Frazioni Continue e Applicazioni

Roberta Frongia

Università degli studi di Cagliari
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Relatore:
Andrea Loi

Indice dei contenuti

1. Definizioni
2. Numeri razionali
3. Numeri irrazionali
4. Applicazioni
   - Equazioni Diofantee
   - Sequenza di Fibonacci

Frazioni continue

Definizione

Una frazione continua è un'espressione della forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 - \cfrac{b_3}{\dots + \cfrac{b_n}{\dots}}}}$$

dove i termini $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ *possono essere numeri reali o complessi e il loro numero finito o infinito.*

Definizioni

Numeri razionali

Numeri irrazionali

Applicazioni

Equazioni Diofantee

Sequenza di Fibonacci

Definizione

Una frazione continua semplice è un'espressione della forma

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{\ldots}}}}$$

dove a_1 è un numero intero e $a_2, a_3..a_n, ..$ sono numeri interi positivi; i termini $a_1, a_2, a_3..a_n, ..$ sono chiamati quozienti parziali.

Frazioni continue

Notazione

Per semplicità di esposizione indicheremo la frazione continua semplice sopra indicata con la notazione: $[a_1, a_2, a_3, ..a_n, ..]$

Frazioni continue

Notazione

Per semplicità di esposizione indicheremo la frazione continua semplice sopra indicata con la notazione: $[a_1, a_2, a_3, ..a_n, ..]$

Definizione

Se i quozienti parziali sono in numero finito $[a_1, a_2, a_3, .., a_n]$ prende il nome di frazione continua semplice finita, altrimenti si dice frazione continua semplice infinita.

Frazioni continue e numeri razionali

Teorema

Ogni frazione continua semplice finita puó essere ricondotta a un numero razionale $\frac{p}{q}$, *con p e q interi, primi tra loro.*
Viceversa ogni numero razionale $\frac{p}{q}$ *puó essere scritto come frazione continua semplice finita.*

Frazioni continue e numeri razionali: Esempio

- Consideriamo il numero: $\dfrac{117}{49}$

Frazioni continue e numeri razionali: Esempio

- Consideriamo il numero: $\dfrac{117}{49}$
- Dividiamo 117 per 49 ottenendo:
  $117 = 49 \times 2 + 19$

Frazioni continue e numeri razionali: Esempio

- Consideriamo il numero: $\dfrac{117}{49}$
- Dividiamo 117 per 49 ottenendo:
  $117 = 49 \times 2 + 19$
- Iterando il processo mediante l'algoritmo Euclideo della divisione otteniamo:
  $49 = 19 \times 2 + 11$
  $19 = 11 \times 1 + 8$
  $11 = 8 \times 1 + 3$
  $8 = 3 \times 2 + 2$
  $3 = 2 \times 1 + 1$
  $2 = 2 \times 1 + 0$

Frazioni continue e numeri razionali: Esempio

- Abbiamo quindi ottenuto:

$$\frac{117}{49} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}}} = [2, 2, 1, 1, 2, 1, 1]$$

- La frazione continua ha 7 quozienti parziali

Frazioni continue e numeri razionali: Esempio

- l'espressione ottenuta puó essere modificata come segue:

$$\frac{117}{49} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = [2, 2, 1, 1, 2, 2]$$

in modo tale che abbia 6 quozienti parziali.

Frazioni continue e numeri razionali: Esempio

- l'espressione ottenuta puó essere modificata come segue:

$$\frac{117}{49} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} = [2, 2, 1, 1, 2, 2]$$

in modo tale che abbia 6 quozienti parziali.

- Questo risultato vale in generale per ogni frazione continua semplice finita.

Frazioni Continue e Applicazioni
Roberta Frongia
Definizioni
Numeri razionali
Numeri irrazionali
Applicazioni
Equazioni Diofantee
Sequenza di Fibonacci

Teorema

Ogni numero irrazionale della forma $\dfrac{P+\sqrt{D}}{Q}$ *con* P, Q, R *numeri interi,* $D > 0$ *e tale che non sia un quadrato perfetto, puó essere scritto sotto forma di frazione continua semplice infinita.*

Frazioni continue e numeri irrazionali:Esempio

Consideriamo il numero : $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(Soluzione dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$)

Frazioni continue e numeri irrazionali:Esempio

Consideriamo il numero : $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(Soluzione dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$)

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Frazioni continue e numeri irrazionali:Esempio

Consideriamo il numero : $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(Soluzione dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$)

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}}$$

Frazioni continue e numeri irrazionali:Esempio

Consideriamo il numero : $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(Soluzione dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$)

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}}$$

Consideriamo il numero : $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(Soluzione dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$)

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{5}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}}$$

$$= 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Frazioni continue e numeri irrazionali:Esempio

Consideriamo il numero : $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(Soluzione dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$)

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\sqrt{5}-1}} = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

Frazioni continue e numeri irrazionali:Esempio

Iterando il procedimento otteniamo:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{\ldots}}}} = [1, 1, 1, ..., 1, ...]$$

Ossia una frazione continua semplice infinita.

Convergenti di una frazione continua

Definizione

Sia $\frac{p}{q}$ *un numero razionale tale che* $\frac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, .., a_n]$.
Le frazioni:
$C_1 = [a_1]$, $C_2 = [a_1, a_2]$, $C_3 = [a_1, a_2, a_3]$...
$C_n = [a_1, a_2, a_3, .., a_n]$
sono chiamate convergenti della frazione continua.

Convergenti di una frazione continua: Proprietá

Ogni convergente è un numero razionale e puó essere scritta come $C_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ per ogni $i = 1, ..., n$

Convergenti di una frazione continua: Proprietá

Ogni convergente è un numero razionale e puó essere scritta come $C_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ per ogni $i = 1, ..., n$

- $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$

Convergenti di una frazione continua: Proprietá

Ogni convergente è un numero razionale e puó essere scritta come $C_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ per ogni $i = 1, ..., n$

- $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$
- $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$

Convergenti di una frazione continua: Proprietá

Ogni convergente è un numero razionale e puó essere scritta come $C_i = \dfrac{p_i}{q_i}$ per ogni $i = 1, ..., n$

- $p_i = a_i p_{i-1} + p_{i-2}$
- $q_i = a_i q_{i-1} + q_{i-2}$
- $p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = (-1)^i$

  per ogni $i = 1, ..., n$

Equazioni Diofantee

Teorema

L'equazione $ax - by = 1$, con a e b interi tali che $(a, b) = 1$, ha infinite soluzioni intere.

Equazioni Diofantee

Teorema

L'equazione $ax - by = 1$, con a e b interi tali che $(a, b) = 1$, ha infinite soluzioni intere.

Dimostrazione:

- $\dfrac{a}{b} = [a_1, a_2, a_3, .., a_n]$

Equazioni Diofantee

Teorema

L'equazione $ax - by = 1$, con a e b interi tali che $(a, b) = 1$, ha infinite soluzioni intere.

Dimostrazione:

- $\frac{a}{b} = [a_1, a_2, a_3, .., a_n]$
- $C_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $C_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$

Equazioni Diofantee

Teorema

L'equazione $ax - by = 1$, con a e b interi tali che $(a, b) = 1$, ha infinite soluzioni intere.

Dimostrazione:

- $\dfrac{a}{b} = [a_1, a_2, a_3, .., a_n]$
- $C_{n-1} = \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \; C_n = \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{a}{b}$
- $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$

Equazioni Diofantee

Teorema

L'equazione $ax - by = 1$, con a e b interi tali che $(a, b) = 1$, ha infinite soluzioni intere.

Dimostrazione:

- $\frac{a}{b} = [a_1, a_2, a_3, .., a_n]$
- $C_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, C_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$
- $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$
- $a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^n$

Equazioni Diofantee: dimostrazione

- Se n è pari: $aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1$

Equazioni Diofantee: dimostrazione

- Se n è pari: $aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1$
- Abbiamo le soluzioni particolari: $x_0 = q_{n-1}$ e $y_0 = p_{n-1}$

Equazioni Diofantee: dimostrazione

- Se n è pari: $aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1$
- Abbiamo le soluzioni particolari: $x_0 = q_{n-1}$ e $y_0 = p_{n-1}$
- Se n è dispari possiamo modificare l'ultimo quoziente parziale di $\dfrac{a}{b}$ e ricondurci al caso precedente.

Equazioni Diofantee: dimostrazione

- Se n è pari: $aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1$
- Abbiamo le soluzioni particolari: $x_0 = q_{n-1}$ e $y_0 = p_{n-1}$
- Se n è dispari possiamo modificare l'ultimo quoziente parziale di $\frac{a}{b}$ e ricondurci al caso precedente.
- Si hanno dunque le equazioni:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ax_0 - by_0 = 1 \end{cases}$$

Equazioni Diofantee: dimostrazione

- Se n è pari: $aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1$
- Abbiamo le soluzioni particolari: $x_0 = q_{n-1}$ e $y_0 = p_{n-1}$
- Se n è dispari possiamo modificare l'ultimo quoziente parziale di $\frac{a}{b}$ e ricondurci al caso precedente.
- Si hanno dunque le equazioni:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ ax_0 - by_0 = 1 \end{cases}$$

- Sottraendo membro a membro si ottiene $a(x - x_0) = b(y - y_0)$

Equazioni Diofantee: dimostrazione

- Poiché $(a, b) = 1$ otteniamo: $x = x_0 + bt$

Equazioni Diofantee: dimostrazione

- Poiché $(a, b) = 1$ otteniamo: $x = x_0 + bt$
  e sostituendo troviamo: $y = y_0 + at$

Equazioni Diofantee: dimostrazione

- Poiché $(a, b) = 1$ otteniamo: $x = x_0 + bt$
  e sostituendo troviamo: $y = y_0 + at$

Conclusione

Le soluzioni generali dell'equazione $ax - by = 1$ sono :

$$\begin{cases} x = x_0 + bt \\ y = y_0 + at \end{cases}$$

infinite al variare dell'intero t.

Equazioni Diofantee: osservazione

Osservazione

Il risultato ottenuto per l'equazione $ax - by = 1$ con $(a, b) = 1$ si puó generalizzare a qualsiasi equazione diofantea della forma $Ax \pm By = \pm C$ con A, B e C interi.

Sequenza di Fibonacci e numero aureo

Definizione

La successione di Fibonacci, indicata con F_n, è una successione di numeri interi positivi in cui ciascun termine è la somma dei due precedenti e i primi due sono per definizione:

$$F_1 = 1; \quad F_2 = 1;$$

quindi

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Sequenza di Fibonacci e numero aureo

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$

Sequenza di Fibonacci e numero aureo

- $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$
- $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, ..., 1, ...]$

Sequenza di Fibonacci e numero aureo

- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, . . .
- $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, ..., 1, ...]$
- $C_1 = 1, \quad C_2 = 2, \quad C_3 = \dfrac{3}{2},$

  $C_4 = \dfrac{5}{3}, \quad C_5 = \dfrac{8}{5}, \quad C_6 = \dfrac{13}{8}, \quad \ldots$

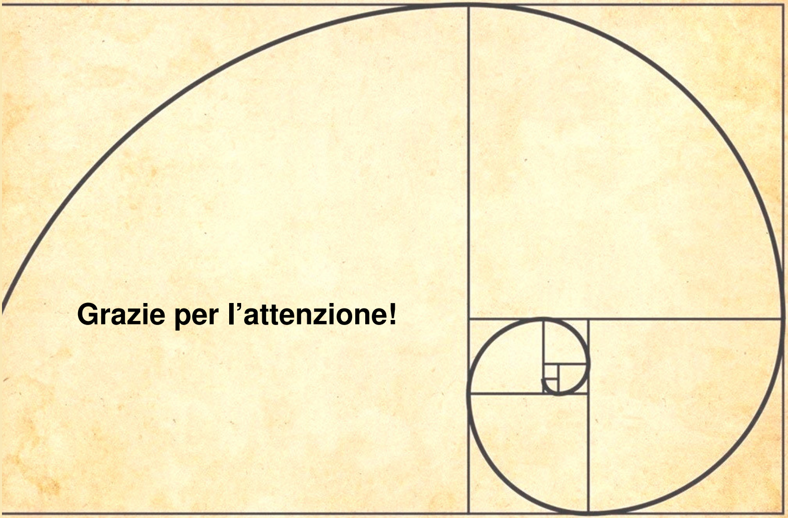
Sequenza di Fibonacci e numero aureo

Conclusione

L'n-sima convergente avrá quindi la forma:

$$C_n = \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

I numeri che compaiono al numeratore e al denominatore sono esattamente i termini della successione di Fibonacci.



Grazie per l'attenzione!