Il Teorema di Frobenius e applicazioni

Simone Carta
Relatore: Andrea Loi

Università degli Studi di Cagliari

Indice

Introduzione

In questa tesi verrà presentato un risultato di geometria differenziale noto come Teorema di Frobenius, che deve il suo nome a Ferdinand Georg Frobenius, matematico tedesco vissuto tra i secoli XIX e XX. Questo Teorema riveste un ruolo di grande importanza nella teoria delle distribuzioni, che è il suo ambiente naturale, ma ha notevoli applicazioni in tanti altri ambiti, anche molto diversi tra loro; un esempio sono le PDE (Partial Differential Equations) sovradeterminate, ma anche le foliazioni su varietà differenziabili, entrambi esempi che verranno trattati in questo lavoro.

La scelta di presentare questo risultato è dovuta, oltre che per l'importanza che ricopre nel suo settore, proprio alle situazioni così varie in cui può essere utilizzato, tra le quali può essere molto arduo vedere dei collegamenti.

La tesi si compone di cinque capitoli; nel primo capitolo si richiamano le nozioni basilari di geometria differenziale e alcune proprietà e risultati fondamentali.

Nel secondo si richiamano fibrati vettoriali e gruppi di Lie; si è ritenuto opportuno dividere questo capitolo dal primo, pur essendo anch'esso un capitolo di richiami, per via della notevole rilevanza che rivestono questi concetti negli argomenti che si andrà a illustrare.

Nel terzo capitolo comincia la trattazione vera e propria: viene introdotta la definizione di distribuzione liscia e di varietà integrale su una varietà differenziabile e se ne vedono le prime proprietà. Sempre in questo capitolo si trovano poi il Teorema di Frobenius e alcuni suoi corollari che chiariscono come è fatta localmente una varietà integrale di una distribuzione e di cui sarà fatto largo utilizzo.

Il quarto capitolo riguarda le già accennate foliazioni su varietà differenziabili; dopo aver dato le definizioni del caso e aver visto alcune proprietà, si vedrà come il Teorema di Frobenius può essere utilizzato per legare foliazioni e distribuzioni in un risultato che è noto come Teorema di Frobenius globale .

L'ultimo capitolo è diviso in due parti: nella prima vengono applicati i risultati visti nel capitolo 4 ai gruppi di Lie, con speciale enfasi sui legami tra sottogruppi e sottoalgebre di Lie; nella seconda parte si vedrà come il Teorema di Frobenius può essere utilizzato per dimostrare l'esistenza di soluzioni ad alcuni tipi di PDE sovraderminate.

Capitolo 1

Nozioni di Geometria Differenziale

In questo primo capitolo vedremo alcuni concetti e proprietà chiave per lo sviluppo della tesi. Partiremo dalla definizione di varietà differenziabili, per poi dare alcune proprietà fondamentali. Richiameremo enti e strutture importanti sulle varietà differenziabili, come vettori tangenti, campi di vettori, sottovarietà e applicazioni tra varietà. Daremo poi la definizione di curve integrali e di flusso di un campo di vettori e ne vedremo alcune proprietà. In ultimo daremo un accenno su forme differenziali e alcune loro proprietà.

I risultati saranno presentati quasi tutti senza dimostrazione. Il lettore interessato potrà trovare una trattazione più dettagliata in [1] o [2].

1.1 Varietà Differenziabili

Chiamiamo *varietà topologica* di dimensione n uno spazio topologico M che soddisfi le proprietà seguenti:

- assioma di Hausdorff, $\forall p, q \in M \ \exists U, V$ aperti con $p \in U, q \in V$ e $U \cap V = \emptyset$;
- secondo assioma di numerabilità, esistenza di una base numerabile della topologia di M;
- $\forall p \in M \ \exists \ U \subseteq M$ aperto tale che $p \in U$ e $\exists \ \varphi : U \to \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ omeomorfismo, diremo che M è localmente euclideo di dimensione n.

Una coppia (U, φ) come sopra viene detta *carta* in p, o *carta locale* intorno al punto p. In particolare se $\varphi(p) = 0$ diremo che la carta è centrata in p.

Dalla definizione di localmente euclideo segue che, date due carte (U, φ), (V, ψ) con $U \cap V \neq \emptyset$, le applicazioni

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi^{-1} &: \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V) \\ \psi \circ \varphi^{-1} &: \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V) \end{aligned}$$

sono ben definite e sono omeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1.1. Due carte (U, φ), (V, ψ) si dicono C^∞*-compatibili* (oppure C^∞*-riferite*) se $U \cap V = \emptyset$, ovvero se $U \cap V \neq \emptyset$ e $\varphi \circ \psi^{-1}$, $\psi \circ \varphi^{-1}$ sono differenziabili.

Definizione 1.1.2. Un *atlante liscio* (o *differenziabile*) per M è una famiglia di carte $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tali che ogni $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{U}$ siano C^∞-compatibili e $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$.

Una carta si dice *ammissibile* per $\mathcal{U}$ se è C^∞-compatibile con ogni $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{U}$. Un atlante che contiene tutte le possibili carte ammissibili è detto *massimale.* È possibile dimostrare che ogni atlante è contenuto in un unico atlante massimale.

Definizione 1.1.3. Un atlante massimale su M è detto *struttura differenziabile* su M.

Definizione 1.1.4. Una n-varietà topologica M dotata di una struttura differenziabile è detta *varietà differenziabile* di dimensione n.

Osserviamo che esistono varietà topologiche che non ammettono una struttura differenziabile, mentre ce ne sono altre che ne ammettono più di una.

Esempio 1.1.1. Consideriamo $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea e $\mathcal{U} = \{(\mathbb{R}^n, id)\}$, dove id è l'applicazione identità. Si vede subito che una carta (U, φ) è ammissibile per $\mathcal{U}$ se e solo se $\varphi : U \to \varphi(U)$ è differenziabile con inversa differenziabile. $\mathbb{R}^n$ diviene in questo modo una varietà differenziabile di dimensione n.

È possibile definire altre strutture differenziabili su $\mathbb{R}^n$, tuttavia quella vista è la più semplice in assoluto.

Proposizione 1.1.1. *Siano M una varietà differenziabile e $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante differenziabile su M. Un aperto $A \subseteq M$ dotato della topologia indotta è una varietà differenziabile di dimensione $dim(M)$ con atlante $\{(U_\alpha \cap A, \varphi_{\alpha|U_\alpha \cap A})\}$.*

1.1.1 Varietà prodotto

Ricordiamo che, dati k spazi topologici, sul loro prodotto cartesiano è possibile definire una topologia, detta topologia prodotto, come la topologia avente come base la famiglia dei prodotti cartesiani dei loro aperti. In formule, se $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k$ sono spazi topologici, la topologia prodotto su $\mathcal{T}_1 \times \cdots \times \mathcal{T}_k$ è la topologia avente come base

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_k \mid U_i \text{ è aperto in } \mathcal{T}_i\}$$

Se abbiamo delle applicazioni tra spazi topologici $f_i : \mathcal{T}_i \to \mathcal{U}_i$, è possibile definire la loro applicazione prodotto $f_1 \times \cdots \times f_k : \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_k \to \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_k$ ponendo $f_1 \times \cdots \times f_k(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1), \dots, f_k(x_k))$. Si dimostra che se le f_i sono continue nelle rispettive topologie, la loro applicazione prodotto è continua rispetto alle topologie prodotto.

Proposizione 1.1.2. *Siano M, N varietà differenziabili di dimensioni n, m rispettivamente. Il prodotto $M \times N$ è una varietà differenziabile di dimensione $m + n$.*

Esempio 1.1.2. Il cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ è una varietà differenziabile di dimensione 2.

1.1.2 Applicazioni tra varietà

Consideriamo una applicazione $f : M \to \mathbb{R}$ e $p \in M$. Data una carta (U, φ) con $p \in U$, resta definita un'altra applicazione $F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, detta *espressione di f in coordinate locali.*

Definizione 1.1.5. f si dice *differenziabile* (o *liscia*) in p se esiste una carta locale (U, φ) con $p \in U$ tale che l'applicazione $f \circ \varphi^{-1}$ sia differenziabile. Dato un aperto $V \subseteq M$, diremo che f è *differenziabile in* V se è differenziabile in ogni punto di V.

L'insieme delle applicazioni differenziabili da M in $\mathbb{R}$ verrà denotato con $C^\infty(M)$. Si dimostra che è uno spazio vettoriale di dimensione infinita.

Più in generale, date due varietà differenziabili M, N di dimensione n, m rispettivamente, se consideriamo $F : M \to N$ diamo la seguente

Definizione 1.1.6. F si dice *differenziabile* (o *liscia*) in $p \in M$ se esistono due carte locali (U, φ), (V, ψ) con $p \in U$, $F(p) \in V$ e $F(U) \subseteq V$, tali che l'applicazione

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

sia differenziabile. Dato un aperto $V \subseteq M$, diremo che F è *differenziabile in* V se è differenziabile in ogni punto di V.

Osserviamo che la definizione appena data coincide con la (1.1.5) prendendo per $\mathbb{R}$ la carta globale $(\mathbb{R}, id)$.

Si dimostra che la composizione di applicazioni lisce è liscia.

Definizione 1.1.7. Una applicazione differenziabile invertibile con inversa differenziabile è detta *diffeomorfismo*. Se esiste un diffeomorfismo tra due varietà differenziabili, queste si dicono *diffeomorfe*.

Definizione 1.1.8. Siano $A \subseteq U \subseteq M$ con A chiuso, U aperto. Una *funzione bump* per A con supporto in U è una applicazione $\psi : M \to \mathbb{R}$ tale che $0 \leq \psi \leq 1$ su M, $\psi \equiv 1$ su A e $supp\, \psi \subseteq U$.

Lemma 1.1.3. *Siano M varietà differenziabile, $A \subseteq M$ chiuso. Per ogni aperto U di M contenente A esiste una funzione bump liscia per A con supporto in U.*

1.2 Spazio tangente a una varietà

Siano M una varietà differenziabile e $p \in M$.

Definizione 1.2.1. Un *vettore tangente* a M in p è una applicazione lineare $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ che soddisfa la regola di Leibniz

$$v(fg) = v(f)\, g(p) + f(p)\, v(g) \qquad \forall f, g \in C^\infty(M) \tag{1.1}$$

L'insieme dei vettori tangenti in p a M verrà denotato con T_pM.

Poiché il termine vettore tangente richiama un concetto geometrico, ne daremo un'interpretazione in questo senso. Consideriamo un intervallo $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ e una applicazione liscia $c:(a,b) \to M$, detta *curva differenziabile* su M, e sia $t_0 \in (a,b)$ tale che $c(t_0) = p$. Definiamo

$$c'(t_0) : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad f \longmapsto (f \circ c)'(t_0)$$

Si dimostra che $c'(t_0) \in T_pM$, inoltre vale anche il viceversa: ogni vettore tangente a M in p si può scrivere come $c'(t_0)$ per c, t_0 adeguati. Vale a dire

$$T_pM = \{c'(t_o) \mid c \text{ è curva differenziabile su } M \text{ con } c(t_0) = p\}$$

Si può far vedere T_pM che è uno spazio vettoriale e $dimT_pM = dimM = n$. Costruiamo ora una base per tale spazio: sia (U, φ) una carta locale intorno a p, in particolare $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$; le componenti della φ vengono denotate con x^i, $i = 1, \dots, n$, e sono dette *funzioni coordinate locali.* In altri termini per ciascun i si ha $x^i : M \to \mathbb{R}$, $x^i = \pi_i \circ \varphi$, dove π_i è la proiezione sull'i-esimo fattore di $\mathbb{R}^n$. Spesso si usa la notazione $\varphi = (x^i)$ per enfatizzare le funzioni coordinate locali. Definiamo le applicazioni

$$\frac{\partial}{\partial x^i}_{|p} : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}\,, \quad f \longmapsto D_i(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})_{|\varphi(p)}$$

Si dimostra facilmente che queste sono lineari e soddisfano la regola di Leibniz, cioè $\partial/\partial x^i_{|p} \in T_pM$, $i = 1, \dots, n$. Inoltre $(\partial/\partial x_{1|p}, \dots, \partial/\partial x_{n|p})$ è una base di T_pM, in particolare dato un vettore tangente v, risulta

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}_{|p} = v(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}_{|p} \tag{1.2}$$

dove all'ultimo membro abbiamo utilizzato la notazione di Einstein per le somme. A seconda del contesto utilizzeremo l'una o l'altra notazione.

1.2.1 Differenziale di una applicazione liscia

Siano M, N due varietà e sia $F : M \to N$ liscia. Il nostro obiettivo, fissato $p \in M$, è definire una applicazione tra gli spazi T_pM e $T_{F(P)}N$.

Definizione 1.2.2. Il *differenziale* di F in p è l'applicazione

$$dF_p : T_pM \longrightarrow T_{F(p)}N, \quad v \longmapsto dF_p(v)$$

dove $dF_p(v)$ è definito da

$$dF_p(v) : C^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto dF_p(v)(f) = v(f \circ F)$$

La definizione data ha senso, infatti se $f \in C^\infty(N)$, allora $f \circ F \in C^\infty(M)$ e ha perciò senso applicarle v, ottenendo un numero reale. Usando le proprietà di v è poi immediato dimostrare che $dF_p(v)$ è effettivamente un vettore di $T_{F(p)}N$.

Vediamo ora alcune proprietà del differenziale:

Proposizione 1.2.1. *Siano M, N, P varietà differenziabili, $F : M \to N$, $G : N \to P$ applicazioni lisce e sia $p \in M$. Allora*

(i) $dF_p : T_pM \to T_{F(p)}N$ *è lineare;*

(ii) $d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p$*;*

(iii) $d(id_M)_p = id_{T_pM}$*;*

(iv) se F è un diffeomorfismo, allora dF_p è un isomorfismo di spazi vettoriali e $d(F^{-1})_{F(p)} = (dF_p)^{-1}$.

Il punto (i) della Proposizione precedente ci dice che dF_p è una applicazione lineare tra spazi vettoriali. È naturale chiedersi se si può dire qualcosa sulla matrice ad essa associata.

Supponiamo che M, N siano varietà differenziabili di dimensione n, m rispettivamente. Sia $p \in M$ e consideriamo delle carte locali (U, φ) intorno a p e (V, ψ) attorno a $F(p)$. Poniamo $\varphi \equiv (x^1, \dots, x^n)$ e $\psi \circ F \equiv (y^1, \dots, y^m)$.

Proposizione 1.2.2. *La matrice associata a dF_p rispetto alle basi $(\partial/\partial x^i_{|p})$, $(\partial/\partial y^j_{|F(p)})$ è la matrice*

$$J = \frac{\partial(y^1, \dots, y^m)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \tag{1.3}$$

calcolata in $\varphi(p)$.

Si noti che la matrice di cui sopra non è altro che la matrice jacobiana di $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$.

Definizione 1.2.3. Si definisce il *rango di F* nel punto $p \in M$ come il rango della matrice (1.3) in p.

La definizione del rango di una applicazione liscia non dipende dalle coordinate locali utilizzate. Infatti abbiamo la seguente Proposizione:

Proposizione 1.2.3. *Siano $(U, \varphi \equiv (x^i))$, $(V, \psi \equiv (y^j))$ carte locali su M tali che $U \cap V \neq \emptyset$ e sia $p \in U \cap V$. Consideriamo il cambiamento di coordinate $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n)$. Se $v \in T_pM$ si scrive come $v = \sum_i \alpha^i \partial/\partial x^i_{|p} = \sum_j \beta^j \partial/\partial y^j_{|p}$, allora vale la formula*

$$\beta^j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_{|\varphi(p)} \alpha^i \tag{1.4}$$

In particolare la matrice del cambiamento di coordinate è non singolare; infatti la matrice della formula (1.4) non è altro che la matrice del differenziale (nel senso di $\mathbb{R}^n$) di $\psi \circ \varphi^{-1}$ in $\varphi(p)$, che è non singolare essendo $\psi \circ \varphi^{-1}$ differenziabile con inversa differenziabile.

Definizione 1.2.4. Sia $F : M \to N$ liscia. Un punto $p \in M$ è detto *punto regolare* se dF_p è suriettivo. Un punto $q \in M$ è detto *valore regolare* se $F^{-1}(q)$ è vuoto o è formato solo da punti regolari.

1.2.2 Fibrato tangente

Definizione 1.2.5. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Il *fibrato tangente* di M è l'unione (disgiunta) degli spazi tangenti a M in ogni suo punto. Si denota con TM; in simboli

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$$

M è detta *spazio base*.

Consideriamo la proiezione

$$\pi : TM \longrightarrow M, \quad X_p \longmapsto p$$

che ad ogni vettore tangente associa il proprio punto di tangenza. È una applicazione suriettiva, inoltre per ogni $p \in M$ risulta $\pi^{-1}(p) = T_pM$, che viene detto *fibra su* p. In particolare ogni fibra è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Vale il seguente

Teorema 1.2.4. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. M induce in modo naturale una struttura differenziabile su TM che la rende una varietà differenziabile di dimensione* $2dim(M) = 2n$.

1.3 Campi di vettori

Definizione 1.3.1. Un *campo di vettori* su M è una applicazione

$$X : M \longrightarrow TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M, \qquad p \longmapsto X(p) = X_p \in T_pM$$

Più in generale possiamo considerare campi di vettori su un insieme $A \subseteq M$, che chiameremo campi di vettori *locali*.

Se (U, φ) è una carta di M e X è un campo di vettori, usando (1.2) troviamo

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}_{|p}, \quad \forall p \in U \tag{1.5}$$

Restano così definite n applicazioni $X^i : U \to \mathbb{R}$, $p \mapsto X_p(x^i)$, che chiameremo *componenti del campo X* nella carta (U, φ).

Definizione 1.3.2. X è un campo di vettori *differenziabile* (o *liscio*) se le sue componenti X^i sono differenziabili rispetto a ogni carta locale (U, φ) di M.

Esempio 1.3.1 (*Campi coordinati*)**.** Data una carta locale $(U, (x^i))$, la corrispondenza

$$p \longmapsto \frac{\partial}{\partial x^i}_{|p}$$

definisce un campo di vettori su U, detto *i-esimo campo coordinato* su U e viene denotato con $\partial/\partial x^i$. Le sue componenti sono costanti, in particolare è un campo di vettori liscio.

L'insieme dei campi di vettori differenziabili su M si indica con $\mathfrak{X}(M)$. Rispetto alle operazioni di somma e prodotto per uno scalare (punto a punto), è uno spazio vettoriale reale.

In seguito quando parleremo di campi di vettori intenderemo sempre, salvo diverso avviso o quando sarà chiaro dal contesto, campi di vettori differenzibili.

Consideriamo la k-upla ordinata di campi di vettori $(X_1, ..., X_k)$, definiti su un sottoinsieme $A \subseteq M$. Diremo che sono *linearmente indipendenti* se i vettori $(X_{1|p}, ..., X_{k|p})$ sono indipendenti in T_pM per ogni $p \in A$. Diremo inoltre che i campi di vettori *generano il fibrato tangente* se generano lo spazio T_pM per ogni $p \in A$.

Definizione 1.3.3. Un *frame locale* su M è una n-upla ordinata di campi $(X_1, ..., X_n)$ definiti su un aperto $U \subseteq M$ linearmente indipendenti e che generano il fibrato tangente. Un frame si dice *globale* se $U = M$.

Esempio 1.3.2. I campi coordinati $\partial/\partial x^i$ visti nell'esempio (1.3.1) formano un frame locale su M.

1.3.1 Commutatore di campi di vettori

Sia M una varietà differenziabile. Definiamo

$$[\,,] : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad (X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

dove per ogni $f \in C^\infty(M)$

$$[X, Y](f) = XY(f) - YX(f)$$

L'applicazione $[\,,]$ è detta *commutatore di campi di vettori* o anche *parentesi di Lie*. Con semplici calcoli si verifica che effettivamente $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

Proposizione 1.3.1 (Proprietà del commutatore). *Per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M)$, il commutatore di campi di vettori verifica le seguenti proprietà:*

(*i*) $[X, X] = 0$;

(*ii*) $[X, Y] = -[Y, X]$;

(*iii*) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$;

(*iv*) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ *(identità di Jacobi)*;

(*v*) $[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X$ *(non tensorialità)*.

Proposizione 1.3.2. *Se $E_1, \ldots, E_n$ sono campi coordinati, allora per ogni $i, j = 1, \ldots, n$*

$$[E_i, E_j] = 0$$

Se per due campi di vettori X, Y si ha $[X, Y] = 0$, si dice che i campi *commutano*. In particolare quindi i campi coordinati commutano sempre.

1.3.2 Differenziale di campi di vettori

Siano M, N varietà differenziabili e $F : M \to N$ una applicazione liscia. Fissato $p \in M$, abbiamo visto che ad ogni vettore tangente $X_p \in T_pM$ è possibile associare un vettore $dF_p(X_p) \in T_{F(p)}N$.

Consideriamo ora un campo di vettori $X \in \mathfrak{X}(M)$; è naturale chiedersi se dF porti il campo X in un campo di vettori su N. La risposta in generale è no, per due ragioni fondamentali: in primo luogo, se la F non è iniettiva potrebbe capitare che ad un punto $q = F(p) = F(p') \in N$, per dei certi $p, p' \in M$, venga associato più di un vettore tangente (questo si verifica se $dF_p(X_p) \neq dF_{p'}(X_{p'})$); in tal caso la corrispondenza $q = F(p) \mapsto dF_p(X_p)$ non sarebbe univoca e non definirebbe una funzione. In secondo luogo, se F non è suriettiva esiste qualche punto di N a cui non resta associato alcun vettore, il che non permette di ottenere un campo di vettori su N (al massimo si può ottenere un campo locale). A questi problemi si può ovviare richiedendo che F sia un diffeomorfismo. Difatti vale il seguente risultato:

Proposizione 1.3.3. *Siano M, N varietà differenziabili e $F : M \to N$ un diffeomorfismo. Se $X \in \mathfrak{X}(M)$, allora $dF(X) \in \mathfrak{X}(N)$.*

Spesso il differenziale di campi di vettori viene anche denotato con F_*.

Definizione 1.3.4. Siano $F : M \to N$ un diffeomorfismo, $x \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$. I campi X, Y si dicono *F-correlati* se $Y = dF(X)$.

Proposizione 1.3.4. *Sia $F : M \to N$ un diffeomorfismo. Il differenziale dF definisce una corrispondenza $\mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(N)$, $X \mapsto dF(X)$ che soddsfa le seguenti proprietà:*

(i) $dF(X)(f) = (X(f \circ F)) \circ F^{-1}$;

(ii) $dF([X_1, X_2]) = [dF(X_1), dF(X_2)]$.

per ogni $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(N)$.

1.4 Sottovarietà, immersioni, embedding

In precedenza abbiamo definito il rango di una applicazione liscia $F : M \to N$ tra varietà differenziabili. Utilizzando alcuni noti risultati di algebra linare otteniamo che, fissato $p \in M$, il rango di dF_p è minore o uguale di $\min\{dim(M), dim(N)\}$, inoltre dF_p è iniettivo (risp. suriettivo) se e solo se il suo rango è uguale a $dim(M)$ (risp. $dim(N)$). In particolare segue che F se è un diffeomorfismo allora $dim(M) = dim(N)$.

Definizione 1.4.1. Siano M, N varietà differenziabili e $F : M \to N$ liscia, diremo che:

1. F è un'*immersione* se dF è iniettivo in ogni punto;

2. F una *sommersione* se dF è suriettivo in ogni punto (equivalentemente, se ogni punto di M è regolare per F);

3. F è un *embedding* (o *immersione regolare*) se è un'immersione e, dotato $F(M)$ della topologia indotta da N, $F : M \to F(M)$ è un omeomorfismo.

Nota: Spesso si utilizza il termine *embedding liscio*, per distinguerlo dal concetto di embedding topologico. Noi intenderemo sempre, salvo diverso avviso, il concetto visto nella definizione precedente.

Si dimostra che se in $p \in M$ il differenziale dF_p è iniettivo (risp. suriettivo), allora esiste un intorno di p in cui F è un'immersione (risp. sommersione).

Definizione 1.4.2. Una applicazione $F : M \to N$ tra varietà differenziabili è detta *diffeomorfismo locale* se per ogni $p \in M$ esiste un intorno $U \subseteq M$ tale che $F(U)$ sia aperto in N e $F_{|U} : U \to F(U)$ sia un diffeomorfismo.

Teorema 1.4.1 (della Funzione Inversa). *Sia $F : M \to N$ una applicazione liscia tra varietà differenziabili. Se in $p \in M$ la matrice di dF_p è invertibile, allora esistono degli intorni connessi U di p e V di $F(p)$ tali che $F_{|U} : U \to V$ sia un diffeomorfismo.*

In particolare se dF_p è invertibile per ogni $p \in M$, F è un diffeomorfismo locale.

Definizione 1.4.3. Sia M una varietà differenziabile. Un sottoinsieme $S \subseteq M$ si dice *sottovarietà* se è varietà differenziabile. Il numero $dim(M) - dim(S)$ è detto *codimensione* di S in M.

1.4.1 Sottovarietà embedded

Sia M una varietà varietà differenziabile con $dim(M) = n$.

Definizione 1.4.4. Una sottovarietà $S \subseteq M$ si dice *embedded* (o *immersa regolarmente*) in M se l'inclusione $S \hookrightarrow M$ è un embedding.

In questa sezione vedremo alcune importanti proprietà delle sottovarietà regolarmente immerse, che come suggerisce il nome, sono il tipo di sottovarietà migliori che possiamo incontrare.

Proposizione 1.4.2. *Siano M, N varietà differenziabili e $F : N \to M$ un embedding. Allora $S = F(N)$ è una varietà topologica con la topologia indotta da M ed esiste un'unica struttura differenziabile che rende S una sottovarietà embedded di M.*

Proposizione 1.4.3. *Siano M, N varietà differenziabili. Per ogni punto $q \in N$ l'insieme $M \times \{q\}$ è una sottovarietà embedded di $M \times N$ diffeomorfa a M.*

Proposizione 1.4.4. *Siano M, N varietà differenziabili, $U \subseteq M$ aperto e $f : U \to N$ liscia. Il grafico di f*

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \mid x \in U, \, y = f(x)\}$$

è una sottovarietà embedded di $M \times N$ di dimensione $dim(M)$.

Proposizione 1.4.5. *Sia S un sottoinsieme di una varietà differenziabile M, $dim(M) = n$. S è una k-sottovarietà embedded di M se e solo se intorno ad ogni suo punto esiste un intorno U in M tale che $S \cap U$ sia l'insieme di livello di una certa sommersione liscia $\Phi : U \to \mathbb{R}^{n-k}$.*

Siano M, N varietà differenziabili; consideriamo una sottovarietà S embedded in M. Sia U un aperto di M, se $\Phi : U \to N$ è tale che $S \cap U$ sia un insieme di livello regolare per Φ (cioè un insieme di livello formato solo da punti regolari per Φ), allora si dice che Φ *definisce localmente* S. Nel caso in cui si possa prendere $U = M$, si dice che Φ *definisce* S.

La Proposizione precedente ci dice allora che intorno a ogni punto di una sottovarietà $S \subseteq M$ embedded è possibile trovare una funzione che definisce localmente S.

Talvolta è conveniente considerare sottovarietà che si trovano in una condizione più debole di quella di embedding:

Definizione 1.4.5. Sia M una varietà differenziabile. Una sottovarietà $S \subseteq M$ si dice *debolmente embedded* in M se ogni applicazione liscia $F : N \to S$ tale che $F(N) \subseteq M$, è liscia come applicazione da N in M.

Teorema 1.4.6. *Sia $S \subseteq M$ una sottovarietà debolmente embedded. Esistono un'unica topologia e un'unica struttura differenziabile su S che la rendono una sottovarietà immersa di M.*

1.4.2 Slice

Un tipo particolare di sottovarietà embedded sono i cosiddetti *slice*. Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $1 \leq k \leq n$. Un *k-slice* di U è un sottoinsieme della forma

$$\{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) \in U \mid x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^n = c^n\} \tag{1.6}$$

dove $c^{k+1}, \dots, c^n$ sono delle costanti.

Definizione 1.4.6. Siano M una varietà differenziabile e $U \subseteq M$ aperto. Consideriamo una carta locale (U, φ), se $S \subseteq U$ è tale che $\varphi(S)$ sia un k-slice di $\varphi(U)$ diremo che S è un *k-slice di U*.

In sostanza un k-slice su una varietà differenziabile è un sottoinsieme che può essere rappresentato in coordinate locali come nella (1.6).

Teorema 1.4.7. *Sia M una varietà differenziabile. Se $S \subseteq M$ è una sottovarietà embedded di dimensione k, allora per ogni suo punto esiste un intorno coordinato (U, φ) in M in cui $S \cap U$ è un k-slice di U. Viceversa, se intorno a ogni punto di $S \subseteq M$ esiste un intorno coordinato (U, φ) in M in cui $S \cap U$ è un k-slice di U, allora S con la topologia indotta da M è una varietà topologica di dimensione k e esiste un'unica struttura differenziabile che rende S una sottovarietà embedded di M.*

Si dimostra che la struttura differenziabile a cui fa riferimento il Teorema è l'unica possibile.

1.4.3 Sottovarietà immerse

Definizione 1.4.7. Sia M una varietà differenziabile. Una sottovarietà $S \subseteq M$ si dice *sottovarietà immersa* se l'inclusione $S \hookrightarrow M$ è un'immersione.

Proposizione 1.4.8. *Siano M, N varietà differenziabili e $F : N \to M$ un'immersine. Allora $S = F(N)$ è una varietà topologica con la topologia indotta da M ed esiste un'unica struttura differenziabile che rende S una sottovarietà immersa di M.*

Osserviamo che se S è una sottovarietà embedded di M, allora è anche una sottovarietà immersa. Il viceversa non è vero, tuttavia abbiamo la seguente proprietà locale:

Proposizione 1.4.9. *Siano M una varietà differenziabile e $S \subseteq M$ una sottovarietà immersa. Per ogni $p \in S$ esiste un intorno U in S contenente p e tale che $U \hookrightarrow M$ sia un embedding.*

Si noti che U è un intorno di p in S; in generale non è possibile trovare un intorno V di p in M tale che $S \cap V \hookrightarrow M$ sia un embedding.

Dati una sottovarietà immersa $S \subseteq M$ e $p \in S$, è possibile identificare lo spazio T_pS con un sottospazio di T_pM; infatti per definizione di immersione, l'inclusione $\imath : S \hookrightarrow M$ induce una applicazione iniettiva $d\imath_p : T_pS \to T_pM$. Se $v \in T_pS$ e $\tilde{v} = d\imath_p(v) \in T_pM$, per ogni $f \in C^\infty(M)$ abbiamo

$$\tilde{v}(f) = d\imath_p(v)(f) = v(f \circ i) = v(f_{|S}) \tag{1.7}$$

1.4.4 Restrizione di applicazioni

Sia $F : M \to N$ una applicazione liscia tra varietà differenziabili. Vogliamo dare delle condizioni per le quali restringendo il dominio o il codominio, F sia ancora una applicazione liscia.

Teorema 1.4.10. *Se S è una sottovarietà immersa di M, allora $F_{|S} : S \to N$ è liscia.*

Dimostrazione. Per definizione di immersione, l'inclusione $\imath : S \hookrightarrow M$ è liscia, dunque $F_{|S} = F \circ \imath$ è liscia.

□

Teorema 1.4.11. *Sia $F : M \to N$ liscia e sia $S \subseteq N$ una sottovarietà immersa tale che $F(M) \subseteq S$. Se F è continua da M in S, allora $F : M \to S$ è liscia.*

Se consideriamo S embedded in M, poiché la topologia su S è quella indotta da M, allora $F : M \to S$ è sempre continua. Abbiamo quindi il seguente

Corollario 1.4.12. *Sia $F : M \to N$ liscia e sia $S \subseteq N$ una sottovarietà embedded tale che $F(M) \subseteq S$. Allora $F : M \to S$ è liscia.*

1.5 Curve integrali

Sia M una varietà differenziabile. Data una curva differenziabile $\gamma : I \to M$, per ogni $t \in I$ il suo vettore velocità $\gamma'(t)$ appartiene allo spazio tangente $T_{\gamma(t)M}$. Il problema che ci poniamo è il seguente: dato per ogni punto di M un vettore tangente, esiste una curva differenziabile il cui vettore velocità è in ogni punto il vettore dato?

Sia $V \in \mathfrak{X}(M)$, diamo la seguente

Definizione 1.5.1. Una *curva integrale di* V è una curva differenziabile $\gamma : I \to M$ il cui vettore velocità soddisfa

$$\gamma'(t) = V_{\gamma(t)} \qquad \forall t \in I \tag{1.8}$$

Se $0 \in I$, il punto $\gamma(0)$ viene detto *punto iniziale di* γ.

Analizziamo più in dettaglio la definizione. Se $U \subseteq M$ è un intorno coordinato, possiamo scrivere γ in coordinate locali come $(\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t))$. La condizione (1.8) equivale quindi a

$$\dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}_{|\gamma(t)} = V^i(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^i}_{|\gamma(t)}$$

che equivale a sua volta al sistema di equazioni differenziali ordinarie (ODE)

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}^1(t) &= V^1(\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{\gamma}^n(t) &= V^1(\gamma^1(t), ..., \gamma^n(t)) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Nota: $\dot{\gamma}$ indica la derivata rispetto a t di γ. Questa è la notazione classica usata per questo tipo di problemi. Il termine "curva integrale" deriva dal fatto che il risolvere un sistema di questo tipo spesso è detto "integrare il sistema".

Il prossimo risultato è di fondamentale importanza nello studio delle curve integrali:

Proposizione 1.5.1. *Sia V un campo di vettori su una varietà differenziabile M. Per ogni $p \in M$ esistono $\varepsilon > 0$ e $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ curva integrale di V con punto di inizio p.*

Di seguito alcune proprietà delle curve integrali. Siano M varietà differenziabile, $V \in \mathfrak{X}(M)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e $\gamma : I \to M$ una curva integrale di V.

Lemma 1.5.2. *Per ogni $a \in \mathbb{R}$, la curva definita da $\tilde{\gamma} : \tilde{I} \to M$, $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(at)$ è una curva integrale di V, dove $\tilde{I} = \{t \mid at \in I\}$.*

Lemma 1.5.3. *Per ogni $b \in \mathbb{R}$, la curva definita da $\hat{\gamma} : \hat{I} \to M$, $\hat{\gamma}(t) = \gamma(t + b)$ è una curva integrale di V, dove $\hat{I} = \{t \mid t + b \in I\}$.*

Si può dimostrare che, fissato $p \in M$. La curva integrale di V per p è unica, nel senso che se $\gamma, \tilde{\gamma}$ sono curve integrali di V con $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0) = p$, allora le immagini delle due curve coincidono in un intorno di p.

La seguente Proposizione evidenzia la "naturalità" delle curve integrali.

Proposizione 1.5.4. *Sia $F : M \to N$ una applicazione liscia tra varietà differenziabili. Dati due campi di vettori $X \in \mathfrak{X}(M), Y \in \mathfrak{X}(N)$, questi sono F-correlati se e solo se F porta curve integrali di X in curve integrali di Y (cioè, se γ è curva integrale di X, allora $F \circ \gamma$ è curva integrale di Y).*

1.5.1 Flusso di un campo di vettori

Abbiamo visto che, fissato un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$, per ogni $p \in M$ passa un'unica curva integrale γ_p di V. Si può far vedere che per ogni punto di M è possibile trovare un intervallo massimale $(a(p), b(p))$ dove la γ_p è definita, intervallo che può anche coincidere con tutto $\mathbb{R}$. Per il lemma (1.5.3) possiamo supporre che l'intervallo di cui sopra contenga 0 e che $\gamma_p(0) = p$.

Dato $t \in M$, poniamo $D_t = \{p \in M \mid t \in (a(p), b(p))\}$. L'insieme $D_t \subseteq M$ è aperto; possiamo definire l'applicazione $\theta_t : D_t \to M$, $\theta_t(p) = \gamma_p(t)$, che è ben definita per via dell'esistenza e unicità della γ_p. Nel caso in cui ogni curva integrale di V sia definita su tutto $\mathbb{R}$, il campo di dice *completo*. La θ_t risulta essere un diffeomorfismo verso D_{-t} con inversa $(\theta_t)^{-1} = \theta_{-t}$. Inoltre se t, s sono tali che $t + s \in D_t$,

$$\theta_t \circ \theta_s(p) = \theta_{t+s}(p), \qquad \theta_0(p) = \gamma_p(0) = p$$

La famiglia $\{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ è detta *gruppo uniparametrico locale* del campo V. Inoltre si ha che $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} D_t = M$ ed esistono un aperto $U \subseteq M$ e $\varepsilon > 0$ tali l'applicazione

$$\theta : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \longrightarrow M, \qquad (t, p) \mapsto \theta_t(p)$$

è definita e di classe C^∞.

Se fissiamo $p \in M$, la θ definisce una curva differenziabile su M come

$$t \longmapsto \theta(t, p) = \theta_t(p)$$

che non è altro che la curva integrale del campo V con punto iniziale p.

In generale, consideriamo un aperto $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times M$ con la proprietà che per ogni $p \in M$, l'insieme $\mathcal{D}^{(p)} = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \mathcal{D}\}$ sia un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ contenente 0.

Definizione 1.5.2. Un *flusso locale* su M è una applicazione continua $\theta : \mathcal{D} \to M$ tale che, per ogni $p \in M$

$$\theta(0, p) = p$$

e per ogni $s \in \mathcal{D}^{(p)}$, $t \in \mathcal{D}^{(\theta(s,p))}$ tali che $s + t \in \mathcal{D}^{(p)}$,

$$\theta(t, \theta(s, p)) = \theta(t + s, p)$$

L'insieme $\mathcal{D}$ è detto *dominio del flusso.*

Nel caso in cui per ogni punto di M l'insieme $\mathcal{D}^{(p)}$ sia tutto $\mathbb{R}$, il flusso viene detto *globale* e non è altro che una azione del gruppo $\mathbb{R}$ su M.

Noi siamo interessati ai legami tra il flusso di un campo vettoriale e gli altri campi. Dati $V \in \mathfrak{X}(M)$ e un flusso liscio θ, diremo che V è θ-invariante se $d(\theta_t)_p(V_p) = X_{\theta(t,p)}$ per ogni (t, p) nel dominio di θ. Ricordiamo che due campi di vettori V, W commutano se e solo se $[V, W] = 0$.

Proposizione 1.5.5. *Dati due campi $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, le seguenti condizioni sono equivalenti* (*i*) $[V, W] = 0$;

(*ii*) *W è invariante rispetto al flusso di* V;

(*iii*) *V è invariante rispetto al flusso di* W.

Ricordando che per qualsiasi campo di vettori V su M si ha $[V, V] = 0$ otteniamo il seguente

Corollario 1.5.6. *Ogni campo di vettori è invariante rispetto al proprio flusso.*

Vogliamo approfondire ancora il legame tra flussi e campi con commutatore nullo. Per prima cosa, diamo la seguente

Definizione 1.5.3. Diremo che due flussi θ, ψ su M *commutano* se per ogni $p \in M$ e per ogni coppia di intervalli I, J contenenti 0 e tali che almeno una delle espressioni $\theta_t \circ \psi_s(p)$, $\psi_s \circ \theta_t(p)$ sia definita per ogni $(s, t) \in I \times J$, allora entrambe risultano definite e sono uguali.

Osservazione 1.5.1. Nel caso di campi completi, questo equivale a richiedere $\theta_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \theta_t$ per ogni $t, s \in \mathbb{R}$.

Il prossimo risultato è di grande importanza e ci sarà molto utile più in là:

Teorema 1.5.7. *Due campi di vettori commutano se e solo se i loro flussi commutano.*

Dimostrazione. Dimostriamo solo una parte del Teorema. Siano $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ e siano θ, ψ i loro rispettivi flussi. Supponiamo $[V, W] = 0$. Siano $p \in M$ e $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli contenenti 0 e tali che $\psi_s \circ \theta_t(p)$ sia definita per ogni $(s, t) \in I \times J$. Per la Proposizione (1.5.5), l'ipotesi $[V, W] = 0$ implica che V sia invariante rispetto a ψ. Fissato $s \in I$, consideriamo la curva differenziabile $t \mapsto \gamma(t) = \psi_s \circ \theta_t(p)$. Risulta $\gamma(0) = \psi_s(\theta(0, p)) = \psi_s(p)$, inoltre il vettore velocità di γ in $t \in J$ è dato da

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt}\psi_s(\theta_t(p)) = d(\psi_s)(\theta'_t(p)) = d\psi_s(V_{\theta_t(p)}) = V_{\psi_s(\theta_t(p))} = V_{\gamma(t)}$$

Dunque $\gamma(t)$ è una curva integrale di V con punto iniziale $\psi_s(p)$. Per unicità deve essere

$$\psi_s \circ \theta_t(p) = \gamma(t) = \theta_t(\psi_s(p)) = \theta_t \circ \psi_s(p)$$

La stessa dimostrazione, invertendo V e W, prova che se è definita $\theta_t \circ \psi_s(p)$ in un certo rettangolo $J' \times I'$ contenente 0, allora è definita anche $\psi_s \circ \theta_t(p)$ e le due espressioni sono uguali. Segue che θ e ψ commutano.

□

1.6 Forme differenziali

Dato uno spazio vettoriale V di dimensione finita, il suo *duale* è l'insieme

$$V^* = \{\omega : V \longrightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ è lineare}\}$$

Se M è una varietà differenziabile e $p \in M$, il duale dello spazio tangente $(T_pM)^* := T_p^*M$ viene detto *spazio cotangente* a M in p; i suoi elementi sono detti *covettori*.

Definizione 1.6.1. 1 Una *1-forma lineare* su M è una applicazione

$$\omega : p \in M \longmapsto \omega(p) = \omega_p \in T_p^*M$$

Esempio 1.6.1. Sia $f \in C^\infty(M)$, consideriamo l'applicazione

$$df : p \in M \longmapsto (df)_p = d_pf \in T_p^*M$$

dove $d_pf : T_pM \to \mathbb{R}$, $d_pf(v) = v(f)$. Si vede facilmente che d_pf è effettivamente lineare, cioè che d_pf è un elemento di T_p^*M. La 1-forma df è detta *differenziale* di f.
Un altro modo di vedere questo fatto è che abbiamo stabilito una corrispondenza

$$d : f \in C^\infty(M) \longmapsto df \quad \text{1-forma su } M$$

Si dimostra che l'operatore d è $\mathbb{R}$-lineare.

Data una carta locale $(U, (x^i))$ di M, possiamo considerare il differenziale delle applicazioni coordinate $d(x^i) = dx^i$. Fissato $p \in M$ denotiamo $(dx^i)(p) = dx^i_{|p}$. Si dimostra che $(dx^1_{|p}, \dots, dx^n_{|p})$ è una base per T_p^*M ed è la base duale di $(\partial/\partial x^1_{|p}, \dots, \partial/\partial x^n_{|p})$. In particolare se ω è una 1-forma e $p \in U$ si trova

$$\omega_p = \sum_{i=1}^n \omega_i(p) dx^i_{|p} \tag{1.10}$$

dove $\omega_i(p) = \omega_p(\partial/\partial x^i_{|p})$. Restano così definite delle applicazioni

$$p \in U \longmapsto \omega_i(p) \in \mathbb{R}$$

dette *componenti della 1-forma* nella carta $(U, (x^i))$.

Definizione 1.6.2. Diremo che ω è una 1-forma *differenziale* (o *differenziabile*) se $\omega_i \in C^\infty(U)$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e per ogni carta locale $(U, (x^i))$. Denotiamo

$$\bigwedge^1(M) = \{\omega \mid \omega \text{ è una 1-forma differenziabile su } M\}$$

Esempio 1.6.2. Riprendiamo l'operatore d dell'esempio precedente, si dimostra che $d(C^\infty(M)) \subseteq \bigwedge^1(M)$, cioè che df è una 1-forma differenziabile. Fissata una carta locale $(U, (x^i))$ si dimostra che

$$d_pf = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}_{|p} dx^i_{|p} \tag{1.11}$$

dove con $\partial f/\partial x^i_{|p}$ si intende il vettore $\partial/\partial x^i_{|p} \in T_pM$ applicato a $f \in C^\infty(M)$. In particolare df è differenziabile.

Si può dimostrare che se $f \in C^\infty(M)$ è tale che df=0, allora f è localmente costante; in particolare se $U \subseteq M$ è connesso, f è costante su U.

Finora abbiamo visto applicazioni lineari su uno spazio vettoriale V di dimensione $n < \infty$. Sia ora $k \leq n$ e consideriamo $V^k = V \times ... \times V$ (k volte). Vogliamo trattare quelle applicazioni da V^k in $\mathbb{R}$ che siano multilineari, cioè lineari in ogni argomento su V. In particolare siamo interessati a trattare le cosiddette *forme alterne*,

Definizione 1.6.3. Una *k-forma* su V è una applicazione $\omega : V^k \longrightarrow \mathbb{R}$ che sia multilineare e *alternante*, cioè tale che $\forall\, v_1, \dots, v_k \in V,\ \ \forall\, i, j = 1, \dots, k$

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \tag{1.12}$$

L'insieme della k-forme su V viene denotato con $\bigwedge^k(V)$. Poniamo inoltre $\bigwedge^0(V) = \mathbb{R}$.

Osservazione 1.6.1. Nel caso $k = 1$ la condizione di alternanza è banalmente soddisfatta, segue quindi che $\bigwedge^1(V)$ coincide con l'insieme delle 1-forme lineari su V.

Proposizione 1.6.1. *Le seguenti condizioni condizioni sono equivalenti:*

(*a*) $\forall\, i, j = 1, \dots, k$ *con* $i \neq j$, $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$ *se* $v_i = v_j$*;*

(*b*) ω *è alternante;*

(*c*) $\forall\, v_1, \dots, v_k \in V$ *e per ogni permutazione* $\sigma \in S_k$ *si ha* $\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = sgn(\sigma)\, \omega(v_1, \dots, v_k)$, *dove* $sgn(\sigma)$ *è il segno della permutazione* σ.

Osservazione 1.6.2. Le forme lineari possono essere definite anche per $k > n$, tuttavia dalla condizione di alternanza è immediato ricavare che $\bigwedge^k(V) = \{0\}$ per $k > dim(V)$.

Date due forme lineari $\omega \in \bigwedge^k(V), \eta \in \bigwedge^h(V)$, possiamo costruirne un'altra. Definiamo l'applicazione, detta *prodotto esterno* o *prodotto wedge*,

$$\wedge : \bigwedge^k(V) \times \bigwedge^h(V) \longrightarrow \bigwedge^{k+h}(V), \quad (\omega, \eta) \longmapsto \omega \wedge \eta$$

dove $\omega \wedge \eta$ è data da $\omega\eta$, se $k = 0$ oppure $h = 0$ (cioè se una tra ω e η è un numero reale), altrimenti poniamo

$$\omega \wedge \eta\,(v_1, \dots, v_{k+h}) = \frac{1}{k!\,h!} \sum_{\sigma \in S_{k+h}} sgn(\sigma)\, \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, \omega_{\sigma(k)})\, \eta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+h)}) \tag{1.13}$$

Si verifica che effettivamente $\omega \wedge \eta \in \bigwedge^{k+h}(V)$.

Per ogni $k \geq 0$ l'insieme $\bigwedge^k(V)$ è uno spazio vettoriale reale, si può costruire una sua base partendo da una base $B = (e_1, \dots, e_n)$ di V. Se $B' = (e^1, \dots, e^n)$ è la base di V^* duale a B, allora si può dimostrare che l'insieme

$$\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

è una base di $\bigwedge^k(V)$, che ha pertanto dimensione finita uguale a $\binom{n}{k}$. Inoltre ogni elemento ω si scrive in modo unico come

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}\, e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} = \omega_{i_1 \dots i_k}\, e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \tag{1.14}$$

dove $\omega_{i_1 \dots i_k} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$. Spesso per indicare le componenti di una forma si utilizza la notazione ω_I, dove $I = \{i_1 < \cdots < i_k\}$ è un multi-indice; in tal caso scriveremo

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I = \omega_I dx^I$$

All'ultimo membro è stata usata la notazione di Einstein per le somme.

Ora, analogamente a quanto fatto in precedenza per le 1-forme, trasportiamo il concetto di forme lineari sulle varietà differenziabili. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n.

Definizione 1.6.4. Una *k-forma* su M è una applicazione

$$p \in M \longmapsto \omega(p) = \omega_p \in \bigwedge^k (T_p M)$$

Fissata una carta locale $(U, (x^i))$, possiamo considerare per ogni $p \in U$ la base per $T_p M$ data da $(\partial/\partial x^1_{|p}, \dots, \partial/\partial x^n_{|p})$ e la sua duale $(dx_{1|p}, \dots, dx_{n|p})$. Quindi utilizzando l'espressione (1.14) otteniamo che una k-forma ω si scrive in coordinate su U come

$$\omega(p) = \sum_{i_1 < \dots . < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k}(p)\, dx^{i_1}_{|p} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}_{|p} \tag{1.15}$$

con $\omega_{i_1 \dots i_k}(p) = \omega_p(\partial/\partial x^1_{|p}, \dots, \partial/\partial x^n_{|p})$. In questo modo possiamo definire le *componenti* di ω nella carta $(U, (x^i))$ come le funzioni:

$$\omega_{i_1 \dots i_k} : M \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad p \longmapsto \omega_{i_1 \dots i_k}(p)$$

Definizione 1.6.5. Diremo che ω è una k-forma *differenziale* (o *differenziabile*) se le sue componenti sono differenziabili in ogni carta locale $(U, (x^i))$. Se $k = 0$, definiamo una 0-forma come una funzione $f \in C^\infty(M)$.

L'insieme delle forme differenziabili su M è uno spazio vettoriale reale con le operazioni di somma tra funzioni reali e prodotto di una funzione per uno scalare (reale). Indicheremo tale insieme con $\Omega^k(M)$.

1.6.1 Pullback e differenziale esterno

In questa parte definiremo due importanti operatori sulle forme differenziali. Il primo che trattiamo è il *pullback*, che possiamo pensare come l'operatore duale del differenziale sui campi di vettori.

Siano $F : M \to N$ una applicazione liscia tra varietà differenziabili, ω una k-forma su N. Se $k = 0$, cioè $\omega = f \in C^\infty(N)$, definiamo il pullback $F^* f := f \circ F$. Se $k \neq 0$, siano $p \in M$ e$v_1, \dots, v_k \in T_p M$. Il pullback di ω tramite F in p è definito da

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_k)) \tag{1.16}$$

Si dimostra facilmente sfruttando le proprietà di ω e di dF che $(F^*\omega)_p \in \bigwedge^k(T_p M)$, vale a dire che l'applicazione $p \mapsto (F^*\omega)_p$ è una k-forma su M.

Proposizione 1.6.2. *Se ω è una k-forma differenziale su N allora $F^*\omega$ è una k-forma differenziale su M.*

Proposizione 1.6.3. *Sia $F : M \to N$ liscia. Allora per ogni $\omega, \eta \in \Omega(N)$*

(i) F^* *è $\mathbb{R}$-lineare;*

(ii) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$*;*

(iii) *in ogni carta locale $(V, (y^i))$ su N si ha*

$$F^*\left(\sum_I \omega_I dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right) = \sum_I (\omega_I \circ F)\, d(y^{i_1} \circ F) \wedge \cdots \wedge d(y^{i_k} \circ F) \tag{1.17}$$

Vediamo ora il differenziale esterno. Nell'esempio (1.6.1) abbiamo visto che a partire da una funzione liscia, cioè da una 0-forma, possiamo costruire una 1-forma differenziabile. Inoltre l'operatore d sulle 0-forme è $\mathbb{R}$-lineare. Questo procedimento si può estendere a forme di ordine qualsiasi.

Teorema 1.6.4. *Sia M una varietà differenziabile. Per ogni k esiste un unico operatore*

$$d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

detto differenziale esterno, che soddisfa le proprietà:

(i) d *è $\mathbb{R}$-lineare;*

(ii) *se $\omega \in \Omega^k(M)$, $\eta \in \Omega^h(M)$ allora*

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \tag{1.18}$$

(iii) $d^2 = d \circ d = 0$*;*

(iv) *se $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ alla df coincide col differenziale $df(X) = X(f)$.*

Talvolta per maggiore chiarezza si usa la notazione d^k, per indicare su quale spazio si sta considerando l'operatore.

Proposizione 1.6.5. *Sia $F : M \longrightarrow N$ liscia. Allora*

(i) $F^*(d\omega) = d(F^*\omega)$ *per ogni $\omega \in \Omega^k(N)$;*

(ii) *se in coordinate locali $\omega = \omega_I dx^I$, vale la formula*

$$d\omega = d\omega_I \wedge dx^I \tag{1.19}$$

(iii) *se ω è una 1-forma su M e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vale la formula*

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \tag{1.20}$$

Capitolo 2

Richiami su fibrati vettoriali e gruppi di Lie

In questo capitolo parleremo di due concetti fondamentali per gli argomenti che presenteremo in seguito. I fibrati vettoriali sono delle strutture che si possono definire sulle varietà differenziabili e sono alla base della teoria delle distribuzioni, di cui parleremo nel prossimo capitolo. I gruppi di Lie costituiscono un'importante ambito di studio, che unisce la teoria algebrica dei gruppi e la geometria differenziale.

2.1 Fibrati vettoriali

Definizione 2.1.1. Un fibrato vettoriale di dimensione k è una terna $(E, M, \pi : E \to M)$, con E, M varietà topologiche e π applicazione continua suriettiva, tali che le seguenti proprietà siano soddisfatte:

(*a*) $\forall p \in M$ l'insieme $E_p := \pi^{-1}(p)$, detto *fibra su* p, è munito della struttura di spazio vettoriale reale;

(*b*) $\forall p \in M$ esistono $U \subseteq M$ aperto con $p \in U$ e un omeomorfismo $\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ tale che $\pi_1 \circ \Phi = \pi$, dove π_1 denota la proiezione sul primo fattore; Φ è detta *trivializzazione locale*;

(*c*) $\forall p \in M$ l'applicazione $\Phi_{|E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Osservazione 2.1.1. Dalla condizione (c) segue immediatamente che $dim(E_p) = k$ per ogni $p \in M$. In particolare tutte le fibre sono non vuote e sono tra loro isomorfe.

Osservazione 2.1.2. $\forall p \in M$ si ha $\Phi(E_p) \subseteq \{p\} \times \mathbb{R}^k$, infatti $\pi_1(\Phi(E_p)) = \pi(E_p) = \pi(\pi^{-1}(p)) = p$.

Noi siamo interessati a trattare fibrati *lisci*, cioè fibrati vettoriali dove E, M sono varietà differenziabili, π è differenziabile e le trivializzazioni locali Φ sono diffeomorfismi.

Esempio 2.1.1 (*Fibrato vettoriale banale*)**.** Siano M varietà differenziabile, V spazio vettoriale di dimensione k e $E = M \times V$. Definiamo

$$\pi : E \longrightarrow M\,, \quad (p, v) \longmapsto p$$

Si dimostra facilmente che quello appena definito è un fibrato vettoriale di dimensione k.

Dato $p \in M$, scegliamo $U = M$ e definiamo una applicazione $\Phi : \pi^{-1}(M) = M \times V \to U \times \mathbb{R}^k = M \times \mathbb{R}^k$ come segue: essendo $dim(V) = k$, esisterà un isomorfismo di spazi vettoriali $\varphi : V \to \mathbb{R}^k$. Se poniamo $\Phi(p, v) = (p, \varphi(v))$, osservando che in questo caso la π coincide con la proiezione π_1 sul primo fattore, è immediato constatare che Φ è una trivializzazione *globale* per E.

In particolare se $V = \mathbb{R}^k$ possiamo considerare come isomorfismo φ l'identità di $\mathbb{R}^k$.

Esempio 2.1.2 (*Fibrato tangente*)**.** Data una varietà differenziabile M, possiamo considerare il suo fibrato tangente

$$E = TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM = \{(p, v) \mid p \in M,\ v \in T_pM\}$$

$\pi : TM \to M,\ (p, v) \mapsto p$ è un fibrato vettoriale di dimensione $dim(M)$.

2.1.1 Sezioni

Definizione 2.1.2. Dato un fibrato vettoriale $\pi : E \to M$, una *sezione* del fibrato è una applicazione continua $\sigma : M \to E$ tale che $\pi \circ \sigma = id_M$. Se σ è differenziabile si dirà *sezione differenziabile.* L'insieme delle sezioni differenziabili sul fibrato $\pi : E \to M$ si indica con $\Gamma(E)$.

Osservazione 2.1.3. Dalla condizione $\pi \circ \sigma = id_M$ si ha che $\sigma(p) \in E_p$ per ogni $p \in M$.

L'insieme $\Gamma(E)$ si può dotare della struttura di spazio vettoriale reale ponendo $(a\,\sigma_1 + b\,\sigma_2)(p) := a\,\sigma_1(p) + b\,\sigma_2(p)$, dove la somma al secondo membro è la somma in E_p per ogni $p \in M$. In modo analogo si definisce il prodotto di una sezione per uno scalare. Il vettore nullo di $\Gamma(E)$ è la sezione nulla

$$\zeta : M \to E\,,\ \zeta(p) = 0 \in E_p$$

Più in generale, è possibile definire quelle che chiameremo sezioni locali del fibrato.

Definizione 2.1.3. Una *sezione locale* di un fibrato vettoriale è una applicazione continua $\sigma : U \to E$ con $U \subseteq M$ aperto tale che $\pi \circ \sigma = id_U$. Se σ è differenziabile la sezione si dirà *differenziabile.*

A seguito di questa definizione, chiameremo *globali* le sezioni definite su tutta M.

Esempio 2.1.3. Sul fibrato tangente $\pi : TM \to M$ una sezione differenziabile è una applicazione $X : M \to TM$ tale che $\pi \circ X = id_M$; vale a dire che per ogni $p \in M$ si deve avere $X(p) \in T_pM$. Le sezioni lisce del fibrato tangente sono perciò i campi vettoriali su M, ossia $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$. Analogamente, le sezioni locali sono i campi locali $\mathfrak{X}(U)$ con $U \subseteq M$ aperto.

Proprio come abbiamo fatto per i campi vettoriali (che sono un caso particolare di fibrato), possiamo definire il concetto di frame locali e globali.

Dato un fibrato $\pi : E \to M$, consideriamo la k-upla di sezioni locali $(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ su $U \subseteq M$, queste si diranno *linearmente indipendenti* se lo sono $(\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p))$ in E_p per ogni $p \in U$. Diremo inoltre che le sezioni *generano il fibrato vettoriale* se esse generano lo spazio E_p per ogni $p \in U$.

Definizione 2.1.4. Un *frame locale* è una k-upla di sezioni locali indipendenti su $U \subseteq M$ che generano il fibrato vettoriale. Un frame si dice *globale* se $U = M$.

Definizione 2.1.5. Un frame si dice *liscio* se le sezioni che lo compongono sono lisce.

Lemma 2.1.1 (Completamento di un frame locale). *Siano $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale di dimensione k e $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ una m-upla di sezioni lisce linearmente indipendenti su un aperto $U \subseteq M$ e con $1 \leq m < k$. Esistono delle sezioni lisce $\sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_k$ definite su un aperto $V \subseteq M$ tali che $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ sia un frame locale per E su $U \cap V$.*

2.1.2 Sottofibrati

Dato un fibrato vettoriale $\pi_E : E \to M$, un *sottofibrato di* E è un fibrato vettoriale

$$\pi_D : D \longrightarrow M$$

dove D è un sottospazio topologico di E tale che $\pi_D = (\pi_E)_{|D}$ e per ogni $p \in M$ lo spazio $D_p = E_p \cap D$ sia un sottospazio vettoriale di E_p. Un sottofibrato inoltre si dice *liscio* se è esso stesso un fibrato liscio e $D \hookrightarrow E$ è un embedding.

Ci si può domandare se, assegnati dei sottospazi $D_p \subseteq E_p$ per ogni p in M, questi formino o meno un sottofibrato di E. La risposta al quesito è data dal risultato seguente:

Lemma 2.1.2 (Criterio locale per sottofibrati). *Sia $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale. Consideriamo la famiglia $\{D_p\}_{p\in M}$ con D_p sottospazio vettoriale di E_p. Allora $D = \bigcup_{p\in M} D_p$ è un sottofibrato di E se e solo se per ogni $p \in M$ esistono delle sezioni locali $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ di E definite su un intorno U di p tali che $(\sigma_1(q), \ldots, \sigma_m(q))$ sia una base di D_q per ogni $q \in U$.*

2.2 Gruppi di Lie

Definizione 2.2.1. Un *gruppo di Lie* è un gruppo algebrico G che sia una varietà topologica e dotato di una struttura differenziabile tale che la moltiplicazione

$$m : G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \longmapsto gh$$

e l'inversione

$$i : G \longrightarrow G, \quad g \longmapsto g^{-1}$$

siano applicazioni differenziabili.

Ricordiamo che un gruppo, in algebra, è una coppia $(G, \cdot)$, dove G è un insieme e $\cdot$ è un'operazione $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \cdot b = ab$ è un'operazione che soddisfa le seguenti proprietà:

1. *proprietà associativa*, per ogni $x, y, z \in G$ si ha

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

2. *esistenza dell'elemento neutro*, cioè esiste $1 \in G$ tale che per ogni $x \in G$
$$1 \cdot x = x \cdot 1 = x$$
3. *esistenza dell'inverso*, per ogni $x \in G$ esiste $x' \in G$ tale che
$$x \cdot x' = x' \cdot x = 1$$

L'unità di un gruppo di Lie si denota in genere con la lettera e.

Proposizione 2.2.1. *Sia G una varietà differenziabile dotata della struttura di gruppo. G è un gruppo di Lie se e solo se l'applicazione $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ è liscia.*

Esempio 2.2.1. $(\mathbb{R}^n, +)$ è un gruppo di Lie, infatti l'applicazione $(x, y) \mapsto x - y$ è liscia. In modo analogo anche $(\mathbb{C}^n, +)$ è un gruppo di Lie.

Esempio 2.2.2. $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}^*$ è una sottovarietà ed è dotata della struttura di gruppo con la moltiplicazione complessa. Si può far vedere che moltiplicazione e inversione sono applicazioni lisce e quindi $\mathbb{S}^1$ è un gruppo di Lie.

L'operazione del gruppo permette di definire, fissato un elemento $g \in G$, un'importante coppia di applicazioni da G in se stesso, dette *traslazioni*:
$$L_g(h) := gh\,, \qquad R_g(h) := hg$$
L (dall'inglese *left*) è detta traslazione *a sinistra*, mentre R (*right*) è detta traslazione *a destra*. In seguito considereremo solo le traslazioni a sinistra; ovviamente ogni risultato che vedremo sarà valido in forma analoga per le traslazioni a destra. Osserviamo che $L_e = id_G$.
Facciamo vedere che L_g è liscia: se consideriamo l'immersione $\imath_g(h) = (g, h) \in G \times G$, vediamo che $L_g = m \circ \imath_g$ ed è perciò liscia. Inoltre l'applicazione $L_{g^{-1}}$ è liscia e soddisfa $L_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ L_g = L_e = id_G$, dunque le traslazioni a sinistra sono diffeomorfismi di G.

2.2.1 Sottogruppi di Lie

Dato un gruppo di Lie G, un *sottogruppo di Lie* è un sottogruppo $H \subseteq G$ dotato di una topologia e di una struttura differenziabile tali che H sia un gruppo di Lie e una sottovarietà immersa di G. Vediamo alcune proprietà dei sottogruppi di Lie:

Proposizione 2.2.2. *Siano G un gruppo di Lie e $H \subseteq G$ una sottovarietà embedded che è anche un sottogruppo. Allora H è un sottogruppo di Lie di G.*

Lemma 2.2.3. *Sia H un sottogruppo aperto di un gruppo di Lie G. Allora H è un sottogruppo di Lie e l'inclusione $\imath : H \hookrightarrow G$ è un embedding. Inoltre H è anche chiuso ed è unione di componenti connesse di G.*

Proposizione 2.2.4. *Sia G un gruppo di Lie e $W \subseteq G$ un aperto contenente l'identità. Allora:*

(*i*) *W genera un sottogruppo aperto di G;*

(*ii*) *se W è connesso, genera un sottogruppo aperto e connesso di G;*

(*iii*) *se G è connesso, W genera G.*

2.2.2 L'algebra di Lie di un gruppo di Lie

Sia G un gruppo di Lie.

Definizione 2.2.2. Un campo di vettori X su G è detto *invariante a sinistra* se per ogni $g, g' \in G$

$$d(L_g)_{g'}(X_{g'}) = X_{gg'} \tag{2.1}$$

Poiché L_g è un diffeomorfismo, per un campo X invariante a sinistra possiamo scrivere $(L_g)_*X = X$ per ogni $g \in G$.

Consideriamo il sottoinsieme di $\mathfrak{X}(G)$ formato dai campi invarianti a sinistra, dalla condizione $(L_g)_*(aX + bY) = a(L_g)_*X + b(L_g)_*Y$ segue che tale insieme è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{X}(G)$. Inoltre se X, Y sono campi di vettori invarianti a sinistra, per la Proposizione (1.3.4) abbiamo

$$(L_g)_*[X, Y] = [(L_g)_*X, (L_g)_*Y] = [X, Y]$$

cioè il commutatore $[X, Y]$ è ancora un campo invariante a sinistra.

Definizione 2.2.3. Un'*algebra di Lie* su $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale $\mathfrak{g}$ dotato di un'operazione, detta *parentesi*, $[\,,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ che soddisfa le seguenti proprietà per ogni $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

(i) $\mathbb{R}$-bilinearità, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$
$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$$

(ii) antisimmetria

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

(iii) identità di Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

Per le proprietà del commutatore e per quanto visto prima, l'insieme dei campi di vettori invarianti a sinistra su G forma un'algebra di Lie, detta l'algebra di Lie del gruppo di Lie G. Verrà denotata con $Lie(G)$.

Teorema 2.2.5. *Sia G un gruppo di Lie. L'applicazione $\epsilon : Lie(G) \to T_eG$, $X \mapsto X_e$ è un isomorfismo di spazi vettoriali, in particolare $Lie(G)$ ha dimensione finita uguale a $dim(G)$.*

Questo Teorema ha importanti conseguenze: si può utilizzare per dimostrare che un campo di vettori invariante a sinistra è liscio e che ogni gruppo di Lie ammette un frame globale formato da campi invarianti a sinistra.

Definizione 2.2.4. Data un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, un sottospazio $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ si dice *sottoalgebra di Lie* se è chiuso rispetto all'operazione $[\,,]$.

Consideriamo un gruppo di Lie G e un suo sottogruppo di Lie H. Si potrebbe pensare ingenuamente che $Lie(H)$ possa essere una sottoalgebra di Lie di $Lie(G)$, ma gli elementi di $Lie(H)$ sono campi di vettori su H e in generale non sono campi su G. Tuttavia un legame tra le due algebre di Lie esiste ed è dato dalla seguente

Proposizione 2.2.6. *Sia $H \subseteq G$ un sottogruppo di Lie e $\imath : H \hookrightarrow G$ l'inclusione. Esiste una sottoalgebra di Lie $\mathfrak{h} \subseteq Lie(G)$ data da*

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} &= i_*(Lie(H)) \\ &= \{X \in Lie(G) \mid X_e \in T_eH\} \end{aligned}$$

isomorfa canonicamente a $Lie(H)$.

Capitolo 3

Distribuzioni e Teorema di Frobenius

In questo capitolo introduciamo la teoria delle distribuzioni su varietà differenziabili. In questa teoria si generalizza il problema di trovare una curva integrale di un campo di vettori fissato; se consideriamo in ogni punto p di una varietà differenziabile M un sottospazio D_p dello spazio tangente T_pM, esiste una sottovarietà che abbia in ogni suo punto D_p come spazio tangente? Quali sono le condizioni per cui questo si verifica? La risposta a questa domanda, come vedremo, è data dal Teorema di Frobenius.

Il Teorema di Frobenius è un risultato di grande importanza con applicazioni in molti ambiti, come la teoria delle foliazioni (che sarà trattata nel prossimo capitolo) o l'esistenza di soluzioni di alcuni tipi di PDE.

3.1 Distribuzioni su varietà differenziabili

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n.

Definizione 3.1.1. Chiameremo *distribuzione di rango k su M* un sottofibrato D di TM di dimensione k. Se è D è un sottofibrato liscio, la distribuzione viene detta *liscia*.

Un altro termine utilizzato è *sottofibrato tangente* di M. In questa trattazioni siamo interessati solo alle distribuzioni lisce, ragion per cui quando parleremo di distribuzioni ci riferiremo sempre (salvo diverso avviso) a distribuzioni lisce.

Una distribuzione è spesso definita assegnando ad ogni $p \in M$ un sottospazio $D_p \subseteq T_pM$ e ponendo $D = \bigsqcup_{p\in M} D_p$. In questo modo utilizzando il Lemma (2.1.2) otteniamo che D è una distribuzione liscia se e solo se per ogni $p \in M$ esistono dei campi di vettori locali $X_1, ..., X_k$ definiti in un intorno di p che generano il fibrato D. Un altro modo per assegnare una distribuzione è dunque assegnare dei campi vettoriali che la generano localmente (o globalmente).

Esempio 3.1.1. I campi di vettori $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^k$ in $\mathbb{R}^n$ generano una distribuzione di rango k.

Esempio 3.1.2. Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i campi

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

Chiaramente $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, dunque $D = span\{X, Y\}$ è una distribuzione liscia su $\mathbb{R}^3$ di rango 2.

Diamo ora un altro modo per descrivere un distribuzione (liscia), usando le forme differenziali:

Lemma 3.1.1. *Siano M una n-varietà e $D \subseteq TM$ una distribuzione di rango k. Allora D è liscia se e solo se intorno ad ogni $p \in M$ esistono un aperto U e delle 1-forme differenziali $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$ definite su U tali che per ogni $q \in U$ si abbia*

$$D_q = Ker(\omega^1)_q \cap \cdots \cap Ker(\omega^{n-k})_q \tag{3.1}$$

Dimostrazione. Sia $p \in M$, supponiamo che esistano delle 1-forme $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$ definite su un aperto $U \subseteq M$ contentente p che soddisfano la (3.1). Mostriamo che sono linearmente indipendenti su U. Supponiamo che sistano degli $a_i \in \mathbb{R}$ tali che $\sum_{i=1}^{n-k} a_i \, \omega^i = 0$. Fissato $q \in U$, lo spazio D_q ha dimensione k, perciò usando la (3.1) possiamo scegliere nel suo complementare in T_qM dei vettori $v^1, \dots, v^{n-k}$ tali che $v^j \in Ker(\omega^i)_q$ per ogni $i \neq j$ e $v^j \notin Ker(\omega^j)_q$, vale a dire $(\omega^i)_q(v^j) = \delta^{ij}$. Si ottiene quindi per ogni $j = 1, \dots, n-k$

$$0 = \sum_{i=1}^{n-k} a_i \, (\omega^i)_q(v^j) = \sum_{i=1}^{n-k} a_i \, \delta^{ij} = a_j$$

Le forme sono quindi indipendenti su U.Per il Lemma (2.1.1) esistono delle 1-forme $\omega^{n-k+1}, \dots, \omega^n$ tali che $(\omega^1, \dots, \omega^n)$ sia un frame locale in un intorno V di p (che può essere più piccolo dell'intorno di partenza). Consideriamo il suo frame duale $(E_1, , E_n)$. Vogliamo mostrare che D è generata localmente da $(E_{n-k+1}, \dots, E_n)$. Sia X una sezione locale di D definita su V, allora $X = \sum_{i=1}^n X^i E_i$. Se $q \in V$, per ogni $i = 1, \dots, n-k$ usando la (3.1) si ha

$$0 = (\omega^i)_q(X_q) = \omega^i_q \left(\sum_{j=1}^n X^j(q) E_{j|q} \right) = \sum_{j=1}^n X^j(q) \omega^i_q(E_{j|q}) = \sum_{j=1}^n X^j(q) \delta^i_j = X^i(q)$$

Quindi per ogni $q \in V$ è $X^i(q) = 0$, cioè $X^i \equiv 0$ per ogni $i = 1, \dots, n-k$. Segue

$$X = \sum_{i=n-k+1}^n X^i E_i$$

Cioè D è generata localmente da $(E_{n-k+1}, \dots, E_n)$ ed è quindi liscia per il criterio (2.1.2).

Viceversa, se D è liscia, intorno a ogni punto $p \in M$ esistono dei campi di vettori locali $(Y_1, \dots, Y_k)$ che generano D. In particolare questi sono campi di vettori locali su M e, sempre per il criterio (2.1.2), possiamo completarli per ottenere un frame locale $(Y_1, \dots, Y_n)$ di TM. Consideriamo il suo duale $(\epsilon^1, \dots, \epsilon^n)$; si vede facilmente che le forme $\epsilon^{k+1}, \dots, \epsilon^n$ soddisfano

$$D_q = Ker(\epsilon^{k+1})_q \cap \cdots \cap Ker(\epsilon^n)_q$$

per ogni q in intorno sufficientemente piccolo di p.

□

Se $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$ sono 1-forme differenziali linearmente indipendenti definite su un aperto $U \subseteq M$ che soddisfano la (3.1) per ogni $q \in U$, si dice che tali forme *definiscono localmente* D. Diremo inoltre che una q-forma $\omega \in \Omega^q(M)$ *annichilisce* D se $\omega(X_1, \dots, X_q) = 0$ ogniqualvolta $X_1, \dots, X_q$ sono sezioni locali di D.

3.1.1 Distribuzioni integrabili e involutività

Il problema che ci poniamo ora è: data una distribuzione D su una varietà differenziabile M, esiste una sottovarietà di M il cui fibrato tangente è D?

Definizione 3.1.2. Una sottovarietà immersa $N \subseteq M$ è detta *varietà integrale* di D se $T_pN = D_p$ per ogni $p \in N$. Se ogni punto di M è contenuto in una varietà integrale, D è detta *integrabile*.

Abbiamo già trattato un caso particolare di questo problema, infatti un campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ genera una distribuzione di rango 1 e una varietà integrale di $D = span\{V\}$ è l'immagine di una curva integrale di V. Perciò il problema nel caso $k = 1$ si riduce all'esistenza di una curva integrale di V, che sappiamo essere sempre garantita per la Proposizione (1.5.1).

Ciò non è vero in generale per $k \geq 2$, come mostra il seguente esempio:

Esempio 3.1.3. Riprendiamo la distribuzione D generata da

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y = \frac{\partial}{\partial y}$$

già vista nell'esempio (3.1.2). Questa distribuzione non è integrabile.

Supponiamo per assurdo che N sia una varietà integrale per D passante per l'origine. Essendo X, Y tangenti a N, ogni curva integrale di X o di Y che inizia in N dovrà rimanere su N in un piccolo intorno. In particolare, l'asse x è una curva integrale di X passante per l'origine, e ogni curva parallela all'asse y passante per $(x, 0, 0)$ è una curva integrale di Y. Dunque N deve contenere un sottoinsieme aperto del piano (x, y). Tuttavia è immediato verificare che il piano tangente al piano (x, y) per p non appartenente all'asse x è diverso da D_p. Quindi non può esistere una tale varietà integrale.

Vogliamo trovare una condizione sulle distribuzioni che assicuri l'esistenza di una varietà integrale. Come vedremo, la condizione che cerchiamo è l'*involutività*:

Definizione 3.1.3. Una distribuzione D si dice *involutiva* se per ogni coppia di sezioni locali lisce X, Y di D, il loro commutatore $[X, Y]$ è ancora una sezione locale di D.

Vediamo alcune proprietà delle distribuzioni involutive. Vista la presenza di una condizione di "chiusura" rispetto al commutatore di campi di vettori, ci si aspetterebbe che possano essere coinvolte in qualche modo le algebre di Lie; difatti abbiamo la seguente

Proposizione 3.1.2. *Sia $D \subseteq TM$ una distribuzione liscia. D è involutiva se e solo se $\Gamma(D)$ è una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(M)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che D sia involutiva. Sappiamo che $\Gamma(D)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathfrak{X}(M)$. Inoltre per definizione $\Gamma(D)$ è chiusa rispetto alla parentesi di Lie ed è quindi una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{X}(M)$.
Viceversa, siano X, Y sezioni locali di D definite su un aperto $U \subseteq M$. Dato $p \in U$, consideriamo una funzione bump $\psi \in C^\infty(M)$ intorno a p con supporto in U; le sezioni $\psi X, \psi Y$ sono allora sezioni globali lisce di D. Per ipotesi abbiamo $[\psi X, \psi Y] \in \Gamma(D)$, inoltre

$$[\psi X, \psi Y] = \psi^2[X, Y] + \psi X(\psi)Y - \psi Y(\psi)X$$

che è uguale a $[X, Y]$ nell'intorno di p in cui $\psi \equiv 1$. Dunque $[X, Y]_p \in D_p$ per ogni $p \in U$ e il commutatore $[X, Y]$ è una sezione locale di D, che è perciò involutiva. □

La Proposizione che segue mostra un primo legame tra integrabilità e involutività.

Proposizione 3.1.3. *Una distribuzione integrabile è involutiva.*

Dimostrazione. Siano $D \subseteq TM$ una distribuzione integrabile e X, Y sezioni locali lisce di D definite su un aperto $U \subseteq M$. Sia $p \in U$, esiste una varietà integrale N di D contenente p. Perciò X, Y sono campi di vettori locali tangenti a N, e dunque anche $[X, Y]$ è tangente a N. In particolare $[X, Y]_p \in T_pN = D_p$. Segue che $[X, Y]$ è una sezione locale di D e che D è involutiva. □

Osservazione 3.1.1. Per la distribuzione dell'esempio (3.1.3) si trova $[X, Y] = -\partial/\partial z$, che non è una sezione di D. Infatti abbiamo visto che tale distribuzione non è integrabile.

3.1.2 Criteri di involutività

Come da titolo, vediamo alcuni criteri per stabilire se una data distribuzione D è involutiva. Il seguente Lemma ci permette di verificare che una distribuzione è involutiva semplicemente controllando se esistono dei frame locali attorno a ogni punto che siano "chiusi" rispetto alle parentesi di Lie:

Lemma 3.1.4 (Criterio dei frame locali). *Sia $D \subseteq TM$ una distribuzione. Se intorno a ogni punto di M esiste un frame locale liscio $(V_1, \dots, V_k)$ per D tale che $[V_i, V_j]$ sia una sezione di D per ogni $i, j = 1, \dots, k$, allora D è involutiva.*

Dimostrazione. Siano X, Y sezioni locali di D definite in un aperto $U \subseteq M$ e sia $p \in U$. Sia $(V_1, \dots, V_k)$ un frame locale per D che soddisfa le ipotesi. Scriviamo $X = X^i V_i$, $Y = Y^j V_j$, allora

$$[X, Y] = [X^i V_i, Y^j V_j] = X^i Y^j [V_i, V_j] + X^i (V_i Y^j) V_j - Y^i (V_j X^i) V_i$$

L'ultimo membro di questa uguaglianza è somma di sezioni locali di D, perciò anche $[X, Y]$ è una sezione locale di D. □

Abbiamo anche visto che esistono dei legami tra forme differenziali e distribuzioni lisce. Su questa falsa riga troviamo il seguente

Lemma 3.1.5 (Criterio delle 1-forme). *Sia $D \subseteq TM$ una distribuzione. Allora D è involutiva se e solo se per ogni 1-forma η che annichilisce D in un aperto $U \subseteq M$, anche $d\eta$ annichilisce D in U.*

Dimostrazione. Supponiamo che D sia involutiva e sia η una una forma che annichilisce D. Siano poi X, Y sezioni locali di D. Usando la formula (1.20) ed essendo $[X, Y]$ una sezione di D per ipotesi, troviamo

$$d\eta(X, Y) = X(\eta(Y)) - Y(\eta(X)) - \eta([X, Y]) = 0$$

infatti ogni termine della somma al secondo membro è nullo.

Viceversa, supponiamo che data una 1-forma η che annichilisce D, anche $d\eta$ annichilisca D. Siano X, Y sezioni locali di D definite in un aperto $U \subseteq M$. Inorno a ogni punto di U esistono delle forme $\omega^1, \dots, \omega^{n-k}$ che definiscono D localmente. Allora $\forall\, i = 1, \dots, n-k$ abbiamo

$$0 = d\omega^i(X, Y) = X(\omega^i(Y)) - Y(\omega^i(X)) - \omega^i([X, Y])$$

da cui segue $\omega^i([X, Y]) = 0$ per ogni $i = 1, ..., n - k$ e perciò $[X, Y]$ assume valori in D per via della condizione (3.1). $\square$

3.2 Il Teorema di Frobenius

Presentiamo in questa sezione il risultato centrale della tesi: il Teorema di Frobenius. Vedremo poi alcune sue immediate conseguenze e corollari che ci aiutano a comprendere meglio come sono fatte le varietà integrali di una distribuzione.

Prima di enunciare il Teorema diamo alcune definizioni.

Definizione 3.2.1. Date una n-varietà differenziabile M e una distribuzione $D \subseteq M$ di rango k, diremo che una carta locale (U, φ) è *piatta per D* se verifica le seguenti condizioni:

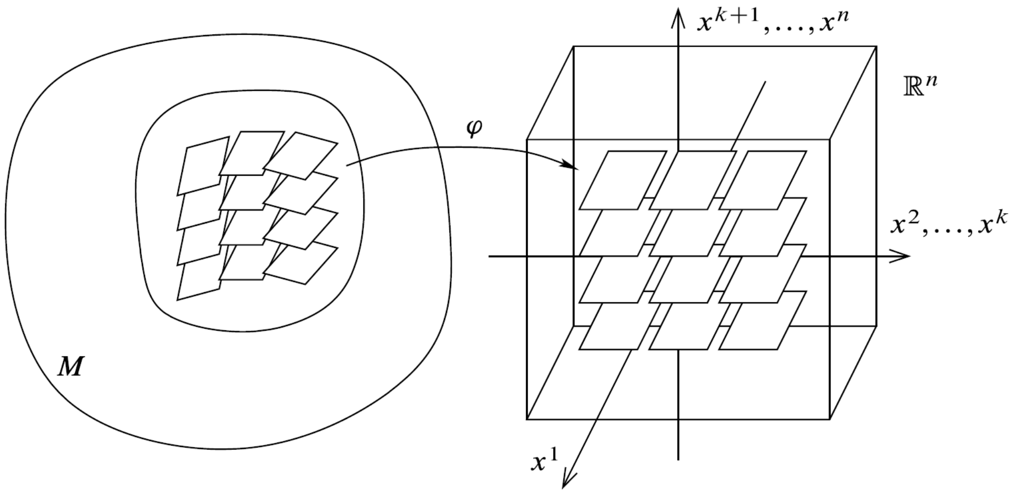
1. $\varphi(U)$ è un cubo di $\mathbb{R}^n$;

2. nei punti di U, D è generata dai campi locali $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^k$.

È immediato constatare che in una carta piatta per D ogni slice $x^{k+1} = c^{k+1}, \dots, x^n = c^n$, per delle costanti assegnate $c^{k+1}, \dots, c^n$, è una varietà integrale di D. Il che ci porta alla seguente definizione:

Definizione 3.2.2. Una distribuzione $D \subseteq TM$ si dice *completamente integrabile* se intorno a ogni punto di M esiste una carta piatta per D.

Le distribuzioni completamente integrabili ricalcano la situazione che si presenta per i sottospazi affini paralleli in $\mathbb{R}^n$, come mostrato nella figura seguente:



Questo concetto di sottovarietà che si "comportano bene" tra loro sarà approfondito nel capitolo seguente, quando parleremo di foliazioni.

Osservazione 3.2.1. Una distribuzione completamente integrabile è anche integrabile, ed è quindi involutiva.

Il Teorema di Frobenius ci dice che vale anche il viceversa:

Teorema 3.2.1 (di Frobenius). *Ogni distribuzione involutiva è completamente integrabile.*

Nella dimostrazione utilizzeremo il seguente

Lemma 3.2.2. *Sia M una n-varietà differenziabile. Siano poi $V_1, \dots, V_k$ campi di vettori linearmente indipendenti definiti su un aperto $W \subseteq M$ e tali che $[V_i, V_j] = 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, k$. Per ogni $p \in W$ esiste una carta locale $(U, (s^i))$ centrata in p tale che $V_i = \partial/\partial s^i$ per ogni $i = 1, \dots, k$.*

Dimostrazione. Sia $p \in W$ arbitrario. Consideriamo una sottovarietà embedded $S \subseteq M$ il cui spazio tangente in p sia complementare allo spazio generato dai $V_{1\,|p}, \dots, V_{k\,|p}$. Sia $(U, (x^i))$ una carta locale centrata in p tale che $S \cap U$ sia lo slice $x^1 = \dots = x^k = 0$. La nostra scelta delle coordinate garantisce che i vettori $\{V_{1\,|p}, \dots, V_{k\,|p}, \partial/\partial x_{k+1\,|p}, \dots, \partial/\partial x_{n\,|p}\}$ generino T_pM.

Il risultato del Lemma è puramente locale, pertanto ai fini della dimostrazione possiamo considerare $V_1, \dots, V_k$ come campi di vettori su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e la sottovarietà $S = \{(x^1, \dots, x^n) \in U \mid x^1 = \dots = x^k = 0\}$.

Per ogni $i = 1, \dots, k$, sia θ_i il flusso del campo V_i. Scegliamo $\varepsilon_k > 0$ e $U_k \subseteq U$ aperto in modo tale che l'immagine tramite θ_k di $(-\varepsilon_k, \varepsilon_k) \times U_k$ sia contenuta in U. Proseguendo per induzione, scegliamo $\varepsilon_i > 0$ e U_i aperto in modo tale che l'immagine di $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i) \times U_i$ sia contenuta in U_{i+1}. Poniamo poi $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ e $Y = U_1$. In questo modo per $|t_1|, \dots, |t_k| < \varepsilon$ è ben definita la composizione

$$(\theta_1)_{t_1} \circ \dots \circ (\theta_k)_{t_k} : Y \longrightarrow U$$

Definiamo $\Omega = \{(s^{k+1}, \dots, s^n) \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^k) \in Y\} \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ e una applicazione $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times \Omega \to U$ data da

$$\Phi(s^1, \dots, s^n) = (\theta_1)_{s^1} \circ \dots \circ (\theta_k)_{s^k}(0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n)$$

Per costruzione si ha $\Phi(\{0\} \times \Omega) = S \cap Y$ e in particolare $\Phi(0) = p$.

Ricordiamo che per il Teorema (1.5.7) due campi commutano se e solo se i loro flussi commutano, in particolare dall'ipotesi segue che i flussi θ_i commutano. Per $i = 1, \dots, k$ e per ogni $s_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)^k \times \Omega$ si ha

$$\begin{aligned}
d\Phi_{s_0}\left(\frac{\partial}{\partial s^i}_{|s_0}\right) f &= \frac{\partial}{\partial s^i}_{|s_0} f(\Phi(s^1, \dots, s^n)) \\
&= \frac{\partial}{\partial s^i}_{|s_0} f((\theta_1)_{s^1} \circ \dots \circ (\theta_k)_{s^k}(0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n)) \\
&= \frac{\partial}{\partial s^i}_{|s_0} f((\theta_i)_{s^i} \circ (\theta_1)_{s^1} \circ \dots (\theta_{i-1})_{s^{i-1}} \circ (\theta_{i+1})_{s^{i+1}} \\
&\quad \circ \dots \circ (\theta_k)_{s^k}(0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n)) \\
&= V_{|\Phi(s_0)} f
\end{aligned}$$

Dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $t \mapsto (\theta_i)_t(q)$ è una curva integrale di V_i per ogni $q \in M$. Dal calcolo sopra in particolare segue

$$d\Phi_0\left(\frac{\partial}{\partial s^i}_{|0}\right) = V_{i|p}, \quad i = 1, \dots, k$$

Dall'identità $\Phi(0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n) = (0, \dots, 0, s^{k+1}, \dots, s^n)$ otteniamo poi

$$d\Phi_0\left(\frac{\partial}{\partial s^i}_{|0}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}_{|p}, \quad i = k+1, \dots, n$$

Perciò $d\Phi_0$ porta la base $(\partial/\partial s^1_{|0}, \dots, \partial/\partial s^n_{|0})$ di $T_0\mathbb{R}^n$ nella base $(\partial/\partial x^1_{|p}, \dots, \partial/\partial x^n_{|p})$ di T_pM. Per il teorema della funzione inversa Φ è un diffeomorfismo in un intorno di 0. Allora l'applicazione $\varphi = \Phi^{-1}$ definisce delle coordinate locali attorno a p e porta $\partial/\partial s^i$ in V_i per ogni $i = 1, \dots, k$. Inoltre S viene mandata nello slice $s^1 = \dots = s^k = 0$.

□

Osservazione 3.2.2. Dalla dimostrazione del Lemma segue che, assegnata una sottovarietà embedded $S \subseteq W$ con codimensione k, se $p \in S$ è tale che T_pS sia complementare allo spazio generato dai $(V_{1\,|p}, \dots, V_{k\,|p})$, allora le coordinate locali $(U, (s^i))$ date dal lemma possono essere scelte in modo tale che $S \cap U$ sia lo slice $s^1 = \dots = s^k = 0$.

Dimostrazione. (Frobenius) Dimostriamo che ogni distribuzione involutiva è generata localmente da campi di vettori che commutano. In questo modo la carta locale data dal Lemma (3.2.2) sarà la carta piatta che cerchiamo, eventualmente restringendo le funzioni coordinate in modo che il codominio sia un cubo di $\mathbb{R}^n$.

Siano M una n-varietà differenziabile, D una distribuzione involutiva su M di rango k e $p \in M$. Poiché l'essere completamente integrabile è una proprietà locale, utilizzando delle coordinate locali intorno a p, possiamo limitarci a considerare, in luogo di M, un aperto

$U \subseteq \mathbb{R}^n$. Scelto un frame locale $(X_1, \ldots, X_k)$ per D, possiamo supporre che D_p sia complementare al sottospazio di T_pM generato da $(\partial/\partial x_{k+1\,|p}, \ldots, \partial/\partial x_{n\,|p})$. Consideriamo la proiezione

$$\pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k, \qquad (x^1, \ldots, x^n) \longmapsto (x^1, \ldots, x^k)$$

Il suo differenziale $d\pi : T\mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^k$ è dato in coordinate da

$$d\pi \left(\sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}_{|q} \right) = \left(\sum_{i=1}^{k} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}_{|\pi(q)} \right)$$

$d\pi$ è una applicazione liscia. La sua restrizione $d\pi_{|D}$ è anch'essa liscia in quanto composizione dell'embedding $D \hookrightarrow TU$ con $d\pi$. Segue che le entrate della matrice di $d\pi_{|D_q}$ sono funzioni lisce di q rispetto alle basi $(\partial/\partial x^j_{|\pi(q)})$ e $(X_{i|q})$.

Assumiamo per il momento che, per q in un intorno di p, l'applicazione $(d\pi_{|D_q})$ sia invertibile e che le entrate della matrice di $(d\pi_{|D_q})^{-1} : T_{\pi(q)}\mathbb{R}^k \to D_q$ rispetto alle basi $(X_{i|q})$ e $(\partial/\partial x^j_{|\pi(q)})$ siano funzioni differenziabili di q.

Definiamo k campi di vettori locali intorno a p come segue:

$$V_{i|_q} = (d\pi_{|D_q})^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i}_{|\pi(q)}, \qquad i = 1, \ldots, k \tag{3.2}$$

Questi campi sono un frame locale per D, infatti generano lo spazio D_q e sono linearmente indipendenti: sono immagine della base $(\partial/\partial x^i_{\pi(q)})$ tramite l'applicazione lineare bigettiva $(d\pi_{|D_q})^{-1}$. Inoltre soddisfano $[V_i, V_j] = 0$ per ogni i, j; infatti dalla definizione segue

$$\frac{\partial}{\partial x^i}_{|\pi(q)} = (d\pi_{|D_q}) V_{i|_q} = d\pi_q(V_{i|_q})$$

e per le proprietà del commutatore

$$d\pi_q([V_i, V_j]_q) = \left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right]_q = 0$$

Per l'involutività di D, $[V_i, V_j]_q \in D_q$, ma essendo $d\pi_q$ iniettiva su D_q segue che $[V_i, V_j]_q = 0$ per ogni q.

Resta da dimostrare l'asserto su $d\pi_{|D_q}$. Per la nostra scelta di coordinate, D_p è complementare al nucleo di $d\pi_p$, dunque $d\pi_{|D_p}$ è biettiva. Per il Teorema della funzione inversa lo stesso vale per $d\pi_{|D_q}$ con q in un intorno di p e le entrate della matrice di $(d\pi_{|D_q})^{-1} : T_{\pi(q)}\mathbb{R}^k \to D_q$ rispetto alle basi $(X_{i|q})$ e $(\partial/\partial x^j_{|\pi(q)})$ sono funzioni differenziabili di q.

□

Corollario 3.2.3. *Siano M una varietà differenziabile, $D \subseteq TM$ una distribuzione involutiva di rango k e $S \subseteq M$ una sottovarietà immersa con codimensione k. Se $p \in S$ è tale che T_pS è complementare a D_p, allora esiste una carta piatta $(U, (s^i))$ per D centrata in p nella quale $S \cap U$ sia lo slice $s^1 = \cdots = s^k = 0$.*

Dimostrazione. Dalla dimostrazione del teorema segue che D è generata da k campi di vettori che commutano. Il corollario segue allora dall'osservazione (3.2.2). □

Il risultato che segue è una delle conseguenze più importanti del teorema di Frobenius.

Proposizione 3.2.4 (Struttura locale di varietà integrali). *Sia D una distribuzione involutiva di rango k su una varietà M e sia $(U, (x^i))$ una carta locale piatta per D. Se H è una varietà integrale per D, allora $H \cap U$ è unione numerabile di k-slice di U a due a due disgiunti, aperti in H e embedded in M.*

Dimostrazione. Data H varietà integrale di D, consideriamo l'inclusione $\imath : H \hookrightarrow M$; è una applicazione continua e quindi $H \cap U = \imath^{-1}(U)$ è aperto in H ed è quindi unione numerabile di componenti connesse, ognuna delle quali è aperta in H.

Sia V una delle componenti connesse di $H \cap U$. Per la nostra scelta di coordinate su U, le forme $dx^{k+1}, \ldots, dx^n$ definiscono localmente D, pertanto la loro restrizione (pullback) a V è identicamente nulla. Poiché V è connesso segue che $x^{k+1}, \ldots, x^n$ sono costanti su V, che è quindi contenuto in uno slice k-dimensionale.

Lo slice S contenente V è embedded in M, perciò l'inclusione $V \hookrightarrow M$ è liscia come applicazione in S. Segue che l'inclusione $V \hookrightarrow S$ è un'immersione iniettiva tra varietà della stessa dimensione ed è perciò un diffeomorfismo locale, in particolare è un embedding. Dunque l'inclusione $V \hookrightarrow M$ è un embedding in quanto composizione degli embedding $V \hookrightarrow S \hookrightarrow M$. □

Diamo un altro risultato sulle varietà integrali di distribuzioni involutive

Proposizione 3.2.5. *Ogni varietà integrale di una distribuzione involutiva è debolmente embedded.*

Dimostrazione. Siano M una varietà differenziabile n-dimensionale e D una distribuzione involutiva su M di rango k. Sia poi $H \subseteq M$ una varietà integrale di D.

Vogliamo dimostrare che data una applicazione liscia $F : N \to M$ con $F(N) \subseteq H$, allora F è liscia come applicazione tra N e H. Siano $p \in N$ e $q = F(p) \in H$. Scegliamo $(U, (y^i))$ carta piatta per D intorno a q e delle coordinate (x^i) in un intorno connesso B di p tale che $F(B) \subseteq U$. In questo modo la F è data in coordinate locali da

$$(y^1, \ldots, y^n) = (F^1(x), \ldots, F^n(x))$$

Essendo $F(B) \subseteq H \cap U$, per la Proposizione precedente le $F^{k+1}, \ldots, F^n$ possono assumere soltanto una quantità numerabile di valori, ma il fatto che B sia connesso implica che queste funzioni sono costanti. Segue che $F(B)$ è contenuto in un singolo slice $S \subseteq U$. Sempre per la Proposizione (3.2.4), $S \cap H$ è aperto in H e l'inclusione $S \cap H \hookrightarrow M$ è un embedding. Quindi $F_{|B} : B \to S \cap H$ è liscia e la composizione $F_{|B} : B \to S \cap H \hookrightarrow H$ è liscia come applicazione in H.

□

Capitolo 4

Foliazioni

Vediamo una prima applicazione del Teorema di Frobenius alla teoria delle foliazioni. Il principale risultato di questo capitolo è la corrispondenza uno a uno tra distribuzioni e foliazioni, cioè una foliazione su una varietà differenziabile determina una distribuzione e viceversa.

4.1 Definizioni ed esempi

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Sia poi $\mathcal{F}$ una famiglia di sottovarietà k-dimensionali di M.

Definizione 4.1.1. Una carta locale $(U, \varphi \equiv (x^i))$ di M si dice *piatta per* $\mathcal{F}$ se $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ è un cubo e ogni elemento di $\mathcal{F}$ interseca U nell'insieme vuoto oppure è unione numerabile di k-slice della forma $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$.

Definizione 4.1.2. Una famiglia $\mathcal{F} = \{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ forma una *foliazione di dimensione k su M* se per ogni $\alpha \in A$

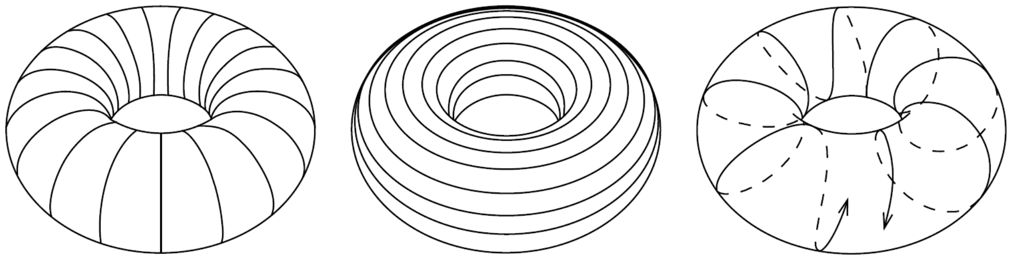
1. $N_\alpha \subseteq M$ e l'inclusione $N_\alpha \hookrightarrow M$ è un'immersione;
2. N_α è connesso;
3. $N_\alpha \cap N_\beta = \emptyset$ per ogni $\alpha \neq \beta$;
4. $dim(N_\alpha) = k$;
5. $\bigcup_{\alpha \in A} N_\alpha = M$;
6. intorno ad ogni punto $p \in M$ esiste una carta locale piatta per $\mathcal{F}$.

Gli elementi di $\mathcal{F}$ si dicono *foglie* della foliazione.

Più brevemente si può dire che una foliazione $\mathcal{F}$ su M è una partizione di M formata da sottovarietà immerse della stessa dimensione e tale che intorno ad ogni punto di M esista una carta locale piatta per $\mathcal{F}$.

Esempio 4.1.1.

1. La famiglia dei k-sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$ paralleli a $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ è una foliazione su R^n.
2. La famiglia delle sfere centrate nell'origine è una foliazione su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ di dimensione $n-1$.
3. Date due varietà M, N, i sottoinsiemi della forma $\{p\} \times N$ (risp. $M \times \{q\}$) per qualsiasi $p \in M$ ($q \in N$) formano una foliazione su $M \times N$. Un esempio è dato dalle famiglia di sottoinsiemi $\{q\} \times \mathbb{S}^1$ del toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
4. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, le immagini delle curve della famiglia
$$\gamma_\theta(t) = (e^{it}, e^{i(\alpha t+\theta)})$$
al variare di θ in $\mathbb{R}$ formano una foliazione sul toro $\mathbb{T}^2$. In particolare se α è razionale ogni foglia è embedding di una circonferenza, mentre se α è irrazionale, ogni foglia è densa.



4.2 Il Teorema di Frobenius globale

Le foliazioni sono strettamente legate alle distribuzioni. Il prossimo risultato ci da un prima idea di questo legame:

Proposizione 4.2.1. *Sia $\mathcal{F}$ una foliazione di dimensione k su una varietà differenziabile M di dimensione n. La famiglia degli spazi tangenti alle foglie di $\mathcal{F}$ forma una distribuzione k-dimensionale involutiva su M.*

Dimostrazione. Indichiamo con $D \subseteq TM$ la famiglia degli spazi tangenti alle foglie di $\mathcal{F}$ in ogni punto. Sia $p \in M$ arbitrario e sia $(U, (x^i))$ una carta locale piatta per $\mathcal{F}$ intorno a p. Se $q \in U$, esiste un'unica foglia di $\mathcal{F}$ contenente q, sia L. Dalla definizione di carta piatta per $\mathcal{F}$, $L \cap U$ è unione di slice del tipo $x^{k+1} = c^{k+1}, \ldots, x^n = c^n$, per delle costanti opportune. Allora $T_qL = D_q$ è generato dai vettori $\partial/\partial x^1_{|q}, \ldots, \partial/\partial x^k_{|q}$. Segue che D è generata localmente dai campi $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^k$ ed è quindi una distribuzione di dimensione k su M per il criterio (2.1.2). Sempre dalla definizione di carta piatta (nel senso delle foliazioni) otteniamo che $(U, (x^i))$ è piatta (nel senso delle distribuzioni) per D, che è quindi completamente integrabile e in particolare è involutiva.

□

Quindi ad ogni foliazione corrisponde una distribuzione involutiva. Dimostreremo a breve che di questo fatto è vero anche il viceversa, cioè che ogni distribuzione involutiva su una varietà differenziabile determina una foliazione. Dimostriamo prima un risultato preliminare.

Lemma 4.2.2. *Sia $D \subseteq TM$ una distribuzione involutiva e sia $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di varietà integrali connesse di D con un punto in comune. Allora è possibile dotare $N = \bigcup_{\alpha \in A} N_\alpha$ di un'unica struttura differenziabile che la renda una varietà integrale connessa di D.*

Dimostrazione. Vogliamo costruire una struttura differenziabile su N che la renda una varietà integrale di D. A questo punto essendo le varietà integrali debolmente embedded, questa struttura sarà univocamente determinata.

Dimostriamo per prima cosa che $N_\alpha \cap N_\beta$ è aperto sia in N_α che in N_β per ogni $\alpha, \beta \in A$. Sia $q \in N_\alpha \cap N_\beta$ (che è non vuoto per ipotesi) e sia (W, ψ) una carta locale piatta per D intorno a q. Poniamo allora $V_\alpha = N_\alpha \cap W$, $V_\beta = N_\beta \cap W$. Dalla proposizione (3.2.4) segue che V_α, V_β sono aperti di un singolo slice nella topologia indotta; poiché entrambi contengono q, devono giacere sullo stesso slice S. Allora $V_\alpha \cap V_\beta \subseteq N_\alpha \cap N_\beta$ contiene q, è un aperto di S ed è quindi aperto sia in N_α che in N_β.

Definiamo ora una topologia su N dicendo che $U \subseteq N$ è aperto se e solo se $U \cap N_\alpha$ è aperto in N_α per ogni α. Utilizzando il risultato che abbiamo appena dimostrato si vede facilmente che quella definita è effettivamente una topologia e che N_α è aperto in N per ogni α. Inoltre l'inclusione $\imath : N \hookrightarrow M$ è continua, infatti per ogni aperto $U \subseteq M$, la controimmagine $\imath^{-1}(U) = U \cap N$ è aperto di N poiché $U \cap N_\alpha$ è aperto in N_α per ogni α.

Con questa topologia N è localmente euclideo di dimensione k, infatti intorno a ogni punto $q \in N$ esiste un intorno coordinato $V \subseteq N_\alpha$, che è aperto in N essendo un aperto di N_α.

Per far vedere che N è di Hausdorff, siano $q, q' \in N$ con $q \neq q'$. Esistono due aperti disgiunti U, U' in M che contengono q, q' rispettivamente. Poiché l'inclusione $\imath : N \hookrightarrow M$ è continua, gli insiemi $U \cap N$, $U' \cap N$ sono aperti di N disgiunti contenenti rispettivamente q e q'.

Mostriamo ora che esiste una base numerabile per la topologia su N. Consideriamo un ricoprimento $\{W_i\}$ di M formato da una quantità numerabile di carte piatte per D. Mostriamo che $N \cap W_i$ è contenuto nell'unione numerabile di slice per ogni i. In questo modo, poiché ogni sottoinsieme aperto di un singolo slice è ricoperto da una quantità numerabile di aperti, seguirà che anche N può essere ricoperta da una quantità numerabile di aperti, ognuno dei quali soddisfa il secondo assioma di numerabilità ed è aperto in N.

Sia $p_0 \in N_\alpha$ per ogni α. Diremo che uno slice $S \subseteq W_k$ è *accessibile da* p_0 se esiste una sequenza di indici $i_1, \ldots, i_m$ e per ogni indice uno slice $S_{i_j} \subseteq W_{i_j}$ tali che $p_0 \in S_{i_1}$ e $S_{i_j} \cap S_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ per ogni $j = 1, \ldots, m-1$.

Consideriamo un elemento W_k del nostro ricoprimento di M. Sia $S \subseteq W_k$ uno slice contenente un punto $q \in N$. Per un certo α si avrà $q \in N_\alpha$; poiché anche $p_0 \in N_\alpha$, esiste un arco $\gamma : [0,1] \to N_\alpha$ che unisce p_0 e q. L'insieme $\gamma([0,1])$ è compatto, dunque esiste una partizione $\{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1\}$ tale che che per ogni $j = 1, \ldots, m$ l'insieme $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ sia contenuto in un certo W_{i_j}. Inoltre poiché $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ è connesso, deve essere contenuto in una singola componente connessa di $W_{i_j} \cap N_\alpha$, vale a dire in un singolo slice $S_{i_j} \subseteq W_{i_j}$. Per ogni $j = 1, \dots, m-1$ gli slice S_{i_j} e $S_{i_{j+1}}$ hanno in comune il punto $\gamma(t_{j+1})$, dunque q è accessibile da p_0.

Abbiamo dimostrato che ogni slice di un qualsiasi W_k contenente punti di N è accessibile da p_0. Osserviamo che ogni slice S_{i_j} è esso stesso una varietà integrale di D, dunque intersecherà $S_{i_{j+1}}$ in una quantità numerabile di slice. Perciò da p_0 è possibile accedere al più a una quantità numerabile di slice. Se adesso fissiamo un W_i, per definizione questo sarà unione di slice, ma da quanto appena visto segue che solo una quantità numerabile di questi slice può contenere punti di N; ne consegue che $N \cap W_i$ è contenuto nell'unione numerabile di slice. Questo completa la dimostrazione del secondo assioma di numerabilità e dunque N è una varietà topologica di dimensione k. Inoltre è connessa essendo unione di connessi con un punto in comune.

Ci resta da definire una struttura differenziabile su N. Consideriamo l'atlante di N dato dalle carte $(S \cap N, \psi)$, dove S è uno slice in una certa carta piatta e $\psi : S \to \mathbb{R}^k$ è l'applicazione rappresentata in coordinate da $\psi(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k)$. Sappiamo che per ogni slice l'inclusione $S \hookrightarrow M$ è un embedding, dunque la sua struttura differenziabile è univocamente determinata da quella di M e quando due slice S, S' si intersecano, l'applicazione $\psi' \circ \psi^{-1}$ è liscia. Rispetto a questa struttura differenziabile, l'inclusione $N \hookrightarrow M$ è un embedding in ogni slice e quindi è un'immersione.

Sia poi $q \in N$, abbiamo dimostrato che localmente N coincide con uno slice in una carta piatta per D. Segue che lo spazio T_qN coincide con D_q (che è proprio lo spazio tangente in q allo slice).

□

Possiamo ora enunciare il

Teorema 4.2.3 (di Frobenius globale). *Sia D una distribuzione involutiva di dimensione k su una varietà differenziabile M. La famiglia delle varietà integrali massimali connesse di D forma una foliazione di dimensione k su M.*

Dimostrazione. Per ogni $p \in M$, sia L_p l'unione delle varietà integrali di D contenenti p. Per il Lemma precedente L_p è ancora una varietà integrale di D ed è chiaramente massimale. Data un'altra varietà integrale $L_{p'}$ di questo tipo, se L_p e $L_{p'}$ si intersecano, la loro unione è ancora una varietà integrale di D e le contiene entrambe; per la massimalità deve essere $L_p = L_{p'}$. Essendo ovviamente $M = \bigcup_{p \in M} L_p$, segue che la famiglia delle varietà integrali di questo tipo costituisce una partizione di M.

Data una carta locale (U, φ) piatta per D, per la Proposizione (3.2.4) $L_p \cap U$ è unione numerabile di sottoinsiemi aperti di slice. Si ha che $L_p \cap U$ è proprio l'unione di questi slice. Infatti se per un qualsiasi slice S fosse $L_p \cap S \neq \emptyset$ e $L_p \subset S$ strettamente, allora $L_p \cup S$ sarebbe una varietà integrale di D contenente L_p propriamente, il che contraddice il fatto che L_p sia massimale. Segue che $L_p \cap U$ è unione numerabile di slice.

Riassumendo, gli elementi della famiglia $\mathcal{F} = \{L_p\}_{p \in M}$ sono sottovarietà di M e l'inclusione $L_p \hookrightarrow M$ per la Proposizione (3.2.4) è un embedding in ogni slice e quindi è un'immersione, inoltre per costruzione gli L_p sono connessi e ricoprono M; in ultimo la carta locale (U, φ) è piatta per $\mathcal{F}$, che è quindi la foliazione che cercavamo.

□

Per terminare il capitolo, vediamo un altro fatto che lega distribuzioni e foliazioni. Consideriamo un diffeomorfismo $\Phi : M \to M$.

Definizione 4.2.1. Una distribuzione D su M è detta Φ-*invariante* se $d\Phi(D) = D$, cioè se per ogni $p \in M$

$$d\Phi_p(D_p) = D_{\Phi(p)} \tag{4.1}$$

Definizione 4.2.2. Una foliazione $\mathcal{F}$ su M è detta Φ-*invariante* se per ogni foglia $L \in \mathcal{F}$ la sottovarietà $\Phi(L)$ è ancora una foglia di $\mathcal{F}$.

Proposizione 4.2.4. *Siano M una varietà differenziabile, $\Phi : M \to M$ un diffemorfismo, D una distribuzione involutiva su M e $\mathcal{F}$ la foliazione determinata da D. Allora D è Φ-invariante se e solo se $\mathcal{F}$ è Φ-invariante.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathcal{F}$ sia Φ-invariante. Osserviamo che, per ogni $p \in M$, se L_p è definito come nella dimostrazione del Teorema si ha $\Phi(L_p) = L_{\Phi(p)}$. Infatti sia $\Phi(L_p)$ che $L_{\Phi(p)}$ sono foglie di $\mathcal{F}$ contenenti $\Phi(p)$ e l'uguaglianza segue dalla massimalità. Poiché L_p, $L_{\Phi(p)}$ sono sottovarietà immerse, si ha

$$d\Phi_p(D_p) = d\Phi_p(T_pL_p) = T_{\Phi(p)}L_{\Phi(p)} = D_{\Phi(p)}$$

Viceversa, supponiamo che D sia Φ-invariante. Sia $L_p \in \mathcal{F}$, allora $\Phi(L_p)$ è una sottovarietà immersa di M perché Φ è un diffeomorfismo; inoltre

$$T_{\Phi(p)}\Phi(L_p) = d\Phi_p(T_pL_p) = d\Phi_p(D_p) = D_{\Phi(p)}$$

Segue che $\Phi(L_p)$ è una varietà integrale di D. Ma allora $L_{\Phi(p)}$ e $\Phi(L_p)$ sono varietà integrali di D contenenti $\Phi(p)$; per la massimalità deve quindi essere $\Phi(L_p) = L_{\Phi(p)} \in \mathcal{F}$. $\square$

Capitolo 5

Alcune applicazioni

Questo capitolo si compone di due sezioni: nella prima, applichiamo la teoria delle foliazioni vista nel capitolo precedente ai sottogruppi di Lie, diamo alcune proprietà e dimostriamo la corrispondenza tra sottogruppi e sottoalgebre di Lie di un gruppo di Lie.

Nella seconda sezione ci occupiamo di alcuni problemi alle derivate parziali risolvibili utilizzando le distribuzioni e il Teorema di Frobenius.

5.1 Sottogruppi di Lie e sottoalgebre di Lie

Siano G un gruppo di Lie e $D \subseteq TG$ una distribuzione su D.

Definizione 5.1.1. D si dice *invariante a sinistra* se è invariante rispetto a ogni tralazione a sinistra, cioè se

$$d(L_g)(D) = D, \quad \forall g \in G \tag{5.1}$$

Lemma 5.1.1. *Siano G un gruppo di Lie e $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Lie di $Lie(G)$. Allora $D = \bigcup_{g \in G} D_g \subseteq TG$, dove*

$$D_g = \{X_g \mid X \in \mathfrak{h}\} \subseteq T_g G \tag{5.2}$$

è una distribuzione su G liscia, involutiva, invariante a sinistra.

Dimostrazione. Ogni $X \in \mathfrak{h}$ è un campo di vettori invariante a sinistra su G. Allora per ogni $g, g' \in G$ la restrizione

$$(dL_{g'g^{-1}})_{|D_g} : D_g \longrightarrow D_{g'}, \quad X_g \longmapsto dL_{g'g^{-1}}(X_g) = X_{(g'g^{-1})g'} = X_{g'} \in D_{g'}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali, perciò $dim(D_g) = dim(D_{g'})$ per ogni $g, g' \in G$. Ogni base locale $(X_1, \ldots, X_k)$ per $\mathfrak{h}$ è un frame locale liscio per D, che è quindi liscia per il criterio (2.1.2). Per costruzione D è invariante a sinistra. Inoltre essendo $\mathfrak{h} \subseteq Lie(G)$ una sottoalgebra di Lie, si ha $[X_i, X_j] \in \mathfrak{h}$ per ogni $i, j = 1, \ldots, k$. Segue allora dal Lemma (3.1.4) che D è involutiva.

□

Teorema 5.1.2. *Ogni sottogruppo di Lie è una varietà integrale di una certa distribuzione involutiva. In particolare ogni sottogruppo di Lie è debolmente embedded.*

Dimostrazione. Sia G un gruppo di Lie e $H \subseteq G$ un sottogruppo di Lie. Se $\imath : H \hookrightarrow G$ è l'inclusione, l'algebra di Lie di H è isomorfa alla sottoalgebra di Lie $\mathfrak{h} = \imath_*(Lie(H)) \subseteq Lie(G)$ per la Proposizione (2.2.6). Se $D \subseteq TG$ è la distribuzione determinata da $\mathfrak{h}$ secondo (5.2), per definizione si ha $D_h = T_h H$ per ogni $h \in H$. Dunque H è una varietà integrale di D ed è debolmente embedded in G per la Proposizione (3.2.5).

□

Teorema 5.1.3 (**Corrispondenza tra sottogruppi e sottoalgebre di Lie**)**.** *Sia G un gruppo di Lie e $\mathfrak{g}$ la sua algebra di Lie. Per ogni sottoalgebra di Lie $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ esiste un unico sottogruppo di Lie connesso di G la cui algebra di Lie è $\mathfrak{h}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Lie di $\mathfrak{g}$. Sia poi $D \subseteq TG$ la distribuzione determinata da $\mathfrak{h}$ data dal Lemma (5.1.1). Per il Teorema di Frobenius globale, D determina una foliazione $\mathcal{H}$ su G. Poiché D è invariante a sinistra, $\mathcal{H}$ è invariante rispetto alle traslazioni a sinistra per la Proposizione (4.2.4). Per ogni $g \in G$ denotiamo con $\mathcal{H}_g$ la foglia di $\mathcal{H}$ contenente g; in particolare poniamo $H = \mathcal{H}_e$. Vogliamo dimostrare che H è il sottogruppo che cerchiamo. Come prima cosa, H è connesso in quanto foglia di $\mathcal{H}$.

Facciamo vedere che $H \subseteq G$ è un sottogruppo di Lie. Siano $h, h' \in H$, osserviamo che $\mathcal{H}_h = H = \mathcal{H}_{h'}$ (sono foglie di $\mathcal{H}$ con intersezione non vuota). Allora

$$hh' = L_h(h') \in L_h(\mathcal{H}_{h'}) = L_h(H) = L_h(\mathcal{H}_e) = \mathcal{H}_h = H$$

Analogamente

$$h^{-1} = h^{-1}e \in L_{h^{-1}}(\mathcal{H}_e) = L_{h^{-1}}(\mathcal{H}_h) = \mathcal{H}_{h^{-1}h} = H$$

Per dimostrare che l'applicazione $\mu : H \times H \to H$, $(h, h') \mapsto hh'$ è liscia, osserviamo che essendo $H \times H$ una sottovarietà di $G \times G$, è liscia l'applicazione $\mu : H \times H \to G$. Inoltre poiché H è una varietà integrale di D, per la Proposizione (3.2.5) è debolmente embedded in G, quindi μ è liscia come applicazione in H. In modo analogo si vede che anche l'inversione $i(h) = h^{-1}$ è liscia da H in H.

Per costruzione si ha $T_e H = D_e = \{X_e \mid X \in \mathfrak{h}\}$, quindi ogni campo di vettori liscio su H è invariante a sinistra e l'algebra di Lie di H è proprio $\mathfrak{h}$.

Per far vedere che H è unico, supponiamo che $\tilde{H}$ sia un altro sottogruppo di Lie connesso con algebra di Lie $\mathfrak{h}$. Si vede facilmente che $\tilde{H}$ è una varietà integrale di D, dunque per la massimalità di $H = \mathcal{H}_e$ deve essere $\tilde{H} \subseteq H$. Se consideriamo ora un intorno coordinato U contenente l'identità di una carta locale piatta per D, dalla Proposizione (3.2.4) segue che $\tilde{H} \cap U$ è unione di aperti di slice. Lo slice contentente e è un aperto di H, perciò $\tilde{H}$ contiene un intorno dell'identità. Per la Proposizione (2.2.4), ogni aperto contenente l'identità genera H, perciò deve essere $H \subseteq \tilde{H}$. Concludiamo quindi che $H = \tilde{H}$.

□

5.2 PDE sovradeterminate

Un importante campo dove il Teorema di Frobenius trova applicazione riguarda le equazioni alle derivate parziali (in inglese Partial Differential Equations, abbreviato in

PDE). Noi siamo interessati al caso di equazioni *sovradeterminate*, cioè il caso in cui si hanno più equazioni che funzioni incognite.

Per cominciare studiamo una classe di sistemi lineari. Siano $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $m \leq n$ un intero. Consideriamo il sistema di m equazioni con incognita la funzione $u \in C^\infty(W)$

$$\begin{aligned} a_1^1(x)\frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + a_1^m(x)\frac{\partial u}{\partial x^n} &= f_1 \\ &\vdots \\ a_m^1(x)\frac{\partial u}{\partial x^1} + \cdots + a_m^n(x)\frac{\partial u}{\partial x^n} &= f_m \end{aligned} \tag{5.3}$$

dove (a_i^j) è una matrice $m \times n$ le cui entrate sono funzioni lisce a valori reali e avente rango m in ogni punto, $f_1, \ldots, f_m$ sono funzioni lisce su W a valori reali. Se denotiamo

$$A_i = a_i^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + a_i^n \frac{\partial}{\partial x^n}$$

il sistema può essere riscritto in modo più compatto come

$$\begin{aligned} A_1 u &= f_1 \\ &\vdots \\ A_m u &= f_m \end{aligned} \tag{5.4}$$

L'ipotesi che la matrice (a_i^j) abbia rango m equivale a richiedere che i campi A_i siano linearmente indipendenti.

Il caso $m = 1$ è particolare e può essere trattato sulle varietà differenziabili in generale utilizzando la teoria dei flussi a cui abbiamo accennato nel primo capitolo. Riportiamo il risultato per completezza:

Teorema 5.2.1. *Sia M una varietà differenziabile di dimensione n. Siano poi $S \subseteq M$ una sottovarietà embedded, $A =\in \mathfrak{X}(M)$ un campo di vettori che non sia tangente a S in nessun punto e $b, f \in C^\infty(M)$, $\varphi \in C^\infty(S)$. Allora in un intorno U di S in M esiste un'unica $u \in C^\infty(U)$ soluzione del problema*

$$\begin{aligned} Au + bu &= f, \\ u_{|S} &= \varphi. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Omessa.

□

Il caso che ci interessa maggiormente è quello per $m \geq 2$. Prima di andare avanti ricordiamo un importante risultato di analisi:

Lemma 5.2.2 (di Poincaré). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme stellato aperto. Allora ogni 1-forma differenziale chiusa è esatta. Inoltre data $\omega = \omega_i\, dx^i$ chiusa, la funzione*

$$f(x) = \int_0^1 \omega_i(tx)x^i\, dt$$

è ben definita per ogni $x \in U$ e tale che $df = \omega$ su U.

Teorema 5.2.3. *Siano $W \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $1 \leq m \leq n$ e $S \subseteq W$ una sottovarietà embedded con codimensione m. Siano poi $A_1, \ldots, A_m$ campi di vettori linearmente indipendenti su W tali che per ogni $p \in S$ lo spazio $span(A_{1|p}, \ldots, A_{m|p})$ sia complementare a T_pS e $f_1, \ldots, f_m \in C^\infty(W)$. Supponiamo che esistano delle funzioni $c_{ij}^k \in C^\infty(W)$ con $i, j, k = 1, \ldots, m$ tali che le seguenti condizioni siano verificate*

$$[A_i, A_j] = c_{ij}^k A_k \tag{5.5}$$

$$A_i f_j - A_j f_i = c_{ij}^k f_k \tag{5.6}$$

dove la somma al secondo membro va da 1 a m. Allora per ogni $p \in S$ esiste un intorno U tale che per ogni $\varphi \in C^\infty(S \cap U)$ esiste un'unica $u \in C^\infty(W)$ soluzione del problema

$$A_i u = f_i \tag{5.7}$$

$$u_{|S\cap U} = \varphi \tag{5.8}$$

Dimostrazione. Sia $p \in S$ arbitrario. Consideriamo la distribuzione D generata dai campi A_i. La condizione (5.5) insieme al Lemma (3.1.4) implicano che D sia involutiva. Per col Lemma (3.2.2) possiamo quindi scegliere una carta locale piatta (U, ψ) intorno a p in cui S sia uno slice. Indichiamo le coordinate locali con

$$\psi \equiv (v, w) = (v^1, \ldots, v^m, w^1, \ldots, w^{n-k})$$

e supponiamo che $S \cap U$ sia lo slice $v^1 = \cdots = v^m = 0$ (si ricordi l'osservazione (3.2.2)). In queste coordinate, ogni scelta $w = cost.$ da luogo ad una varietà integrale di D, che indicheremo con H_w.

Per ogni $q \in U$ si ha

$$span(A_{1|q}, \ldots, A_{m|q}) = span\left(\frac{\partial}{\partial v^1}_{|q}, \ldots, \frac{\partial}{\partial v^m}_{|q}\right)$$

per cui $(A_1, \ldots, A_m, \partial/\partial w^1, \ldots, \partial/\partial w^{n-m})$ è un frame locale su U. Indichiamo con la sua base duale con $(\alpha^1, \ldots, \alpha^m, \beta^1, \ldots, \beta^{n-m})$ e definiamo $\omega = f_k \alpha^k \in \Omega(U)$. Osserviamo ora che la condizione (5.7) è equivalente al verificarsi per ogni $i = 1, \ldots, m$ dell'identità

$$du(A_i) = \omega(A_i) \tag{5.9}$$

che a sua volta equivale a richiedere che il pullback di $du - \omega$ su ogni varietà integrale H_w sia nullo.

Utilizzando la formula (1.20) per il differenziale e la condizione (5.5) otteniamo

$$\begin{aligned} d\alpha^k(A_i, A_j) &= A_i(\alpha^k(A_j)) - A_j(\alpha^k(A_i)) - \alpha^k([A_i, A_j]) \\ &= A_i(\delta_j^k) - A_j(\delta_i^k) - \alpha^k(c_{ij}^l A_l) \\ &= -c_{ij}^k \end{aligned}$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} d\omega(A_i, A_j) &= (df_k \wedge \alpha^k + f_k\, d\alpha^k)(A_i, A_j) \\ &= (A_i f_k)\alpha^k(A_j) - (A_j f_k)\alpha^k(A_i) + f_k\, d\alpha^k(A_i, A_j) \\ &= (A_i f_k)\delta_j^k - (A_j f_k)\delta_i^k - f_k c_{ij}^k = A_i f_j - A_j f_i - f_k c_{ij}^k = 0 \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla condizione (5.6). Poiché la restrizione di $(A_1, \ldots, A_m)$ è un frame locale per ogni H_w, segue che il pullback di ω è chiusa su ogni H_w.

Nelle coordinate (v, w) possiamo scrivere $\omega = \omega_i\, dv^i$. Fissata $\varphi \in C^\infty(S \cap U)$, definiamo $u = u_0 + u_1$, dove u_0, u_1 sono definite come

$$\begin{aligned} u_0(v, w) &= \varphi(0, w) \\ u_1(v, w) &= \int_0^1 \omega_i(tv, w) v^i\, dt \end{aligned}$$

Chiaramente u_0 è ben definita ed è C^∞ su U. Per definizione una carta piatta è un cubo, in particolare è un insieme stellato e dunque u_1 è ben definita per ogni $(v, w) \in U$; inoltre differenziando sotto il segno di integrale otteniamo che $u_1 \in C^\infty(U)$.

Dalla definizione segue che $u_{0|S\cap U} = \varphi$ e $u_{1|S\cap U} = 0$, perciò u soddisfa la condizione iniziale (5.7). Inoltre essendo u_0 indipendente da v, abbiamo $A_1 u_0 = \cdots = A_m u_0 = 0$.

Consideriamo l'inclusione $\imath_{H_w} : H_w \hookrightarrow U$. Dal Lemma di Poincaré segue che, per ogni w fissato, $\imath_{H_w}^* u_1$ è una funzione potenziale per $\imath_{H_w}^* \omega$, cioè soddisfa $\imath_{H_w}^* du_1 = \imath_{H_w}^* \omega$. Per quanto detto in precedenza segue allora che u_1 soddisfa (5.8) e u è soluzione del problema.

Per dimostrare che la soluzione è unica, supponiamo che $\tilde{u}$ sia un'altra soluzione e definiamo $\psi = u - \tilde{u}$. Usando la (5.8) si ha, per ogni $i = 1, \ldots, m$

$$A_i \psi = A_i(u - \tilde{u}) = A_i u - A_i \tilde{u} = f_i - f_i = 0$$

Quindi ψ non dipende da v, pertanto possiamo scrivere $\psi(v, w) = \psi(0, w)$. Inoltre dalla (5.7) otteniamo.

$$\psi_{|S\cap U} = \psi(0, w) = u_{|S\cap U} - \tilde{u}_{|S\cap U} = \varphi - \varphi = 0$$

Segue che $u = \tilde{u}$.

$\square$

Il prossimo risultato che vedremo riguarda PDE sovradeterminate non lineari, cioè sistemi in cui le derivate parziali della funzione incognita dipendono in modo diretto, oltre che dalle variabili, dalla funzione stessa. Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \alpha(x, y, u(x, y)) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= \beta(x, y, u(x, y)) \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dove u è incognita e α, β sono funzioni a valori reali lisce definite su un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^3$.

Se u è soluzione di questo sistema, derivando la prima equazione rispetto a y, la seconda rispetto a x e uguagliando troviamo la condizione

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \beta \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \frac{\partial \beta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \beta}{\partial z} \tag{5.11}$$

Il risultato che segue afferma che questa condizione, necessaria per l'esistenza di una soluzione, è anche sufficiente.

Proposizione 5.2.4. *Siano $W \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e $\alpha, \beta : W \to \mathbb{R}$ funzioni lisce che soddisfano la condizione (5.11). Per ogni (x_0, y_0, z_0) esistono un intorno U di (x_0, y_0) in $\mathbb{R}^2$ e un'unica funzione $u : U \to \mathbb{R}$ soluzione del sistema (5.10) e tale che $u(x_0, y_0) = z_0$.*

Dimostrazione. Osserviamo che, se esiste una soluzione u di (5.10) definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, allora $F : U \to \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (x, y, u(x, y))$ è una parametrizzazione globale del grafico di u, che denotiamo con $\Gamma(u) \subseteq U \times \mathbb{R}$.

Dato $p = F(x, y)$, lo spazio $T_p\Gamma(u)$ è generato dai vettori

$$dF\left(\frac{\partial}{\partial x}_{|(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}_{|p} + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\frac{\partial}{\partial z}_{|p}$$
$$dF\left(\frac{\partial}{\partial y}_{|(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial y}_{|p} + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\frac{\partial}{\partial z}_{|p}$$

Confrontando le componenti si vede subito che (5.10) ha soluzione se e solo se

$$dF\left(\frac{\partial}{\partial x}_{|(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}_{|p} + \alpha(x, y, u(x, y))\frac{\partial}{\partial z}_{|p}$$
$$dF\left(\frac{\partial}{\partial y}_{|(x,y)}\right) = \frac{\partial}{\partial y}_{|p} + \beta(x, y, u(x, y))\frac{\partial}{\partial z}_{|p}$$

Definiamo ora su W i campi di vettori

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + \alpha(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}$$
$$Y = \frac{\partial}{\partial y} + \beta(x, y, z)\frac{\partial}{\partial z}$$

e denotiamo con D la distribuzione da essi generata.

Da quanto visto segue che $T_p\Gamma(u)$ è generato da X_p, Y_p, cioè $\Gamma(u)$ è una varietà integrale di D. Abbiamo quindi ottenuto che, se (5.10) ha soluzione, allora il grafico di tale soluzione è una varietà integrale di D.

Vale anche il viceversa, infatti se il grafico $\Gamma(u)$ è una varietà integrale di D, allora $dF(\partial/\partial x), dF(\partial/\partial y)$ sono combinazione lineare di X, Y; confrontando le componenti si trova subito che la funzione u soddisfa (5.10).

Dalla condizione (5.11) otteniamo

$$[X, Y] = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \alpha\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \beta\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

cioè D è involutiva e, per il Teorema di Frobenius, è completamente integrabile. Fissato $p = (x_0, y_0, z_0) \in W$, esiste una varietà N integrale di D e contenente il punto p. In un certo intorno V contenente p possiamo considerare una funzione $\Phi : V \to \mathbb{R}$ che definisce N localmente. Scegliamo ad esempio $\Phi(x, y, z) = z$, dove (x, y, z) sono coordinate locali in carta piatta per D. Per ogni $p \in N$ si ha allora

$$T_pN = D_p = Ker(d\Phi_p)$$

Poiché $\partial/\partial z_{|q} \notin D_q$ per ogni $q \in N$, in particolare $\partial\Phi/\partial z \neq 0$ in p. Per il Teorema della funzione implicita N è il grafico di una certa funzione liscia $z = u(x, y)$ in un opportuno intorno U di p.

Per costruzione il grafico $\Gamma(u)$ è una varietà integrale di D e, per le osservazioni fatte all'inizio della dimostrazione, u è una soluzione di (5.10); inoltre soddisfa $u(x_0, y_0) = (x_0, y_0, z_0)$.

L'unicità della u segue dalla Proposizione (3.2.4).

□

Il risultato appena visto può essere generalizzato a dimensioni maggiori:

Proposizione 5.2.5. *Siano W un aperto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e $\alpha = (\alpha^i_j) : W \to M(m \times n, \mathbb{R})$ una matrice con entrate lisce che soddisfano, per ogni i, j, k*

$$\frac{\partial \alpha^i_j}{\partial x^k} + \alpha^l_k \frac{\partial \alpha^i_j}{\partial z^l} = \frac{\partial \alpha^i_k}{\partial x^j} + \alpha^l_j \frac{\partial \alpha^i_k}{\partial z^l}$$

Denotiamo $(x, z) = (x^1, \dots, x^n, z^1, \dots, z^m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Per ogni $(x_0, z_0) \in W$ esistono un intorno U di x_0 in $\mathbb{R}^n$ e un'unica funzione liscia $u : U \to \mathbb{R}^m$ tale che $u(x_0) = z_0$ e che soddisfa

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^j} = \alpha^i_j(x^1, \dots, x^n, u^1(x), \dots, u^m(x))$$

La dimostrazione è analoga a quella della Proposizione precedente.

Bibliografia

[1] Lee, John Marshall: *Introduction to Smooth Manifolds, 2nd edn.* Springer (2012)

[2] Boothby, William: *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry, 2nd edn.* Academic Press, Orlando (1986)

[3] Caddeo, Renzo: *Appunti del corso di Geometria Differenziale.* Università degli Studi di Cagliari, A.A. 2017-18

[4] Cappelletti Montano, Beniamino: *Appunti del corso di Geometria Riemanniana.* Università degli Studi di Cagliari, A.A. 2017-18

[5] Pérez Muñoz, Joaquín: *Notas sobre Geometría Riemanniana Global.* Appunti del corso Formas y Curvatura, Universidad de Granada (2000)

[6] Abate, Marco: *Geometria.* McGraw-Hill (1996)

[7] Do Carmo, Manfredo Perdigão: *Differential Forms and Applications.* Springer (1994)