Indice

Introduzione

Lo studio dei punti fissi per un'applicazione $f : X \to X$ (X, spazio topologico, varietà differenziabile, spazio metrico) è di importanza capitale in varie branche della matematica. Ricordiamo per esempio, il *Teorema del punto fisso di Brouwer* che afferma l'esistenza di un punto fisso per un'applicazione continua $f : X \to X$ nel caso in cui X è omeomorfo al disco n-dimensionale in $\mathbb{R}^n$ oppure il *Teorema delle contrazioni*, ben noto agli analisti, che assicura l'esistenza di un unico punto fisso quando $f : X \to X$ è una contrazione e X è uno spazio metrico completo.

In questa tesi viene sviluppata la teoria del punto fisso di Lefschetz, che consiste nello studio dei punti fissi di un'applicazione differenziabile $f : X \to X$, quando X è una varietà liscia compatta e orientata, mediante gli strumenti tipici della topologia differenziale quali la trasversalità e l'omotopia.
Un punto fisso $x \in X$ di Lefschetz per f è un punto fisso ($f(x) = x$) tale che $\mathrm{d}f_x - I$ sia un isomorfismo, dove $\mathrm{d}f_x : T_x(X) \to T_x(X)$ denota il differenziale di f in x e I è l'applicazione identità di $T_x(X)$. Ad un'applicazione $f : X \to X$ per la quale tutti i punti fissi sono Lefschetz (chiamata appunto *applicazione di Lefschetz*) si può associare un importante invariante omotopico: il *numero di Lefschetz*, denotato in questa tesi con $L(f)$. Questo è definito come il numero di intersezione della diagonale $\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$ e del grafico $\mathrm{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\}$. Nonostante la loro apparente peculiarità i punti fissi di Lefschetz e il corrispondente $L(f)$ permettono lo studio dei punti fissi (isolati) di un'applicazione $f : X \to X$ non necessariamente di Lefschetz. Infatti, come vedremo in questa tesi un qualunque punto fisso isolato $x \in X$ di f può essere "spezzato" in un numero finito di punti Lefschetz. Più precisamente (vedi Proposizione 28) esiste un intorno U di x (non contenente altri punti fissi per f al di fuori di x) e $f_1 : X \to X$ omotopa a f, coincidente con quest'ultima fuori da U e tale che i punti fissi di f_1 in U siano in numero finito e di Lefschetz. Conseguentemente, un'applicazione f che abbia solo punti fissi isolati è omotopa a un'applicazione Lefschetz

$f_1 : X \to X$. Inoltre il numero di Lefschetz di f_1 è uguale alla somma delle molteplicità dei punti fissi di f (vedi Proposizione 32).

Questa tesi è organizzata come segue. Nel primo capitolo vengono brevemente richiamati (senza dimostrazione) alcuni risultati e strumenti della topologia differenziale, quali la classificazione delle curve e delle superfici, il concetto di omotopia, trasversalità ed il celebre Teorema di Sard che ci assicura che l'insieme dei valori critici di una applicazione differenziabile tra due varietà lisce $f : X \to Y$ è un insieme di misura nulla in Y. Vengono inoltre introdotti i concetti di numero di intersezione e grado per applicazioni definite su varietà orientate.

Nel secondo capitolo, che rappresenta il cuore di questa tesi, viene sviluppata la teoria del punto fisso di Lefschetz, e vengono dimostrate in dettaglio le proprietà precedentemente illustrate riguardanti il numero di Lefschetz.

Nel terzo e ultimo capitolo, definiamo la caratteristica di Eulero-Poincaré $\chi(X)$ di una varietà X compatta e orientata attraverso il numero di (auto)intersezione della diagonale $\Delta(X) \subset X \times X$ e i suoi legami con il numero di Lefschetz. Più precisamente (vedi Proposizione 34) mostriamo che se $f : X \to X$ è omotopa all'identità allora $L(f) = \chi(X)$. Questo ci consentirà di calcolare la caratteristica di Eulero della sfera, delle superfici e dei gruppi di Lie (vedi Proposizioni 35, 39 e 40).

Capitolo 1

Preliminari

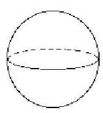
1.1 Classificazione delle varietà di dimensione uno e due

Ogni varietà unidimensionale X è diffeomorfa ad una delle quattro seguenti (vedi [2]):

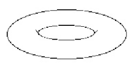
	$\partial X \neq \emptyset$	$\partial X = \emptyset$
compatta	$[0, 1]$	$\mathbb{S}^1$
non compatta	$[0, 1)$	$(0, 1)$

Ogni varietà bidimensionale compatta, orientabile e senza bordo è diffeomorfa ad una delle seguenti:

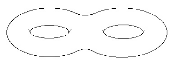
- Superficie di genere 0: la sfera



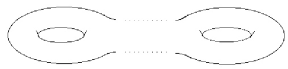
- Superficie di genere 1: il toro (o ciambella)



- Superficie di genere 2: la ciambella con 2 buchi



- Superficie di genere k: la ciambella con k buchi



Questa classificazione può essere ottenuta dal punto di vista differenziale utilizzando la teoria di Morse (vedi [3]) o dal punto di vista topologico usando le triangolazioni (vedi [4]). Osserviamo che un classico (ma di difficile reperibilità) risultato afferma che due superfici omeomorfe sono anche diffeomorfe.

1.2 Omotopia e Stabilità

Diremo che due applicazioni differenziabili $f_0 : X \to Y$ e $f : X \to Y$ tra varietà lisce X e Y, sono *omotope* se esiste un'applicazione liscia $F : X \times I \to Y$ ($I = [0,1]$) tale che $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$. F è detta *omotopia* tra f_0 e f_1.

Proposizione 1. *L'omotopia è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. È chiaramente riflessiva: qualsiasi sia $f : X \to Y$ basta considerare $F(x,t) = f(x)$. Anche la simmetria si prova semplicemente: se $F : X \times I \to Y$ è l'omotopia tra f_0 e f_1 allora $G(x,t) = F(x, 1-t)$ è l'omotopia tra f_1 e f_0.
Infine la transitività, sia $f \sim g$ tramite F e $g \sim h$ tramite G definisco:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & t \in [0, 1/2] \\ G(x, 2t-1) & t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Se derivo rispetto a t noto subito che in generale:

$$\frac{\partial F(x,1)}{\partial t} \neq \frac{\partial G(x,0)}{\partial t}$$

Prendo una funzione liscia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che vale 0 per $x \leq 1/3$ e 1 per $x \geq 2/3$. Modifico H nella maniera seguente:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, \rho(2t)) & t \in [0, 1/2] \\ G(x, \rho(2t-1)) & t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

In questo caso si ha:

$$\frac{\partial H(x,t)}{\partial t} = \begin{cases} 2\dfrac{\partial F(x,\rho(2t))}{\partial t}\dfrac{d\rho(2t)}{dt} & t \in [0,1/2] \\ \\ 2\dfrac{\partial G(x,\rho(2t-1))}{\partial t}\dfrac{d\rho(2t)}{dt} & t \in (1/2,1] \end{cases}$$

Essendo ρ costante per $x \leq 1/3$ e $x \geq 2/3$ per $t = 1/2$ si ha:

$$\frac{d\rho(1)}{dt} = \frac{d\rho(0)}{dt} = 0$$

Abbiamo così costruito una funzione liscia $H : X \times I \to Y$ con $H(x,0) = f(x)$ e $H(x,1) = h(x)$, quindi un omotopia tra f e h. □

Diremo che una varietà X è *connessa per archi* se per ogni coppia di punti x_0 e x_1 esiste una curva liscia $\gamma : I \to X$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Poiché utilizziamo varietà localmente diffeomorfe a $\mathbb{R}^k$ (con k dimensionde della varietà), possiamo provare che

Proposizione 2. *Se una varietà X è connessa, allora è connessa per archi.*

Dimostrazione. Iniziamo col provare che la relazione "x, $y \in X$ possono essere collegati con una curva liscia" è una relazione di equivalenza. La curva $\gamma(t) = x$ per ogni $t \in I$ è liscia quindi vale la proprietà riflessiva. Se $\gamma(t)$ è liscia e $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ allora $\gamma(1-t)$ è ancora liscia e vale la relazione è simmetrica. Infine, proviamo che è anche transitiva, siano $\sigma(t)$ e $\tau(t)$ lisce con $\sigma(0) = x$, $\sigma(1) = y$ e $\tau(0) = y$, $\tau(1) = z$ rispettivamente, allora

$$\gamma(t) = \begin{cases} \sigma(\rho(2t)) & t \in [0,1/2] \\ \tau(\rho(2t-1)) & (1/2,1] \end{cases} \tag{1.1}$$

(dove $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione liscia che vale 0 per $x \leq 1/3$ e 1 per $x \geq 2/3$), è liscia e $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = z$.

Abbiamo ora una relazione di equivalenza su X che quindi definisce una partizione, qualora si provi che una classe di equivalenza è aperta, dalla definizione di connessione segue l'esistenza di un'unica classe di equivalenza, quindi che X è connessa per archi.

Ricordiamo che un insieme X è aperto se per ogni $x \in X$ esiste un intorno U interamente contenuto in X. Se x e y appartengono alla stessa classe allora esiste una curva liscia $\gamma'(t)$ che li collega. Consideriamo ora un intorno $V \subset X$ di y, questo per la definizione di varietà è localmante diffeomorfo ad $\mathbb{R}^k$ che è connesso per archi, quindi $\forall z \in V$ esiste una curva liscia $\gamma''(t)$. La curva 1.1 è liscia e congiunge x e z. □

Sia $f : X \to Y$ con $\dim X \geq \dim Y$ diremo che f è una *subimmersione in* x se $\mathrm{d}f_x : T_x(X) \to T_{f(x)}Y$ è suriettiva, e semplicemente *subimmersione* se è una subimmersione per ogni punto. Inoltre diremo che $y \in Y$ è un *valore regolare* per f se $\forall x \in f^{-1}(x)$, $\mathrm{d}f_x$ è suriettiva, altrimenti sarà detto essere un *valore critico*. Diremo che x è un *punto regolare* se $\mathrm{d}f_x$ è suriettiva viceversa diremo che x è un *punto critico*.

Osservazione 1. *Dalla definizione segue immediatamente che i punti* $y \in Y - f(X)$ *sono valori regolari.*

La controimmagine di un valore regolare non è un insieme qualsiasi del dominio bensì

Teorema 3. *Se* y *è un valore regolare di* $f : X \to Y$*, allora la controimmagine* $f^{-1}(y)$ *è una sottovarietà di* X*. Inoltre*

$$\mathrm{dim} f^{-1}(y) = \mathrm{dim} X - \mathrm{dim} Y.$$

Nel caso particolare in cui domino e codominio abbiano la stessa dimensione e il dominio sia compatto abbiamo

Teorema 4. *Supponiamo che* y *sia un valore regolare per* $f : X \to Y$*, ove* X *è compatto e* $\mathrm{dim} X = \mathrm{dim} Y$*. Allora* $f^{-1}(y)$ *è un insieme finito di punti* $\{x_1, \ldots, x_n\}$*, inoltre esiste un intorno* U *di* y *in* Y *tale che* $f^{-1}(U)$ *sia un unione disgiunta* $V_1 \cup \cdots \cup V_n$*, dove* V_i *è un intorno di* x_i *e* f *porta ogni* V_i *diffeomorficamente in* U*.*

Dimostrazione. Poichè $\{y\}$ è un chiuso in Y la sua controimmagine $f^{-1}(y)$ è un chiuso in X e un chiuso in un compatto è compatto, allora $f^{-1}(y)$ è compatto. Dal teorema precedente sappiamo che

$$\mathrm{dim} f^{-1}(y) = \mathrm{dim} X - \mathrm{dim} Y$$

ma per ipotesi $\mathrm{dim} X = \mathrm{dim} Y$ quindi $\mathrm{dim} f^{-1}(y) = 0$. Rimane da provare che una varietà compatta di dimensione zero è costituita da un numero finito di punti. Una varietà di dimensione zero ha solo punti isolati, cioè è discreta, quindi basta utilizzare la definizione di compatto o sfruttare il fatto che uno spazio topologico discreto è compatto se e solo se è finito.
I punti $\{x_1, \ldots, x_n\}$ di $f^{-1}(y)$ sono isolati allora possiamo prendere n intorni W_i di x_i tra loro disgiunti. Sappiamo che $\mathrm{d}f_x$ è suriettiva per ogni $x \in f^{-1}(y)$, essendo $\mathrm{dim} T_x(X) = \mathrm{dim} T_y(Y)$ è anche iniettiva, allora per il teorema della funzione inversa f è un diffeomorfismo locale. Se poniamo $U = \cap_i W_i$ e definiamo $V_i = W_i \cap f^{-1}(U)$ per ogni i, abbiamo $x_i \in V_i$ e $f(V_i) = U$. $\square$

Definizione 1. *Si dice che una proprietà è stabile quando* $f_0 : X \to Y$ *la possiede e se* $f_t : X \to Y$ *è un omotopia di* f_0*, allora assegnato un* $\epsilon > 0$ *ogni* f_t *con* $t < \epsilon$ *possiede la proprietà in questione.*

Una classe importante di applicazioni stabili è costituita dalle subimmersioni

Proposizione 5. *La classe delle subimmersioni* $f : X \to Y$ *con* X *compatto è stabile.*

Dimostrazione. Se f_t è un omotopia della subimmersione f_0, possiamo trovare un $\epsilon > 0$ tale che $\mathrm{d}(f_t)_x$ sia suriettiva per ogni (x, t) in $X \times [0, \epsilon) \subset X \times I$. La compattezza di X implica che in ogni intorno di $X \times \{0\}$ sia contenuto $X \times [0, \epsilon]$, purchè ϵ sia sufficientemente piccolo. Quindi basta provare che ogni punto $(x_0, 0)$ possiede un intorno U in $X \times I$, tale che $\mathrm{d}(f_t)_x$ sia suriettiva per ogni $(x, t) \in U$. La precedente affermazione è locale perciò dobbiamo provare solo il caso in cui X e Y sono aperti di $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^l$ rispettivamente. La suriettività di $\mathrm{d}(f_0)_{x_0}$ implica che la sua jacobiana

$$\left(\frac{\partial (f_0)_i}{\partial x_j}(x_0) \right)$$

possieda un minore di ordine k non singolare. Rimane da considerare che ogni $\frac{\partial (f_t)_i}{\partial x_j}(x)$ è una funzione continua in $X \times I$, essendo anche il determinante una funzione continua, dalla definizione di quest'ultima segue che il minore di ordine k non singolare continuerà a rimanere tale per ogni (x, t) in un intorno di (x_0, t). $\square$

1.3 Trasversalità

Definizione 2. *Sia* $f : X \to Y$ *una applicazione liscia tra varietà e* $Z \subset Y$ *una sottovarietà di* Y*. Si dice che* f *è trasversale a* Z *se*

$$\mathrm{Imm}(\mathrm{d}f_x) + T_y(Z) = T_y(Y) \ , \ \forall x \in f^{-1}(Z).$$

Scriveremo $f \pitchfork Z$ *per indicare che* f *è trasversale a* Z*.*

L'importanza di questa definizione è espressa dal seguente teorema.

Teorema 6. *Se l'applicazione liscia* $f : X \to Y$ *è trasversale ad una sottovarietà* $Z \subseteq Y$*, allora la controimmagine* $f^{-1}(Z)$ *è una sottovarietà di* X*. Inoltre sussiste la seguente relazioni tra le codimensioni:*

$$\mathrm{codim}_X(f^{-1}(Z)) = \mathrm{codim}_Y(Z)$$

Quando $Z = \{y\}$ il suo spazio tangente ha dimensione zero, quindi la condizione di trasversalità $f \pitchfork \{y\}$ si ha per

$$\mathrm{d}f_x(T_x(X)) = T_y(Y) \quad \text{per ogni } x \in f^{-1}(y)$$

cioè quando $\mathrm{d}f_x$ è suriettiva per ogni $x \in f^{-1}(y)$. Questa è proprio la definizione di valore regolare per f che abbiamo visto nella sezione precedente. Quindi la trasversalità è una generalizzazione della nozione di regolarità.

È interessante il caso della trasversalità dell'inclusione $i : X \to Y$ (ovviamente $X \subset Y$) con una sottovarietà $Z \subset Y$. In questo caso dire che un punto $x \in X$ appartiene a $i^{-1}(Z)$ equivale a dire $x \in X \cap Z$. Poichè il differenziale dell'inclusione è ancora un inclusione, ma tra gli spazi tangenti, la condizione di trasversalità $i \pitchfork Z$ si esprimerà

$$T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y) \;\; \forall x \in X \cap Z.$$

In questo caso diremo che che le due sottovarietà sono trasversali e scriveremo $X \pitchfork Z$.

Proposizione 7. *Ogni sottovarietà di X può essere localmente "descritta" da funzioni indipendenti.*

Chiariamo il significato, sia $Z \subset X$ e z un suo punto, la proposizione precedente afferma che possiamo vedere Z in un intorno di Z come l'insieme degli zeri di un sistema di funzioni lisce e indipendenti $g_1, \ldots, g_l$ dove $g_i : X \to \mathbb{R}$ ed l è $\mathrm{codim}_X Z$. Diremo che le l funzioni $g_1, \ldots, g_l$ sono indipendenti in x se e solo se $\mathrm{d}(g_1)_x, \ldots, \mathrm{d}(g_l)_x$, dove $\mathrm{d}(g_i)_x : T_x(X) \to \mathbb{R}$, sono linearmente indipendenti.

Siano date $f : X \to Y$ e $Z \subset Y$ con $l = \mathrm{codim}_Y Z$ localmente posso "descrivere" Z con $g_1, \ldots, g_l$, $g_i : Y \to \mathbb{R}$, funzioni indipendenti. Possiamo far vedere che $g \circ f$ è una subimmersione nel punto $x \in f^{-1}(Z)$ se e solo se $\mathrm{d}f_x(T_x(X)) + T_y(Z) = T_y(Y)$. Quest'ultima è la condizione di trasversalità $f \pitchfork Z$.

Con quanto appena osservato possiamo far vedere che

Teorema 8. *L'intersezione di due sottovarietà trasversali X, Z di Y è ancora una sottovarietà. Inoltre:*

$$\mathrm{codim}_Y(X \cap Z) = \mathrm{codim}_Y(X) + \mathrm{codim}_Y(Z)$$

Dimostrazione. In un intorno di $x \in X \cap Z$, la sottovarietà $X \subset Y$ è descritta da $k = \mathrm{codim}_Y X$ funzioni indipendenti, mentre $Z \subset Y$ è descritta da $l = \mathrm{codim}_Y Z$ funzioni indipendenti. Allora $X \cap Z$ localmente è l'insieme degli zeri delle $k + l$ funzioni di cui sopra; richiedere che queste siano linearmente indipendenti corrisponde con la condizione di trasversalità. $\square$

Osservazione 2. *Due sottovarietà X, Z di Y con intersezione vuota sono trasversali.*

Teorema 9. *La trasversalità è una proprietà generica.*

Cosa vuol dire il teorema precedente? Se io ho una qualsiasi applicazione liscia $f : X \to Y$, su cui non faccio alcuna ipotesi circa il suo comportamento rispetto ad una sottovarietà data $Z \subset Y$, posso "deformarla" in modo liscio tale da renderla trasversale a Z.

Possiamo provare la classe delle applicazioni $f : X \to Y$ con X compatto, trasversali ad una data sottovarietà chiusa $Z \subset Y$ è stabile. Per fare questo utilizziamo la seguente teoria ed il fatto che la classe delle subimmersioni $f : X \to Y$ con X compatto, è stabile.

Teorema 10 (Teorema di estensione)**.** *Se, per $f : X \to Y$, l'applicazione $\partial f : \partial X \to Y$ è trasversale a Z, allora esiste una applicazione $g : X \to Y$ omotopa ad f tale che $\partial f = \partial g$ e $g \pitchfork Z$.*

1.4 Teorema di Sard

Diremo che un insieme A ha misura nulla o zero se, fissato un $\epsilon > 0$, esiste una famiglia numerabile di insiemi $\{A_1, A_2, \ldots\}$ di parallelepipedi in $\mathbb{R}^k$, tali che A sia contenuto nell'unione degli A_i e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{volume}(A_i) < \epsilon.$$

Teorema 11 (Teorema di Sard)**.** *L'insieme dei valori critici di una applicazione liscia tra varietà $f : X \to Y$ ha misura nulla.*

1.5 Varietà orientabili

Iniziamo col definire l'orientazione su una base ordinata di V, spazio vettoriale di dimensione finita.

Sappiamo che date due basi (che supporremo ordinate), β e β', per V esiste un unico isomorfismo che porta β in β', chiamiamolo A. Adesso se $\det(A) > 0$ diremo che β e β' hanno la stessa orientazione, se invece $\det(A) < 0$ diremo che hanno orientazione opposta. Grazie al teorema di Binet ($\det(AB) = \det(A)\det(B)$) con quanto appena visto possiamo definire una relazione di equivalenza tra le basi ordinate: $\beta \sim \beta'$ se hanno la stessa orientazione. Esistono esattamente due classi di equivalenza.

Osservazione 3. *È importante l'ordine degli elementi della base infatti sia* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^n$ *così ordinata, è immediato notare (basta calcolare il determinante della matrice del cambiamento di base) che questa ha orientazione opposta rispetto alla base ordinata* $(e_2, e_1, \ldots, e_n)$.

Diremo che la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è orientata positivamente. Quando una base β risulterà orientata come la base canonica scriveremo $\text{segn}(\beta) = +1$, -1 altrimenti.

Se $V = V_1 \oplus V_2$ allora l'orientazione di due di questi spazi vettoriali induce una orientazione sul terzo. Prendiamo β_1 e β_2 basi di V_1 e V_2 rispettivamente e imponiamo $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ come base ordinata per V. Chiediamo che $\text{segn}(\beta) = \text{segn}(\beta_1) \cdot \text{segn}(\beta_2)$. Essendo i due spazi V_1 e V_2 orientati questa procedura assegna un unico segno di orientazione per V. Per quanto osservato prima l'orientazione di V è indipedente dalla scelta delle basi β_1 e β_2. Bisogna fare attenzione all'ordine con cui si fa la somma diretta infatti l'orientazione di (β_1, β_2) potrebbe essere diversa da quella di (β_2, β_1).

Una *orientazione* su X, varietà differenziabile (con bordo), è una scelta liscia di orientazione per ogni spazio tangente $T_x(X)$. Per condizione liscia si intende che: intorno ad ogni punto $x \in X$ esiste una parametrizzazione locale $h : U \to X$ tale che $\mathrm{d}h_u : \mathbb{R}^k \to T_{h(u)}(X)$ preserva l'orientazione in ogni punto del dominio $U \subset \mathbb{R}^k$ ($U \subset \mathbb{H}^k$).

Definizione 3. *Diremo che* X *è una varietà orientabile se possiede una orientazione.*

Non tutte le varietà possiedono un orientazione, l'esempio classico è il nastro di Möbius, proveremo che non è orientabile dopo aver introdotto il numero di intersezione.

Proposizione 12. *Se* X *è connessa e orientabile , allora ammette esattamente due orientazioni.*

Siano X e Y orientate e almeno una senza bordo (il prodotto di due varietà con bordo in generale non è una varietà), allora possiamo dotare $X \times Y$ di un *orientazione prodotto* nel modo seguente. In ogni punto $(x, y) \in X \times Y$,

$$T_{(x,y)}(X \times Y) = T_x(X) \times T_y(Y) \tag{1.2}$$

Siano $\alpha = \{v_1, \ldots, v_k\}$ e $\beta = \{w_1, \ldots, w_l\}$ basi ordinate per $T_x(X)$ e $T_y(Y)$, rispettivamente, chiamiamo $(\alpha \times 0, 0 \times \beta)$ la base ordinata per $T_x(X) \times T_y(Y)$. Definiamo l'orientazione su $T_x(X) \times T_y(Y)$ in accordo con

$$\text{segn}(\alpha) \cdot \text{segn}(\beta).$$

Osservazione 4. *Se X è una varietà orientabile, senza bordo e β è una base ordinata per $T_x(X)$ allora è una base anche per $T_y(X)$. Allora $\beta' = (\beta \times 0, 0 \times \beta)$ è una base ordinata per $T_x(X) \times T_y(X)$, la cui orientazione è data da*

$$\text{segn}(\beta') = \text{segn}(\beta) \cdot \text{segn}(\beta) = (\text{segn}(\beta))^2 = 1.$$

Quindi l'orientazione prodotto su $X \times X$ non dipende da quella data su X.

Sia V uno spazio vettoriale e $\beta = \{v_1, \ldots, v_k\}$ una sua base ordinata, A è l'unico isomorfismo tra la base canonica di V e β, allora l'orientazione di β è data dal segno del determinante di A. Le colonne di A sono proprio i vettori $\{v_1, \ldots, v_k\}$.
L'isomorfismo A' tra la base canonica e la base β' ottenuta moltiplicando il vettore v_i per lo scalare $c \neq 0$, è proprio la matrice A con la colonna i moltiplicata per c. Poichè si ha $\det A' = c \det A$, allora β' ha la stessa orientazione di β se $c > 0$, opposta se $c < 0$.
L'isomorfismo A' tra la base canonica e la base β' ottenuta scambiando tra loro i vettori v_i e v_j, è proprio la matrice A con le colonne i e j scambiate tra loro. Poichè si ha $\det A' = -\det A$, allora β' ha orientazione opposta rispetto a β.
L'isomorfismo A' tra la base canonica e la base β' ottenuta sottraendo dal vettore v_i una combinazione lineare degli altri $\sum_{h \neq i} a_h v_h$, è proprio la matrice A in cui alla colonna c_i è sottratta la combinazione lineare delle altre $\sum_{h \neq i} a_h c_h$. Poichè $\det A' = \det A$, allora β' ha la stessa orientazione di β.
Abbiamo quindi provato la seguente proposizione.

Proposizione 13. *Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_k\}$ è una base ordinata per lo spazio vettoriale V. Allora*

1. *sostituendo a v_i con cv_i, dove $c \neq 0$ è uno scalare, otteniamo una base ordinata con la stessa orientazione di β se $c > 0$ con quella opposta se $c < 0$.*

2. *scambiando tra loro v_i e v_j otteniamo una base ordinata con orientazione opposta rispetto a β*

3. *sottraendo da v_i una combinazione lineare degli altri otteniamo una base ordinata con la stessa orientazione di β.*

1.6 Numero di intersezione

Siano X, Y e Z varietà senza bordo orientate, X compatto, Z chiuso in Y, se $\dim X + \dim Z = \dim Y$ diremo che X e Z hanno *dimensione complementare*

in Y. Se $f : X \to Y$ è trasversale a Z, allora $f^{-1}(Z)$ è un chiuso in X compatto, quindi è compatto, inoltre per il Teorema 6 è una varietà e la sua dimensione è zero. Una varietà di dimensione zero compatta è costituita da un numero finito di punti (vedi Teorema 4).
Per $f(x) = z \in Z$, allora la trasversalità insieme alla complementarietà dimensionale di X e Z da:

$$\mathrm{d}f_x(T_x(X)) \oplus T_z(Z) = T_z(Y)$$

Questo implica che $\mathrm{d}f_x$ ristretto alla sua immagine debba essere un isomorfismo, così l'orientazione su X induce un orientazione su $\mathrm{d}f_x(T_x(X))$. Allora il *numero di orientazione* di x è $+1$ se l'orientazione di $\mathrm{d}f_x(T_x(X)) \oplus T_z(Z)$ coincide con quella data su $T_z(Y)$, -1 altrimenti.

Definizione 4. *Il numero di intersezione $I(f, Z)$ è la somma dei numeri di orientazione.*

Come si orienta il bordo di una varietà? Sia β una base ordinata per lo spazio tangente alla varietà senza bordo $X - \partial X$, orienteremo $T_x(\partial X)$ imponendo che il segno di β coincida col segno della base $\{n_x, \beta\}$, ove n_x è il versore normale uscente dalla varietà in x.

Per X varietà compatta e con bordo di dimensione uno, il bordo ∂X ha dimensione zero (per il Teorema 4 ha solo un numero finito di punti) l'orientazione di $T_x(\partial X)$ è data dal segno della base $\{n_x\}$. Per la classificazione delle varietà unidimensionali (vedi la Sezione 1.1) sappiamo che ogni varietà compatta e con bordo è diffeomorfa all'intervallo chiuso $[0, 1]$. Poiché in $x = 1$ abbiamo $n_1 = +1$ e in $x = 0$ si ha $n_0 = -1$, allora

Osservazione 5. *La somma dei numeri di orientazione dei punti del bordo di una qualsiasi varietà con bordo, compatta e di dimensione uno è zero.*

Proposizione 14. *Se $X = \partial W$ e $f : X \to Y$ può essere estesa a W (compatto), allora $I(f, Z) = 0$.*

Dimostrazione. Sia X il bordo di una varietà compatta W e sia possibile estendere f ad $F : W \to Y$. Per l'Extension Theorem, possiamo porre $F \pitchfork Z$. Allora $F^{-1}(Z)$ è una varietà compatta unidimensionale il cui bordo è $\partial F^{-1}(Z) = f^{-1}(Z)$. Non resta che utilizzare l'osservazione precedente. $\square$

Proposizione 15. *Mappe omotope hanno sempre lo stesso numero di intersezione (che quindi è un invariante omotopico).*

Dimostrazione. Supponiamo che f_0 e f_1 siano omotope ed entrambe trasversali a Z. Sia $F : I \times X \to Y$ una omotopia tra le due funzioni, sappiamo che $I(\partial F, Z) = 0$. Ora $\partial(I \times X) = X_1 - X_0$ e attraverso l'identificazione di X_0 e X_1 con X, ∂F equivale a f_0 in X_0 e f_1 in X_1. Segue che:

$$\partial F^{-1}(Z) = \partial f_1^{-1}(Z) - f_0^{-1}(Z)$$

così

$$I(\partial F, Z) = I(f_1, Z) - I(f_0, Z).$$

□

Nel caso particolare in cui Z sia costituita da un unico punto $\{y\}$, abbiamo il seguente

Teorema 16. *Se Y è connessa e ha la stessa dimensione di X, il* grado *di una arbitraria applicazione liscia $f : X \to Y$ è il numero di intersezione di f con un qualsiasi punto $y \in Y$:*

$$\deg(f) = I(f, \{y\}).$$

Dimostrazione. Preso un qualsiasi $y \in Y$, qualora sia necessario, modifichiamo f attraverso un omotopia che la renda trasversale a $\{y\}$. Sappiamo per il Teorema 4 che si può trovare un intorno U di y tale che la sua controimmagine$f^{-1}(U)$ sia un unione disgiunta $V_1 \cup \ldots \cup V_n$, con V_i aperto in X diffeomorfo a U tramite f. Quindi $\forall z \in U$ $I(f, \{z\}) = n$. La funzione definita su Y che $y \mapsto I(f, \{y\})$ è localmente costante, essendo Y connessa lo è globalmente. □

Essendo definito dal numero di intersezione che sappiamo essere un invariante omotopico, abbiamo che

Corollario 17. *Il grado è un invariante omotopico.*

Per calcolare il grado di una mappa $f : X \to Y$ basta fissare un valore regolare y quindi considerare l'insieme finito $\{x : f(x) = y\}$ e ad ogni punto x associare un numero di orientazione ± 1 a seconda che l'isomorfismo $\mathrm{d}f_x : T_x(X) \to T_y(Y)$ conservi o meno l'orientazione.

Dalla definizione di grado appena data e dalla Proposizione 14 segue immediatamente la

Proposizione 18. *Sia $f : X \to Y$ liscia tra varietà compatte, orientate, della stessa dimensione e $X = \partial W$ (W compatto). Se f può essere estesa a tutto W, allora* $\deg(f) = 0$.

Quando anche X è una sottovarietà di Y possiamo definire il suo numero di intersezione con Z come $I(X, Z) = I(i, Z)$ con $i : X \to Y$.

Teorema 19. *Se X e Z sono entrambe sottovarietà compatte di Y, allora*

$$I(X, Z) = (-1)^{(\text{dim}X)(\text{dim}Z)} I(Z, X)$$

In particolare se $\text{dim}Y = 2\text{dim}X$ possiamo definire il *numero di autointersezione* $I(X, X)$. Ora se X ha dimensione dispari, allora $I(X, X) = -I(X, X)$ così $I(X, X) = 0$.

Capitolo 2

Teoria del punto fisso di Lefschetz

2.1 Punti fissi e applicazioni Lefschetz

Sia $f : X \to X$ una mappa con punto fisso $x \in X$; cioè tale che $f(x) = x$, se $+1$ *non* è un autovalore per $\mathrm{d}f_x : T_x(X) \to T_x(X)$, allora x è detto *punto fisso di Lefschetz* per f. Inoltre f è detta essere una *applicazione di Lefschetz* se tutti i suoi punti fissi sono Lefschetz.
Qual'è il significato della condizione Lefschetz? Chiedere che un punto sia Lefschetz equivale al richiedere che un punto fisso per f sia isolato e il differenziale $\mathrm{d}f_x$ ammetta un unico punto fisso (il vettore nullo).

Introduciamo ora due varietà entrambe diffeomorfe a X:

La *diagonale* di $X \times X$ è

$$\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}. \tag{2.1}$$

Un diffeomorfismo tra $\Delta(X)$ e X è dato da $(x, x) \mapsto x$.

Il *grafico* di una applicazione liscia $f : X \to Y$ è il sottoinsieme di $X \times Y$ definito da

$$\mathrm{graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \tag{2.2}$$

Un diffeomorfismo tra $\mathrm{graf}(f)$ e X è dato da $(x, f(x)) \mapsto x$.

Sia $f : X \to X$ è immediato osservare che l'insieme dei punti fissi per questa applicazione è proprio $\mathrm{graf}(f) \cap \Delta(X)$.

Proposizione 20. *Sia $f : X \to X$ liscia con X compatto allora f è Lefschetz se e solo se* $\operatorname{graf}(f) \overline{\pitchfork} \Delta(X)$.

Dimostrazione. Sappiamo che $\operatorname{graf}(f) \overline{\pitchfork} \Delta(X)$ se

$$\operatorname{graf}(\mathrm{d}(f_x)) + \Delta(T_x(X)) = T_x(X) \times T_x(X)$$

per ogni $(x, x) \in \operatorname{graf}(f) \cap \Delta(X)$. Ora $\operatorname{graf}(\mathrm{d}(f_x))$ e $\Delta(T_x(X))$ sono spazi vettoriali di dimensione complementare in $T_x(X) \times T_x(X)$, quindi generano quest'ultimo se e solo se $\operatorname{graf}(\mathrm{d}(f_x)) \cap \Delta(T_x(X)) = \{0\}$. L'affermazione precedente vuol dire che per ogni x fisso, $+1$ non è autovalore per $\mathrm{d}f_x$. Cioè ogni punto fisso è Lefschetz. $\square$

Corollario 21. *Se X è compatto ed f è Lefschetz, allora f ammette solo un numero finito di punti fissi.*

Dimostrazione. Grazie alla proposizione precedente sappiamo che $\operatorname{graf}(f) \overline{\pitchfork} \Delta(X)$, inoltre dal Teorema 8 ricaviamo che $\operatorname{graf}(f) \cap \Delta(X)$ è una varietà di dimensione zero. L'intersezione di spazi compatti è ancora compatta e l'insieme dei punti fissi per f è $\pi(\operatorname{graf}(f) \cap \Delta(X))$, dove $\pi : X \times X$ è la proiezione sul primo fattore. Quindi l'insieme dei punti fissi per f è una varietà compatta di dimensione zero, e quindi costituita da un numero finito di punti (vedi Teorema 4). $\square$

Poichè le applicazioni Lefschetz sono definite da una condizione di trasversalità (vedi Proposizione 20) hanno con questa delle proprietà comuni come la stabilità e l'essere generiche (per una dimostrazione rigorosa vedi [1]).

Proposizione 22. *La classe delle mappe Lefschetz $f : X \to X$, con X compatto, è stabile.*

Proposizione 23. *Ogni applicazione $f : X \to X$ è omotopa ad una mappa Lefschetz.*

2.2 Numero di Lefschetz

In questo paragrafo X denoterà una varietà orientata e compatta. Sia $f : X \to X$ il *numero di Lefschetz (globale)* è:

$$L(f) = I(\Delta(X), \operatorname{graph}(f))$$

dove I è il numero di intersezione introdotto nella sezione 1.6.

Teorema 24 (Teorema del punto fisso di Lefschetz). *Sia $f : X \to X$ una mappa liscia se $L(f) \neq 0$, allora f ammette punti fissi.*

Dimostrazione. Se f non ha punti fissi, allora $\Delta(X) \cap \mathrm{graf}(f) = \emptyset$, quindi sono trasversali. Segue che:

$$L(f) = I(\Delta(X), \mathrm{graf}(f)) = 0.$$

□

Essendo definito dal numero di intersezione, che è un invariante omotopico (vedi Proposizione 15), chiaramente

Proposizione 25. *$L(f)$ è un invariante omotopico.*

Se x è un punto fisso di Lefschetz, denoteremo il numero di orientazione ± 1 di (x, x) in $\Delta(X) \cap \mathrm{graf}(f)$ con $L_x(f)$, che chiameremo *numero Lefschetz locale.*
Se $f : X \to X$ è una applicazione di Lefschetz allora per la Definizione 4 e la definizione di $L(f)$ si avrà

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} L_x(f)$$

Proposizione 26. *Un punto fisso x è Lefschetz per $f : X \to X$ se e solo se $\mathrm{d}f_x - I$, con I identità su $T_x(X)$, è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Se $+1$ non è autovalore per $\mathrm{d}f_x$ allora $\forall v \in T_x(X)$ diverso dal vettore nullo si ha $\mathrm{d}f_x(v) \neq v$ che equivale a $(\mathrm{d}f_x - I)(v) \neq 0$, quest'ultima è la condizione per $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}f_x - I) = 0$. Per il teorema della dimensione $\mathrm{d}f_x - I$ è un isomorfismo.
Posto $\mathrm{d}f_x - I$ isomorfismo allora il suo $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}f_x - I) = 0$ quindi $\forall v \in T_x(X)$ diverso dal vettore nullo si ha $(\mathrm{d}f_x - I)(v) \neq 0$ che equivale a $\mathrm{d}f_x(v) \neq v$, allora $+1$ non è autovalore per $\mathrm{d}f_x$. □

La proposizione precedente ci offre un semplice criterio per stabilire se un punto fisso x è Lefschetz: basta verificare che $\det(\mathrm{d}f_x - I) \neq 0$. Lo stesso determinante ci offre anche un'altra informazione utile.

Proposizione 27. *Il numero Lefschetz locale $L_x(f)$ in un punto fisso di Lefschetz è $+1$ se l'isomorfismo $\mathrm{d}f_x - I$ conserva l'orientazione su $T_x(X)$, -1 viceversa. Allora il segno di $L_x(f)$ equivale al segno del determinante di $\mathrm{d}f_x - I$.*

Dimostrazione. Indichiamo con $A = \mathrm{d}f_x$ e prendiamo $\beta = \{v_1 \dots, v_k\}$ come base ordinata per $T_x(X)$. Allora

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k)\} \text{ e } \{(v_1, Av_1), \dots, (v_k, Av_k)\}$$

sono basi ordinate di $T_{(x,x)}(\Delta(X))$ e $T_{(x,x)}(\mathrm{graf}(f))$ rispettivamente. Non abbiamo fatto ipotesi circa l'orientazione di β perchè grazie all'osservazione 4 sappiamo che $\{\beta, \beta\}$ è una base ordinata e orientata positivamente per $T_x(X) \times T_x(X)$. Per definizione $L_x(f)$ è il segno della base

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k), (v_1, Av_1), \dots, (v_k, Av_k)\} \tag{2.3}$$

di $T_x(X) \times T_x(X)$. Adesso grazie alla Proposizione 13 sappiamo che sottrarre da un vettore di una base ordinata una combinazione lineare degli altri non cambia l'orientazione. Allora sottraiamo (v_i, v_i) da (v_i, Av_i)

$$\{(v_1, v_1), \dots, (v_k, v_k), (0, (A - I)v_1), \dots, (0, (A - I)v_k)\}.$$

Poichè $A - I$ è un isomorfismo, $(A - I)v_1, \dots, (A - I)v_k$ sono linearmente indipendenti quindi posso esprimere $(0, v_i)$ come combinazione lineare dei vettori $(0, Av_j)$. Per quanto osservato appena sopra la seguente base conserva l'orientazione della base (2.3)

$$\{(v_1, 0), \dots, (v_k, 0), (0, (A - I)v_1), \dots, (0, (A - I)v_k)\}$$

Quest'ultima può essere scritta

$$\{\beta \times 0, 0 \times (A - I)\beta\}$$

e per la definizione di orientazione del prodotto (vedi sezione 1.5) il segno della base (2.3) è uguale a

$$\mathrm{segn}\beta \cdot \mathrm{segn}(A - I)\beta = \mathrm{segn}(\det(A - I)).$$

□

Nel caso X abbia dimensione 2 possiamo studiare il comportamento locale di una mappa Lefschetz nei suoi punti fissi. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(0) = 0$, poniamo $A = \mathrm{d}f_0$ quindi

$$f(x) = Ax + \epsilon(x)$$

con $\epsilon(x) \to 0$ rapidamente per $x \to 0$. Supponiamo che A abbia due autovalori reali distinti entrambi positivi (ovviamente $\neq +1$), in un opportuno sistema di riferimento possiamo scrivere

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Allora per la Proposizione 27 si ha $L_0(f) = \text{segn}(\alpha_1 - 1) \cdot (\alpha_2 - 1)$, si presentano quindi i seguenti tre casi:

1. Se $\alpha_1 > 1$ e $\alpha_2 > 1$ allora $L_0(f) = +1$, localmente f si espande dall'origine che sarà detta essere una *sorgente*. In questo caso infatti $\|x\| < \|Ax\| = \alpha_1\alpha_2\|x\|$ per ogni x.

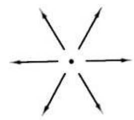


Figura 2.1: Sorgente

2. Se $\alpha_1 < 1$ e $\alpha_2 < 1$ ancora $L_0(f) = +1$, localmente f si contrae verso l'origine che sarà detta essere un *pozzo*. In quest'altro caso invece $\|x\| > \|Ax\| = \alpha_1\alpha_2\|x\|$ per ogni x.

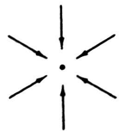


Figura 2.2: Pozzo

3. Infine se $\alpha_1 < 1 < \alpha_2$ si ha $L_0(f) = -1$, in quest'ultimo si ha un *punto di sella* nell'origine.

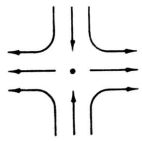


Figura 2.3: Sella

Osservazione 6. *La somma dei numeri Lefschetz locali (è il numero Lefschetz globale) non è un invariante omotopico senza l'ipotesi di compattezza. Consideriamo $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ Lefschetz con solo un numero finito di punti, e sia x_0 uno di questi allora*

$$F : \mathbb{R}^k \times I \to \mathbb{R}^k, \ (x, t) \mapsto tf(x) + (1 - t)x_0$$

è una omotopia tra f e la funzione costante $c_{x_0} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $x \mapsto x_0$, ovviamente x_0 è l'unico punto fisso per c_{x_0}. In generale $L(c_{x_0}) = L_{x_0}(c_{x_0}) \neq L(f)$. Ad esempio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ha solo 2 punti fissi 0 e 1 per questi $\mathrm{d}f_0 - id_{\mathbb{R}} = -1$ e $\mathrm{d}f_1 - id_{\mathbb{R}} = 1$ rispettivamente. Entrambi i punti fissi sono Lefschetz quindi posso calcolare il numero Lefschetz globale:

$$L(f) = L_0(f) + L_1(f) = 0.$$

Possiamo inoltre costruire un omotopia tra f e la funzione nulla, $F : \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto tx^2$. Detta c_0 la costante questa ha un solo punto fisso Lefschetz. Si ha quindi:

$$L(c_0) = L_0(c_0) = -1 \neq 0 = L(f).$$

2.3 Splitting proposition

Abbiamo già osservato che un punto fisso di f è Lefschetz se è isolato e il differenziale $\mathrm{d}f_x$ ammette un unico punto fisso. Possiamo chiederci se un punto fisso isolato x per f possa essere "trasformato" in un punto Lefschetz operando in maniera liscia su f. Vedremo che in un intorno di x esiste un'omotopia di f che "spezza" x in punti fissi di Lefschetz.

Proposizione 28 (Splitting Proposition)**.** *Sia U un intorno del punto fisso x che non contenga altri punti fissi per f. Allora esiste una omotopia f_t di f tale che f_1 ha solo punti fissi Lefschetz in U, e ogni f_t coincide con f fuori da un compatto contenuto in U.*

Dimostrazione. Iniziamo col supporre che U sia un aperto di $\mathbb{R}^k$ e che $f : U \to \mathbb{R}^k$ lasci fisso solo lo 0. Sia $\rho : \mathbb{R}^k \to [0, 1]$ una funzione liscia che vale 1 in un intorno V dell'origine e 0 fuori da un compatto $K \subset U$. Vogliamo mostrare che esistono dei punti $a \in \mathbb{R}^k$, con $\|a\|$ arbitrariamente piccolo, tale che:

$$f_t(x) = f(x) - t\rho(x)a$$

soddisfi le nostre richieste. Notiamo che se $\|a\|$ è sufficentemete piccolo, allora f_t non ha punti fissi al di fuori di V. Poiché f non ha punti fissi nel compatto $K - V$,

$$\|f(x) - x\| > c > 0$$

Così se $\|a\| < c/2$, abbiamo

$$\|f_t(x) - x\| \geq \|f(x) - x\| - t\rho(x)\|a\| > \frac{c}{2}$$

in $K - V$. Naturalmente fuori K ($\rho(x) = 0$),

$$f_t(x) = f(x) \neq x.$$

Ora grazie al teorema di Sard possiamo trovare un punto a, la cui distanza da 0 sia arbitrariamente piccola , che sia un valore regolare per $x \mapsto f(x) - x$, e con $\|a\| < c/2$. Se x è un punto fisso per f_1, allora $x \in V$ e $f_1(x) = f(x) - a$ in un intorno di x. Di conseguenza $\mathrm{d}(f_1)_x = \mathrm{d}f_x$; quindi x è un punto fisso di Lefschetz per f_1 se e solo se $\mathrm{d}f_x - I$ è un isomorfismo. Ma da $f_1(x) = x$,

$$f(x) - x = a.$$

La condizione di regolarità per a implica che:

$$\mathrm{d}(f - I)_x = \mathrm{d}f_x - I$$

sia un isomorfismo.

Finora abbiamo provato il teorema per spazi euclidei, possiamo estendere questo risultato alle varietà. Prendiamo una applicazione tra varietà $f : X \to X$ che abbia $f(x) = x$ come unico punto fisso in un intorno U, sia ϕ una parametrizzazione locale con $\phi(0) = x$, possiamo applicare il caso euclideo appena provato a $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$. Infatti 0 è l'unico punto fisso per g nell'intorno $\phi^{-1}(U)$, quindi esiste una omotopia g_t di g tale che g_1 abbia solo punti fissi di Lefschetz in $\phi^{-1}(U)$ e ogni g_t coincida co g fuori da un compatto di $\phi^{-1}(U)$. Se proviamo che z è un punto fisso di Lefschetz per g_t se e solo se $\phi(z)$ lo è per $f_t = \phi \circ g_t \circ \phi^{-1}$ abbiamo finito.

Adesso è semplice osservare che $\mathrm{d}(f_t)_{\phi(z)} - I$ è un isomorfismo se e solo se $\mathrm{d}(g_t)_z - I$ lo è, infatti

$$\mathrm{d}(g_t)_z - I = (\mathrm{d}\phi^{-1}_{f(\phi(z))} \circ \mathrm{d}(f_t)_{\phi(z)} \circ \mathrm{d}\phi_z) - I = \mathrm{d}\phi^{-1}_{f(\phi(z))} \circ (\mathrm{d}(f_t)_{\phi(z)} - I) \circ \mathrm{d}\phi_z.$$

e sappiamo che $\mathrm{d}\phi$ è un isomorfismo. $\square$

2.4 Molteplicità in x per f

Sia x un punto fisso isolato per $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$. Se D è un disco chiuso centrato in x sufficientemente piccolo da non contentenere altri punti fissi per f. La *molteplicità* di f in x, denotata con $\mathrm{mult}_x(f)$, è definita come il grado di

$$F : \partial D \to \mathbb{S}^{k-1}, \;\; z \mapsto \frac{f(z) - z}{\|f(z) - z\|},$$

cioè $\mathrm{mult}_x(f) = \deg(F)$.

Questa definizione è indipendente dalla scelta di D, infatti sia D' un'altro disco chiuso centrato in x ma con raggio minore, F è ancora definita nell'anello $\overline{D - D'}$. Questa è una varietà compatta con bordo uguale all'unione di ∂D con l'orientazione standard e $\partial D'$ con quella opposta. Per la Proposizione 18, il grado di F è zero nel bordo di $\overline{D - D'}$, e quindi il grado in D deve essere uguale a quello in D'. Inoltre la molteplicità di f in x generalizza il concetto di numero di Lefschetz locale come espresso dalle due proposizioni seguenti.

Proposizione 29. *Sia X una varietà compatta e $f : X \to X$ un'applicazione e sia x un punto fisso di Lefschetz, per ogni aperto $U \simeq \mathbb{R}^k$ contenente x e nessun altro punto fisso per f vale l'uguaglianza $L_x(f) = \mathrm{mult}_x(f)$.*

Dimostrazione. Non è restrittivo assumere $x = 0$. Poichè $f(0) = 0$, possiamo scrivere $f(z) = Az + \epsilon(z)$, dove $A = \mathrm{d}f_0$ e $\lim_{z\to 0} \epsilon(z)/\|z\| = 0$. Essendo $A - I$ un isomorfismo(0 è Lefschetz), l'immagine del disco unitario attraverso $A - I$ conterrà un disco chiuso di raggio $c > 0$. La linearità implica $\|(A - I)z\| > c\|z\|$ per ogni $z \in \mathbb{R}^k$. Fissiamo il raggio del disco D in modo che

$$\frac{\epsilon(z)}{\|z\|} < \frac{c}{2} \text{ per } z \in D.$$

Definiamo l'omotopia $f_t(z) = Az + t\epsilon(z)$. Poichè per $t \in [0, 1]$

$$\|f_t(z) - z\| \geq \|(A - I)z\| - t\|\epsilon(z)\| > \frac{1}{2}c\|z\|$$

allora la seguente applicazione è un omotopia $\partial D \times I \to \mathbb{S}^{k-1}$

$$F_t(z) = \frac{f_t(z) - z}{\|f_t(z) - z\|}.$$

Adesso $\deg(F_1)$ è proprio la definizione di $\mathrm{mult}_0(f)$. Poichè $\deg(F_1) = \deg(F_0)$, non rimane che mostrare che il grado di F_0 che

$$z \mapsto \frac{(A - I)z}{\|(A - I)z\|}$$

è ± 1, a seconda del fatto che $A - I$ conservi o rovesci l'orientazione.

Applicando il lemma seguente a $E = A - I$, otteniamo un omotopia di F_0 con $z \mapsto E_1 z/\|E_1 z\|$. In entrambi i casi che si possono presentare E_1 conserva la norma, così $\|E_1 z\| = \|z\| = r$, il raggio di D. Allora se $A - I$ conserva l'orientazione, F_0 è omotopo al diffeomorfismo standard che conserva l'orientazione $z \mapsto z/r$ da $\partial D \to \mathbb{S}^{k-1}$, così $\deg(F_0) = 1$. Viceversa se $A - I$ scambia l'orientazione, allora F_0 è omotopo allo stesso diffeomorfismo di prima composto con la riflessione, che scambia l'orientazione, in $\mathbb{S}^{k-1}$, così $\deg(F_0) = -1$. $\square$

Lemma 30. *Sia E un isomorfismo di $\mathbb{R}^k$ che conserva l'orientazione. Allora esiste una omotopia E_t tra isomorfismi, tale che $E_0 = E$ e E_1 è l'identità. Se E scambia l'orientazione, allora nell'omotopia data E_1 è la riflessione:*

$$E_1(x_1, x_2 \ldots, x_k) = (-x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Dimostrazione. Cominciamo col far vedere che basta studiare il caso in cui E conserva l'orientazione. Supponiamo che il lemma sia vero per un isomorfismo che conserva l'orientazione e che E invece la scambi. $R : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ è la riflessione $(x_1, x_2 \ldots, x_k) \mapsto (-x_1, x_2, \ldots, x_k)$ è immediato notare che $R^2 = id_{\mathbb{R}^k}$. Poichè RE conserva l'orientazione allora esiste una omotopia $F : \mathbb{R}^k \times I \to \mathbb{R}^k$ per cui $F(x, 0) = RE$ e $F(x, 1) = id_{\mathbb{R}^k}$. Ma $RF : \mathbb{R}^k \times I \to \mathbb{R}^k$ è ancora un'omotopia, con $RF(x, 0) = R^2E = E$ e $F(x, 1) = R$.
Se $k = 1$ un isomorfismo che conserva l'orientazione è quello che $x \mapsto ax$ con $a > 0$ e $E_t(x) = (1-t)ax + tx$ è una omotopia per cui $E_0 = E$ e $E_1 = id_{\mathbb{R}}$.
Se E possiede un autovalore reale o complesso allora porta uno spazio $V \subset \mathbb{R}^k$ di dimensione uno o due in se stesso. Chiamiamo β' una base per V questa può essere completata, con $\{w_1, \ldots, w_h\}$, a base di $\mathbb{R}^k$. $\{w_1, \ldots, w_h\}$ è la base del sottospazio W di $\mathbb{R}^k$ disgiunto da V quindi $\mathbb{R}^k = V \oplus W$. Poichè E manda in se stessi i vettori di V se $v_i \in V$ allora $E(v_i)$ è combinazione lineare dei soli elementi di β', cioè i coefficenti di $\{w_1, \ldots, w_h\}$ per $E(v_i)$ sono tutti nulli. Quindi rispetto alla base β possiamo scrivere

$$E = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

Ora E è un isomorfismo per ipotesi, calcolando il $\det E$ otteniamo $\det E = \det A \cdot \det C$ da cui ricaviamo che E è un isomorfismo su $\mathbb{R}^k$ se e solo se lo sono A e C su V e W rispettivamente. Nel calcolo del determinante gli elementi di B non influiscono quindi

$$E_t = \left(\begin{array}{c|c} A & tB \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

è ancora un isomorfismo per ogni $t \in \mathbb{R}$, in particolare $E_t : \mathbb{R}^k \times I \to \mathbb{R}^k$ è un omotopia costituita da isomorfismi.
Sia $E : \mathbb{R}^{2h} \to \mathbb{R}^{2h}$ un isomorfismo privo di autovalori reali. Possiamo chiederci se $E_t = tI + (1-t)E$ con $t \in [0, 1]$ è un isomorfismo. Per per $t = 0$

e $t = 1$ lo è, infatti $E_0 = E$ e $E_1 = I$ sono isomorfismi. Con $t \in (0,1)$ chiedere che E_t sia un isomorfismo equivale a chiedere che $\ker(E_t) = 0$ cioè che $E_t(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

$$E_t(v) = tv + (1-t)E(v) = 0 \Rightarrow E(v) = \frac{t}{t-1}v$$

Se esistesse un $v \neq 0$ che soddisfa l'uguaglianza precedente allora $\dfrac{t}{t-1} \in \mathbb{R}$ sarebbe un autovalore per E. Poichè per ipotesi E non ha autovalori reali $\ker(E_t) = 0$.

Siano ora $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ tutti gli autovalori reali per l'isomorfismo E, allora rispetto ad un particolare cambiamento di base

$$E = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_l \end{pmatrix}$$

B e C sono matrici di dimensione oppurtuna e C è un isomorfismo. Poniamo

$$A_t = \begin{pmatrix} t\,\lambda_1 + (1-t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t\,\lambda_l + (1-t) \end{pmatrix}$$

la seguente matrice è un omotopia di isomorfismi tra E e I:

$$E_t = \left(\begin{array}{c|c} A_t & t\,B \\ \hline 0 & t\,C + (1-t) \end{array}\right)$$

□

Nel caso in cui un punto fisso isolato non sia Lefschetz, si ha

Proposizione 31. *Supponiamo che x sia un punto fisso isolato per l'applicazione f definita in $\mathbb{R}^k$, sia D un disco chiuso contenente x ma nessun altro punto fisso per f. Presa una applicazione f_1 che coincida con f fuori da un compatto nell'interno di D e che abbia solo punti Lefschetz in D. Allora*

$$\mathrm{mult}_x(f) = \sum_{f_1(z)=z} L_z(f_1), \quad z \in D \tag{2.4}$$

Dimostrazione. $\text{molt}_x(f)$ è il grado su ∂D della mappa F che

$$z \mapsto \frac{f(z) - z}{\|f(z) - z\|}.$$

Ma in ∂D F coincide con F_1

$$z \mapsto \frac{f_1(z) - z}{\|f_1(z) - z\|}.$$

Supponiamo ora che $z_1, \dots, z_n$ siano punti fissi per f_1, e fissiamo dei dischi D_i intorno a z_i che siano sufficientemente piccoli da essere disgiunti tra loro e da ∂D. Allora F_1 può essere estesa a

$$D' = D - \bigcup_{i=1}^{n} \text{Int}(D_i),$$

così il suo grado come mappa $\partial D' \to \mathbb{S}^{k-1}$ è zero. Ma da

$$\partial D' = \partial D - \bigcup_{i=1}^{n} \partial D_i,$$

il suo grado equivale a quello in ∂D, meno la somma dei gradi in ∂D_i. Quindi il grado di F_1 in ∂D_i è $\text{mult}_{z_i}(f_i) = L_{z_i}(f_i)$. □

Per la Proposizione 28 possiamo spezzare un punto fisso isolato per f in punti fissi di Lefschetz per l'applicazione f_1 omotopa ad f. In generale la mappa f_1 non è unica, la proposizione precedente afferma che comunque si prenda f_1 la somma $\sum_{f_1(z)=z} L_z(f_1)$ è costante.

Quindi se x è un punto fisso isolato per $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ la (2.4) è una nuova definizione di molteplicità in x per f. Questa nuova definizione, al contrario di quella precedente, permette di definire la molteplicità anche per $f : X \to X$ con X varietà.

Supponiamo che $f : X \to X$ abbia un punto fisso x isolato, scegliamo allora una parametrizzazione ϕ in un intorno di x, tale che $\phi(0) = x$. Il caso euclideo può essere applicato alla mappa $g = \phi^{-1} \circ f \circ \phi$, che ha in 0 un punto fisso isolato.

Se x è Lefschetz, allora sappiamo che $\text{mult}_x(f) = L_x(f)$ e che il suo valore è ± 1 in accordo col segno del determinante di $\mathrm{d}f_x - I$. Ma

$$\mathrm{d}g_0 - I = \mathrm{d}\phi_0^{-1} \circ (\mathrm{d}f_x - I) \circ \mathrm{d}\phi_0$$

quindi $\text{mult}_x(f) = \text{mult}_0(g)$.

Se invece x è un punto fisso arbitrario , prese due parametrizzazioni ϕ e ϕ', troviamo una $f_1 : X \to X$ che equivale a f fuori da un intorno U, contenuto nelle immagini di entrambe le parametrizzazioni, e che abbia solo punti fissi di Lefschetz in U. Per la proposizione appena dimostrata $\mathrm{mult}_0(g)$ è uguale alla somma dei numeri di Lefschetz locali di $\phi^{-1} \circ f_1 \circ \phi$ in $\phi^{-1}(U)$. Quest'ultima è uguale alla somma dei numeri di Lefschetz locali di f_1 in U, quindi

$$\mathrm{mult}_0(g) = \sum_{f_1(z)=z} L_z(f_1).$$

Poichè si ottiene la stessa formula utilizzando ϕ', $\mathrm{mult}_x(f)$ è ben definita. La proposizione seguente mostra che $L(f)$ può essere definito per mezzo delle molteplicità locali.

Proposizione 32. *Sia $f : X \to X$ una applicazione liscia, X compatto, con solo un numero finito di punti fissi. Allora il numero di Lefschetz globale (che è un invariante omotopico) equivale alla somma dei numeri di molteplicità in x per f:*

$$L(f) = \sum_{f(x)=x} \mathrm{mult}_x(f).$$

Dimostrazione. Possiamo modificare f localmente intorno ad ogni punto fisso in modo da ottenere una mappa di Lefschetz $f_1 : X \to X$ omotopa ad f. Chiaramente $L(f) = L(f_1)$, dalla definizione data di $\mathrm{mult}_x(f)$ la somma $\sum_{f(x)=x} \mathrm{mult}_x(f)$ equivale alla somma $\sum_{f_1(z)=z} L_z(f_1)$ che è proprio $L(f_1)$. □

Capitolo 3

Caratteristica di Eulero-Poincaré

Sia X è una varietà compatta e orientabile, la caratteristica di Eulero-Poicaré $\chi(X)$ può essere definita come il numero di (auto)intersezione della diagonale $\Delta(X)$ in $X \times X$:

$$\chi(X) = I(\Delta(X), \Delta(X))$$

Grazie alle osservazioni successive al Teorema 19, per la definizione data di caratteristica di Eulero-Poincaré risulta provato che

Proposizione 33. *La caratteristica di Eulero-Poincaré di una varietà di dimensione dispari, compatta e orientabile è zero.*

Dalla definizione di numero di Lefschetz globale,

$$L(f) = I(\Delta(X), \mathrm{graf}(f))$$

e dalla definizione della caratteristica di Eulero-Poincaré utilizzando il numero di intersezione

$$\chi(X) = I(\Delta(X), \Delta(X))$$

è immediato notare che

$$L(id) = I(\Delta(X), \Delta(X)) = \chi(X).$$

Poichè il numero di Lefschetz globale è un invariante omotopico (vedi Proposizione 25) allora vale la seguente

Proposizione 34. *Se f è omotopa all'identità, allora $L(f) = \chi(X)$. In particolare se esiste una $f : X \to X$ omotopa all'identità e senza punti fissi, allora $\chi(X) = 0$.*

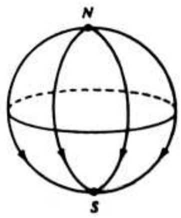
Proposizione 35. *La caratteristica di Eulero-Poincaré per la sfera vale:*

$$\chi(\mathbb{S}^k) = \begin{cases} 2 & se\ k\ \grave{e}\ pari \\ 0 & se\ k\ \grave{e}\ dispari \end{cases}$$

Dimostrazione. Cerchiamo una mappa liscia $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^k$ che sposta tutti i punti in direzione S ad eccezione dei poli. Se $\pi : \mathbb{R}^{k+1} - \{0\} \to \mathbb{S}^k$ è la proiezione $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ quindi definiamo:

$$f(x) = \pi\left(x + \left(0, \ldots, 0, -\frac{1}{2}\right)\right)$$

poniamo $u = (0, \ldots, 0, -\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^{k+1}$, che è parallelo a Ne S. La nostra f che manda $x \mapsto \frac{x+u}{\|x+u\|}$ è ben definita e liscia (composizione di applicazioni lisce) ed i suoi unici punti fissi sono N e S. Verifichiamo ora che questi siano



Lefschetz. Per la Proposizione 26 N e S sono Lefschetz se e solo se $\mathrm{d}f_x - I$ è un isomorfismo, inoltre per la Proposizione 27 sappiamo che in x si ha $L_x(f) = \mathrm{segn}(\det(\mathrm{d}f_x - I))$.
Sia $\gamma : I \to \mathbb{S}^k$ una curva liscia con $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = v \in T_x(\mathbb{S}^k)$ ovviamente $< x, v >= 0$. Ricordando che $\mathrm{d}f_x(v) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t))|_{t=0}$ si ha:

$$\mathrm{d}f_N(v) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{v}{\|N+u\|}$$

$$\mathrm{d}f_S(v) = \frac{d}{dt}f(\gamma(t))\Big|_{t=0} = \frac{v}{\|S+u\|}$$

Abbiamo $\|N+u\| = \frac{1}{2}$ e $\|S+u\| = \frac{3}{2}$, sia I la matrice identica su $\mathbb{R}^k$ possiamo scrivere

$$\mathrm{d}f_N = \frac{1}{\|N+u\|}\, I = 2\, I$$

$$\mathrm{d}f_S = \frac{1}{\|S+u\|}\, I = \frac{2}{3}\, I$$

$\mathrm{d}f_N - I = I$ è chiaramente un isomorfismo inoltre

$$L_N(f) = \mathrm{segn}(\det(\mathrm{d}f_N - I)) = +1$$

Anche $\mathrm{d}f_S - I = -\frac{1}{3}I$ è un isomorfismo però

$$L_S(f) = \mathrm{segn}(\det(\mathrm{d}f_S - I)) = \begin{cases} +1 & \text{se } k \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Infine il numero Lefschetz globale è:

$$L(f) = L_N(f) + L_S(f) = \begin{cases} 2 & \text{se } k \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

L'applicazione seguente è un omotopia tra f e l'identità:

$$f_t(x) = \pi\left(x + \left(0, \ldots, 0, -\frac{t}{2}\right)\right)$$

quindi grazie alla Proposizione 34 abbiamo $\chi(\mathbb{S}^k) = L(f)$. $\square$

Osservazione 7. *Avremo potuto eseguire i calcoli solo per il caso in cui k è pari, infatti grazie alla Proposizione 33 sappiamo che ogni varietà di dimensione dispari, compatta e orientabile ha caratteristica di Eulero zero.*

Proposizione 36. *Nel caso in cui k sia pari ogni applicazione $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^k$ omotopa all'identità deve avere un punto fisso. In particolare, l'applicazione antipodale non è omotopa all'identità.*

Dimostrazione. Per il Teorema 24 se $L(f) \neq 0$ allora f ammette punti fissi, ora grazie all'esempio precedente sappiamo che

$$L(f) = L(id_{\mathbb{S}^k}) = \chi(\mathbb{S}^k) = 2$$

quindi f deve avere almeno un punto fisso (per essere precisi almeno due). Ricordiamo che la mappa antipodale $\mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^k$ è la mappa

$$(x_1, \ldots, x_{k+1}) \mapsto (-x_1, \ldots, -x_{k+1}).$$

Sappiamo che il grado è un invariante omotopico (vedi Corollario 17), quindi se due mappe hanno grado distinto non possono essere omotope. Nella Sezione 1.6 abbiamo visto come calcolare il grado di una applicazione. L'identità $id_{\mathbb{S}^k}$ è un diffeomorfismo quindi ogni punto del codominio è un valore regolare, il suo differenziale è proprio $id_{\mathbb{R}^k}$ che è un isomorfismo che conserva l'orientazione, quindi $\deg(id_{\mathbb{S}^k}) = +1$. Anche la mappa antipodale è un diffeomorfismo ed ogni suo punto del codominio è un valore regolare, il suo differenziale è la composizione $r_1 \circ \cdots \circ r_{k+1}(x)$, di $k+1$ riflessioni $r_i : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1}$ ove

$$r_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{k+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{k+1}).$$

Per la Proposizione 13 ogni riflessione scambia l'orientazione quindi il grado dell'antipodale sarà $(-1)^{k+1}$, per ipotesi k è pari quindi il grado è -1. $\square$

Da $\chi(\mathbb{S}^k) = 2$ per k pari possiamo studiare il comportamento di un campo di vettori su $\mathbb{S}^k$, un *campo di vettori liscio* su X è una mappa liscia $v : X \to \mathbb{R}^N$ tale che $v(x) \in T_x(X)$ per ogni $x \in X$. Diremo che una varietà X è *pettinabile* se esiste un campo di vettori liscio non nullo. Poiché

Teorema 37 (Teorema di Hopf)**.** *Una varietá X compatta, connessa e orientabile possiede un campo di vettori non nullo se e solo se la sua caratteristica di Eulero-Poincaré è zero.*

allora

Osservazione 8. *La sfera $\mathbb{S}^k$ con k pari non è pettinabile.*

Per la Proposizione 33 sappiamo che la caratteristica di Eulero di una varietà di dimensione dispari, compatta e orientabile è zero, ora dalla definizione di pettinabilità e dal teorema precedente possiamo affermare che

Corollario 38. *Ogni varietà compatta, connessa e orientabile di dimensione dispari è pettinabile.*

Proposizione 39. *La caratteristica di Eulero-Poincaré per una superficie di di genere k è $2-2k$.*

Dimostrazione. Proporremo una prova euristica di questo fatto. Supponiamo che una superficie di genere k sia disposta verticalmente, ricoperta di paraffina e immersa in un ambiente che si sta scaldando fino a raggiungere la temperatura di fusione per la paraffina, che chiameremo T'. Indichiamo con $f_t(x)$ la traiettoria del punto x all'istante t. Risulta chiaro che per $T < T'$ la mappa $f_t(x) = x$ è l'identità mentre una volta raggiunta la temperatura T', f_t è una mappa Lefschetz con una sorgente nel vertice superiore, un pozzo in quello inferiore e un punto di sella al vertice superiore ed inferiore di ogni buco. Per quanto visto alla fine della Sezione 2.2 nelle sorgenti e nei pozzi il numero di Lefschetz locale è $+1$, mentre nei punti di sella è -1. La nostra f_t (una volta raggiunta la temperatura T') per una superficie di genere k ha esattamente $2k$ punti di sella, quindi per la Proposizione 34 la caratteristica di Eulero è uguale al numero di Lefschetz globale per f_t che a sua volta è uguale alla somma dei numeri di Lefschetz locali, che è proprio

$$L(f) = L(id_x) = \chi(X) = 2 - 2k.$$

□

Un gruppo che sia anche una varietà e la cui operazione di gruppo sia liscia è detto essere un *gruppo di Lie*. Il *gruppo ortogonale*

$$O_n = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^T = I\}$$

è una varietà compatta e la sua operazione di gruppo (moltiplicazione tra matrici) è liscia, possiamo calcolare la sua caratteristica di Eulero-Poincaré? Si e non solo possiamo farlo per ogni gruppo di Lie compatto.

Proposizione 40. *La caratteristica di Eulero-Poincaré di un gruppo di Lie compatto è* 0*.*

Dimostrazione. Consideriamo la moltiplicazione a sinistra sul gruppo G per l'elemento $h \neq e$ (e è l'elemento neutro) appartenente alla componente connessa dell'elemento neutro.

$$f : G \to G, \quad g \mapsto hg$$

Essendo $hg = g$ se e solo se $h = e$, questa mappa non ammette punti fissi.

Poiché h ed e appartengono alla stessa componente connessa C, allora questa è connessa per archi (vedi Proposizione 2) cioè per ogni coppia di punti di C esiste una curva liscia $\gamma : I \to C \subset G$ che li congiunge. Quindi

$$F : G \times I \to G, \quad (g, t) \mapsto \gamma(t)g$$

è un omotopia tra f e id_G e dalla Proposizione 34 segue che $\chi(G) = 0$. □

La seguente proposizione consente di calcolare la caratteristica di Eulero-Poincaré per gli spazi prodotto.

Proposizione 41. *Siano X e Y varietà compatte e orientabili di cui almeno una sia senza bordo, allora*

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

Dimostrazione. Se per ipotesi la dimensione di X è pari e quella di Y è dispari (o viceversa) possiamo utilizzare la Proposizione 33, che ci assicura $\chi(X \times Y) = 0$ e $\chi(X) = 0$, quindi l'uguaglianza è certamente valida. Senza fare alcuna ipotesi sulle dimensioni invece procediamo nella maniera seguente.

Per definizione $\chi(X) = L(id_X)$, $\chi(Y) = L(id_Y)$ e $\chi(X \times Y) = L(id_X \times id_Y)$ inoltre per la Proposizione 23 esistono $f \sim id_X$ e $g \sim id_Y$. Ora scriviamo sotto forma di matrice

$$\mathrm{d}(f \times g)_{(x,y)} - I = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{d}f_x - I & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{d}g_y - I \end{array}\right) \tag{3.1}$$

dove I è la matrice identica delle dimensioni opportune. Da questa scrittura risulta chiaro che (x, y) è un punto fisso di Lefschetz per $f \times g$ se e solo se x e y sono punti fissi di Lefschetz per f e g rispettivamente. Non solo, per la Proposizione 27

$$L_{(x,y)}(f \times g) = \mathrm{segn}(\det(\mathrm{d}(f \times g)_{(x,y)} - I))$$

dalla matrice 3.1 si vede che il segno di quest'ultimo è proprio

$$\mathrm{segn}(\det(\mathrm{d}f_x - I)) \cdot \mathrm{segn}(\det(\mathrm{d}g_y - I)) = L_x(f) \cdot L_y(g)$$

Quindi $L(f \times g) = L(f) \cdot L(g)$ ed essendo il numero di Lefschetz globale un invariante omotopico (vedi Proposizione 25) risulta provato: $\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y)$. □

Bibliografia

[1] Victor Guillemin e Alan Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., *Englewood Cliffs, New Jersey*, 1974

[2] John Milnor, *Topology, from the differentiable viewpoint*, University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[3] Morris W. Hirsh, *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.

[4] William Fulton, *Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1995.

[5] Michael Artin, *Algebra*, Bollati Boringhieri, 1997.

[6] Marco Abate, *Geometria*, McGraw-hill, 1996.

[7] Klaus Jänich, *Topologia*, Zanichelli, 1994.

[8] Czes Kosniowski, *Topologia*, Zanichelli, 1988.

[9] Carlo Domenico Pagani e Sandro Salsa, *Analisi Matematica, volume 1*, Masson, 1997.