Indice

Introduzione

Una curva X in $\mathbb{R}^2$ che sia omeomorfa ad una circonferenza divide il piano in due componenti connesse che hanno entrambe X come frontiera. Questo fatto che intuitivamente può sembrare ovvio è noto in letteratura come *Teorema di separazione di Jordan–Brouwer* (C. Jordan fu il primo, nel 1890 a fornirne una dimostrazione rigorosa). Al giorno d'oggi si conoscono diverse dimostrazioni del teorema di separazione nonchè della sua generalizzazione (la prima dovuta a Brouwer) al caso in cui X sia una sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ omeomorfa a S^{n-1}, l'ipersfera di $\mathbb{R}^n$. Nel caso $X \cong S^1$ esistono dimostrazioni, alquanto complicate che utilizzano strumenti di topologia elementare come la compattezza, la connessione e la continuità (si veda per esempio [2]). Nel caso $n \geq 3$ tutte le dimostrazioni sfruttano la teoria dell'omologia e la teoria della comologia (si veda [8], [4]), entrambe rami della topologia algebrica. Nell'ipotesi che $X \subset \mathbb{R}^n$ sia un'ipersuperficie differenziabile si possono applicare strumenti della topologia differenziale, quali la nozione di trasversalità e la teoria del grado ottenendo così delle dimostrazioni eleganti del teorema in questione.

In questa tesi vengono illustrate due dimostrazioni del teorema (nella sua versione differenziabile), una delle quali si applica anche nel caso in cui l'ipersuperficie X sia chiusa, ma non necessariamente compatta. Quest'ultima dimostrazione, pur essendo di fatto nota agli specialisti del settore non è però accessibile in letteratura.

L'esposizione è suddivisa in tre capitoli organizzati come segue. Nel primo capitolo sono raccolti le definizioni e gli strumenti di base della topologia differenziale, come ad esempio la teoria della trasversalità. Nel secondo capitolo viene trattata la teoria dell'intersezione e del grado e viene introdotto l'indice di avvolgimento. Il terzo e ultimo capitolo è dedicato al teorema di separazione. Facendo uso degli strumenti sviluppati nei primi due capitoli, si fornisce una dimostrazione del teorema di Jordan–Brouwer, nel caso in cui X sia compatta e nel caso più generale in cui X sia chiusa. In appendice sono riportati due risultati classici: il Teorema di Sard e la classificazione delle varietà di 1-dimensionali.

Capitolo 1

Varietà e varietà con bordo

Rimandiamo il lettore a [1] e [5] per una descrizione dettagliata dei risultati contenuti in questo capitolo.

1.1 Varietà

Siano $U \subset \mathbb{R}^k$ e $V \subset \mathbb{R}^l$ insiemi aperti. Una mappa $f : U \to V$ è detta liscia se tutte le derivate parziali $\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}$ esistono e sono continue per ogni numero naturale n. Più in generale siano $X \subset \mathbb{R}^k$ e $Y \subset \mathbb{R}^l$ due sottoinsiemi arbitrari, una mappa $f : X \to Y$ è liscia se $\forall x \in X$ esiste un intorno aperto U di x e una mappa liscia $F : U \to \mathbb{R}^l$ che coincide con f in $U \cap X$ (F è chiamata estensione di f intorno ad x).

Definizione 1.1.1 *Una mappa $f : X \to Y$ è un diffeomorfismo se f è liscia e ammette un'inversa $f^{-1} : Y \to X$ liscia. In tal caso X e Y sono detti diffeomorfi.*

Definizione 1.1.2 *Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà liscia di dimensione k o sottovarietà k-dimensionale di $\mathbb{R}^n$, se $\forall x \in X$ esiste un aperto W di $\mathbb{R}^n$ tale che $W \cap X$ sia un intorno di x diffeomorfo ad un aperto U di $\mathbb{R}^k$. Un diffeomorfismo $\phi : U \to W \cap X$ è detto una parametrizzazione di $W \cap X$ intorno ad x e il suo inverso ϕ^{-1} è chiamato un sistema di coordinate intorno ad x.*

Definizione 1.1.3 *Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà k-dimensionale, definiamo la codimensione di X in $\mathbb{R}^n$, con $cod(X) = n - k$.*

Definizione 1.1.4 *Un'ipersuperficie $X \subset \mathbb{R}^n$ è una sottovarietà di codimensione 1.*

Definizione 1.1.5 *Sia $f : U \to \mathbb{R}^m$ una mappa liscia, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Il differenziale di f nel punto $x \in U$ è l'applicazione lineare $df_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definita come $df_x(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$.*

Dall'analisi si sa che la matrice associata a df_x è data dal Jacobiano della mappa $f : U \to \mathbb{R}^n$ nel punto x.

Definizione 1.1.6 *Sia X una varietà di dimensione k in $\mathbb{R}^n$ e $\phi : U \to X$ una parametrizzazione intorno ad $x \in X$ definiamo lo spazio tangente ad X in x con $T_x(X) = d\phi_x(\mathbb{R}^k)$*

Si può far vedere che lo spazio tangente è ben definito cioè non dipende dalla parametrizzazione ϕ scelta.

Definizione 1.1.7 *Sia* $f : X \to Y$ *una funzione liscia, dove* X *e* Y *sono sottovarietà di* $\mathbb{R}^n$ *e* $\mathbb{R}^m$ *rispettivamente. Sia* U *un intorno di* $x \in X$ *aperto in* R^n*, e sia* $F : U \to \mathbb{R}^m$ *una estensione di* f *ad* U*. Definiamo il differenziale di* f *in* x *con* $df_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ *dove* $df_x(h) = dF_x(h)$*.*

Dal Teorema della funzione inversa (si veda ad esempio [6] pag. 401) si ha il seguente:

Teorema 1.1.8 *(Teorema della funzione inversa per varietà) Siano* X *e* Y *varietà differenziabili, supponiamo che* $f : X \to Y$ *sia una mappa liscia, il cui differenziale* df_x *nel punto* x *sia un isomorfismo. Allora esiste un'intorno* U *di* x *che viene mandato diffeomorficamente in un intorno* V *di* $y = f(x)$*. In particolare se* df_x *è un'isomorfismo per ogni* $x \in X$ *allora* f *è un diffeomorfismo locale.*

Proposizione 1.1.9 *Sia* $X \subset \mathbb{R}^n$ *una sottovarietà* k*-dimensionale di* $\mathbb{R}^n$ *e siano* $(x_1, \dots, x_n)$ *le funzioni coordinate standard di* $\mathbb{R}^n$*. Per ogni punto* $x \in X$ *esiste un multindice* $I_k = (i_1, \dots, i_k) \subset \{1, \dots, n\}$*, tale che* $\varphi_{I_k} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) : U \to V \subset \mathbb{R}^k$*, sia una parametrizzazione locale per un qualche intorno* U *di* x *e un aperto* V *di* $\mathbb{R}^k$*. Esistono inoltre* $n - k$ *funzioni* $g_{k+1}, \dots, g_n$ *tali che* U *è uguale al grafico di* $g = (g_{k+1}, \dots, g_n) : U \to \mathbb{R}^{n-k}$*.*

Dimostrazione: Sia $x \in X$, dall'algebra lineare sappiamo che la proiezione di $T_x(X)$ nel sottospazio $< e_{i_1}, \dots, e_{i_k} >$ è un isomorfismo per un'opportuna scelta di indici $i_1, \dots, i_k$. Per il Teorema 1.1.8, se U è un intorno di x sufficientemente piccolo, allora φ_{I_k} è un diffeomorfismo tra U e un intorno V di

$\mathbb{R}^k$. Non è restrittivo supporre che $i_1 = 1, \dots, i_k = k$, osserviamo dunque che $\varphi^{-1} : V \to U$ deve essere della forma $\varphi(x) = (x_1, \dots, x_k, g_{k+1}(x), \dots, g_n(x))$. $\square$

Il seguente corollario, che verrà utilizzato nel capitolo 3, mostra che ogni varietà $X \subset \mathbb{R}^n$ può essere localmente vista come $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

Corollario 1.1.10 *Sia X sottovarietà k-dimensionale di $\mathbb{R}^n$, per ogni punto di X esiste un'intorno W diffeomorfo ad $\mathbb{R}^n$ tale che $W \cap X$ sia diffeomorfo a $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione: Sia $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, $W \cap X$ un intorno di x e φ_{I_k} una sua parametrizzazione, come nel Corollario 1.1.9, dove W è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Possiamo supporre che $I_k = (1, \dots, k)$. È facile vedere che la mappa $\phi : W \to V$ definita da

$\phi(y) = (y_1 - x_1, \dots, y_k - x_k, y_{k+1} - g_{k+1}(y_1, \dots, y_k), \dots, y_n - g_n(y_1, \dots, y_k))$

è un diffeomorfismo locale in W. A meno di restringere W possiamo supporre $\phi(W) = B_\epsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \|x\| < \epsilon\}$. Osserviamo che $\phi(W \cap X) = i(\varphi_{I_k}(W \cap X) - (x_1, \dots, x_k))$ dove $i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ è l'inclusione. Osserviamo infine che il diffeomorfismo $\psi : B_\epsilon(0) \to \mathbb{R}^n$ definito da $\psi(y) = \frac{\epsilon y}{\sqrt{\epsilon^2 - \|y\|}}$, mappa diffeomorficamente $W \cap X$ in $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, segue pertanto la tesi. $\square$

Definizione 1.1.11 *Siano X e Y varietà con $dim(X) \geq dim(Y)$, sia $f : X \to Y$ una mappa liscia, se in $x \in X$ df_x è suriettivo, allora f è una summersione in x. Se f è una summersione in ogni $x \in X$ allora f è semplicemente chiamata summersione.*

Riferiamo a [1] la dimostrazione del seguente lemma.

Lemma 1.1.12 *Per una varietà compatta senza bordo Y in $\mathbb{R}^n$ e un numero positivo ϵ, sia Y^ϵ l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ a distanza minore di ϵ da Y. Se ϵ è sufficientemente piccolo, ogni punto w contenuto in Y^ϵ possiede un unico punto più vicino in Y, denotato con $\pi(w)$, e inoltre la mappa $\pi : Y^\epsilon \to Y$ è una summersione, che è l'identità in Y. Nel caso in cui Y non sia compatta, esiste ancora una summersione $\pi : Y^\epsilon \to Y$ che sia l'identità su Y, ma $\epsilon = \epsilon(x)$ è una funzione positiva su Y, e Y^ϵ è definito come $\{w \in \mathbb{R}^n | \ \|w - y\| < \epsilon(y)$ per qualche $y \in Y\}$.*

1.2 Varietà con bordo

Definizione 1.2.1 *Un sottoinsieme $X \subset \mathbb{R}^n$ è una varietà con bordo di dimensione k se per ogni $x \in X$ esiste un intorno V di X che è diffeomorfo ad un aperto U di $H^k = \{x = (x_1, \dots, x_k)| \ x_k \geq 0\}$.*

La definizione di parametrizzazione e sistema di coordinate si estende in modo naturale alle varietà con bordo, così come la definizione di spazio tangente $T_x(X)$ e il differenziale $df_x : T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$ di un'applicazione liscia tra due varietà col bordo X e Y.

Definizione 1.2.2 *Il bordo di una varietà con bordo indicato da ∂X è l'insieme dei punti che sono immagini, tramite qualche parametrizzazione, dei punti di $\partial H^k = \{x = (x_1, \dots, x_k)| \ x_k = 0\}$. Definiamo l'interno di X con $Int(X) = X \setminus \partial X$.*

Proposizione 1.2.3 *Se X è una varietà k-dimensionale con bordo, allora $Int(X)$ e ∂X sono varietà senza bordo di dimensione k e $k-1$ rispettivamente.*

Un esempio banale di varietà con bordo è H^k, un'altro un pò più interessante è il disco n-dimensionale descritto dopo il Lemma 1.2.4.

Sia $f : X \to Y$ una applicazione liscia, dove X è una varietà con bordo. Indicheremo con $\partial f : \partial X \to Y$ la restrizione di f al bordo di X.

Lemma 1.2.4 *Supponiamo sia $S \subset \mathbb{R}^n$ una varietà senza bordo k-dimensionale e $\pi : S \to \mathbb{R}$ una funzione liscia con 0 valore regolare. Allora il sottoinsieme $X = \{s \in S : \pi(s) \geq 0\}$ è una varietà con bordo, e $\partial X = \pi^{-1}(0)$*

Dimostrazione: l'insieme $\{s \in S|\ \pi(s) > 0\}$ è aperto in S ed è pertanto una sottovarietà della stessa dimensione di S. Sia $s \in \pi^{-1}(0)$, e sia L una mappa lineare, di rango $k-1$, non singolare su $N = \ker(d\pi_s) \subset T_s(S)$. Sia $V = L(N)$. Definiamo ora una funzione $F : S \to V \times \mathbb{R}$ con $F(x) = (L(x), \pi(x))$, che per come è stata definita è chiaramente un diffeomorfismo locale in s. In particolare F mappa diffeomorficamente un intorno di s in X, in un intorno di 0 in $V \times H^1$, segue dunque la tesi. $\square$

Il lemma precedente non è privo di interesse proprio, ci permette ad esempio di dimostrare facilmente che il disco di raggio ϵ e centro l'origine $D_\epsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n|\ \|x\| \leq \epsilon\}$ è una varietà con bordo: è sufficiente definire $\pi : S \to \mathbb{R}$, con $S = \mathbb{R}^n$ e $\pi(s) = \epsilon^2 - \|s\|^2$, quindi applicare il lemma.

Definizione 1.2.5 *Sia X una varietà con bordo k-dimensionale e sia $x \in Int(X)$. Consideriamo $\varphi : U \to X$, una parametrizzazione intorno x, dove*

$D_\epsilon(0) \subset U$ è il dischetto k-dimensionale di raggio ϵ, e $\varphi(0) = x$. Definiamo una bolla B nella varietà X, con centro in x, l'insieme $B = \varphi(D_\epsilon(0))$.

La proposizione che segue verrà utilizzata per dimostrare una proprietà fondamentale dell'indice di avvolgimento (vedi Proposizione 2.2.8).

Proposizione 1.2.6 *Sia X una varietà di dimensione k con bordo ∂X, e $B = \varphi(D_\epsilon(0))$ una bolla della varietà con centro in x allora $\tilde{X} = X \setminus Int(B)$ è una varietà k-dimensionale, il cui bordo è $\partial\tilde{X} = \partial X \cup \partial B$.*

Dimostrazione: È sufficiente mostrare che $U - \mathrm{Int}(D_\epsilon(0))$ è una varietà, con bordo $S_\epsilon(0)$. Sia $\pi : U \to \mathbb{R}$ definita da $\pi(x) = ||x||^2 - \epsilon^2$. Osserviamo che 0 è un valore regolare per π, dunque per il Lemma 1.2.4 $U \setminus \mathrm{Int}(D_\epsilon(0)) = \{x|\ \pi(x) \geq 0\}$ è una varietà con bordo e $\partial\{U - \mathrm{Int}(D_\epsilon(0))\} = \pi^{-1}(0) = S_\epsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n|\ \|x\| = \epsilon\}$. □

1.3 Trasversalità

In questo paragrafo saranno date condizioni sufficienti (cfr. Teorema 1.3.2), affinchè la controimmagine di una varietà $Z \subset Y$ tramite una applicazione liscia $f : X \to Y$ sia una varietà ed in particolare perchè l'intersezione di due varietà sia ancora una varietà.

Definizione 1.3.1 *Sia X una varietà con bordo (magari vuoto), Y una varietà senza bordo, Z una sottovarietà senza bordo di Y e $f : X \to Y$ una* *funzione liscia, diremo che* f *è trasversale a* Z *e scriveremo* $f \pitchfork Z$*, se* $\forall x \in f^{-1}(Z)$

$$Im(df_x) + T_{f(x)}(Z) = T_{f(x)}(Y).$$

Teorema 1.3.2 *Sia* f *una mappa liscia da una varietà con bordo* X *ad una varietà senza bordo* Y*, se* $f : X \to Y$ *e* $\partial f : \partial X \to Y$ *sono entrambe trasversali ad una varietà senza bordo* $Z \subset Y$*, allora* $f^{-1}(Z)$ *è una varietà, con bordo*

$$\partial\{f^{-1}(Z)\} = f^{-1}(Z) \cap \partial X.$$

La codimensione di $f^{-1}(Z)$ *in* X *è uguale alla codimensione di* Z *in* Y*.*

Dal teorema precedente, nel caso particolare in cui $f : X \to Y$ sia l'inclusione, discende il seguente corollario.

Corollario 1.3.3 *Siano* X *e* Z *sottovarietà senza bordo di* Y*, la loro intersezione* $X \cap Z$ *è una varietà se* $T_x(X) + T_x(Z) = T_x(Y)$ *per ogni* $x \in X \cap Z$*.*

Osservazione 1.3.4 *Sia* $f : X \to Y$ *una applicazione liscia, dove* X *e* Y *sono varietà senza bordo tali che* $dim X \geq dim Y$*, allora* $f \pitchfork \{y\}$ *se e solo se* y *è un valore regolare.*

Due proprietà particolarmente importanti della trasversalità sono: la stabilità, cioè una mappa $f : X \to Y$ che sia trasversale ad una sottovarietà Z, rimane tale anche dopo piccole perturbazioni, la seconda è quella di essere generica, cioè, non importa quanto possa essere contorto il comportamento della mappa f rispetto ad una sottovarietà $W \subset Y$, una deformazione arbitrariamente piccola, rende la mappa trasversale a W. La forma di queste due proprietà che ci interessa è espressa dai tre teoremi seguenti (per la loro dimostrazione si rimanda il lettore a [1].

Definizione 1.3.5 *Diremo che due mappe lisce $f_0 : X \to Y$ e $f_1 : X \to Y$ sono omotope, se esiste un'applicazione liscia $F : X \times [0,1] \to Y$ detta omotopia tra f_0 e f_1, tale che $F(x,0) = f_0$ e $F(0,1) = f_1$. Fissato $t \in [0,1]$ definiamo $f_t : X \to Y$ con $f_t(x) = F(x,t)$.*

Proposizione 1.3.6 *L'omotopia è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione: Che sia una relazione riflessiva e simmetrica è immediato. Supponiamo che $f_0, f_1 : X \to Y$ siano mappe omotope e così $f_1, f_2 : X \to Y$. Sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione liscia tale che $\rho(t) = 0$ per $t \leq \frac{1}{4}$ e $\rho(t) = 1$ per $t \geq \frac{3}{4}$(ad esempio $\rho(t) = \frac{\int_{-\infty}^{t} f(t-\frac{1}{4})f(\frac{3}{4}-t)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\frac{1}{4})f(\frac{3}{4}-t)}$ dove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è data da $f(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ se $t \geq 0$ e $f(t) = 0$ altrimenti). Per $ij = 01, 12$ sia $F_{ij} : X \times I \to Y$ una omotopia di f_i e f_j, allora $F_{02} : X \times I \to Y$ definita da $F_{02} = F_{01}(x, \rho(2t))$ per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $F_{02} = F_{12}(x, \rho(2t) - 1)$ per $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ è un'omotopia per f_0 e f_1.

Teorema 1.3.7 *Sia $f_0 : X \to Y$ trasversale ad una sottovarietà $Z \subset Y$, e $F : X \times [0,1] \to Y$ un'omotopia, allora esiste ϵ tale che f_t, con $t < \epsilon$, sia ancora trasversale ad X.*

Teorema 1.3.8 *Per ogni funzione liscia $f : X \to Y$ e ogni sottovarietà senza bordo Z di Y, esiste una mappa $g : X \to Y$, omotopa a f tale che $g \pitchfork Z$, $\partial g \pitchfork Z$.*

Teorema 1.3.9 *Se $f : X \to Y$ è una funzione liscia tale che $\partial f \pitchfork Z$ allora esiste una mappa $g : X \to Y$ omotopa a f tale che $\partial f = \partial g$ e $g \pitchfork Z$.*

Capitolo 2

Teoria dell'intersezione e del grado

In questo capitolo si introducono la teoria dell'intersezione, dalla quale si sviluppano due invarianti geometrici: *grado modulo 2* e *l'indice di avvolgimento* strumenti fondamentali per dimostrare il Teorema di separazione di Jordan–Brouwer.

2.1 Teoria dell'intersezione modulo 2

Sia X una varietà compatta e $f : X \to Y$ una mappa trasversale a una sottovarietà chiusa $Z \subset Y$, dove $\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y)$ allora $f^{-1}(Z)$ è (cfr. Teorema 1.3.2) una sottovarietà zero-dimensionale chiusa di X, pertanto $f^{-1}(Z)$ è costituita di un numero finito di punti.

Definizione 2.1.1 *Definiamo il numero d'intersezione* $mod 2$ *della mappa*

$f : X \to Y$ con $Z \subset Y$, il numero di punti di $f^{-1}(Z)$ modulo 2, cioè

$$I_2(f, Z) = [\sharp f^{-1}(Z)]_{mod 2}.$$

Più in generale per un'arbitraria mappa $g : X \to Y$, omotopa a f definiamo $I_2(g, Z) = I_2(f, Z)$.

Il seguente teorema mostra che la definizione è ben posta.

Proposizione 2.1.2 *Se $f_0, f_1 : X \to Y$ sono omotope ed entrambe trasversali a $Z \subset Y$, allora $I_2(f_0, Z) = I_2(f_1, Z)$.*

Dimostrazione: Sia $F : X \times [0, 1] \to Y$ una omotopia per f_0 e f_1. Per il Teorema 1.3.9, possiamo assumere che F sia trasversale a Z, infatti $\partial(X \times [0, 1]) = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$, e $\partial F = f_0$ su $X \times \{0\}$ e $\partial F = f_1$ su $X \times \{1\}$. Dunque per il Teorema 1.3.2 $F^{-1}(Z)$ è una sottovarietà unidimensionale di $X \times [0, 1]$ con bordo,

$$\partial F^{-1}(Z) = F^{-1}(Z) \cap \partial(X \times [0, 1]) = f_0^{-1}(Z) \times \{0\} \cup f_1^{-1}(Z) \times \{1\}.$$

Dalla classificazione delle 1-varietà (cfr. A.0.9), $\partial F^{-1}(Z)$ deve essere costituito da un numero pari di punti, e dunque

$$I_2(f_0, Z) = [\sharp f_0^{-1}(Z)]_{\text{mod } 2} = [\sharp f_1^{-1}(Z)]_{\text{mod } 2} = I_2(f_1, Z).$$

□

Poichè l'omotopia è una relazione di equivalenza, dal teorema precedente segue subito, che mappe omotope hanno stesso numero di intersezione modulo 2.

Nel caso particolare in cui X sia una sottovarietà compatta di Y e Z sia una sottovarietà chiusa tale che $\dim(X) + \dim(Z) = \dim(Y)$, definiamo il numero di intersezione $\bmod 2$ di X con Z come $I_2(X, Z) = I_2(i, Z)$, dove $i : X \to Y$ è l'inclusione.

Proposizione 2.1.3 *Supponiamo che X sia il bordo di qualche varietà compatta W e sia $g : X \to Y$ una mappa liscia. Se g può essere estesa a W, allora $I_2(g, Z) = 0$, dove $Z \subset Y$ è una sottovarietà di Y tale che $dim\, X + dim\, Z = dim\, Y$.*

Dimostrazione: Sia $G : W \to Y$ un'estensione di g. Per il Teorema 1.3.8, esiste una mappa F omotopa a G tale che F e ∂F siano trasversali a Z. Si ha che $f = \partial F$ è omotopa a g, e dunque $I_2(g, Z) = I_2(f, Z)$, ma per il Teorema 1.3.2 $F^{-1}(Z)$ è una varietà unidimensionale e dunque $\sharp f^{-1}(Z) = \sharp \partial F^{-1}(Z)$ è un numero pari. □

2.2 Teoria del grado e indice di avvolgimento

Definiamo ora il grado di un'applicazione. Il lemma che segue dimostra che il numero delle controimmagini di un valore regolare y, per una mappa $f : X \to Y$ definita su un compatto, con $\dim(X) = \dim(Y)$, è localmente costante.

Lemma 2.2.1 *Sia $f : X \to Y$, una mappa liscia con X compatta e sia y un valore regolare, esiste allora un intorno $V \subset Y$ di y tale che $\sharp f^{-1}(y') = \sharp f^{-1}(y)$ qualunque $y' \in V$.*

Dimostrazione: Sia $\{x_1, \ldots, x_k\} = f^{-1}(y)$, per $i = 1, \ldots, k$ sia U_i un intorno di x_i che è mandato diffeomorficamente in un intorno V_i di y in N (la cui esistenza è garantita dal Teorema della funzione inversa). L'intorno $V = \cap_{l=1}^{k} V_l \setminus f(X \setminus \cup_{l=1}^{k} U_l)$ soddisfa il lemma. $\square$

Teorema 2.2.2 *Se $f : X \to Y$ è una mappa liscia, di una varietà compatta X, in una varietà connessa Y, con $dim X = dim Y$, allora $I_2(f, \{y\})$ è costante su Y. Questo valore comune è chiamato grado mod 2 di f e denotato con* $\deg_2(f)$.

Dimostrazione: Sia $y \in Y$, a meno di omotopia possiamo supporre che y sia un valore regolare per f. Sia $n = \sharp f^{-1}(y)$, per il lemma precedente $I_2(f, \{y\}) = n \bmod 2$ è localmente costante per ogni $y \in Y$ e poichè Y è connesso, deve essere globalmente costante. $\square$

Poichè il grado di una funzione è stato definito in termini di numero di intersezione, i risultati ottenuti nel paragrafo precedente si estendono immediatamente, si hanno cioè i seguenti corollari.

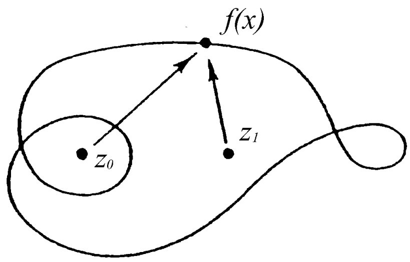
Corollario 2.2.3 *Mappe omotope hanno lo stesso grado mod 2.*

Corollario 2.2.4 *Se $X = \partial W$ e $f : X \to Y$ può essere estesa a W, allora $deg_2(f) = 0$.*

Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ una varietà compatta e connessa di dimensione $n-1$ e $f : X \to Y$ una mappa liscia, preso $z \notin \mathrm{Im}(f(x))$ consideriamo la mappa $u : X \to S^{n-1}$ definita da

$$u = \frac{f(x) - z}{||f(x) - z||}, \tag{2.1}$$

allora $\sharp u^{-1}(v)$ ci dà un'idea di come $f(x)$ gira attorno a z.



Definizione 2.2.5 *Chiamiamo, indice d'avvolgimento modulo 2 di f attorno a z,* $W_2(f, z) = deg_2(u)$. *Nel caso in cui* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *Definiamo* $W_2(X, z) := W_2(i, z)$ *dove* $i : X \to \mathbb{R}^n$ *è l'inclusione.*

Esempio 2.2.6 *Sia* $X = S^1$ *il cerchio unitario in* $\mathbb{R}^2$ *che identifichiamo con il campo dei numeri complessi* $\mathbb{C}$ *e sia*

$$f : X = S^1 \;\; \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta},$$

dove n *è un intero diverso da zero. Osserviamo che* $z = 0$ *non appartiene all'immagine di* f *e quindi l'applicazione* $u : S^1 \to S^1$ *data da (2.1) coincide con* f. *Segue che* $u^{-1}(z) = f^{-1}(z) = n$ *e quindi* $W_2(f, z) = n \, mod 2$.

Sia ora $F : D \to \mathbb{R}^n$ un'estensione liscia di f a D, una varietà n-dimensionale compatta connessa e con bordo $\partial D = X$, supponiamo sia z un valore regolare per F, non appartenente ad $\mathrm{Im}(f)$, si hanno i seguenti risultati

Lemma 2.2.7 *Se* $z \notin Im(F)$ *allora* $W_2(f, z) = 0$.

Dimostrazione: Supponiamo che $z \notin \mathrm{Im}(F)$ allora $\tilde{u} = \frac{F(x)-z}{||F(x)-z||}$ che estende $u = \frac{f(x)-z}{||f(x)-z||}$, è ben definita, dunque per il Corollario 2.2.4 $W_2(f,z) = deg_2(u) = 0$. $\square$

Proposizione 2.2.8 *$F^{-1}(z)$ è un insieme finito e*

$$W_2(f,z) = \sharp F^{-1}(z)\ mod\ 2. \tag{2.2}$$

Dimostrazione: Sia $\{y_1,\dots,y_l\} = F^{-1}(z) =$ scegliamo B_i, $i = 1,\dots,l$, bolle con centro y_i in D, tra loro disgiunte, allora per il Lemma 1.2.6, $\tilde{D} = D \setminus \cup_{i=1}^{l} \mathrm{Int}(B_i)$ è una varietà, con bordo $\partial\tilde{D} = X \cup \{\cup_{i=1}^{l} \partial B_i\}$. Definiamo $f_i = F_{|\partial B_i}$ e $\tilde{F} = F_{|\partial\tilde{D}}$. Dato che $z \notin \mathrm{Im}(\tilde{F})$ allora per il Lemma 2.2.7 $W_2(\partial\tilde{F}, z) = 0$, cioè

$$W_2(f,z) = \sum_{i=1}^{l} W_2(f_i,z) \mod 2. \tag{2.3}$$

Resta da mostrare che $W_2(f_i,z) = 1$. Il fatto che z sia un valore regolare di F, implica che per $i = 1,\dots,l$ esiste un intorno di y_i, aperto in D, diffeomorfo tramite F ad un intorno aperto U_z di z in $\mathbb{R}^n$. Non è restrittivo supporre che $f_i(\partial B_i) = F(\partial B_i) = S_\delta(z) \subset U_z$ e quindi che f_i sia un diffeomorfismo. Consideriamo la mappa $u_i : \partial B_i \to S^{n-1}$ definita da $u_i(x) = \frac{f_i(x)-z}{||f_i(x)-z||}$ per $i = 1,\dots,l$, allora $\sharp u^{-1}(v) = \sharp\{x \in \partial B_i |\ f_i(x) = \delta v + z\} = 1$, cioè $W_2(f_i,z) = 1$, come voluto. $\square$

Osservazione 2.2.9 *Sia $X \subset \mathbb{R}^n$, e X sia il bordo di una varietà compatta e connessa D,allora $W_2(X,z) = 1$ oppure 0 a seconda che z appartenga o meno a D.*

Capitolo 3

Teorema di separazione

Questo capitolo è dedicato alla dimostrazione del Teorema di separazione di Jordan–Brouwer nel caso differenziabile:

Teorema JB *Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un'ipersuperficie chiusa, connessa e senza bordo, allora $\mathbb{R}^n \backslash X$ è costituito di due aperti connessi D_0 e D_1 tali che $\partial\overline{D}_0 = \partial\overline{D}_1 = X$. Se si assume che X sia compatta allora uno degli aperti, supponiamo D_1 è limitato mentre D_0 è illimitato.*

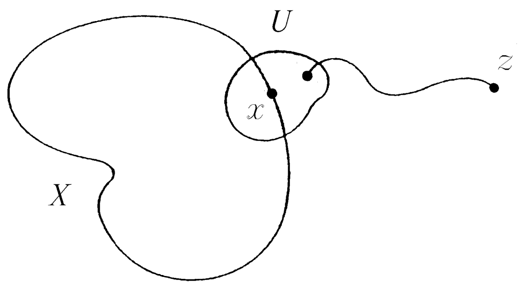
3.1 Caso compatto

Consideriamo un'ipersuperficie X di $\mathbb{R}^n$ senza bordo, compatta e connessa. Assumendo vero il Teorema di Jordan–Brouwer e supponendo che $z \in \mathbb{R}^n$ sia un punto non appartenente a X allora per l'Osservazione 2.2.9 $W_2(X, z) = 0$ oppure 1 a seconda che z appartenga all'interno o all'esterno di X. L'idea che sta dietro la dimostrazione del Teorema di separazione (nel caso X sia compatta) è quella di invertire tale ragionamento.

Il lemma seguente e il suo corollario mostrano che il numero delle componenti connesse di $\mathbb{R}^n \setminus X$ è al più due.

Lemma 3.1.1 *Sia $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Se $x \in X$ e U è un suo intorno aperto in $\mathbb{R}^n$, allora esiste un punto di U che può essere unito a z con una curva che non interseca X.*

Dimostrazione: È sufficiente far vedere che l'insieme T degli $x \in X$ che verificano la tesi del lemma, è un insieme non vuoto aperto e chiuso. Infatti in tal caso T coinciderebbe con X, essendo X connesso. Sia $x \in X \setminus T$ e V un aperto di x in $\mathbb{R}^n$ che non contiene punti che possano essere connessi con z. Allora $V \cap X$ è un aperto di $X \setminus T$ contenente x pertanto T è chiuso.



Fissato z sia x_0 il punto di X più vicino a z, allora la curva $s : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ definita da $s(t) = x_0 + t(z - x_0)$ unisce x_0 a z senza passare per X, inoltre ogni intorno di x_0 contiene qualche punto di $s(t)$, dunque $x_0 \in T \neq \emptyset$. Resta da far vedere che T è aperto. Sia $x \in T$ e $V \cong \mathbb{R}^n$ un intorno di x tale che

$$V \cap X \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\ x_n = 0\}$$

(vedi Corollario 1.1.10), allora

$$V \setminus X \cong \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} = U_1 \cup U_2$$

dove $U_1 = \{x \in R^n |\ x_n > 0\}$ e $U_2 = \{x \in R^n |\ x_n < 0\}$. Pertanto $V \setminus X = V_1 \cup V_2$ dove $V_i \cong U_i$ per $i = 1, 2$. Sia $y \in V \cap X$ e sia U_y un suo intorno, osserviamo che esiste $v_y \in U_y \cap V$ che può essere unito a v_x tramite una curva che non interseca X, dove $v_x \in V$ è un punto che può essere connesso a z senza intersecare X, e di conseguenza T è aperto. □

Sia $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$, x un punto di X, V, V_1 e V_2 come nella dimostrazione precedente. Allora z può essere unito a $v_1 \in V_1$ oppure a $v_2 \in V_2$, pertanto si ha il seguente:

Corollario 3.1.2 $\mathbb{R}^n \setminus X$ *ha al più due componenti connesse.*

Per mostrare che le componenti di $\mathbb{R}^n \setminus X$ sono esattamente due (vedi Proposizione 3.1.6) abbiamo bisogno dei due lemmi seguenti e del loro corollario, già interessanti di per se.

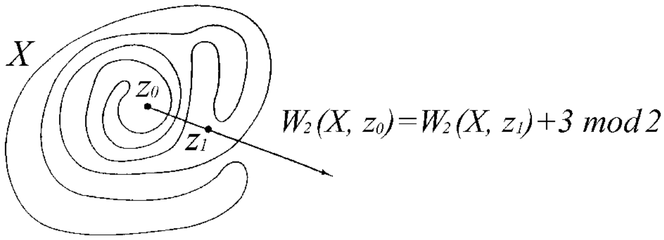
Lemma 3.1.3 *Se z_0 e z_1 sono contenuti nella stessa componente connessa di $\mathbb{R}^n \setminus X$, allora $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1)$.*

Dimostrazione: Sia $z_t : I \to \mathbb{R}^n \setminus X$ una curva che unisca i due punti z_0 e z_1. Allora la mappa $u_t = X \times I \to S^{n-1}$ definita da $u_t(x) = \frac{x - z_t}{\|x - z_t\|}$, è una omotopia (dato che z_t non appartiene a X). La tesi segue dal Corollario 2.2.3. □

Lemma 3.1.4 *Sia r una semiretta con origine in $z \in \mathbb{R}^n \setminus X$ e direzione $v \in S^{n-1}$, allora affinchè r sia trasversale a X è necessario e sufficiente che v sia un valore regolare per la mappa $u : X \to S^{n-1}$ dove $u(x) = \frac{x-u}{\|x-u\|}$. In particolare, per il teorema di Sard, r è trasversale a X per v generico.*

Dimostrazione: Osserviamo da prima che $u^{-1}(v) = X \cap r$. Dimostriamo la necessità, sia v un valore regolare per $u(x)$, se $X \cap r = \emptyset$ abbiamo finito. Supponiamo non sia così e sia $x \in u^{-1}(v)$, se per assurdo $v \in T_x(X)$, dato che $du_x(v) = \lim_{t\to 0}(\frac{x+tv-z}{\|x+tv-z\|} - v)\frac{1}{t} = \lim_{t\to 0}(\frac{(a+t)v}{\|(a+t)v\|} - v)\frac{1}{t} = 0$, (dove $a = \|x - z\|$), allora du_x non sarebbe iniettivo, contraddicendo l'ipotesi che v sia un valore regolare per $u(x)$. Dimostriamo ora la sufficienza, se $X \cap r = \emptyset$ allora la tesi è vera immediatamente, supponiamo invece $\exists\ x \in X \cap r$, per l'ipotesi $T_x(X)+ < v >= \mathbb{R}^n$, allora $\forall w \in T_x(X)$ possiede una componente perpendicolare $w_\perp$a v non nulla, per la linearità di du_x non è restrittivo supporre $\|w_\perp\| = \|x - u\|$ allora $du_x(w) = du_x(w_\perp) = \lim_{t\to 0}(\frac{x+tw_\perp-u}{\|x+tw_\perp-u\|} - v)\frac{1}{t} = \lim_{t\to 0}(\frac{x+tw_\perp-u}{\sqrt{\|x-u\|^2+t^2\|w_\perp\|^2}} - v)\frac{1}{t} = \lim_{t\to 0}(\frac{x+tw_\perp-u}{\sqrt{t^2+1}\|w_\perp\|} - v)\frac{1}{t} = \frac{w_\perp}{\|w\|} + \lim_{t\to 0}(\frac{(x-u)(1+\sqrt{t^2+1})}{t(\sqrt{t^2+1}\|w_\perp\|)}) = \frac{w_\perp}{\|w\|} + \lim_{t\to 0} \frac{-tv}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}})} = \frac{w_\perp}{\|w\|}$.
Cioè $Ker(du_x) = 0$ pertanto v è un valore regolare per $u(x)$. □

Corollario 3.1.5 *Sia r_0 la semiretta con origine in z_0 e direzione v tale che sia trasversale a X, sia z_1 un punto di r. Se l è il numero di volte che r interseca X tra z_0 e z_1 allora $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + l \, mod 2$.*



Dimostrazione: Definiamo r_1 la semiretta con origine in z_1 e direzione v e consideriamo la mappa $u_{z_i}(x) = \frac{x-z_i}{\|x-z_i\|}$ per $i = 0,\ 1$. Poichè r_0 è trasversale a X e $\sharp\{r_1 \cap X\} = m = \sharp u_{z_1}^{-1}(v)$ e $\sharp\{r_0 \cap X\} = m + l = \sharp u_{z_0}^{-1}(v)$, per il lemma precedente, segue che $W_2(X, z_0) = [\sharp\{r_0 \cap X\}]_{\mathrm{mod}\,2} = [m+l]_{\mathrm{mod}\,2} = [\sharp u_{z_1}^{-1}(v) + l]_{\mathrm{mod}\,2} = [W_2(X, z_1) + l]_{\mathrm{mod}\,2}$. $\square$

Sia ora r una semiretta avente origine in $z_0 \notin X$, direzione v tale che r sia trasversale a X e sia z_1 un punto del raggio in modo che tra z_0 e z_1, r intersechi X esattamente una volta. Per il Corollario 3.1.5 $W_2(X, z_0) = W_2(X, z_1) + 1 \mod 2$, allora per il Lemma 3.1.3 z_0 e z_1 appartengono a connessi distinti. Utilizzando il Lemma 3.1.2 otteniamo la seguente.

Proposizione 3.1.6 $\mathbb{R}^n \setminus X$ *ha esattamente due componenti connesse*

$$D_0 = \{z \in \mathbb{R}^n |\ W_2(X, z) = 0\} \quad e \quad D_1 = \{z \in \mathbb{R}^n |\ W_2(X, z) = 1\}.$$

La proposizione successiva completa la dimostrazione del Teorema di Jordan–Brouwer nel caso compatto.

Proposizione 3.1.7 $\mathbb{R}^n \setminus X$ *consiste di due aperti connessi, l'esterno* D_0 *e l'interno* D_1*. Inoltre* $\overline{D}_1$ *è una varietà compatta con bordo* $\partial\overline{D}_1 = X$*.*

Dimostrazione: Il fatto che $\mathbb{R}^n \setminus X$ sia costituito di due connessi è garantito dalla Proposizione 3.1.6. Sia $x \in D_1$ dato che X è chiuso esiste un intorno aperto di x che sia completamente contenuto in D_1 che è pertanto aperto. Ragionando in maniera analoga si vede che D_0 è aperto. Resta da mostrare che $\overline{D}_1$ sia una varietà compatta con bordo, se $x \in D_1$ e U è un intorno contenuto in D_1 allora l'identità di $\mathbb{R}^n$ ristretta a U è una parametrizzazione intorno x di $\overline{D}_1$, sia ora $x \in X$ e sia V un intorno sufficientemente piccolo allora per il Corollario 1.1.10 $V \cong \mathbb{R}^n$ e $V \cap X \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ e pertanto $U \cap \overline{D}_1$ è diffeomorfo a H^n. Il fatto che $\overline{D}_1$ sia limitato e quindi compatto è una conseguenza del lemma che segue. $\square$

Lemma 3.1.8 *Se z è sufficientemente distante dall'origine di $\mathbb{R}^n$, allora $W_2(X, z) = 0$.*

Dimostrazione: Consideriamo la semiretta r avente origine z_0 e direzione $v = \frac{z_0}{\|z_0\|}$ e sia $\epsilon = max\{\|x\| \mid x \in X\}$. Definiamo $z = r \cap S_{\epsilon+1}(0)$ e trasliamo l'origine di r in z, segue $r \cap X = \emptyset$ e dunque $W_2(X, z) = 0$. $\square$

Osservazione 3.1.9 *Nell'ipotesi in cui X sia chiuso ma non necessariamente compatto e $\mathbb{R}^n \setminus X = D_0 \cup D_1$ sia costituito di due componenti connesse, dalla dimostrazione della proposizione 3.1.7 discende che $\overline{D}_0$ e $\overline{D}_1$ siano varietà con bordo e $X = \partial\overline{D}_0 = \partial\overline{D}_1$.*

3.2 Caso chiuso

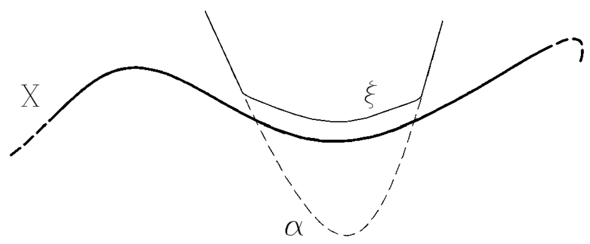
Diamo ora, una dimostrazione del Teorema di JB nel caso chiuso, che invece di utilizzare le proprietà dell'indice di avvolgimento, sfrutta la teoria della trasversalità. Per l'Osservazione 3.1.9 possiamo limitarci a dimostrare il seguente teorema.

Teorema 3.2.1 *Un'ipersuperficie $X \subset \mathbb{R}^n$ chiusa e senza bordo separa $\mathbb{R}^n$ in due aperti connessi*

Dimostrazione: Dimostriamo prima che $\mathbb{R}^n \setminus X$ sia costituito da almeno due componenti connesse. Procediamo per assurdo e supponiamo che $R^n \setminus X$ sia costituito da una sola componente connessa. Consideriamo un segmento L di estremi z_0 e z_1 che attraversa la superficie e che sia trasversale ad essa e completiamolo ad una curva chiusa γ che non interseca X in nessun'altro punto. Essendo $\mathbb{R}^n$ semplicemente connesso, γ può essere contratta ad un punto, cioè esiste una mappa liscia $f : D^2 \to \mathbb{R}^n$ tale che $f(S^1) = \gamma$, poichè ∂f è trasversale a X, per il Teorema 1.3.9, non lede la generalità supporre che f sia trasversale a X. Poichè la codimensione di X in $\mathbb{R}^n$ è 1, allora $f^{-1}(X) \subset D^2$ è una varietà unidimensionale e pertanto possiede un bordo costituito da un numero pari di punti, contraddicendo il fatto che γ interseca X in un solo punto.

Facciamo vedere ora che le componenti connesse sono esattamente due, supponiamo allora siano almeno tre e siano c_1, c_2, c_3 punti appartenenti a componenti connesse G_1, G_2, G_3 distinte. Sia α una curva che unisce c_1 e

c_2, trasversale a X. Seguendo la curva a partire da c_1 fino a c_2 α dovrà intersecare X in un numero finito di punti, supponiamo $d_1, \ldots, d_m$, presi nell'ordine di incontro. Sia β una curva di X che unisce d_1 con d_2 (che esiste perchè X è connessa!), proiettando i punti di β nella direzione della normale alla superficie e nel verso della componente connessa G_1, di una distanza ϵ abbastanza piccola, si ottiene una curva contenuta nella componente G_1 che può essere connessa alla curva α prima che intersechi X. È stata cioè creata una nuova curva ξ che connette c_1 a c_2, e che interseca X $m-2$ volte. Iterando



il ragionamento si vede che esiste una curva δ_{12} che unisce i punti c_1, c_2 e che incontra X una sola volta. Analogamente esiste una cura δ_{23} che connette c_2 con c_3, e che incontra l'ipersuperficie esattamente una volta, pertanto c_1 e c_3 sono uniti da una curva che interseca due volte X. Ripetendo il ragionamento precedente le due intersezioni possono essere eliminate e dunque c_1 e c_3 fanno parte della stessa componente connessa, contraddicendo l'ipotesi iniziale. $\square$

3.3 Orientabilità

Lo scopo di questo paragrafo è di mostrare i legami tra il teorema di separazione e l'orientabilità di un'ipersuperficie X chiusa e senza bordo di $\mathbb{R}^n$. Cominciamo ricordando alcune definizioni.

Definizione 3.3.1 *Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un'ipersuperficie. Un campo di vettori normali a X è un'applicazione liscia $v : X \to \mathbb{R}^n$ tale che $v(x)$ sia perpendicolare $T_x(X)$, $\forall x \in X$.*

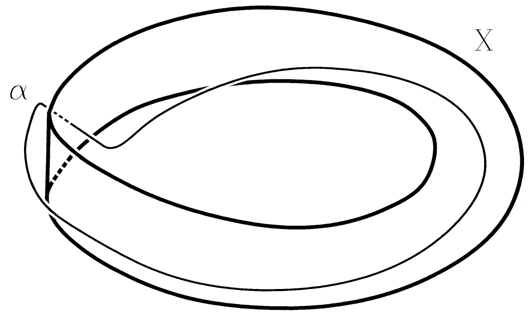
Definizione 3.3.2 *Sia X un'ipersuperficie e sia $\beta : I \to X$ una curva in X. Un campo di vettori normali a X lungo la curva β è una mappa liscia $n : I \to \mathbb{R}^n$ tale che $n(\beta(t))$ sia perpendicolare a $T_{\beta(t)}X$, $\forall t \in I$.*

Definizione 3.3.3 *Un'ipersuperficie è orientabile se esiste un campo liscio di vettori unitari normale associato ad X.*

Osserviamo che se $u : X \to \mathbb{R}^n$ è un campo di vettori normali a X tale che $u(x) \neq 0$ $\forall x \in X$, allora X è orientabile. Infatti $v(x) = \frac{u(x)}{\|u(x)\|}$ soddisfa la definizione precedente.

Definizione 3.3.4 *Un'ipersuperficie $X \subset \mathbb{R}^n$ non è orientabile se esiste una curva β chiusa in X e un campo di vettori normale $n(x)$ unitario lungo β, tale che $\lim_{t \to t_0^+} n(\beta(t)) = -\lim_{t \to t_0^-} n(\beta(t))$ per qualche $t_0 \in I$.*

L'esempio classico di superficie in $\mathbb{R}^3$ non orientabile è il nastro di Moebius. Nella figura seguente viene illustrata una curva α che lo interseca in



un solo punto trasversalmente. Nel Lemma 3.3.5 si mostra che questo fatto è una caratteristica delle ipersuperfici non orientabili di $\mathbb{R}^n$.

Lemma 3.3.5 *Se un'ipersuperficie $X \subset \mathbb{R}^n$ non è orientabile, allora esiste una curva liscia α che interseca X in un unico punto x_0 e che sia ad essa trasversale.*

Dimostrazione: Sia $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ una curva chiusa come nella Definizione 3.3.4. Consideriamo la curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ definita da $\gamma(t) = \beta(t) + \epsilon(t)n(\beta(t))$, con $\epsilon(t) > 0$ tale che $\beta(t)$ sia il punto di X più vicino a $\gamma(t)$ (l'esistenza di $\epsilon(x)$ è garantita dal Teorema 1.1.12). La curva α ottenuta connettendo in modo liscio il segmento di retta di estremi $\lim_{t \to t_0^-} \gamma(t)$ e $\lim_{t \to t_0^+} \gamma(t)$ con la curva $\gamma(t)$ è la curva desiderata. $\square$

Proposizione 3.3.6 *Ogni ipersuperficie X di $\mathbb{R}^n$ chiusa e senza bordo è orientabile.*

Dimostrazione: Supponiamo X non orientabile, dunque per il Lemma 3.3.5 esiste una curva γ che interseca X in un punto e che sia ad essa trasversale.

Essendo $\mathbb{R}^n$ semplicemente connesso, γ può essere contratta ad un punto, cioè esiste una mappa liscia $f : D^2 \to \mathbb{R}^n$ tale che $f(S^1) = \gamma$. Essendo $\partial f : S \to \mathbb{R}^n$ trasversale a X per il Teorema 1.3.9, possiamo supporre che anche f sia trasversale a X. D'altra parte poichè la codimensione di X in $\mathbb{R}^n$ è 1, $f^{-1}(X)$ è una varietà unidimensionale e pertanto possiede un bordo costituito da un numero pari di punti (vedi corollario A.0.9 nell'appendice), contraddicendo il fatto che γ interseca X in un solo punto. $\square$

È interessante osservare che assumendo l'orientabilità di un'ipersuperficie $X \subset \mathbb{R}^n$ Lima [3] ha ottenuto un'ingegnosa dimostrazione del fatto che X separa R^n in due aperti connessi senza utilizzare la teoria della trasversalità. Osserviamo che il Teorema di Jordan–Brouwer implica orientabilità di X. Come espresso dalla seguente:

Proposizione 3.3.7 *Un'ipersuperficie $X \subset \mathbb{R}^n$ chiusa e senza bordo è orientabile.*

Dimostrazione: Supponiamo non sia così e sia γ una curva come quella descritta nel Lemma 3.3.5. Sia ora U un intorno di x_0 aperto in $\mathbb{R}^n$, consideriamo la curva $\delta = \gamma \backslash U$. Se U è sufficientemente piccolo, allora δ è una curva che unisce due punti che appartengono a connessi diversi senza intersecare X, dalla contraddizione segue la tesi. $\square$

Appendice A

Classificazione delle 1-varietà

Il teorema che segue, afferma un fatto molto intuitivo, la cui dimostrazione è meno semplice di quel che ci si aspetta. L'idea di base è che percorrendo a velocità costante, a partire da un punto una varietà compatta di dimensione 1, a un certo punto in virtù della compattezza, si incontra il bordo oppure il punto di partenza.

Teorema A.0.8 *(Classificazione delle varietà unidimensionali) Ogni varietà con bordo, di dimensione 1, che sia compatta, connessa è diffeomorfa all'intervallo* $[0, 1]$ *oppure alla circonferenza* S^1.

Corollario A.0.9 *Il bordo di ogni varietà unidimensionale, compatta e con bordo, consiste di un numero pari di punti.*

Appendice B

Teorema di Sard

Definizione B.0.10 *Sia $f : X \to Y$ una funzione liscia tra due varietà X e Y di dimensione rispettivamente l e k. Un punto $x \in X$ è detto punto regolare se $rg(df_x) = max\{l, k\}$, in caso contrario è chiamato punto critico. Un punto $y \in Y$ è detto valore regolare se la sua controimmagine $f^{-1}(y)$ è costituita solo da punti regolari, altrimenti è detto valore critico*

Si osservi in particolare, che i punti $y \in Y$ tali che $y \notin f(X)$, sono automaticamente valori regolari

Definizione B.0.11 *Sia $W \subset \mathbb{R}^n$ un insieme arbitrario, diremo che W è un insieme di misura nulla se per ogni $\epsilon > 0$ è possibile ricoprire W con una famiglia di cubi di $\mathbb{R}^n$ aventi volume complessivo minore di ϵ.*

Teorema di Sard B.0.1 *Per ogni funzione liscia f di una varietà con bordo X ad una varietà senza bordo Y, l'insieme dei valori che sono critici per f o per ∂f è un insieme di misura nulla.*

Bibliografia

[1] V. Gullemin e A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice Hall (1974).

[2] C. Kosniowski, *Introduzione alla topologia algebrica*, Trad. it. Nicola Zanichelli S.p.A. (1988).

[3] E. L. Lima, *The Jordan–Brouwer Separation Theorem for Smooth Hypersurfaces*, Am. Math. Monthly, 95 (1988) pp. 39-42.

[4] I. Madsen e J. Tornehave, *From Calculus To Cohomology*, Cambridge University Press (1997).

[5] J. W. Milnor, *From The Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia (1965).

[6] C. D. Pagani e S. Salsa, *Analisi Matematica*, vol. I Masson S.p.A. Milano (1991).

[7] H. Samelson, *Orientability of Hypersurfaces in* $\mathbb{R}^n$, Proc. Am. Math. Soc., 22 (1969) pp. 301-302.

[8] J. W. Vick, *Homology Theory*, Second Edition Springer-Verlang (1991).