Classificazione dei moduli finitamente generati su un dominio euclideo

Relatore:
Prof. Andrea Loi

Candidato:
Gianfrancesco Pusceddu

Università degli Studi di Cagliari

31 Marzo 2015

Teorema di classificazione dei moduli finitamente generati su un dominio euclideo

Obiettivo:

Sia M un E-modulo finitamente generato.

$\Rightarrow M$ è somma diretta di moduli ciclici

Schema della presentazione

Prime definizioni e proprietà sui domini

Definizione

D dominio sse D anello commutativo unitario e vale la ldc

Definizione

Data $a \in D^*, b \in D$

- a divide b sse $\exists c$ tc $ac = b$

Sia D un dominio e $a, b \in D$, $c, d \in D^*$:

- a associato a b sse $a|b$ e $b|a$
- a primo sse $a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$
- $d = (a, b)$ MCD sse $d|a \wedge d|b \wedge (\forall c)(c|a \wedge c|b \Rightarrow c|d)$

Prime definizioni e proprietà sui domini

Definizione

D dominio sse D anello commutativo unitario e vale la ldc

Definizione

Data $a \in D^*, b \in D$

- a divide b sse $\exists c$ tc $ac = b$

Sia D un dominio e $a, b \in D$, $c, d \in D^*$:

- a associato a b sse $a|b$ e $b|a$
- a primo sse $a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$
- $d = (a, b)$ MCD sse $d|a \wedge d|b \wedge (\forall c)(c|a \wedge c|b \Rightarrow c|d)$

Class. moduli finitamente generati

Pusceddu Gianfrancesco

Domini euclidei

Moduli

Teorema di class.

Prime definizioni e proprietà sui domini

Definizione

D dominio sse D anello commutativo unitario e vale la ldc

Definizione

Data $a \in D^*, b \in D$

- a divide b sse $\exists c$ tc $ac = b$

Sia D un dominio e $a, b \in D$, $c, d \in D^*$:

- a associato a b sse $a|b$ e $b|a$
- a primo sse $a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$
- $d = (a, b)$ MCD sse $d|a \wedge d|b \wedge (\forall c)(c|a \wedge c|b \Rightarrow c|d)$

Prime definizioni e proprietà sui domini

Definizione

D dominio sse D anello commutativo unitario e vale la ldc

Definizione

Data $a \in D^*, b \in D$

- a divide b sse $\exists c$ tc $ac = b$

Sia D un dominio e $a, b \in D$, $c, d \in D^*$:

- a associato a b sse $a|b$ e $b|a$
- a primo sse $a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$
- $d = (a, b)$ MCD sse $d|a \wedge d|b \wedge (\forall c)(c|a \wedge c|b \Rightarrow c|d)$

Prime definizioni e proprietà sui domini

Definizione

D dominio sse D anello commutativo unitario e vale la ldc

Definizione

Data $a \in D^*$, $b \in D$

- a divide b sse $\exists c$ tc $ac = b$

Sia D un dominio e $a, b \in D$, $c, d \in D^*$:

- a associato a b sse $a|b$ e $b|a$
- a primo sse $a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$
- $d =(a, b)$ MCD sse $d|a \wedge d|b \wedge (\forall c)(c|a \wedge c|b \Rightarrow c|d)$

Vari tipi di domini e loro proprietà

Definizione

E dominio euclideo sse $\exists \delta : E^* \to \mathbb{N}$ t.c.,dati $a, b \in E^*$:

- $\delta(ab) \geq \delta(a)$
- $\exists q, r$ t.c. $a = qb + r$ con $r = 0 \vee \delta(r) < \delta(b)$

Proprietà

Dato $d \in E^*$

- ha scomposizione unica in prodotto di primi

Dati $a, b \in E^*$

- $\exists! d \in E$ tc $d = (a, b))$

Vari tipi di domini e loro proprietà

Definizione

E dominio euclideo sse $\exists \delta : E^* \to \mathbb{N}$ t.c.,dati $a, b \in E^*$:

- $\delta(ab) \geq \delta(a)$
- $\exists q, r$ t.c. $a = qb + r$ con $r = 0 \vee \delta(r) < \delta(b)$

Proprietà

Dato $d \in E^*$

- ha scomposizione unica in prodotto di primi

Dati $a, b \in E^*$

- $\exists! d \in E$ tc $d = (a, b))$

Vari tipi di domini e loro proprietà

Definizione

E dominio euclideo sse $\exists \delta : E^* \to \mathbb{N}$ t.c.,dati $a, b \in E^*$:

- $\delta(ab) \geq \delta(a)$
- $\exists q, r$ t.c. $a = qb + r$ con $r = 0 \vee \delta(r) < \delta(b)$

Proprietà

Dato $d \in E^*$

- ha scomposizione unica in prodotto di primi

Dati $a, b \in E^*$

- $\exists ! d \in E$ tc $d = (a, b))$

Esempi di domini euclidei

Esempio 1

$\mathbb{Z}$ è un dominio euclideo

Esempio 2

$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un dominio euclideo

Esempio 3

$\mathbb{K}[x]$ è un dominio euclideo

Esempi di domini euclidei

Esempio 1

$\mathbb{Z}$ è un dominio euclideo

Esempio 2

$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un dominio euclideo

Esempio 3

$\mathbb{K}[x]$ è un dominio euclideo

Esempi di domini euclidei

Esempio 1

$\mathbb{Z}$ è un dominio euclideo

Esempio 2

$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\}$ è un dominio euclideo

Esempio 3

$\mathbb{K}[x]$ è un dominio euclideo

Definizione di modulo

Definizione

$(M, +, \cdot)$ A - modulo sse $(M, +)$ gruppo abeliano , $(A, \oplus, \odot)$ anello commutativo unitario e $\cdot : A \times M \to M$ t.c.
Dati $a, b \in A$ e $x, y \in M$:

1. $a \cdot (x + y) = (a \cdot x) + (a \cdot y)$
2. $(a \oplus b)x = a \cdot x + b \cdot x$
3. $a \cdot (b \cdot x) = (a \odot b) \cdot x$
4. $1_A x = x$

Alcune definizioni sui sottomoduli

Definizione

$N \leq M$ sottomodulo sse N è un A-modulo

Definizione

Se $x \in M$

- $< x >$ sottomodulo ciclico

Se $\{N_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ con $|\mathcal{I}| < \infty$ sottomoduli di M,

- $\langle N_i \rangle_{i \in \mathcal{I}}$ sottomodulo generato
- $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} N_i$ somma diretta

Se N sottomodulo di M

- M/N modulo quoziente

Alcune definizioni sui sottomoduli

Definizione

$N \leq M$ sottomodulo sse N è un A-modulo

Definizione

Se $x \in M$

- $< x >$ sottomodulo ciclico

Se $\{N_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ con $|\mathcal{I}| < \infty$ sottomoduli di M,

- $\langle N_i \rangle_{i \in \mathcal{I}}$ sottomodulo generato
- $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} N_i$ somma diretta

Se N sottomodulo di M

- M/N modulo quoziente

Alcune definizioni sui sottomoduli

Definizione

$N \leq M$ sottomodulo sse N è un A-modulo

Definizione

Se $x \in M$

- $< x >$ sottomodulo ciclico

Se $\{N_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ con $|\mathcal{I}| < \infty$ sottomoduli di M,

- $\langle N_i \rangle_{i \in \mathcal{I}}$ sottomodulo generato
- $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} N_i$ somma diretta

Se N sottomodulo di M

- M/N modulo quoziente

Alcune definizioni sui sottomoduli

Definizione

$N \leq M$ sottomodulo sse N è un A-modulo

Definizione

Se $x \in M$

- $< x >$ sottomodulo ciclico

Se $\{N_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ con $|\mathcal{I}| < \infty$ sottomoduli di M,

- $\langle N_i \rangle_{i \in \mathcal{I}}$ sottomodulo generato
- $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} N_i$ somma diretta

Se N sottomodulo di M

- M/N modulo quoziente

Alcune definizioni sui sottomoduli

Definizione

$N \leq M$ sottomodulo sse N è un A-modulo

Definizione

Se $x \in M$

- $< x >$ sottomodulo ciclico

Se $\{N_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ con $|\mathcal{I}| < \infty$ sottomoduli di M,

- $\langle N_i \rangle_{i \in \mathcal{I}}$ sottomodulo generato
- $\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} N_i$ somma diretta

Se N sottomodulo di M

- M/N modulo quoziente

Alcune definizioni sugli omomorfismi e sulle basi

Definizione

Dati gli A-moduli M, M', $\varphi : M \to M'$ omomorfismo

Sia $\varphi \in Hom(M, M')$:

- $Ker(\varphi)$ nucleo di φ
- $Im(\varphi)$ immagine di φ

Definizione

- $\{x_i\}_{i=1}^{s} \subset M$ base sse sono linearmente indipendenti e generano M
- L libero sse $\exists s \in \mathbb{N}$ t.c. $M \simeq A^s$

Sia $x \in M$

- $0 :_A < x >= 0 :_A x = \{a \in A | ax = 0\}$ annullatore di x

Alcune definizioni sugli omomorfismi e sulle basi

Definizione

Dati gli A-moduli M, M', $\varphi : M \to M'$ omomorfismo

Sia $\varphi \in Hom(M, M')$:

- $Ker(\varphi)$ nucleo di φ
- $Im(\varphi)$ immagine di φ

Definizione

- $\{x_i\}_{i=1}^{s} \subset M$ base sse sono linearmente indipendenti e generano M
- L libero sse $\exists s \in \mathbb{N}$ t.c. $M \simeq A^s$

Sia $x \in M$

- $0 :_A < x >= 0 :_A x = \{a \in A | ax = 0\}$ annullatore di x

Alcune definizioni sugli omomorfismi e sulle basi

Definizione

Dati gli A-moduli M, M', $\varphi : M \to M'$ omomorfismo

Sia $\varphi \in Hom(M, M')$:

- $Ker(\varphi)$ nucleo di φ
- $Im(\varphi)$ immagine di φ

Definizione

- $\{x_i\}_{i=1}^{s} \subset M$ base sse sono linearmente indipendenti e generano M
- L libero sse $\exists s \in \mathbb{N}$ t.c. $M \simeq A^s$

Sia $x \in M$

- $0 :_A < x > = 0 :_A x = \{a \in A | ax = 0\}$ annullatore di x

Alcune definizioni sugli omomorfismi e sulle basi

Definizione

Dati gli A-moduli M, M', $\varphi : M \to M'$ omomorfismo

Sia $\varphi \in Hom(M, M')$:

- $Ker(\varphi)$ nucleo di φ
- $Im(\varphi)$ immagine di φ

Definizione

- $\{x_i\}_{i=1}^{s} \subset M$ base sse sono linearmente indipendenti e generano M
- L libero sse $\exists s \in \mathbb{N}$ t.c. $M \simeq A^s$

Sia $x \in M$

- $0 :_A < x >= 0 :_A x = \{a \in A | ax = 0\}$ annullatore di x

Alcune definizioni sugli omomorfismi e sulle basi

Definizione

Dati gli A-moduli M, M', $\varphi : M \to M'$ omomorfismo

Sia $\varphi \in Hom(M, M')$:

- $Ker(\varphi)$ nucleo di φ
- $Im(\varphi)$ immagine di φ

Definizione

- $\{x_i\}_{i=1}^{s} \subset M$ base sse sono linearmente indipendenti e generano M
- L libero sse $\exists s \in \mathbb{N}$ t.c. $M \simeq A^s$

Sia $x \in M$

- $0 :_A < x >= 0 :_A x = \{a \in A | ax = 0\}$ annullatore di x

Teoremi su omomorfismi e basi

Teorema

- $\varphi \in Hom(M, M') \Rightarrow M/Ker(\varphi) \simeq Im(\varphi)$
- L libero $\Leftrightarrow \exists$ una base $\Leftrightarrow$ $\exists\{x_i\}_{i=1}^s \subset L$ tc $L = \bigoplus_{i=1}^s < x_i >$ con $0 : x_i = (0)$
- L libero $\Rightarrow$ basi equipotenti

Definizione

Se L è un A-modulo libero, $rg(L)$ è la cardinalità delle basi

Teoremi su omomorfismi e basi

Teorema

- $\varphi \in Hom(M, M') \Rightarrow M/Ker(\varphi) \simeq Im(\varphi)$
- L libero $\Leftrightarrow \exists$ una base $\Leftrightarrow$ $\exists \{x_i\}_{i=1}^s \subset L$ tc $L = \bigoplus_{i=1}^s < x_i >$ con $0 : x_i = (0)$
- L libero $\Rightarrow$ basi equipotenti

Definizione

Se L è un A-modulo libero, $rg(L)$ è la cardinalità delle basi

Teoremi su omomorfismi e basi

Teorema

- $\varphi \in Hom(M, M') \Rightarrow M/Ker(\varphi) \simeq Im(\varphi)$
- L libero $\Leftrightarrow \exists$ una base $\Leftrightarrow$ $\exists \{x_i\}_{i=1}^{s} \subset L$ tc $L = \bigoplus_{i=1}^{s} < x_i >$ con $0 : x_i = (0)$
- L libero $\Rightarrow$ basi equipotenti

Definizione

Se L è un A-modulo libero, $rg(L)$ è la cardinalità delle basi

Teoremi su omomorfismi e basi

Teorema

- $\varphi \in Hom(M, M') \Rightarrow M/Ker(\varphi) \simeq Im(\varphi)$
- L libero $\Leftrightarrow \exists$ una base $\Leftrightarrow$ $\exists \{x_i\}_{i=1}^{s} \subset L$ tc $L = \bigoplus_{i=1}^{s} < x_i >$ con $0 : x_i = (0)$
- L libero $\Rightarrow$ basi equipotenti

Definizione

Se L è un A-modulo libero, $rg(L)$ è la cardinalità delle basi

Esempi di moduli finitamente generati

Esempio 1

I gruppi abeliani finitamente generati

Esempio 2

E^s con E euclideo

Esempio 3

Gli spazi vettoriali a dimensione finita

Esempi di moduli finitamente generati

Esempio 1

I gruppi abeliani finitamente generati

Esempio 2

E^s con E euclideo

Esempio 3

Gli spazi vettoriali a dimensione finita

Esempi di moduli finitamente generati

Esempio 1

I gruppi abeliani finitamente generati

Esempio 2

E^s con E euclideo

Esempio 3

Gli spazi vettoriali a dimensione finita

Ultimi preliminari

Teorema delle due basi

Siano L un E-modulo t.c. $rg(L) = s$ e N un E-sottomodulo, $\exists\{v_i\}_{i=1}^{s}$ base di L e $\{d_i\}_{i=1}^{t} \subset E$ tc $\{d_i v_i\}_{i=1}^{t}$ base di N

Teorema

Sia L un A-modulo e $\{e_i\}_{i=1}^{s}$ una sua base.
Posto $N = <\{d_i e_i\}_{i=1}^{t}>$ con $t \leq s$ e $\{d_i\}_{i=1}^{t} \subset E$
Allora

$$L/N = \bigoplus_{i=1}^{s} < \overline{e_i} >$$

con

$$0 : \overline{e_i} = \begin{cases} (d_i) & se\ i \leq t \\ (0) & se\ i \geq t+1 \end{cases}$$

Ultimi preliminari

Teorema delle due basi

Siano L un E-modulo t.c. $rg(L) = s$ e N un E-sottomodulo, $\exists \{v_i\}_{i=1}^s$ base di L e $\{d_i\}_{i=1}^t \subset E$ tc $\{d_i v_i\}_{i=1}^t$ base di N

Teorema

Sia L un A-modulo e $\{e_i\}_{i=1}^s$ una sua base.
Posto $N =< \{d_i e_i\}_{i=1}^t >$ con $t \leq s$ e $\{d_i\}_{i=1}^t \subset E$
Allora

$$L/N = \bigoplus_{i=1}^{s} < \overline{e_i} >$$

con

$$0 : \overline{e_i} = \begin{cases} (d_i) & se\ i \leq t \\ (0) & se\ i \geq t+1 \end{cases}$$

Teorema di classificazione dei moduli finitamente generati su un dominio euclideo

Teorema

$M = \sum_{i=1}^{s} < m_i >$ E-modulo

$$\Rightarrow (\exists \{b_i\}_{i=1}^{s})(M = \bigoplus_{i=1}^{s} < b_i >)$$

Dimostrazione

1. $\varphi : E^s \to M$ epimorfismo con $\varphi(e_i) = m_i, \ \forall i = 1, ..., s$
2. $E^s / Ker(\varphi) \simeq M$
3. $\exists \{d_i v_i\}_{i=1}^{t}$ base di $Ker(\varphi)$
4. $E^s / Ker(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{s} < \overline{v_i} >$ con
$$0 : \overline{v_i} = \begin{cases} (d_i) & se \ i \leq t \\ (0) & se \ i \geq t+1 \end{cases}$$
5. $M = \bigoplus_{i=1}^{s} < \varphi(v_i) >$ con
$$0 : \varphi(v_i) = \begin{cases} (d_i) & se \ i \leq t \\ (0) & se \ i \geq t+1 \end{cases}$$

Teorema di classificazione dei moduli finitamente generati su un dominio euclideo

Teorema

$M = \sum_{i=1}^{s} < m_i >$ E-modulo

$$\Rightarrow (\exists \{b_i\}_{i=1}^{s})(M = \bigoplus_{i=1}^{s} < b_i >)$$

Dimostrazione

1. $\varphi : E^s \to M$ epimorfismo con $\varphi(e_i) = m_i, \ \forall i = 1, ..., s$
2. $E^s / Ker(\varphi) \simeq M$
3. $\exists \{d_i v_i\}_{i=1}^{t}$ base di $Ker(\varphi)$
4. $E^s / Ker(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{s} < \overline{v_i} >$ con

$$0 : \overline{v_i} = \begin{cases} (d_i) & \text{se } i \leq t \\ (0) & \text{se } i \geq t+1 \end{cases}$$

5. $M = \bigoplus_{i=1}^{s} < \varphi(v_i) >$ con

$$0 : \varphi(v_i) = \begin{cases} (d_i) & \text{se } i \leq t \\ (0) & \text{se } i \geq t+1 \end{cases}$$

Teorema di classificazione dei moduli finitamente generati su un dominio euclideo

Teorema

$$M = \sum_{i=1}^{s} < m_i > E\text{-modulo} \Rightarrow (\exists \{b_i\}_{i=1}^{s})(M = \bigoplus_{i=1}^{s} < b_i >)$$

Dimostrazione

1. $\varphi : E^s \to M$ epimorfismo con $\varphi(e_i) = m_i, \ \forall i = 1, ..., s$
2. $E^s / Ker(\varphi) \simeq M$
3. $\exists \{d_i v_i\}_{i=1}^{t}$ base di $Ker(\varphi)$
4. $E^s / Ker(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{s} < \overline{v_i} >$ con

   $$0 : \overline{v_i} = \begin{cases} (d_i) & se \ i \leq t \\ (0) & se \ i \geq t+1 \end{cases}$$

5. $M = \bigoplus_{i=1}^{s} < \varphi(v_i) >$ con

   $$0 : \varphi(v_i) = \begin{cases} (d_i) & se \ i \leq t \\ (0) & se \ i \geq t+1 \end{cases}$$

Teorema di classificazione dei moduli finitamente generati su un dominio euclideo

Teorema

$$M = \sum_{i=1}^{s} < m_i > \ E\text{-modulo} \Rightarrow (\exists \{b_i\}_{i=1}^{s})(M = \bigoplus_{i=1}^{s} < b_i >)$$

Dimostrazione

1. $\varphi : E^s \to M$ epimorfismo con $\varphi(e_i) = m_i, \ \forall i = 1, ..., s$
2. $E^s / Ker(\varphi) \simeq M$
3. $\exists \{d_i v_i\}_{i=1}^{t}$ base di $Ker(\varphi)$
4. $E^s / Ker(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{s} < \overline{v_i} >$ con
   $$0 : \overline{v_i} = \begin{cases} (d_i) & se \ i \leq t \\ (0) & se \ i \geq t+1 \end{cases}$$
5. $M = \bigoplus_{i=1}^{s} < \varphi(v_i) >$ con
   $$0 : \varphi(v_i) = \begin{cases} (d_i) & se \ i \leq t \\ (0) & se \ i \geq t+1 \end{cases}$$

Teorema di classificazione dei moduli finitamente generati su un dominio euclideo

Teorema

$M = \sum_{i=1}^{s} < m_i > E$-modulo

$$\Rightarrow (\exists \{b_i\}_{i=1}^{s})(M = \bigoplus_{i=1}^{s} < b_i >)$$

Dimostrazione

1. $\varphi : E^s \to M$ epimorfismo con $\varphi(e_i) = m_i, \ \forall i = 1, ..., s$
2. $E^s / Ker(\varphi) \simeq M$
3. $\exists \{d_i v_i\}_{i=1}^{t}$ base di $Ker(\varphi)$
4. $E^s / Ker(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{s} < \overline{v_i} >$ con
$$0 : \overline{v_i} = \begin{cases} (d_i) & se \ i \leq t \\ (0) & se \ i \geq t+1 \end{cases}$$
5. $M = \bigoplus_{i=1}^{s} < \varphi(v_i) >$ con
$$0 : \varphi(v_i) = \begin{cases} (d_i) & se \ i \leq t \\ (0) & se \ i \geq t+1 \end{cases}$$

Teorema di classificazione dei moduli finitamente generati su un dominio euclideo

Teorema

$M = \sum_{i=1}^{s} < m_i > E$-modulo
$$\Rightarrow (\exists \{b_i\}_{i=1}^{s})(M = \bigoplus_{i=1}^{s} < b_i >)$$

Dimostrazione

1. $\varphi : E^s \to M$ epimorfismo con $\varphi(e_i) = m_i, \ \forall i = 1, ..., s$
2. $E^s / Ker(\varphi) \simeq M$
3. $\exists \{d_i v_i\}_{i=1}^{t}$ base di $Ker(\varphi)$
4. $E^s / Ker(\varphi) = \bigoplus_{i=1}^{s} < \overline{v_i} >$ con
$$0 : \overline{v_i} = \begin{cases} (d_i) & se\ i \leq t \\ (0) & se\ i \geq t+1 \end{cases}$$
5. $M = \bigoplus_{i=1}^{s} < \varphi(v_i) >$ con
$$0 : \varphi(v_i) = \begin{cases} (d_i) & se\ i \leq t \\ (0) & se\ i \geq t+1 \end{cases}$$

Ultimi teoremi

Teorema

Se $M = < x >$ è un E-modulo con $0 : x = (ab)$ e $(a, b) = 1$
$\Rightarrow M = < ax > \oplus < bx >$ con $0 : ax = (b)$ e $0 : bx = (a)$

Corollario

Se $M = < x >$ è un E-modulo con $0 : x = (d)$ e $d = \prod_{i=1}^{s} p_i^{r_i}$
$\Rightarrow M = \bigoplus_{i=1}^{s} < d_i x >$ e $0 : d_i x = (p_i^{r_i})$ con $d_i = d/p_i^{r_i}$

Teorema

Se $M = < x >$ è un E-modulo t.c. $0 : x = (0)$ o $0 : x = (p^r)$
con p primo $\Rightarrow \nexists N_1, N_2$ t.c. $M = N_1 \oplus N_2$

Ultimi teoremi

Teorema

Se $M = < x >$ è un E-modulo con $0 : x = (ab)$ e $(a, b) = 1$
$\Rightarrow M = < ax > \oplus < bx >$ con $0 : ax = (b)$ e $0 : bx = (a)$

Corollario

Se $M = < x >$ è un E-modulo con $0 : x = (d)$ e $d = \prod_{i=1}^{s} p_i^{r_i}$
$\Rightarrow M = \bigoplus_{i=1}^{s} < d_i x >$ e $0 : d_i x = (p_i^{r_i})$ con $d_i = d / p_i^{r_i}$

Teorema

Se $M = < x >$ è un E-modulo t.c. $0 : x = (0)$ o $0 : x = (p^r)$
con p primo $\Rightarrow \nexists N_1, N_2$ t.c. $M = N_1 \oplus N_2$

Ultimi teoremi

Teorema

Se $M = < x >$ è un E-modulo con $0 : x = (ab)$ e $(a, b) = 1$
$\Rightarrow M = < ax > \oplus < bx >$ con $0 : ax = (b)$ e $0 : bx = (a)$

Corollario

Se $M = < x >$ è un E-modulo con $0 : x = (d)$ e $d = \prod_{i=1}^{s} p_i^{r_i}$
$\Rightarrow M = \bigoplus_{i=1}^{s} < d_i x >$ e $0 : d_i x = (p_i^{r_i})$ con $d_i = d / p_i^{r_i}$

Teorema

Se $M = < x >$ è un E-modulo t.c. $0 : x = (0)$ o $0 : x = (p^r)$
con p primo $\Rightarrow \nexists N_1, N_2$ t.c. $M = N_1 \oplus N_2$