



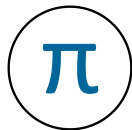
Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Il Teorema di Lindemann

Candidato:
Roberto Pulina

Relatore:
Andrea Loi



Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze
corso di Studi di Matematica

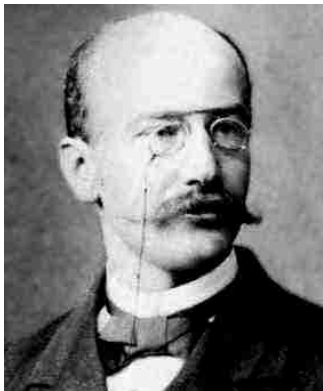
16 Aprile 2019



Introduzione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina



Carl Louis Ferdinand von Lindemann



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Sia $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in F[x]$ un polinomio su un anello d'integrità F .



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Sia $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in F[x]$ un polinomio su un anello d'integrità F .

Def.1

$a(x)$ è detto **monico** se $a_n = 1$.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Sia $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in F[x]$ un polinomio su un anello d'integrità F .

Def.1

$a(x)$ è detto **monico** se $a_n = 1$.

Def.2

$\alpha \in F$ è detta **radice** di $a(x)$ se
 $a(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0$.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Sia $a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \in F[x]$ un polinomio su un anello d'integrità F .

Def.1

$a(x)$ è detto **monico** se $a_n = 1$.

Def.2

$\alpha \in F$ è detta **radice** di $a(x)$ se
 $a(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n = 0$.

Teorema di estensione

Sia $a(x)$ un polinomio, non costante, con coefficienti in un campo F allora esiste un campo $E \supset F$ ed un elemento $c \in E$ tale che $a(c) = 0$.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Def.3

$\alpha \in \mathbb{C}$ è detto **numero algebrico** se α è radice di un polinomio $a(x) \in \mathbb{Q}[x]$; in caso contrario α è detto **trascendente**.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Def.3

$\alpha \in \mathbb{C}$ è detto **numero algebrico** se α è radice di un polinomio $a(x) \in \mathbb{Q}[x]$; in caso contrario α è detto **trascendente**.

Def.4

$\alpha \in \mathbb{C}$ è detto **intero algebrico** se è radice di un polinomio monico con coefficienti interi.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Def.3

$\alpha \in \mathbb{C}$ è detto **numero algebrico** se α è radice di un polinomio $a(x) \in \mathbb{Q}[x]$; in caso contrario α è detto **trascendente**.

Def.4

$\alpha \in \mathbb{C}$ è detto **intero algebrico** se è radice di un polinomio monico con coefficienti interi.

Teorema 1

La somma ed il prodotto di numeri (interi) algebrici è un numero (intero)algebrico.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Def.5

Sia $a(x) \in F[x]$ e sia c una sua radice allora $a(x)$ è il **polinomio minimo** di c in F se $a(x)$ è monico ed irriducibile.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Def.5

Sia $a(x) \in F[x]$ e sia c una sua radice allora $a(x)$ è il **polinomio minimo** di c in F se $a(x)$ è monico ed irriducibile.

Prop.1

Sia $c \in \mathbb{C}$ radice di un polinomio in $F[x] \Rightarrow \exists p(x) \in F[x]$ tale che $p(x)$ sia irriducibile di c in F .



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Def.5

Sia $a(x) \in F[x]$ e sia c una sua radice allora $a(x)$ è il **polinomio minimo** di c in F se $a(x)$ è monico ed irriducibile.

Prop.1

Sia $c \in \mathbb{C}$ radice di un polinomio in $F[x] \Rightarrow \exists p(x) \in F[x]$ tale che $p(x)$ sia irriducibile di c in F .

Def.6

Il **grado** di un numero algebrico α è il grado del polinomio minimo di α in \mathbb{Q} .



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Prop.2

Sia α radice di un polinomio irriducibile $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e sia a_n il coefficiente direttore di tale polinomio $\Rightarrow a_n\alpha$ è radice di un polinomio monico con coefficienti interi.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Prop.2

Sia α radice di un polinomio irriducibile $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e sia a_n il coefficiente direttore di tale polinomio $\Rightarrow a_n\alpha$ è radice di un polinomio monico con coefficienti interi.

Def.7

Sia $\alpha = \alpha_1$ radice di un polinomio irriducibile $a(x) \in F[x]$ di grado n , allora le radici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ di $a(x)$ sono dette coniugati di α .



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Prop.2

Sia α radice di un polinomio irriducibile $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ e sia a_n il coefficiente direttore di tale polinomio $\Rightarrow a_n\alpha$ è radice di un polinomio monico con coefficienti interi.

Def.7

Sia $\alpha = \alpha_1$ radice di un polinomio irriducibile $a(x) \in F[x]$ di grado n , allora le radici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ di $a(x)$ sono dette coniugati di α .

Def.8

Sia $a(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio in $F[x_1, \dots, x_n]$, allora $a(x_1, \dots, x_n)$ è detto **simmetrico** se $a(x_1, \dots, x_n) = a(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$
 $\forall \sigma \in S_n$.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Prop.3

Sia α algebrico di grado n e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ i coniugati,
sia $a = a(x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$
simmetrico negli $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, allora se $k > 0$, $a \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_k]$ e
se $k = 0$, $a \in \mathbb{Q}$.

Inoltre se α è un intero algebrico e
 $a(x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_n]$ si ha che
se $k > 0$, $a \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$ e se $k = 0$, $a \in \mathbb{Z}$.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Def.9

Dato $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado m , definiamo la funzione $I_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ come $I_a(x) := e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x)$.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Def.9

Dato $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado m , definiamo la funzione $I_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ come $I_a(x) := e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x)$.

Lemma 1

Dato $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, risulta che:



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Def.9

Dato $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado m , definiamo la funzione $I_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ come $I_a(x) := e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x)$.

Lemma 1

Dato $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, risulta che:

$$|I_a(x)| \leq |x|e^{|x|}A(|x|)$$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Def.9

Dato $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ di grado m , definiamo la funzione $I_a : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ come $I_a(x) := e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x)$.

Lemma 1

Dato $a(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, risulta che:

$$|I_a(x)| \leq |x|e^{|x|}A(|x|)$$

con $A(x) := |a_0| + |a_1|x + \dots + |a_m|x^m$.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Dimostrazione. Sviluppando in serie l'esponenziale e facendo uso dello sviluppo in serie di Maclaurin risulta che:

$$I_a(x) = e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x)$$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Dimostrazione. Sviluppando in serie l'esponenziale e facendo uso dello sviluppo in serie di Maclaurin risulta che:

$$\begin{aligned} I_a(x) &= e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x) = \\ &= e^x \sum_{j=0}^{\infty} a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{\infty} a^{(j)}(x) \end{aligned}$$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Dimostrazione. Sviluppando in serie l'esponenziale e facendo uso dello sviluppo in serie di Maclaurin risulta che:

$$\begin{aligned} I_a(x) &= e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x) = \\ &= e^x \sum_{j=0}^{\infty} a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{\infty} a^{(j)}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) a^{(j)}(0) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) a^{(j+n)}(0) \end{aligned}$$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Dimostrazione. Sviluppando in serie l'esponenziale e facendo uso dello sviluppo in serie di Maclaurin risulta che:

$$\begin{aligned} I_a(x) &= e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x) = \\ &= e^x \sum_{j=0}^{\infty} a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^{\infty} a^{(j)}(x) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right) a^{(j)}(0) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right) a^{(j+n)}(0) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right) \sum_{j=0}^{n-1} a^{(j)}(0). \end{aligned}$$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

$$I_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) \sum_{j=0}^{n-1} a^{(j)}(0).$$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

$$I_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) \sum_{j=0}^{n-1} a^{(j)}(0).$$

Sia ora $q = n - 1 - p$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

$$I_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) \sum_{j=0}^{n-1} a^{(j)}(0).$$

Sia ora $q = n - 1 - p \Rightarrow I_a(x) = x \sum_{j,q=0}^{\infty} \left(\frac{x^j x^q}{(j+q+1)!} \right) a^{(j)}(0)$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

$$I_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) \sum_{j=0}^{n-1} a^{(j)}(0).$$

Sia ora $q = n - 1 - p \Rightarrow I_a(x) = x \sum_{j,q=0}^{\infty} \left(\frac{x^j x^q}{(j+q+1)!} \right) a^{(j)}(0)$

$$\Rightarrow |I_a(x)| \leq |x| \sum_{j,q=0}^{\infty} \left(\frac{|x^j| |x^q|}{(j+q+1)!} \right) |a^{(j)}(0)| \leq$$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

$$I_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) \sum_{j=0}^{n-1} a^{(j)}(0).$$

$$\text{Sia ora } q = n - 1 - p \Rightarrow I_a(x) = x \sum_{j,q=0}^{\infty} \left(\frac{x^j x^q}{(j+q+1)!} \right) a^{(j)}(0)$$

$$\Rightarrow |I_a(x)| \leq |x| \sum_{j,q=0}^{\infty} \left(\frac{|x^j| |x^q|}{(j+q+1)!} \right) |a^{(j)}(0)| \leq$$

$$\leq |x| \sum_{j,q=0}^{\infty} \left(\frac{|x^q|}{q!} \right) \left(\frac{|x|^j}{j!} \right) A^{(j)}(0)$$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

$$I_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) \sum_{j=0}^{n-1} a^{(j)}(0).$$

$$\text{Sia ora } q = n - 1 - p \Rightarrow I_a(x) = x \sum_{j,q=0}^{\infty} \left(\frac{x^j x^q}{(j+q+1)!} \right) a^{(j)}(0)$$

$$\Rightarrow |I_a(x)| \leq |x| \sum_{j,q=0}^{\infty} \left(\frac{|x^j| |x^q|}{(j+q+1)!} \right) |a^{(j)}(0)| \leq$$

$$\leq |x| \sum_{j,q=0}^{\infty} \left(\frac{|x^q|}{q!} \right) \left(\frac{|x|^j}{j!} \right) A^{(j)}(0) = |x| e^{|x|} A(|x|).$$





Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Lemma 2

Per ogni polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ esiste C , costante positiva, dipendente solo da $a(x)$ tale che per ogni α radice di $a(x)$ e per ogni $n > 0$ si ha:



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Lemma 2

Per ogni polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ esiste C , costante positiva, dipendente solo da $a(x)$ tale che per ogni α radice di $a(x)$ e per ogni $n > 0$ si ha:

$$|I_b(\alpha)| \leq e^{|\alpha|} C^n$$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Lemma 2

Per ogni polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ esiste C , costante positiva, dipendente solo da $a(x)$ tale che per ogni α radice di $a(x)$ e per ogni $n > 0$ si ha:

$$|I_b(\alpha)| \leq e^{|\alpha|} C^n$$

con $b(x) = x^{n-1}a(x)^n$.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Lemma 2

Per ogni polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ esiste C , costante positiva, dipendente solo da $a(x)$ tale che per ogni α radice di $a(x)$ e per ogni $n > 0$ si ha:

$$|I_b(\alpha)| \leq e^{|\alpha|} C^n$$

con $b(x) = x^{n-1}a(x)^n$.

Dimostrazione.

Sia $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tutte le sue radici.



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Lemma 2

Per ogni polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ esiste C , costante positiva, dipendente solo da $a(x)$ tale che per ogni α radice di $a(x)$ e per ogni $n > 0$ si ha:

$$|I_b(\alpha)| \leq e^{|\alpha|} C^n$$

con $b(x) = x^{n-1}a(x)^n$.

Dimostrazione.

Sia $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tutte le sue radici.

Per il **lemma 1** si ha che: $|I_b(x)| \leq |x|e^{|\alpha|}B(|x|)$,



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Lemma 2

Per ogni polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ esiste C , costante positiva, dipendente solo da $a(x)$ tale che per ogni α radice di $a(x)$ e per ogni $n > 0$ si ha:

$$|I_b(\alpha)| \leq e^{|\alpha|} C^n$$

con $b(x) = x^{n-1}a(x)^n$.

Dimostrazione.

Sia $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tutte le sue radici.

Per il **lemma 1** si ha che: $|I_b(x)| \leq |x|e^{|\alpha|}B(|x|)$, ed essendo

$$B(|x|) \leq |x|^{n-1}|A(|x|)^n$$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Lemma 2

Per ogni polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ esiste C , costante positiva, dipendente solo da $a(x)$ tale che per ogni α radice di $a(x)$ e per ogni $n > 0$ si ha:

$$|I_b(\alpha)| \leq e^{|\alpha|} C^n$$

con $b(x) = x^{n-1}a(x)^n$.

Dimostrazione.

Sia $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tutte le sue radici.

Per il **lemma 1** si ha che: $|I_b(x)| \leq |x|e^{|\alpha|}B(|x|)$, ed essendo

$B(|x|) \leq |x|^{n-1}|A(|x|)^n$ si ha che: $|x|e^{|\alpha|}B(|x|) \leq |x|^n e^{|\alpha|}A(|x|)^n$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Lemma 2

Per ogni polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ esiste C , costante positiva, dipendente solo da $a(x)$ tale che per ogni α radice di $a(x)$ e per ogni $n > 0$ si ha:

$$|I_b(\alpha)| \leq e^{|\alpha|} C^n$$

con $b(x) = x^{n-1}a(x)^n$.

Dimostrazione.

Sia $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tutte le sue radici.

Per il **lemma 1** si ha che: $|I_b(x)| \leq |x|e^{|x|}B(|x|)$, ed essendo

$B(|x|) \leq |x|^{n-1}|A(|x|)^n$ si ha che: $|x|e^{|x|}B(|x|) \leq |x|^n e^{|x|}A(|x|)^n$

$\Rightarrow |I_b(\alpha)| \leq e^{|\alpha|} C^n$



Premesse

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Lemma 2

Per ogni polinomio $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ esiste C , costante positiva, dipendente solo da $a(x)$ tale che per ogni α radice di $a(x)$ e per ogni $n > 0$ si ha:

$$|I_b(\alpha)| \leq e^{|\alpha|} C^n$$

con $b(x) = x^{n-1}a(x)^n$.

Dimostrazione.

Sia $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tutte le sue radici.

Per il **lemma 1** si ha che: $|I_b(x)| \leq |x|e^{|x|}B(|x|)$, ed essendo

$B(|x|) \leq |x|^{n-1}|A(|x|)^n$ si ha che: $|x|e^{|x|}B(|x|) \leq |x|^n e^{|x|}A(|x|)^n$

$\Rightarrow |I_b(\alpha)| \leq e^{|\alpha|} C^n$ con $C = \max\{|\alpha_1|A(|\alpha_1|), \dots, |\alpha_m|A(|\alpha_m|)\}$





Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Teorema di Lindeman.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Teorema di Lindeman. π è *trascendente*.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Teorema di Lindeman. π è *trascendente*.

Dim. Supponiamo che π sia algebrico, allora per il **Teorema 1** anche $\alpha = i\pi$ è algebrico. Sia α di grado d e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ i coniugati.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Teorema di Lindeman. π è *trascendente*.

Dim. Supponiamo che π sia algebrico, allora per il **Teorema 1** anche $\alpha = i\pi$ è algebrico. Sia α di grado d e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ i coniugati. Da Eulero sappiamo che:

$$e^{i\pi} = -1$$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Teorema di Lindeman. π è *trascendente*.

Dim. Supponiamo che π sia algebrico, allora per il **Teorema 1** anche $\alpha = i\pi$ è algebrico. Sia α di grado d e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ i coniugati. Da Eulero sappiamo che:

$$e^{i\pi} = -1$$

Quindi Risulta che:

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_d}) = 0. \quad (1)$$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Teorema di Lindeman. π è trascendente.

Dim. Supponiamo che π sia algebrico, allora per il **Teorema 1** anche $\alpha = i\pi$ è algebrico. Sia α di grado d e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ i coniugati. Da Eulero sappiamo che:

$$e^{i\pi} = -1$$

Quindi Risulta che:

$$(1 + e^{\alpha_1})(1 + e^{\alpha_2}) \cdots (1 + e^{\alpha_d}) = 0. \quad (1)$$

Esplicitando il primo membro, otteniamo la somma di 2^d termini della forma e^{θ_j} con $j \in \{1, \dots, 2^d\}$ e con

$$\theta_j = \epsilon_{1j}\alpha_1 + \dots + \epsilon_{dj}\alpha_d,$$

$$\epsilon_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in \{1, \dots, d\} \text{ e } \forall j \in \{1, \dots, 2^d\}$$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Supponiamo sia n il numero di θ_j diversi da 0 e denotiamoli con β_1, \dots, β_n .



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Supponiamo sia n il numero di θ_j diversi da 0 e denotiamoli con β_1, \dots, β_n . Dimostriamo ora che i β_1, \dots, β_n sono radici di un polinomio $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ di grado n :



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Supponiamo sia n il numero di θ_j diversi da 0 e denotiamoli con β_1, \dots, β_n . Dimostriamo ora che i β_1, \dots, β_n sono radici di un polinomio $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ di grado n :

Dimostrazione.

Consideriamo il polinomio:

$$q(x) := \prod_{j=1}^{2^d} (x - (\epsilon_{1j}\alpha_1 + \dots + \epsilon_{dj}\alpha_d))$$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Supponiamo sia n il numero di θ_j diversi da 0 e denotiamoli con β_1, \dots, β_n . Dimostriamo ora che i β_1, \dots, β_n sono radici di un polinomio $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ di grado n :

Dimostrazione.

Consideriamo il polinomio:

$$q(x) := \prod_{j=1}^{2^d} (x - (\epsilon_{1j}\alpha_1 + \dots + \epsilon_{dj}\alpha_d))$$

$q(x)$ è simmetrico negli α_j , per la **Prop.3** si ha: $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Supponiamo sia n il numero di θ_j diversi da 0 e denotiamoli con β_1, \dots, β_n . Dimostriamo ora che i β_1, \dots, β_n sono radici di un polinomio $a(x) \in \mathbb{Z}[x]$ di grado n :

Dimostrazione.

Consideriamo il polinomio:

$$q(x) := \prod_{j=1}^{2^d} (x - (\epsilon_{1j}\alpha_1 + \dots + \epsilon_{dj}\alpha_d))$$

$q(x)$ è simmetrico negli α_j , per la **Prop.3** si ha: $q(x) \in \mathbb{Q}[x]$.
Le radici di $q(x)$ sono: β_1, \dots, β_n e 0 con molteplicità $a = 2^d - n$.
Dividendo $q(x)$ per x^a e moltiplicandolo per un certo intero c si ottiene un polinomio $a(x)$ a coefficienti interi le cui radici sono proprio β_1, \dots, β_n . □



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Indichiamo con N il coefficiente direttore di $a(x)$.
Esplicitando (1) otteniamo:

$$e^{\beta_1} + \dots + e^{\beta_n} = -(2^d - n). \quad (3)$$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Indichiamo con N il coefficiente direttore di $a(x)$.
Esplicitando (1) otteniamo:

$$e^{\beta_1} + \dots + e^{\beta_n} = -(2^d - n). \quad (3)$$

Ricordando la funzione $I_a(x) := e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x)$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Indichiamo con N il coefficiente direttore di $a(x)$.
Esplicitando (1) otteniamo:

$$e^{\beta_1} + \dots + e^{\beta_n} = -(2^d - n). \quad (3)$$

Ricordando la funzione $I_a(x) := e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x)$

definiamo: $K := I_b(\beta_1) + \dots + I_b(\beta_n)$

dove $b(x) := N^{np} x^{p-1} a(x)^p$, p primo.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Indichiamo con N il coefficiente direttore di $a(x)$.
Esplicitando (1) otteniamo:

$$e^{\beta_1} + \dots + e^{\beta_n} = -(2^d - n). \quad (3)$$

Ricordando la funzione $I_a(x) := e^x \sum_{j=0}^m a^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m a^{(j)}(x)$

definiamo: $K := I_b(\beta_1) + \dots + I_b(\beta_n)$

dove $b(x) := N^{np} x^{p-1} a(x)^p$, p primo.

Esplicitando ed utilizzando (3) otteniamo:

$$K = -(2^d - n) \sum_{j=0}^m b^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k),$$

con $m = (n + 1)p - 1$.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Essendo $a(x)$ un polinomio a coefficienti interi si ha che anche $b(x) \in \mathbb{Z}[x]$.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Essendo $a(x)$ un polinomio a coefficienti interi si ha che anche $b(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Questo ci garantisce che

$$b^{(j)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Essendo $a(x)$ un polinomio a coefficienti interi si ha che anche $b(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Questo ci garantisce che

$$b^{(j)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ora esplicitando $a(x)$ otteniamo:

$$b(x) = N^{np} x^{p-1} (x - \beta_1)^p \cdots (x - \beta_n)^p$$

da cui si evince che:

$\sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k)$ è una funzione simmetrica rispetto ai $N\beta_1, \dots, N\beta_n$.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Essendo $a(x)$ un polinomio a coefficienti interi si ha che anche $b(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Questo ci garantisce che

$$b^{(j)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ora esplicitando $a(x)$ otteniamo:

$$b(x) = N^{np} x^{p-1} (x - \beta_1)^p \cdots (x - \beta_n)^p$$

da cui si evince che:

$\sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k)$ è una funzione simmetrica rispetto ai $N\beta_1, \dots, N\beta_n$.

Questi ultimi, per la **Prop.2** sono interi algebrici coniugati



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Essendo $a(x)$ un polinomio a coefficienti interi si ha che anche $b(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Questo ci garantisce che

$$b^{(j)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ora esplicitando $a(x)$ otteniamo:

$$b(x) = N^{np} x^{p-1} (x - \beta_1)^p \cdots (x - \beta_n)^p$$

da cui si evince che:

$\sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k)$ è una funzione simmetrica rispetto ai $N\beta_1, \dots, N\beta_n$.

Questi ultimi, per la **Prop.2** sono interi algebrici coniugati

quindi per la **Prop.3** possiamo concludere che: $\sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k) \in \mathbb{Z}$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Essendo $a(x)$ un polinomio a coefficienti interi si ha che anche $b(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Questo ci garantisce che

$$b^{(j)}(0) \in \mathbb{Z} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Ora esplicitando $a(x)$ otteniamo:

$$b(x) = N^{nP} x^{p-1} (x - \beta_1)^p \cdots (x - \beta_n)^p$$

da cui si evince che:

$\sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k)$ è una funzione simmetrica rispetto ai $N\beta_1, \dots, N\beta_n$.

Questi ultimi, per la **Prop.2** sono interi algebrici coniugati

quindi per la **Prop.3** possiamo concludere che: $\sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k) \in \mathbb{Z}$

e di conseguenza risulta che: $K \in \mathbb{Z}$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Ricordando che $b(x) = N^{np} x^{p-1} (x - \beta_1)^p \cdots (x - \beta_n)^p$,

osserviamo che per $j < p - 1$, $b^{(j)}(0) = 0$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Ricordando che $b(x) = N^{np} x^{p-1} (x - \beta_1)^p \cdots (x - \beta_n)^p$,

osserviamo che per $j < p - 1$, $b^{(j)}(0) = 0$

e per $j \geq (p - 1)$ si ha che: $(p - 1)! |b^{(j)}(0)$.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Ricordando che $b(x) = N^{np} x^{p-1} (x - \beta_1)^p \cdots (x - \beta_n)^p$,

osserviamo che per $j < p - 1$, $b^{(j)}(0) = 0$

e per $j \geq (p - 1)$ si ha che: $(p - 1)! | b^{(j)}(0)$.

Inoltre per $j < p$, $\sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k) = 0$,

e per $j \geq p$, $p! | \sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k)$.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

Ricordando che $b(x) = N^{np} x^{p-1} (x - \beta_1)^p \cdots (x - \beta_n)^p$,

osserviamo che per $j < p - 1$, $b^{(j)}(0) = 0$

e per $j \geq (p - 1)$ si ha che: $(p - 1)! | b^{(j)}(0)$.

Inoltre per $j < p$, $\sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k) = 0$,

e per $j \geq p$, $p! | \sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k)$.

Ricordando che $K = -(2^d - n) \sum_{j=0}^m b^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^n b^{(j)}(\beta_k)$,

concludiamo che K è un intero divisibile per $(p - 1)!$ e quindi
che: $(p - 1)! \leq |K|$.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

D'altra parte $K = I_b(\beta_1) + \dots + I_b(\beta_n)$ quindi per il **Lemma 1**:

$$|K| \leq |I_b(\beta_1)| + \dots + |I_b(\beta_n)| \leq \sum_{k=1}^n |\beta_k| e^{|\beta_k|} B(|\beta_k|).$$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

D'altra parte $K = I_b(\beta_1) + \dots + I_b(\beta_n)$ quindi per il **Lemma 1**:

$$|K| \leq |I_b(\beta_1)| + \dots + |I_b(\beta_n)| \leq \sum_{k=1}^n |\beta_k| e^{|\beta_k|} B(|\beta_k|).$$

Ora applicando il **Lemma 2** arriviamo a concludere che:

$$(p-1)! \leq |K| \leq DC^p$$



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

D'altra parte $K = I_b(\beta_1) + \dots + I_b(\beta_n)$ quindi per il **Lemma 1**:

$$|K| \leq |I_b(\beta_1)| + \dots + |I_b(\beta_n)| \leq \sum_{k=1}^n |\beta_k| e^{|\beta_k|} B(|\beta_k|).$$

Ora applicando il **Lemma 2** arriviamo a concludere che:

$$(p-1)! \leq |K| \leq DC^p$$

dove $D = \sum_{k=0}^n e^{|\beta_k|}$ e $C = \max\{|\beta_1|A(|\beta_1|), \dots, |\beta_n|A(|\beta_n|)\}$.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

D'altra parte $K = I_b(\beta_1) + \dots + I_b(\beta_n)$ quindi per il **Lemma 1**:

$$|K| \leq |I_b(\beta_1)| + \dots + |I_b(\beta_n)| \leq \sum_{k=1}^n |\beta_k| e^{|\beta_k|} B(|\beta_k|).$$

Ora applicando il **Lemma 2** arriviamo a concludere che:

$$(p-1)! \leq |K| \leq DC^p$$

dove $D = \sum_{k=0}^n e^{|\beta_k|}$ e $C = \max\{|\beta_1|A(|\beta_1|), \dots, |\beta_n|A(|\beta_n|)\}$.

Questa relazione però non è vera per p sufficientemente grande, tale contraddizione mostra la veridicità della tesi.



Enunciato e dimostrazione

Il Teorema
di
Lindemann

Roberto
Pulina

D'altra parte $K = I_b(\beta_1) + \dots + I_b(\beta_n)$ quindi per il **Lemma 1**:

$$|K| \leq |I_b(\beta_1)| + \dots + |I_b(\beta_n)| \leq \sum_{k=1}^n |\beta_k| e^{|\beta_k|} B(|\beta_k|).$$

Ora applicando il **Lemma 2** arriviamo a concludere che:

$$(p-1)! \leq |K| \leq DC^p$$

dove $D = \sum_{k=0}^n e^{|\beta_k|}$ e $C = \max\{|\beta_1|A(|\beta_1|), \dots, |\beta_n|A(|\beta_n|)\}$.

Questa relazione però non è vera per p sufficientemente grande, tale contraddizione mostra la veridicità della tesi.

