Università degli Studi di Cagliari
Corso di Laurea in Matematica

Una dimostrazione del Lemma di Zorn

Serena Pirina

Relatore: prof. Andrea Loi

Anno Accademico 2017/2018

Il lemma di Zorn

Lemma

Se X è un insieme non vuoto su cui è definita una relazione d'ordine parziale $\leq$ tale che ogni sua catena C possiede un maggiorante in X, allora X contiene almeno un elemento massimale.

Il lemma di Zorn

L' importanza del lemma. . .

Il lemma di Zorn

L' importanza del lemma...

Grazie al lemma si possono infatti enunciare:

- Il teorema di Tychonoff in topologia per spazi compatti;
- L'esistenza di una base per ogni spazio vettoriale di dimensione infinita;
- L'esistenza di un ideale massimale per ogni anello.

- Il lemma di Zorn è inoltre equivalente all'assioma di scelta.

Definizioni utili

Relazione d'ordine parziale

Una relazione d'ordine $\leq$ è parziale se gode della proprietá riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Definizioni utili

Relazione d'ordine parziale

Una relazione d'ordine $\leq$ è parziale se gode della proprietá riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Catena

Un insieme $C \subseteq X$ è una catena se è un sottoinsieme totalmente ordinato, ovvero un insieme parzialmente ordinato in cui tutti gli elementi sono confrontabili.

Definizioni utili

Maggiorante

Sia $(X, \leq)$ parzialmente ordinato e $S \subseteq X$, diremo che $x \in X$ è maggiorante di S se $y \leq x \; \forall y \in S$

Definizioni utili

Maggiorante

Sia $(X, \leq)$ parzialmente ordinato e $S \subseteq X$, diremo che $x \in X$ è maggiorante di S se $y \leq x\ \forall y \in S$

Elemento massimale

Sia $(X, \leq)$ parzialmente ordinato, diremo che $x \in X$ è massimale in X se $\forall x' \in X$ t.c. $x \leq x' \Rightarrow x = x'$

Dimostrazione lemma di Zorn

1. Si suppone, per assurdo, che X non abbia un elemento massimale

Dimostrazione lemma di Zorn

1. Si suppone, per assurdo, che X non abbia un elemento massimale
2. Se $C \subseteq X$ è una catena di $X \Rightarrow$ per ipotesi C possiede un maggiorante $\Rightarrow$ esiste il limite superiore u di C

Dimostrazione lemma di Zorn

1. Si suppone, per assurdo, che X non abbia un elemento massimale
2. Se $C \subseteq X$ è una catena di $X \Rightarrow$ per ipotesi C possiede un maggiorante $\Rightarrow$ esiste il limite superiore u di C
3. Quindi se $x \in X, x > u$ t.c. $y < x\ \forall y \in C$
   $\Rightarrow$ x sará chiamato *limite superiore stretto di* C

Dimostrazione lemma di Zorn

1. Si suppone, per assurdo, che X non abbia un elemento massimale
2. Se $C \subseteq X$ è una catena di $X \Rightarrow$ per ipotesi C possiede un maggiorante $\Rightarrow$ esiste il limite superiore u di C
3. Quindi se $x \in X, x > u$ t.c. $y < x \ \forall y \in C$
   $\Rightarrow$ x sará chiamato *limite superiore stretto di C*
4. Usando l'assioma di scelta, si definisce una funzione f che assegna ad ogni catena $C \subseteq X$ il limite superiore stretto

Assioma di scelta

Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi
$\Rightarrow \exists \quad f : I \rightarrow \bigcup A_i$ t.c. $f(i) \in A_i \quad \forall i \in I$

Dimostrazione lemma di Zorn

Definizione(Sottoinsieme conforme)

Un insieme $A \subseteq X$, con $(X, \leq)$ parzialmente ordinato, è conforme se valgono le seguenti condizioni:

- A è ben ordinato
- $\forall x \in A$ si ha $x = f(P(A, x))$
  $P(A, x) = \{y \in A, y < x\}$

Dimostrazione lemma di Zorn

Definizione(Sottoinsieme conforme)

Un insieme $A \subseteq X$, con $(X, \leq)$ parzialmente ordinato, è conforme se valgono le seguenti condizioni:

- A è ben ordinato
- $\forall x \in A$ si ha $x = f(P(A, x))$
  $P(A, x) = \{y \in A, y < x\}$

Definizione(Segmento iniziale)

Dati A e B sottoinsiemi conformi di X, B è un *segmento iniziale* di A se $B = P(A, x)$

Dimostrazione lemma di Zorn

Definizione(Sottoinsieme conforme)

Un insieme $A \subseteq X$, con $(X, \leq)$ parzialmente ordinato, è conforme se valgono le seguenti condizioni:

- A è ben ordinato
- $\forall x \in A$ si ha $x = f(P(A,x))$
  $P(A,x) = \{y \in A, y < x\}$

Definizione(Segmento iniziale)

Dati A e B sottoinsiemi conformi di X, B è un *segmento iniziale* di A se $B = P(A,x)$

Proposizione

Se A e B sono sottoinsiemi conformi di X, $A \neq B$, allora A è un segmento iniziale di B, o B è un segmento iniziale di A

Per ipotesi $A \neq B \Rightarrow A \setminus B \neq \emptyset \quad \Rightarrow x = min(A \setminus B)$

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

Per ipotesi $A \neq B \Rightarrow A \setminus B \neq \emptyset \quad \Rightarrow x = min(A \setminus B)$
Verifichiamo che $P(A, x) = B$

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

Per ipotesi $A \neq B \Rightarrow A \setminus B \neq \emptyset \quad \Rightarrow x = min(A \setminus B)$
Verifichiamo che $P(A, x) = B$

1. $P(A, x) \subseteq B$
   se $y \in P(A, x) \Rightarrow y \in A, y < x \Rightarrow y \in B$
   se infatti $y \notin B \Rightarrow y \in A \setminus B$ e ci sarebbe un assurdo essendo
   $y < x \quad e \quad x = min(A \setminus B)$

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

Per ipotesi $A \neq B \Rightarrow A \setminus B \neq \emptyset \quad \Rightarrow x = min(A \setminus B)$
Verifichiamo che $P(A, x) = B$

1. $P(A, x) \subseteq B$
   se $y \in P(A, x) \Rightarrow y \in A, y < x \Rightarrow y \in B$
   se infatti $y \notin B \Rightarrow y \in A \setminus B$ e ci sarebbe un assurdo essendo
   $y < x \quad e \quad x = min(A \setminus B)$
2. $B \subseteq P(A, x)$
   supponiamo per assurdo che $(B \setminus P(A, x)) \neq \emptyset$
   sia $y = min(B \setminus P(A, x)) \Rightarrow P(B, y) \subseteq P(A, x)$
   infatti se $\xi \in P(B, y) \Rightarrow \xi \in B, \xi < y \Rightarrow \xi \in P(A, x)$

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

Per ipotesi $A \neq B \Rightarrow A \setminus B \neq \emptyset \quad \Rightarrow x = min(A \setminus B)$
Verifichiamo che $P(A, x) = B$

1. $P(A, x) \subseteq B$
   se $y \in P(A, x) \Rightarrow y \in A, y < x \Rightarrow y \in B$
   se infatti $y \notin B \Rightarrow y \in A \setminus B$ e ci sarebbe un assurdo essendo
   $y < x \quad e \quad x = min(A \setminus B)$
2. $B \subseteq P(A, x)$
   supponiamo per assurdo che $(B \setminus P(A, x)) \neq \emptyset$
   sia $y = min(B \setminus P(A, x)) \Rightarrow P(B, y) \subseteq P(A, x)$
   infatti se $\xi \in P(B, y) \Rightarrow \xi \in B, \xi < y \Rightarrow \xi \in P(A, x)$
   - sia $z = min(A \setminus P(B, y))$

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

Si puó affermare che $P(A, z) = P(B, y)$:

Si puó affermare che $P(A, z) = P(B, y)$:

1. $P(A, z) \subseteq P(B, y)$
   se $\gamma \in P(A, z) \Rightarrow \gamma \in A, \gamma < z \Rightarrow \gamma \in P(B, y)$

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

Si puó affermare che $P(A, z) = P(B, y)$:

1. $P(A, z) \subseteq P(B, y)$
   se $\gamma \in P(A, z) \Rightarrow \gamma \in A, \gamma < z \Rightarrow \gamma \in P(B, y)$
2. $P(B, y) \subseteq P(A, z)$

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

Si puó affermare che $P(A, z) = P(B, y)$:

1. $P(A, z) \subseteq P(B, y)$
   se $\gamma \in P(A, z) \Rightarrow \gamma \in A, \gamma < z \Rightarrow \gamma \in P(B, y)$
2. $P(B, y) \subseteq P(A, z)$

Lemma

Dato $u \in P(B, y)$ e $v \in A$ t.c. $v \leq u \Rightarrow v \in P(B, y)$

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

Si puó affermare che $P(A, z) = P(B, y)$:

1. $P(A, z) \subseteq P(B, y)$
   se $\gamma \in P(A, z) \Rightarrow \gamma \in A, \gamma < z \Rightarrow \gamma \in P(B, y)$
2. $P(B, y) \subseteq P(A, z)$

Lemma

Dato $u \in P(B, y)$ e $v \in A$ t.c. $v \leq u \Rightarrow v \in P(B, y)$

Dimostrazione.

Se $u \in P(B, y) \Rightarrow u \in B, u < y \quad \Rightarrow v \leq u < y \quad \Rightarrow v < y$
Inoltre $P(B, y) \subseteq P(A, x) \quad \Rightarrow u \in P(A, x) \Rightarrow v \in P(A, x)$
Ma $P(A, x) \subseteq B \Rightarrow v \in B \quad \Rightarrow v \in P(B, y)$ □

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

- Sia $u \in P(B, y) \Rightarrow u \in B, u < y$
  Ma $P(B, y) \subseteq P(A, x) \Rightarrow u \in A \quad \Rightarrow z \in A, u \in A$
  $\Rightarrow u < z$ oppure $z \leq u$

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

- Sia $u \in P(B, y) \Rightarrow u \in B, u < y$
  Ma $P(B, y) \subseteq P(A, x) \Rightarrow u \in A \quad \Rightarrow z \in A, u \in A$
  $\Rightarrow u < z$ oppure $z \leq u$
- Se $z \leq u$
  $\Rightarrow z \in P(B, y)$ per il lemma precedente ed è assurdo!
  $\Rightarrow u < z \quad \Rightarrow P(B, y) \subseteq P(A, z)$
  $\Rightarrow P(B, y) = P(A, z)$

Dimostrazione lemma di Zorn

Dimostrazione proposizione

- Sia $u \in P(B, y) \Rightarrow u \in B, u < y$
  Ma $P(B, y) \subseteq P(A, x) \Rightarrow u \in A \quad \Rightarrow z \in A, u \in A$
  $\Rightarrow u < z$ oppure $z \leq u$
- Se $z \leq u$
  $\Rightarrow z \in P(B, y)$ per il lemma precedente ed è assurdo!
  $\Rightarrow u < z \quad \Rightarrow P(B, y) \subseteq P(A, z)$
  $\Rightarrow P(B, y) = P(A, z)$
- Per ipotesi si ha che:
  $z = f(P(A, z)) = f(P(B, y)) = y \quad y \in B \quad \Rightarrow z = y \in B$
  Ma $z \leq x$ essendo $(A \setminus B) \subseteq (A \setminus P(B, y))$ con x e z i rispettivi minimi.
  Ne segue che $z \in B \quad \Rightarrow z \neq x \quad \Rightarrow z < x \quad \Rightarrow z \in P(A, x)$
  $\Rightarrow y \in P(A, x) \Rightarrow \nexists y = min(B \setminus P(A, x)) \quad \Rightarrow B = P(A, x)$

Dimostrazione lemma di Zorn

Da questa dimostrazione segue che:
se A è un sottoinsieme conforme di X e $x \in A$, allora considerato un elemento $y \in X, y < x$, si avrá:

Dimostrazione lemma di Zorn

Da questa dimostrazione segue che:
se A è un sottoinsieme conforme di X e $x \in A$, allora considerato un elemento $y \in X, y < x$, si avrá:

1. $y \in A$ oppure
2. $y \notin$ a nessun sottoinsieme conforme di X

Dimostrazione lemma di Zorn

Da questa dimostrazione segue che:
se A è un sottoinsieme conforme di X e $x \in A$, allora considerato un elemento $y \in X, y < x$, si avrá:

1. $y \in A$ oppure
2. $y \notin$ a nessun sottoinsieme conforme di X

Possiamo quindi affermare che l'unione U di tutti i sottoinsiemi conformi di X è ancora conforme.

Dimostrazione lemma di Zorn

Se ne deduce che:

- Se $x = f(U)$ dove U, unione di insiemi conformi, è una catena

Dimostrazione lemma di Zorn

Se ne deduce che:

- Se $x = f(U)$ dove U, unione di insiemi conformi, è una catena $\Rightarrow U \cup \{x\}$ è conforme

Dimostrazione lemma di Zorn

Se ne deduce che:

- Se $x = f(U)$ dove U, unione di insiemi conformi, è una catena
  $\Rightarrow U \cup \{x\}$ è conforme
  $\Rightarrow x \in U$

Dimostrazione lemma di Zorn

Se ne deduce che:

- Se $x = f(U)$ dove U, unione di insiemi conformi, è una catena
  $\Rightarrow U \cup \{x\}$ è conforme
  $\Rightarrow x \in U$
- Ma se $x \in U \Rightarrow x$ non puó essere il limite superiore stretto

Dimostrazione lemma di Zorn

Se ne deduce che:

- Se $x = f(U)$ dove U, unione di insiemi conformi, è una catena
  $\Rightarrow U \cup \{x\}$ è conforme
  $\Rightarrow x \in U$
- Ma se $x \in U \Rightarrow x$ non puó essere il limite superiore stretto
- Pertanto una catena non puó avere il limite superiore stretto, in contraddizione con la nostra ipotesi iniziale

Dimostrazione lemma di Zorn

Se ne deduce che:

- Se $x = f(U)$ dove U, unione di insiemi conformi, è una catena
  $\Rightarrow U \cup \{x\}$ è conforme
  $\Rightarrow x \in U$
- Ma se $x \in U \Rightarrow x$ non puó essere il limite superiore stretto
- Pertanto una catena non puó avere il limite superiore stretto, in contraddizione con la nostra ipotesi iniziale
  $\Rightarrow X$ ha almeno un elemento massimale.

Grazie per la cortese attenzione