solo degli $r_i = 2$. Ci sono solo tre possibilità:

(a) $r_i = (2, 3, 3)$ $\mathrm{N} = 12$

(b) $r_i = (2, 3, 4)$ $\mathrm{N} = 24$

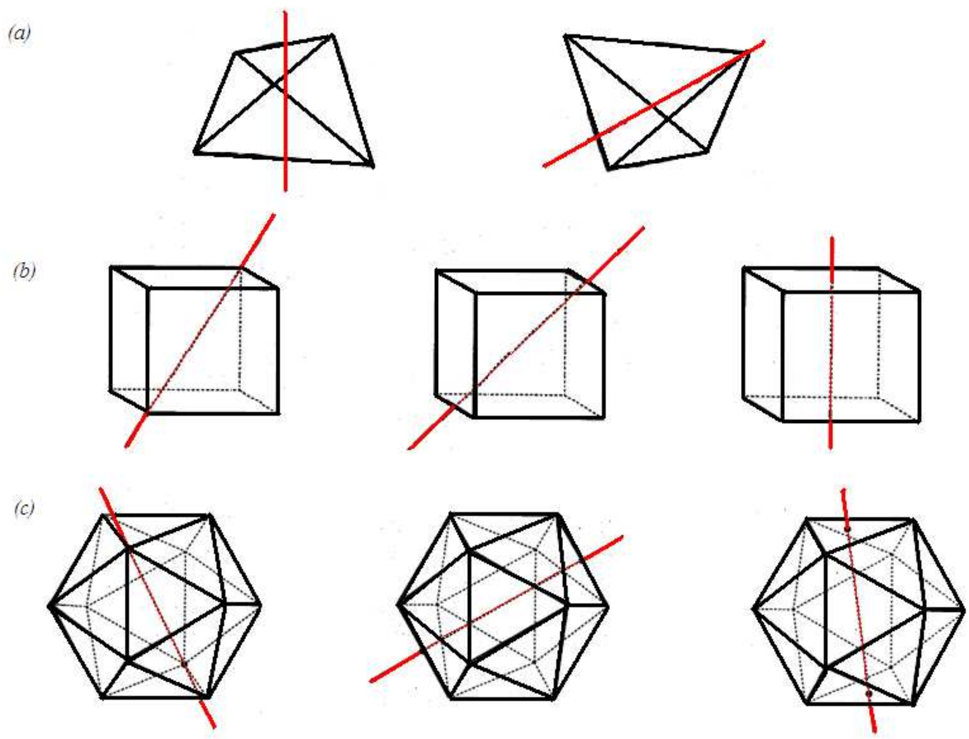
(c) $r_i = (2, 3, 5)$ $\mathrm{N} = 60$

Vediamo le configurazioni corrispondenti:

(a) $n_i = (6, 4, 4) \Longrightarrow G = T$, n_1, n_2, n_3, sono rispettivamente il numero degli spigoli, dei vertici e delle facce di un tetraedro regolare.

(b) $n_i = (12, 8, 6) \Longrightarrow G = O$, n_1, n_2, n_3, sono rispettivamente il numero degli spigoli, dei vertici e delle facce di un cubo, oppure rispettivamente gli spigoli, le facce e i vertici di un ottaedro regolare.

(c) $n_i = (30, 20, 12) \Longrightarrow G = I$, n_1, n_2, n_3, sono rispettivamente il numero degli spigoli, dei vertici e delle facce di un dodecaedro regolare oppure rispettivamente gli spigoli, le facce e i vertici di un icosaedro regolare.



$\square$

Bibliografia

[1] Michael Artin *Algebra*, Bollati Boringhieri 1997

[2] Aristide Sanini *Lezioni di Geometria* , Levrotto e Bella

[3] R.Caddeo, A.Gray *Lezioni di Geometria Differenziale su Curve e superfici, volume I* , C. U. E. C. 2001

[4] G.Zappa, R.Permutti *Gruppi, corpi, equazioni*, Feltrinelli 1963