Il primo teorema di isomorfismo per gruppi di Lie e applicazione alla classificazione dei gruppi di Lie abeliani

Matteo Palmieri

24 febbraio 2023

Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2022/2023
Relatore: Prof. Andrea Loi

Introduzione

L'obiettivo di questa trattazione è estendere il primo teorema di isomorfismo dalla categoria dei gruppi alla categoria dei gruppi di Lie e impiegare questo risultato per fornire una dimostrazione del teorema di classificazione dei gruppi di Lie abeliani. Un gruppo di Lie è un gruppo che è anche una varietà differenziabile tale che il prodotto di gruppo e l'inversione di gruppo siano applicazioni lisce rispetto alla struttura differenziabile di cui è munito il gruppo. Questi oggetti sono stati introdotti dal matematico norvegese Sophus Lie (1842-1899) nel tentativo di modellizzare le simmetrie continue delle equazioni differenziali, in analogia con l'uso dei gruppi finiti nella teoria di Galois per modellizzare le simmetrie discrete delle equazioni algebriche; si sono successivamente mostrati utili nello studio di vari settori della matematica e della fisica moderna.

L'esposizione è articolata in quattro capitoli. Nel Capitolo 1 sono richiamati e approfonditi alcuni utili concetti di algebra, topologia e geometria differenziale. Nel Capitolo 2 sono introdotti i gruppi e i sottogruppi di Lie discreti e mediante essi è dimostrato il primo teorema di isomorfismo. Nel Capitolo 3 sono studiati gli spazi vettoriali reali finito-dimensionali come gruppi di Lie. Nel Capitolo 4 è introdotto il concetto di gruppo divisibile ed è dimostrato il teorema di classificazione dei gruppi di Lie abeliani.

Concludo quest'introduzione ringraziando la mia famiglia per il sostegno datomi, i miei compagni Antonio e Giuseppe per i momenti trascorsi nel nostro percorso universitario, il mio relatore prof. Andrea Loi per la fiducia che ha riposto in me nella realizzazione di questa tesi e l'aiuto fornitomi, i docenti del Corso di Laurea triennale in Matematica per gli insegnamenti ricevuti. Ultimi ma non certo per importanza, i miei amici, grazie ai quali ho potuto sorridere davanti ai sacrifici compiuti per raggiungere questo traguardo. A voi tutti dedico un mio pensiero, per quanto ermetico possa essere, nella speranza che riceviate il mio stesso regalo. "Ho scelto di studiare matematica, tra i vari motivi, per imparare a vedere oltre: e in ciò la matematica non ha

deluso le mie aspettative, prendendo la sua mano ho conosciuto meglio me stesso e ho iniziato a vedere le sfumature del mondo che mi circonda, delle persone che mi circondano. Le sono grato per la curiosità che ha fatto fiorire in me."

Indice

Capitolo 1

Generalità

In questo capitolo introdurremo le nozioni essenziali per capire e dimostrare i risultati affrontati nella tesi. Per una piena comprensione il lettore dovrà comunque possedere conoscenze di base riguardanti l'algebra lineare e gli altri settori che tratteremo di seguito, pertanto invitiamo alla consultazione della bibliografia.

1.1 Algebra

Per studiare i gruppi di Lie è indispensabile avere familiarità con la struttura algebrica di cui essi sono dotati, ovvero la struttura di gruppo. Ripercorriamo brevemente le principali informazioni riguardanti i gruppi con qualche approfondimento laddove necessario.
Il riferimento a questa sezione nella bibliografia è [4].

Definizione 1.1.1. ***(Gruppo)*** *Sia G un insieme e sia $\mu : G \times G \to G$ un'operazione binaria. Se*

- *μ è associativa*
- *$\exists\ e \in G$ tale che $\forall g \in G : \mu(g, e) = \mu(e, g) = g$*
- *$\forall g \in G\ \exists\ i(g) \in G$ tale che $\mu(g, i(g)) = \mu(i(g), g) = e$*

la terna (G, μ, e) è detta gruppo.
μ è detto prodotto di gruppo, l'elemento e è detto elemento neutro del gruppo e dato $g \in G$ l'elemento $i(g)$ è detto inverso di g, e si indica con g^{-1}.

Osservazione 1.1.2. Se (G, μ, e) è un gruppo, si dimostra che e è unico e per $g \in G$ fissato l'inverso di g è unico. Risulta allora ben definita un'applicazione

$$inv : G \to G : g \mapsto g^{-1}$$

detta inversione del gruppo.

Osservazione 1.1.3. Per snellire la notazione adotteremo le seguenti misure:

1. Quando ci riferiremo a un gruppo richiameremo solo l'insieme sottostante al posto della terna, indicheremo il prodotto del gruppo o l'elemento neutro del gruppo solo quando necessario.

2. Ci riferiremo al prodotto di gruppo e all'inversione del gruppo con l'appellativo di *operazioni del gruppo.*

3. Sostituiremo la notazione di applicazione per il prodotto del gruppo con la più agevole notazione di prodotto: se $g, h \in G$ allora $\mu(g, h)$ sarà indicato con gh, mentre se $A, B \subseteq G$ allora $\mu(A, B)$ sarà indicato con AB. Nel caso in cui $B = \{g\}$ allora $A\{g\}$ sarà indicato con Ag.

4. Talvolta, se $A \subseteq G$ allora $inv(A)$ sarà indicato con A^{-1}.

Definizione 1.1.4. ***(Gruppo abeliano)*** *Sia G un gruppo. Se il prodotto di gruppo è commutativo, G è detto gruppo abeliano.*

Osservazione 1.1.5. Se G è un gruppo abeliano useremo la seguente notazione:

1. Il prodotto di gruppo sarà detto somma del gruppo: gh sarà indicato con $g + h$, AB sarà indicato con $A + B$.

2. L'elemento neutro del gruppo sarà indicato con 0.

3. L'inverso di un elemento sarà detto opposto dell'elemento: g^{-1} sarà indicato con $-g$. Talvolta l'inversione sarà indicata con $-$.

Definizione 1.1.6. ***(Sottogruppo)*** *Sia G un gruppo. Un sottoinsieme H di G, $H \neq \varnothing$, è detto sottogruppo di G se*

- $\forall x, y \in H : xy \in H$
- $\forall h \in H : h^{-1} \in H$

Un sottogruppo H di G è detto proprio se è un sottoinsieme proprio di G.

Osservazione 1.1.7. Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo di G, poiché $H \neq \varnothing$ allora $\exists\ h \in H$ da cui $h^{-1} \in H$ e dunque $e = hh^{-1} \in H$.

Segue che H è un gruppo se munito del prodotto

$$\mu_H : H \times H \to H, \text{ restrizione e indotto del prodotto } \mu \text{ di } G$$

dove ha senso prendere l'applicazione indotta perché H è un sottogruppo, e il suo elemento neutro è proprio e.

Proposizione 1.1.8. ***(Caratterizzazione dei sottogruppi)*** *Sia G un gruppo e sia $H \subseteq G$, $H \neq \varnothing$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *H è un sottogruppo di G*
2. *$\forall g, h \in H : g^{-1}h \in H$*
3. *$\forall g, h \in H : gh^{-1} \in H$*
4. *$HH \subseteq H$, $H^{-1} \subseteq H$*
5. *$HH = H$, $H^{-1} = H$*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda a pagina 119 di [4].

□

Proposizione 1.1.9. *Sia G un gruppo e sia $\{H_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottogruppi di G. Allora $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ è un sottogruppo di G.*

Dimostrazione. Chiaramente $e \in \bigcap\limits_{i \in I} H_i$ perché $\forall i \in I : e \in H_i$ sottogruppo, quindi $\bigcap\limits_{i \in I} H_i \neq \varnothing$. Inoltre, se $g, h \in \bigcap\limits_{i \in I} H_i$ allora

$$\forall i \in I : g, h \in H_i \implies \forall i \in I : g^{-1}h \in H_i \implies g^{-1}h \in \bigcap_{i \in I} H_i$$

e dunque per la Proposizione 1.1.8 $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ è un sottogruppo di G.

□

Proposizione 1.1.10. *Sia G un gruppo e sia $\{H_i\}_{i \in I}$ una catena di sottogruppi di G. Allora $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$ è un sottogruppo di G.*

Dimostrazione. Chiaramente $e \in \bigcup\limits_{i \in I} H_i$ perché $\forall i \in I : e \in H_i$ sottogruppo, quindi $\bigcup\limits_{i \in I} H_i \neq \varnothing$. Inoltre, se $g, h \in \bigcup\limits_{i \in I} H_i$ e cioè $\exists\, j_1, j_2 \in I$ tali che $g \in H_{j_1}$, $h \in H_{j_2}$, poiché $H_{j_1} \subseteq H_{j_2}$ (analogamente se accade il viceversa) allora

$$g, h \in H_{j_2} \implies g^{-1}h \in H_{j_2} \implies g^{-1}h \in \bigcup_{i \in I} H_i$$

e dunque per la Proposizione 1.1.8 $\bigcup\limits_{i \in I} H_i$ è un sottogruppo di G.

□

Proposizione 1.1.11. *Sia G gruppo abeliano e siano H, K sottogruppi di G. Allora $H + K$ è sottogruppo di G.*

Dimostrazione. Siccome $0 \in H, K$ e $0 = 0 + 0$ allora $0 \in H + K$, quindi $H + K \neq \varnothing$. Inoltre, se $a + b, c + d \in H + K$, dove $a, c \in H$, $b, d \in K$ allora

$$(a + b) - (c + d) = a + b - c - d = (a - c) + (b - d) \in H + K$$

e dunque per la Proposizione 1.1.8 $H + K$ è un sottogruppo di G.

□

Definizione 1.1.12. ***(Traslazione)*** *Sia G un gruppo. Dato $g \in G$ definiamo le applicazioni*

- $L_g : G \to G : h \mapsto gh$
- $R_g : G \to G : h \mapsto hg$

dette rispettivamente traslazione a sinistra di g e traslazione a destra di g.

Osservazione 1.1.13. Sia G un gruppo e sia $g \in G$. Se $A \subseteq G$ allora $L_g(A) = gA$, $R_g(A) = Ag$.
Conseguentemente, se H è un sottogruppo di G e $g \in H$, risulta $L_g(H) = H$, $R_g(H) = H$.

Definizione 1.1.14. ***(Sottogruppo normale)*** *Sia G un gruppo. Un sottogruppo H di G è detto normale in G se $\forall g \in G : g^{-1}Hg = H$.*
Equivalentemente, H è normale se $\forall g \in G : g^{-1}hg \in H \ \forall h \in H$.

Definizione 1.1.15. ***(Classe laterale)*** *Sia G un gruppo e siano H sottogruppo di G, $g \in G$. Chiamiamo gH la classe laterale sinistra di g rispetto a H, e Hg la classe laterale destra di g rispetto a H.*

Osservazione 1.1.16. Possiamo introdurre su G una relazione: dato H sottogruppo di G

$$g \sim h \iff g^{-1}h \in H$$

Essa è una relazione di equivalenza, infatti

- $g \sim g$ in quanto $g^{-1}g = e \in H$ sottogruppo
- $g \sim h \implies g^{-1}h \in H \implies h^{-1}g = (g^{-1}h)^{-1} \in H \implies h \sim g$
- $g \sim h$ e $h \sim k \implies g^{-1}h, h^{-1}k \in H \implies g^{-1}k = (g^{-1}h)(h^{-1}k) \in H \implies g \sim k$

e la classe di equivalenza di $g \in G$ è gH, infatti

"$\subseteq$" sia $x \in [g]$, allora $g \sim x$ e dunque $\exists\ h \in H$ tale che $g^{-1}x = h$. Conseguentemente $x = gh \in gH$, e per l'arbitrarietà di x si ha $[g] \subseteq gH$.

"$\supseteq$" sia $x \in gH$, allora $\exists\ h \in H$ tale che $x = gh$ e dunque $g^{-1}x = h$. Conseguentemente $x \sim g$ e cioè $x \in [g]$, e per l'arbitrarietà di x si ha $gH \subseteq [g]$.

Pertanto indichiamo con ${}^{G}\!/_{\sim}$ l'insieme delle classi laterali sinistre rispetto a H. Analogamente possiamo definire una relazione su G:

$$g \sim' h \iff gh^{-1} \in H$$

che si mostra essere di equivalenza e le relative classi di equivalenza sono le classi laterali destre rispetto a H. Indichiamo con ${}^{G}\!/_{\sim'}$ l'insieme delle classi laterali destre rispetto a H.

Osservazione 1.1.17. Se H è un sottogruppo normale di G, dato $g \in G$ allora

$$g^{-1}Hg = H \implies Hg = gH$$

ovvero le classi laterali sinistre rispetto a H coincidono con le classi laterali destre rispetto a H, quindi ${}^{G}\!/_{\sim} = {}^{G}\!/_{\sim'}$. Indichiamo l'insieme delle classi laterali rispetto a H con ${}^{G}\!/_{H}$.

Teorema 1.1.18. ***(Gruppo quoziente)*** *Sia G un gruppo e sia H un sottogruppo normale di G. Allora ${}^{G}\!/_{H}$ è un gruppo con le operazioni*

$$\mu : {}^{G}\!/_{H} \times {}^{G}\!/_{H} \to {}^{G}\!/_{H} : (xH, yH) \mapsto xyH$$

$$inv : {}^{G}\!/_{H} \to {}^{G}\!/_{H} : xH \mapsto x^{-1}H$$

dove H è l'elemento neutro di ${}^{G}\!/_{H}$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda a pagina 145 di [4].

□

Corollario 1.1.19. *Sia G un gruppo abeliano. Se H è un sottogruppo di G allora ${}^{G}\!/_{H}$ è un gruppo abeliano.*

Dimostrazione. Dato che G è abeliano risulta che $\forall g \in G$

$$g + H = H + g \implies g + H - g = H$$

ovvero H è normale in G. Per il Teorema 1.1.18 ${}^{G}\!/_{H}$ è un gruppo, e osserviamo che se $x + H, y + H \in {}^{G}\!/_{H}$ allora

$$\mu(x + H, y + H) = x + y + H = y + x + H = \mu(y + H, x + H)$$

ovvero ${}^{G}\!/_{H}$ è abeliano.

□

Definizione 1.1.20. ***(Omomorfismo)*** *Siano H, G gruppi e sia $f : H \to G$ un'applicazione. f è detta omomorfismo di gruppi se*

$$\forall g, h \in H : f(gh) = f(g)f(h)$$

Un omomorfismo di gruppi biettivo è detto isomorfismo di gruppi, e due gruppi si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo di gruppi tra essi.

Proposizione 1.1.21. *Sia $f : H \to G$ un isomorfismo di gruppi. Allora $f^{-1} : G \to H$ è un isomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che f^{-1} sia un omomorfismo di gruppi. Siano $u, v \in H$, allora

$$\begin{aligned} f^{-1}(uv) = f^{-1}(u)f^{-1}(v) &\iff f(f^{-1}(uv)) = f(f^{-1}(u)f^{-1}(v)) \\ &\iff uv = f(f^{-1}(u))f(f^{-1}(v)) \\ &\iff uv = uv \end{aligned} \tag{1.1}$$

e poiché quest'ultima è una tautologia deduciamo per l'arbitrarietà di u, v che f^{-1} è un omomorfismo di gruppi e quindi isomorfismo di gruppi.

□

Proposizione 1.1.22. *Siano $f : H \to G$, $g : G \to K$ omomorfismi di gruppi. Allora $g \circ f : H \to K$ è omomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Siano $u, v \in H$, allora

$$\begin{aligned} (g \circ f)(uv) = g(f(uv)) = g(f(u)f(v)) = \\ = g(f(u))g(f(v)) = (g \circ f)(u)(g \circ f)(v) \end{aligned} \tag{1.2}$$

da cui per l'arbitrarietà di u, v, $g \circ f$ è omomorfismo di gruppi.

□

Proposizione 1.1.23. *Sia $f : H \to G$ un omomorfismo di gruppi. Allora:*

(i) $f(e_H) = e_G$

(ii) $\forall h \in H : f(h^{-1}) = f(h)^{-1}$

Dimostrazione. (i) Osserviamo che

$$f(e_H)e_G = f(e_H) = f(e_He_H) = f(e_H)f(e_H) \implies$$

$$f(e_H)^{-1}f(e_H)e_G = f(e_H)^{-1}f(e_H)f(e_H) \implies$$

$$e_G = f(e_H)$$

(ii) Sia $h \in H$, allora

$$f(h^{-1})f(h) = f(h^{-1}h) = f(e_H) = e_G = f(h)^{-1}f(h) \implies$$

$$f(h^{-1})f(h)f(h)^{-1} = f(h)^{-1}f(h)f(h)^{-1} \implies$$

$$f(h^{-1}) = f(h)^{-1}$$

□

Definizione 1.1.24. ***(Nucleo di omomorfismo)*** *Sia $f : H \to G$ un omomorfismo di gruppi. Definiamo il nucleo di f*

$$ker(f) = \{h \in H : f(h) = e\}$$

Proposizione 1.1.25. *Sia $f : H \to G$ omomorfismo di gruppi. Allora:*

(i) $ker(f)$ è un sottogruppo normale di H

(ii) $f(H)$ è un sottogruppo di G

Dimostrazione. (i) $ker(f) \neq \varnothing$ perché per la Proposizione 1.1.23 $e_H \in ker(f)$. Inoltre, siano $x, y \in ker(f)$, allora

$$f(x^{-1}y) = f(x^{-1})f(y) = f(x)^{-1}e_G = e_G^{-1} = e_G \implies$$

$$x^{-1}y \in ker(f)$$

da cui per la Proposizione 1.1.8 $ker(f)$ è un sottogruppo di H. Infine, sia $h \in H$ e sia $x \in ker(f)$, allora

$$f(h^{-1}xh) = f(h^{-1})f(x)f(h) = f(h)^{-1}e_Gf(h) = e_G \implies$$

$$h^{-1}xh \in ker(f)$$

quindi per l'arbitrarietà di h, x, $ker(f)$ è un sottogruppo normale di H.

(ii) $f(H) \neq \varnothing$ perché per la Proposizione 1.1.23 $e_G \in f(H)$. Inoltre, siano $x, y \in f(H)$, dunque $\exists\ a, b \in H$ tali che $x = f(a), y = f(b)$ e allora

$$x^{-1}y = f(a)^{-1}f(b) = f(a^{-1})f(b) = f(a^{-1}b) \in f(H)$$

da cui per la Proposizione 1.1.8 $f(H)$ è un sottogruppo di G.

□

Teorema 1.1.26. ***(Il primo teorema di isomorfismo per gruppi)*** *Sia $f : H \to G$ un omomorfismo di gruppi. Allora esiste un unico isomorfismo di gruppi*

$$\widetilde{f} : {}^{H}\!/_{ker(f)} \to f(H)$$

tale che $f = \widetilde{f} \circ \pi$, ovvero $\widetilde{f}$ rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & {}^{H}\!/_{ker(f)} \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ & f(H) \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda a pagina 149 di [4].

□

Teorema 1.1.27. ***(Prodotto diretto di gruppi)*** *Siano H, K due gruppi. Allora il prodotto cartesiano $H \times K$ è un gruppo se munito del prodotto componente a componente*

$$\mu : (H \times K) \times (H \times K) \to H \times K : ((h_1, k_1), (h_2, k_2)) \mapsto (h_1h_2, k_1k_2)$$

e il suo elemento neutro è (e_H, e_K). $H \times K$ è detto prodotto diretto di H, K.

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda a pagina 100 di [4].

□

Lemma 1.1.28. *Sia G un gruppo e siano H, K sottogruppi normali di G tali che $H \cap K = \{e\}$. Allora $\forall h \in H$, $\forall k \in K$ si ha $hk = kh$.*

Dimostrazione. Siano $h \in H$, $k \in K$ e consideriamo $hkh^{-1}k^{-1}$. Osserviamo che poiché K è un sottogruppo normale

$$hkh^{-1}, k^{-1} \in K \implies hkh^{-1}k^{-1} \in K$$

e analogamente, poiché H è un sottogruppo normale

$$h^{-1}, kh^{-1}k^{-1} \in H \implies hkh^{-1}k^{-1} \in H$$

Pertanto $hkh^{-1}k^{-1} \in H \cap K = \{e\}$, da cui $hk = (h^{-1}k^{-1})^{-1} = kh$.

□

Teorema 1.1.29. ***(Teorema prodotto)*** *Sia G un gruppo. Se H, K sono sottogruppi normali di G tali che*

- $G = HK$
- $H \cap K = \{e\}$

allora G è isomorfo al prodotto diretto $H \times K$.

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione

$$f : H \times K \to G : (h, k) \mapsto hk$$

Innanzitutto, f è suriettiva perché $G = HK$. Inoltre, siano $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$ tali che $f(h_1, k_1) = f(h_2, k_2)$, allora

$$h_1 k_1 = h_2 k_2 \implies h_2^{-1} h_1 = k_1^{-1} k_2 \implies$$

$$h_2^{-1} h_1, k_1^{-1} k_2 \in H \cap K = \{e\} \implies$$

$$h_1 = h_2,\ k_1 = k_2$$

da cui $(h_1, k_1) = (h_2, k_2)$ e cioè f è iniettiva. Infine, se $(h_1, k_1), (h_2, k_2) \in H \times K$ allora

$$f((h_1, k_1)(h_2, k_2)) = f(h_1 h_2, k_1 k_2) = h_1 h_2 k_1 k_2$$

ma per il Lemma 1.1.28 $h_2 k_1 = k_1 h_2$, da cui

$$f((h_1, k_1)(h_2, k_2)) = h_1 k_1 h_2 k_2 = f(h_1, k_1) f(h_2, k_2)$$

quindi per l'arbitrarietà di $(h_1, k_1), (h_2, k_2)$, f è un omomorfismo di gruppi e pertanto un isomorfismo.

□

1.2 Topologia

I gruppi di Lie sono in particolare varietà topologiche, perciò è di grande importanza avere dimestichezza con gli spazi topologici e le proprietà relative. Tuttavia, poiché un richiamo esaustivo della totalità delle nozioni impiegate dal punto di vista topologico fuoriesce dal tema di questa tesi, invitiamo il lettore a una consultazione approfondita di [1] e ci limitiamo a riepilogare alcuni passaggi chiave nei risultati che dimostreremo più avanti.

Definizione 1.2.1. ***(Regolarità)*** *Sia X uno spazio topologico. X è detto regolare se dato $p \in X$ e C chiuso di X tale che $p \notin C$ esistono due aperti U, V di X tali che $p \in U$, $C \subseteq V$ e $U \cap V = \varnothing$.*

Proposizione 1.2.2. *Sia X uno spazio topologico. X è regolare se e solo se $\forall x \in X$: se M è aperto di X con $x \in M$ allora $\exists\ N$ chiuso di X tale che $x \in Int(N)$, $N \subseteq M$.*

Dimostrazione. " $\Longrightarrow$ " Sia $x \in X$ e sia M aperto di X con $x \in M$. Allora $X \smallsetminus M$ è chiuso di X con $x \notin X \smallsetminus M$, dunque $\exists\, U, V$ aperti di X tali che

$$x \in U,\ X \smallsetminus M \subseteq V \text{ e } U \cap V = \varnothing.$$

Conseguentemente $X \smallsetminus V$ è chiuso di X con $X \smallsetminus V \subseteq M$ e $x \in U \subseteq X \smallsetminus V$, ovvero $x \in Int(X \smallsetminus V)$.

" $\Longleftarrow$ " Sia $x \in X$ e sia C chiuso di X tale che $x \notin C$. Allora $X \smallsetminus C$ è aperto di X con $x \in X \smallsetminus C$ e dunque $\exists\, N$ chiuso di X tale che

$$x \in Int(N),\ N \subseteq X \smallsetminus C$$

Conseguentemente $X \smallsetminus N$ è aperto di X con $C \subseteq X \smallsetminus N$, $Int(N)$ è aperto di X con $x \in Int(N)$, e $(X \smallsetminus N) \cap Int(N) = \varnothing$.

□

Teorema 1.2.3. ***(Teorema di Weierstrass)*** *Sia X uno spazio topologico compatto e connesso e sia $f : X \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Allora f ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. Per la continuità di f, $f(X)$ è un compatto e un connesso di $\mathbb{R}$. Conseguentemente $f(X) = [a, b]$ per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ e dunque

$$min(f) = a,\ max(f) = b$$

□

Proposizione 1.2.4. *Sia X uno spazio topologico e sia C una componente connessa di X. Allora:*

1. *C è un chiuso di X.*
2. *Se X è localmente euclideo di dimensione n, C è un aperto di X.*

Dimostrazione. 1. Dato che C è connesso allora la sua chiusura $\overline{C}$ è connesso, e poiché $C \subseteq \overline{C}$ si ha $C = \overline{C}$ per la massimalità di C. Ciò mostra che C è un chiuso di X.

2. Sia $x \in C$ e sia (U, ϕ) carta locale di X in x, dove $\phi : U \to \mathbb{R}^n$. In particolare quindi U è un aperto connesso di X con $x \in U$, e se per assurdo $U \nsubseteq C$ allora

$$\begin{gathered} U \cup C \text{ è connesso di } X \text{ perché unione di connessi non disgiunti} \\ \text{e tale che } C \subsetneq U \cup C \end{gathered}$$

assurdo per la massimalità di C. Pertanto $U \subseteq C$ e cioè x è interno a C, da cui per l'arbitrarietà di x segue che C è aperto di X.

□

Definizione 1.2.5. ***(Relazione di equivalenza aperta)*** *Sia X uno spazio topologico e sia $\sim$ una relazione di equivalenza su X. $\sim$ è detta aperta se*

$$\pi : X \to {}^{X}\!/\!_{\sim} \text{ è aperta}$$

dove ${}^{X}\!/\!_{\sim}$ è munito della topologia quoziente relativa a π.

Proposizione 1.2.6. *Sia X uno spazio topologico e sia $\sim$ una relazione di equivalenza aperta su X. Allora ${}^{X}\!/\!_{\sim}$ è N_2.*

Dimostrazione. Sia $\{B_j\}_{j\in J}$ una base al più numerabile di X, allora essendo π aperta $\pi(B_j)$ è aperto di ${}^{X}\!/\!_{\sim}$ $\forall j \in J$. Inoltre, se U è aperto di X allora

$$U = \bigcup_{j\in I} B_j,\ I \subseteq J \implies$$

$$\pi(U) = \pi(\bigcup_{j\in I} B_j) = \bigcup_{j\in I} \pi(B_j)$$

e dunque per definizione $\{\pi(B_j)\}_{j\in J}$ è una base di ${}^{X}\!/\!_{\sim}$, al più numerabile in quanto $|\{\pi(B_j)\}_{j\in J}| \leq |\{B_j\}_{j\in J}|$. Ciò mostra che ${}^{X}\!/\!_{\sim}$ è N_2.

□

Proposizione 1.2.7. *Sia X uno spazio topologico e sia $\sim$ una relazione di equivalenza aperta su X. Allora ${}^{X}\!/\!_{\sim}$ è T_2 se e solo se $R = \{(x, y) \in S \times S : x \sim y\}$ è un chiuso di $S \times S$.*

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda a pagina 128 di [1].

□

1.3 Geometria differenziale

Introduciamo qui il principale oggetto di lavoro nella tesi, i gruppi di Lie. Procederemo dando per assodate le conoscenze riguardanti le varietà differenziabili per concentrarci direttamente sui gruppi di Lie.
Il riferimento a questa sezione nella bibliografia è [2].

Definizione 1.3.1. ***(Gruppo di Lie)*** *Sia G un gruppo che è anche una varietà differenziabile. G è detto gruppo di Lie se le operazioni di gruppo di G*

$$\mu : G \times G \to G,\ inv : G \to G$$

sono C^∞ rispetto alla struttura differenziabile di cui G è dotato.

Osservazione 1.3.2. Se G è un gruppo di Lie e inv è la relativa inversione di gruppo, poiché $inv^{-1} = inv$ deduciamo che inv è un diffeomorfismo.

Proposizione 1.3.3. *Sia G un gruppo di Lie e sia $g \in G$. Le traslazioni a sinistra e a destra di g sono diffeomorfismi.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione per la traslazione a sinistra, poiché per la traslazione a destra si procederà in maniera analoga.
Consideriamo l'applicazione

$$f : G \to G \times G : h \mapsto (g, h)$$

Essa è C^∞ perché le sue componenti sono C^∞ in quanto rispettivamente un'applicazione costante e l'identità di G, e conseguentemente se μ è il prodotto di gruppo di G allora

$$L_g = \mu \circ f$$

è C^∞ perché composizione di C^∞. Per l'arbitrarietà di g segue che tutte le traslazioni a sinistra sono C^∞. Inoltre $\forall h \in G$

$$(L_g \circ L_{g^{-1}})(h) = L_g(g^{-1}h) = gg^{-1}h = h$$

$$(L_{g^{-1}} \circ L_g)(h) = L_{g^{-1}}(gh) = g^{-1}gh = h$$

pertanto $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ ed essendo anch'essa una traslazione a sinistra è C^∞. Ciò mostra che L_g è un diffeomorfismo.

$\square$

Definizione 1.3.4. ***(Omomorfismo di gruppi di Lie)*** *Siano H, G gruppi di Lie. Un'applicazione $f : H \to G$ è detta omomorfismo di gruppi di Lie se è C^∞ ed è un omomorfismo di gruppi. Un omomorfismo di gruppi di Lie che è anche un diffeomorfismo è detto isomorfismo di gruppi di Lie, e due gruppi di Lie si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo di gruppi di Lie tra essi.*

Teorema 1.3.5. *Sia $f : H \to G$ un omomorfismo algebrico tra gruppi di Lie.*

(i) Se f è C^∞ in un intorno di e allora f è omomorfismo di gruppi di Lie.

(ii) Se f è un diffeomorfismo locale in e allora f è un diffeomorfismo locale.

Dimostrazione. (i) Sia U aperto di H tale che $e \in U$ e $f|_U$ è C^∞. Se $h \in H$ allora hU è aperto di H con $h \in hU$ e si ha $\forall hu \in hU$

$$(L_{f(h)} \circ f|_U \circ L_{h^{-1}})(hu) = L_{f(h)}(f(u)) = f(h)f(u) = f(hu)$$

ovvero $f|_{hU} = (L_{f(h)} \circ f|_U \circ L_{h^{-1}})$, quindi $f|_{hU}$ è C^∞ perché composizione di C^∞. Per l'arbitrarietà di h segue che f è localmente C^∞ e dunque è C^∞, ovvero f è un omomorfismo di gruppi di Lie.

(ii) Sia U aperto di H tale che $e_H \in U$ e $f_U : U \to f(U)$ è un diffeomorfismo, dove $f(U)$ è aperto di G tale che $e_G \in f(U)$. Sia $h \in H$, allora hU è un aperto di H con $h \in hU$, $f(h)f(U)$ è un aperto di G con $f(h) \in f(h)f(U)$ e risulta come mostrato nel punto (i)

$$f_{hU} = (L_{f(h)} \circ f_U \circ L_{h^{-1}})$$

in quanto $f(hU) = f(h)f(U)$. Quindi $f_{hU} : hU \to f(hU)$ è un diffeomorfismo perché composizione di diffeomorfismi, e per l'arbitrarietà di h segue che f è un diffeomorfismo locale.

□

Definizione 1.3.6. ***(Sottogruppo di Lie)*** *Sia G un gruppo di Lie e sia H un sottoinsieme di G. H è detto sottogruppo di Lie di G se*

- *H è un sottogruppo di G nel senso algebrico*
- *H è una sottovarietà immersa di G*
- *le operazioni di gruppo di H indotte da G sono C^∞ rispetto alla struttura differenziabile su H di sottovarietà immersa*

Un sottogruppo di Lie che è anche una sottovarietà del relativo gruppo di Lie è detto sottogruppo di Lie embedded.

Osservazione 1.3.7. Segue dalla definizione che un sottogruppo di Lie è un gruppo di Lie se munito delle operazioni di gruppo indotte dal relativo gruppo di Lie e della struttura differenziabile di sottovarietà immersa.

Teorema 1.3.8. *Sia G un gruppo di Lie e sia H un sottogruppo algebrico che è anche una sottovarietà di G. Allora H è sottogruppo di Lie embedded di G.*

Dimostrazione. Poiché H è una sottovarietà di G è in particolare una sottovarietà immersa di G e la struttura differenziabile su H come sottovarietà immersa coincide con la struttura differenziabile indotta da G.

Siano inoltre μ_G, inv_G le operazioni di gruppo di G e siano μ_H, inv_H le operazioni di gruppo di H indotte da G. L'inclusione $i : H \to G$ è C^∞ perché H è sottovarietà di G, e dunque $i \times i$ è C^∞ perché prodotto di C^∞, da cui

- μ_H è C^∞ perché indotta di $\mu_G \circ (i \times i)$ su H sottovarietà di G, e $\mu_G \circ (i \times i)$ è C^∞ perché composizione di C^∞
- inv_H è C^∞ perché indotta di $inv_G \circ i$ su H sottovarietà di G, e $inv_G \circ i$ è C^∞ perché composizione di C^∞

Pertanto H è un sottogruppo di Lie di G.

□

Per la nostra trattazione è di grande importanza capire quando l'immagine tramite un omomorfismo di gruppi di Lie è un sottogruppo di Lie del codominio. I risultati che seguono forniscono una condizione sufficiente per rispondere a tale quesito.

Lemma 1.3.9. *Siano V, W spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$, dim $V = n$, dim $W = m$, $n \leq m$. Sia $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Se $rank(F) = n$ allora F è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ la matrice associata a F, per definizione di rango di un'applicazione lineare $rank(F) = rank(A)$ da cui

$$rank(A) = n \implies \text{le colonne di } A \text{ sono linearmente indipendenti}$$

Indichiamole con A^j, $j = 1, ..., n$. Fissiamo $\{e_1, ..., e_n\}$ una base di V, e siano $v, w \in V$, $v = v_1 e_1 + ... + v_n e_n$, $w = w_1 e_1 + ... + w_n e_n$ tali che $F(v) = F(w)$, ovvero

$$Av = Aw \iff A(v - w) = \mathbf{0}$$

Quest'ultima condizione si esprime come

$$\sum_{j=1}^{n} A^j (v_j - w_j) = \mathbf{0}$$

da cui per la lineare indipendenza delle colonne di A segue che $v_j = w_j$ $\forall j = 1, ..., n$ e dunque $v = w$. Per l'arbitrarietà di v, w f è iniettiva.

□

Proposizione 1.3.10. *Siano N, M varietà differenziabili di dim $N = n$, dim $M = m$. Sia $F : N \to M$ un'applicazione C^∞ con rango costante. Se F è iniettiva allora è un'immersione.*

Dimostrazione. Mostriamo la contronominale. Supponiamo che F non sia un'immersione, cioè $\exists\ p \in N$ tale che il differenziale F_{*p} non è iniettivo. Per la contronominale del Lemma 1.3.9

$$rank(F_{*p}) \neq n \implies rank(F_{*p}) < n$$

dove l'ultima si ha in quanto $rank(F_{*p}) \leq n$ per definizione, e dato che il rango di F è costante, se lo indichiamo con k, segue che $k < n$. Per il teorema del rango costante esistono (U, ϕ) carta locale intorno a p e (V, ψ) carta locale intorno a $F(p)$ tali che

$$(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(r_1, ..., r_n) = (r_1, ..., r_k, 0, ..., 0)$$

Poiché $\phi(U)$ è aperto di $\mathbb{R}^n$, preso $(q_1, ..., q_n) \in \phi(U)$ esiste un cubo Q centrato in $(q_1, ..., q_n)$ di raggio $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che $Q \subseteq \phi(U)$. Allora $(q_1, ..., q_k, q_{k+1} + \frac{\epsilon}{2}, q_{k+2}, ..., q_n) \in Q$ è tale che

$$(\psi \circ F \circ \phi^{-1})(q_1, ..., q_k, q_{k+1} + \tfrac{\epsilon}{2}, q_{k+2}, ..., q_n) =$$

$$= (q_1, ..., q_k, 0, ..., 0) =$$

$$= (\psi \circ F \circ \phi^{-1})(q_1, ..., q_n)$$

e ciò mostra che $(\psi \circ F \circ \phi^{-1})$ non è iniettiva. Conseguentemente F non è iniettiva, altrimenti $(\psi \circ F \circ \phi^{-1})$ sarebbe composizione di iniettive e dunque iniettiva.

□

Teorema 1.3.11. *Sia $f : H \to G$ omomorfismo di gruppi di Lie. Se f è iniettivo allora $f(H)$ è un sottogruppo di Lie di G.*

Dimostrazione. Innanzitutto, per la Proposizione 1.1.25 $f(H)$ è un sottogruppo algebrico di G. Osserviamo poi che $\forall h \in H : f \circ L_h = L_{f(h)} \circ f$, infatti se $g \in H$

$$(f \circ L_h)(g) = f(L_h(g)) = f(hg) =$$

$$= f(h)f(g) = L_{f(h)}(f(g)) = (L_{f(h)} \circ f)(g)$$

da cui per la regola della catena, fissato $h \in H$, calcoliamo per $g \in H$

$$f_{*hg} \circ L_{h*g} = (F \circ L_h)_{*g} = (L_{f(h)} \circ f)_{*g} = L_{f(h)*f(g)} \circ f_{*g} \implies$$

$$f_{*hg} = L_{f(h)*f(g)} \circ f_{*g} \circ L_{h*g}^{-1}$$

Dato che le traslazioni sono diffeomorfismi, i relativi differenziali sono isomorfismi e poiché il rango di un'applicazione lineare coincide con il rango della composizione della stessa con un isomorfismo segue che $rank(f_{*hg}) = rank(f_{*g})$. Per l'arbitrarietà di h, g risulta che se $p, q \in H$ allora

$$rank(f)(p) = rank(f_{*p}) = rank(f_{*(qp^{-1})p}) = rank(f_{*q}) = rank(f)(q)$$

ovvero f ha rango costante. Per la Proposizione 1.3.10 f è un'immersione, e quindi $f(H)$ è una sottovarietà immersa di G. Ricordiamo che la struttura differenziabile di $f(H)$ come sottovarietà immersa è la struttura indotta da

$$\overline{f} : H \to f(H), \text{ indotta di } f$$

ed essa è per costruzione un diffeomorfismo, da cui $\overline{f}^{-1}$ è un diffeomorfismo e quindi $\overline{f}^{-1} \times \overline{f}^{-1}$ è un diffeomorfismo perché prodotto di diffeomorfismi. Allora, se indichiamo con μ_H, inv_H le operazioni di gruppo di H e con $\mu_{f(H)}, inv_{f(H)}$ le operazioni di gruppo di $f(H)$, poiché $\overline{f}$ è omomorfismo risulta

- $\mu_{f(H)} = \overline{f} \circ \mu_H \circ (\overline{f}^{-1} \times \overline{f}^{-1})$
- $inv_{f(H)} = \overline{f} \circ inv_H \circ \overline{f}^{-1}$

dunque $\mu_{f(H)}, inv_{f(H)}$ sono C^∞ perché composizione di C^∞. Pertanto $f(H)$ è un sottogruppo di Lie di G.

□

Definizione 1.3.12. ***(Algebra di Lie)*** *Sia G un gruppo di Lie. L'algebra di Lie di G è lo spazio tangente a G in e algebra di Lie di G, e lo indichiamo con T_eG.*

Osservazione 1.3.13. Ricordiamo che se G è un gruppo di Lie allora T_eG è uno spazio vettoriale di dimensione *dim* G, isomorfo allo spazio dei campi di vettori invarianti a sinistra di G. Pertanto li identificheremo nel seguito. Ricordiamo inoltre che un campo di vettori invariante a sinistra di G è completo e il suo flusso locale in un punto fissato è una curva integrale nel punto per il campo di vettori. Per i dettagli si rimanda alle pagine 373,381,382 di [2].

Osservazione 1.3.14. Considereremo l'algebra di Lie di un gruppo di Lie come un gruppo di Lie munito della struttura del Teorema 3.0.1.

Definizione 1.3.15. ***(Applicazione esponenziale)*** *Sia G un gruppo di Lie. Definiamo l'applicazione esponenziale di G*

$$\exp : T_eG \to G : \omega \mapsto \gamma^\omega(1)$$

dove se $\omega \in T_eG$ allora $\gamma^\omega(t)$ è la curva integrale in e per ω.

Teorema 1.3.16. ***(Proprietà dell'applicazione esponenziale)*** *Sia G un gruppo di Lie e sia* exp *l'applicazione esponenziale di G. Allora:*

(i) $\exp(\boldsymbol{0}) = e$

(ii) exp *è* C^∞

(iii) $\gamma^\omega(t) = \exp(t\omega)$

(iv) exp *è un diffeomorfismo locale in* $\boldsymbol{0}$

(v) $\exp((t+s)\omega) = \exp(t\omega)\exp(s\omega)$

(vi) $\exp(-\omega) = \exp(\omega))^{-1}$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda a pagina 385 di [2].

□

Osservazione 1.3.17. Dalla (iii) deduciamo che

$$\tfrac{d}{dt}\exp(t\omega)_{|t=0} = \tfrac{d}{dt}\gamma^\omega(t)_{|t=0} = \omega$$

Definizione 1.3.18. ***(Sottogruppi di Lie a un parametro)*** *Sia* G *un gruppo di Lie. Un omomorfismo di gruppi di Lie* $\phi : \mathbb{R} \to G$ *è detto sottogruppo a un parametro di* G*.*

Teorema 1.3.19. ***(Caratterizzazione dei sottogruppi a un parametro)*** *Sia* G *un gruppo di Lie. Un'applicazione* $\phi : \mathbb{R} \to G$ *è un sottogruppo a un parametro di* G *se e solo se* $\forall t \in \mathbb{R} : \phi(t) = \exp(t\omega)$*, per un opportuno* $\omega \in T_eG$*.*

Dimostrazione. " $\Longleftarrow$ " Sia $\phi : \mathbb{R} \to G$: l'applicazione definita da $\phi(t) = \exp(t\omega)$, per $\omega \in T_eG$. Osserviamo che per $t, s \in \mathbb{R}$

$$\phi(t+s) = \exp((t+s)\omega) = \exp(t\omega)\exp(s\omega) = \phi(t)\phi(s)$$

quindi ϕ è un omomorfismo di gruppi, e se consideriamo l'applicazione

$$f : \mathbb{R} \to T_eG : t \mapsto t\omega$$

la quale è C^∞ perché lineare, allora risulta $\phi = \exp \circ f$ e dunque è C^∞ perché composizione di C^∞. Ciò mostra che ϕ è un sottogruppo a un parametro di G.

$\Longrightarrow$ " Sia $\phi : \mathbb{R} \to G$ un sottogruppo a un parametro di G e sia $\omega = \frac{d}{dt}\phi(t)_{|t=0}$. Definiamo l'applicazione

$$f : \mathbb{R} \to G : t \mapsto \phi(t)\exp(-t\omega)$$

Allora, se μ è il prodotto di gruppo di G e se consideriamo l'applicazione

$$g : \mathbb{R} \to G \times G : t \mapsto (\phi(t), \exp(-t\omega))$$

la quale è C^∞ perché ha componenti C^∞ in quanto sottogruppi a un parametro di G, risulta $f = \mu \circ g$ e quindi f è C^∞ perché composizione di C^∞. Inoltre $f(0) = \phi(0)\exp(\mathbf{0}) = e$, e calcoliamo

- $$\begin{aligned} \frac{d}{ds} f(s)_{|s=0} &= \frac{d}{ds}\mu(\phi(s), \exp(-s\omega))_{|s=0} = \\ &= \mu_{*(e,e)}(\frac{d}{ds}\phi(s)_{|s=0}, \frac{d}{ds}\exp(-s\omega)_{|s=0}) = \\ &= \mu_{*(e,e)}(\omega, -\omega) = \omega - \omega = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.3}$$

- se $t_0 \neq 0$ allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(t)_{|t=t_0} &= \frac{d}{ds} f(t_0 + s)_{|s=0} = \\ &= \frac{d}{ds}(\phi(t_0 + s)\exp(s + t_0))_{|s=0} = \\ &= \frac{d}{ds}(\phi(t_0)\phi(s)\exp(-s\omega)\exp(-t_0\omega))_{|s=0} = \\ &= \frac{d}{ds}\left(L_{\phi(t_0)}(R_{\exp(-t_0\omega)}(\frac{d}{ds}(\phi(s)\exp(-s\omega))_{|s=0}))\right) = \\ &= L_{\phi(t_0)*\exp(-t_0\omega)}(R_{\exp(-t_0\omega)*e}(\frac{d}{ds} f(s)_{|s=0})) = \\ &= L_{\phi(t_0)*\exp(-t_0\omega)}(R_{\exp(-t_0\omega)*e}(\mathbf{0})) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1.4}$$

ovvero $\frac{d}{dt} f(t)_{|t=t_0} = \mathbf{0}\ \forall t_0 \in \mathbb{R}$, quindi f è costante e poiché $f(0) = e$ si ha

$$\phi(t)\exp(-t\omega) = e\ \forall t \in \mathbb{R} \implies$$

$$\phi(t) = \exp(t\omega)\ \forall t \in \mathbb{R}$$

□

Osservazione 1.3.20. Deduciamo dal Teorema 1.3.19 che esiste una corrispondenza biunivoca tra i vettori dell'algebra di Lie e i sottogruppi a un parametro del relativo gruppo di Lie, data da

$$\omega \longleftrightarrow \exp(t\omega)$$

Inoltre, per quanto mostrato nell'Osservazione 1.3.17, deduciamo che un sottogruppo a un parametro è univocamente determinato dal suo vettore velocità iniziale.

Teorema 1.3.21. *Sia G un gruppo di Lie e sia $\phi : \mathbb{R} \to G$ un omomorfismo algebrico continuo. Allora ϕ è un sottogruppo a un parametro di G.*

Dimostrazione. Poiché per il Teorema 1.3.16 exp è un diffeomorfismo locale in $\mathbf{0}$, $\exists\ U$ aperto di T_eG con $\mathbf{0} \in U$, A aperto di G con $e \in A$ tali che

$$\exp : U \to A \text{ è un diffeomorfismo}$$

Fissiamo una base B di T_eG, allora essendo U intorno di e $\exists$ una palla aperta W centrata in $\mathbf{0}$ e di raggio $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo tale che $W \subseteq U$. Deduciamo che

- W è sottovarietà di U perché aperto di U
- $\exp(W)$ è aperto di A perché exp è aperta, e dunque è una sottovarietà di A

pertanto $\exp : W \to \exp(W)$ è ancora un diffeomorfismo. Scegliamo W in questo modo affinché soddisfi la proprietà:

$$\omega \in W \implies t\omega \in W\ \forall t \in [-1, 1]$$

e nel nostro caso W la verifica perché è una palla aperta centrata in $\mathbf{0}$. Dato che $\exp(W)$ è un aperto di G perché aperto di A aperto di G, $\phi(0) = e$, ϕ è continua, $\exists\ s > 0$ tale che

$$(-s, s) \subseteq \phi^{-1}(\exp(W))$$

quindi per $0 < r < s$ si ha $\phi([-r, r]) \subseteq \phi(\phi^{-1}(\exp(W))) \subseteq \exp(W)$. Sia $\phi(r) \in \exp(W)$, poiché exp è biettiva su W $\exists!\ \eta \in W$ tale che $\phi(r) = \exp(\eta)$. Per la scelta di W si ha $\forall n \in \mathbb{N}$ che $\frac{\eta}{2^n} \in W$. Mostriamo per induzione su n:

$$\phi(\tfrac{r}{s^n}) = \exp(\tfrac{\eta}{2^n})$$

- $n = 0$, allora $\phi(r) = \exp(\eta)$ per la scelta di η.
- supponiamo la tesi sia vera per $n-1$, cioè $\phi(\frac{r}{s^{n-1}}) = \exp(\frac{\eta}{2^{n-1}})$. Siccome $\frac{r}{2^n} \in [-r, r]$ allora $\exists!\ \alpha \in W$ tale che $\phi(\frac{r}{2^n}) = \exp(\alpha)$. Osserviamo che

  $$\phi(\tfrac{r}{2^n})\phi(\tfrac{r}{2^n}) = \exp(\alpha)\exp(\alpha) = \exp(2\alpha) \implies$$

  $$\exp(\tfrac{\eta}{2^{n-1}}) = \phi(\tfrac{r}{2^{n-1}}) = \phi(\tfrac{r}{2^n})\phi(\tfrac{r}{2^n}) = \exp(2\alpha)$$

  ma exp è iniettiva su W, dunque $\frac{\eta}{2^{n-1}} = 2\alpha$ e pertanto $\frac{\eta}{2^n} = \alpha$, e per scelta di α segue $\phi(\frac{r}{2^n}) = \exp(\frac{\eta}{2^n})$.

Dal Teorema 1.3.16 e dalle proprietà degli omomorfismi, se $m \in \mathbb{Z}$

$$\phi(\tfrac{m}{2^n} r) = (\phi(\tfrac{r}{2^n}))^m = (\exp(\tfrac{\eta}{2^n}))^m = \exp(\tfrac{m}{2^n}\eta)$$

Sia pertanto $t \in (-r, r)$, e dunque $\frac{t}{r} \in (-1, 1)$: per la densità degli interi diadici $\{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ in $(-1, 1)$ possiamo costruire una successione $\{\frac{m_i}{2^{n_i}}\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che

$$\tfrac{m_i}{2^{n_i}} \to \tfrac{t}{r} \text{ per } n \to \infty$$

e conseguentemente $\frac{m_i}{2^{n_i}} r \to t$ per $n \to \infty$. Inoltre $\frac{t}{r}\eta \in W$ per la scelta di W in quanto $\frac{t}{r} \in (-1, 1)$. Allora, per la continuità (per successioni) di $\phi, \exp$

$$\phi(t) = \lim_{i \to \infty} \phi(\tfrac{m_i}{2^{n_i}} r) = \lim_{i \to \infty} \exp(\tfrac{m_i}{2^{n_i}}\eta) = \exp(\tfrac{t}{r}\eta)$$

Ciò mostra che presa l'applicazione

$$f : (-r, r) \to W : t \mapsto \tfrac{t}{r}\eta$$

la quale è C^∞ perché restrizione e indotta di $F : \mathbb{R} \to T_eG : F(t) = \frac{t}{r}\eta$ rispettivamente su $(-r, r)$ sottovarietà di $\mathbb{R}$ perché aperto di $\mathbb{R}$ e W sottovarietà di T_eG perché aperto di T_eG, e F è C^∞ perché lineare, risulta

$$\phi|_{(-r,r)} = \exp \circ f$$

e pertanto $\phi|_{(-r,r)}$ è C^∞ perché composizione di C^∞. Per il Teorema 1.3.5 ϕ è C^∞, ovvero è un sottogruppo a un parametro di G.

□

Corollario 1.3.22. *Sia $F : H \to G$ un omomorfismo algebrico continuo tra gruppi di Lie. Allora F è omomorfismo di gruppi di Lie.*

Dimostrazione. Sia $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ una base di T_eH. Le applicazioni

$$\alpha_i : \mathbb{R}^n \to T_eH : (v_1, ..., v_n) \mapsto v_i\omega_i,\ i = 1, .., n$$

sono C^∞ perché lineari, quindi $\exp \circ \alpha_i$ è C^∞ perché composizione di C^∞, $i = 1, ..., n$ e allora

$$\alpha : \mathbb{R}^n \to H : (v_1, ..., v_n) \mapsto \exp(v_1\omega_1)...\exp(v_n\omega_n)$$

è C^∞ perché prodotto di C^∞. Il differenziale $\alpha_{*\mathbf{0}} : T_{\mathbf{0}}\mathbb{R}^n \to T_eH$ è tale che, identificando $T_{\mathbf{0}}\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\alpha_{*\mathbf{0}}(v_1, ..., v_n) &= \frac{d}{dt}(\exp(tv_1\omega_1)...\exp(tv_n\omega_n))_{|t=0} = \\ &= \frac{d}{dt}\mu_n(\exp(tv_1\omega_1), ..., \exp(tv_n\omega_n))_{|t=0} = \\ &= \mu_{n*(e,...,e)}(\frac{d}{dt}\exp(tv_1\omega_1)_{|t=0}, ..., \frac{d}{dt}\exp(tv_n\omega_n)_{|t=0}) = \\ &= \mu_{n*(e,...,e)}(v_1\omega_1, ..., v_n\omega_n) = \\ &= v_1\omega_1 + ... + v_n\omega_n\end{aligned} \tag{1.5}$$

dove $\mu_n : G \times ... \times G \to G$ è il prodotto, C^∞. Abbiamo cioè mostrato che $\alpha_{*\mathbf{0}}$ è l'isomorfismo canonico relativo a $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$, da cui per il teorema della funzione inversa $\exists\ V$ aperto di $\mathbb{R}^n$ con $\mathbf{0} \in V$, $\exists\ U$ aperto di H con $e \in U$ tali che

$$\alpha_V : V \to U \text{ è un diffeomorfismo}$$

Consideriamo i sottogruppi a un parametro di H: $\phi_i(t) = \exp(t\omega_i)$, $i = 1, ..., n$. Le applicazioni $F \circ \phi_i : \mathbb{R} \to G$, $i = 1, ..., n$ sono omomorfismi algebrici continui perché composizione di omomorfismi algebrici continui, quindi per il Teorema 1.3.21 sono sottogruppi a un parametro di G. Osserviamo allora che

$$(F \circ \alpha)(v_1, ..., v_n) = F(\exp(v_1\omega_1)...\exp(v_n\omega_n)) =$$

$$= F(\exp(v_1\omega_1))...F(\exp(v_n\omega_n)) = (F \circ \phi_1)(v_1)...(F \circ \phi_n)(v_n)$$

quindi $F \circ \alpha$ è C^∞ perché prodotto di C^∞, e conseguentemente

$$F|_U = F \circ \alpha \circ \alpha_V^{-1} \text{ è } C^\infty \text{ perché composizione di } C^\infty$$

Per il Teorema 1.3.5 si ha che F è C^∞, ovvero F è un omomorfismo di gruppi di Lie.

□

Terminiamo il capitolo mostrando tre ulteriori proprietà dei gruppi di Lie, che si riveleranno particolarmente utili.

Lemma 1.3.23. *Sia G un gruppo di Lie e sia U aperto di G con $e \in U$. Allora $\exists\ V$ aperto di G con $e \in V$ tale che $VV \subseteq U$, $V = V^{-1}$.*

Dimostrazione. Sia μ il prodotto di gruppo di G. Poiché U è aperto di G con $e \in U$ e μ è continua $\exists\ S, T$ aperti di G tali che

$$(e, e) \in S \times T \subseteq \mu^{-1}(U)$$

$R = S \cap T$ è aperto di G perché intersezione finita di aperti di G con $e \in R$, quindi se inv è l'inversione di gruppo di G allora $R^{-1} = inv(R)$ è aperto di G perché inv è omeomorfismo e dunque

$$V = R \cap R^{-1}$$

è aperto di G perché intersezione finita di aperti di G con $e \in V$, tale che $V^{-1} = inv(R \cap R^{-1}) = inv(R) \cap inv(inv(R)) = R^{-1} \cap R = V$ e

$$VV = \mu(V \times V) \subseteq \mu(R \times R) \subseteq \mu(S \times T) \subseteq \mu(\mu^{-1}(U)) \subseteq U$$

$\square$

Osservazione 1.3.24. Dato U aperto di G gruppo di Lie contenente e, l'aperto la cui esistenza è garantita dal Lemma 1.3.23 è detto intorno simmetrico di e relativo a U.

Proposizione 1.3.25. *Sia G un gruppo di Lie. Allora G è regolare.*

Dimostrazione. Sia M un aperto di G con $e \in M$, per il Lemma 1.3.23 $\exists$ V intorno simmetrico di e relativo a M. Preso $g \in \overline{V}$, poiché gV è aperto di G con $g \in gV$ si ha per la caratterizzazione della chiusura $gV \cap V \neq \varnothing$. Sia $w \in gV \cap V$, $w = gv$ per qualche $v \in V$, allora

$$g = wv^{-1} \in VV^{-1} = VV \subseteq M$$

da cui per l'arbitrarietà di g si ha $\overline{V} \subseteq M$. Osserviamo inoltre che $V = Int(\overline{V})$ perché V è aperto, e ciò mostra che se M è un aperto con $e \in M$ allora $\exists$ N chiuso di G tale che $e \in Int(N)$, $N \subseteq M$.

Pertanto, se $h \in G$ e A è aperto di G con $h \in A$ allora

$$L_{h^{-1}}(A) \text{ è aperto di } G \text{ con } e = L_{h^{-1}}(h) \in L_{h^{-1}}(A)$$

e dunque $\exists$ N chiuso di G con $e \in Int(N)$, $N \subseteq L_{h^{-1}}(A)$ da cui $L_h(N)$ è un chiuso di G tale che

$$h = L_h(e) \in L_h(Int(N)) = Int(L_h(N)),\ L_h(N) \subseteq L_h(L_{h^{-1}}(A)) = A$$

Per l'arbitrarietà di h e per la Proposizione 1.2.2 G è regolare.

$\square$

Osservazione 1.3.26. Si dimostra in effetti che ogni varietà differenziabile è regolare, ma la Proposizione 1.3.25 fornisce una dimostrazione diretta nel caso dei gruppi di Lie.

Proposizione 1.3.27. *Sia G un gruppo di Lie connesso. Se H è un sottogruppo algebrico di G che è anche un aperto di G allora $H = G$.*

Dimostrazione. Dall'Osservazione 1.1.16 se $g \in G \smallsetminus H$ allora $H \cap gH = \varnothing$ in quanto le classi di equivalenza formano una partizione dell'insieme su cui è definita la relazione di equivalenza. Inoltre gH è aperto di G perché H è aperto di G, dunque

$$\bigcup_{g \in G \smallsetminus H} gH \text{ è aperto di } G \text{ perché unione di aperti di } G \implies$$

$$H = G \smallsetminus \bigcup_{g \in G \smallsetminus H} gH \text{ è chiuso di } G$$

ed essendo $H \neq \varnothing$ perché sottogruppo, per la connessione di G si ha $H = G$. □

Capitolo 2

Il primo teorema di isomorfismo

I teoremi di isomorfismo, e in particolare il primo teorema di isomorfismo, sono strumenti potenti per mostrare che due oggetti muniti di una particolare struttura sono "uguali" relativamente alla struttura considerata.
In questo capitolo forniremo nozioni riguardanti i gruppi di Lie e i relativi sottogruppi nel caso in cui la sottostruttura topologica sia discreta; affronteremo poi nel caso discreto risultati preliminari al primo teorema di isomorfismo per gruppi di Lie e daremo una dimostrazione di quest'ultimo.

2.1 Gruppi e sottogruppi di Lie discreti

Definizione 2.1.1. ***(Gruppo di Lie discreto)*** *Sia H un gruppo di Lie. Se la topologia su H è la topologia discreta, H è detto gruppo di Lie discreto.*

Siamo in grado di riconoscere agevolmente i gruppi di Lie discreti grazie alla caratterizzazione seguente.

Proposizione 2.1.2. ***(Caratterizzazione dei gruppi di Lie discreti)*** *Sia H un gruppo che è anche uno spazio topologico discreto. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *H è un gruppo di Lie discreto*
2. *H è N_2*
3. *H è al più numerabile*

Dimostrazione. "1. $\implies$ 2." Dato che H è un gruppo di Lie, per definizione è N_2 in quanto varietà topologica.

"2. $\implies$ 3." H è N_2, quindi sia B $= \{B_j\}_{j\in J}$ una sua base al più numerabile. Siccome H è discreto, $\forall h \in H$: $\{h\}$ è un aperto di H con $h \in \{h\}$ e dunque per definizione di base

$$\exists\; j \in J \text{ tale che } h \in B_j \subseteq \{h\}, \text{ da cui } B_j = \{h\}$$

ma allora $\{\{h\} : h \in H\} \subseteq$ B e poiché H ha la stessa cardinalità di $\{\{h\} : h \in H\}$ esso è al più numerabile.

"3. $\implies$ 1." H come spazio topologico discreto è T_2 e localmente euclideo di dimensione 0, e poiché è al più numerabile

$$\{\{h\} : h \in H\} \text{ è una base al più numerabile di } H$$

pertanto H è N_2 e quindi è una varietà topologica di dimensione 0.

Un suo atlante topologico è dato da

$$\mathrm{B} = \{(\{p\}, \phi) : p \in H\}, \text{ dove } \phi : \{p\} \to \mathbb{R}^0$$

e poiché se $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$ sono due carte distinte allora $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ per definizione esse sono C^∞- compatibili e dunque B è un atlante differenziabile. Conseguentemente esiste un'unica struttura differenziabile contenente B e H munito di essa è una varietà differenziabile di dimensione 0.

Siano $\mu : H \times H \to H$, $inv : H \to H$ le operazioni di gruppo di H, e mostriamo che esse sono C^∞.

(i) Sia $(h_1, h_2) \in H \times H$, prese $(\{h_1\} \times \{h_2\}, \phi_1 \times \phi_2)$ carta intorno a (h_1, h_2) e $(\{h_1h_2\}, \psi)$ carta intorno a h_1h_2 allora

$$\psi \circ \mu \circ (\phi_1 \times \phi_2)^{-1} : \mathbb{R}^0 \times \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}^0 \text{ è } C^\infty \text{ per definizione}$$

ovvero μ è C^∞ in (h_1, h_2). Per l'arbitrarietà di (h_1, h_2) segue che μ è C^∞.

(ii) Sia $h \in H$, prese $(\{h\}, \phi)$ carta intorno a h e $(\{h^{-1}\}, \psi)$ carta intorno a h^{-1} allora

$$\psi \circ inv \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^0 \to \mathbb{R}^0 \text{ è } C^\infty \text{ per definizione}$$

ovvero inv è C^∞ in h. Per l'arbitrarietà di h segue che inv è C^∞.

Pertanto, H è un gruppo di Lie discreto.

□

Definizione 2.1.3. ***(Sottogruppo di Lie discreto)*** *Sia H un gruppo di Lie. Un sottogruppo di Lie $\Gamma \subseteq H$ è detto sottogruppo di Lie discreto di H se la topologia indotta da H su Γ è discreta, ovvero se*

$$\forall \gamma \in \Gamma \ \exists \ A_\gamma \ \textit{aperto di } H \textit{ tale che } A_\gamma \cap \Gamma = \{\gamma\}$$

Vediamo alcune proprietà riguardanti i sottogruppi di Lie discreti.

Proposizione 2.1.4. *Sia H un gruppo di Lie e sia Γ un sottogruppo algebrico di H che è anche un sottospazio topologico discreto di H. Allora Γ è un sottogruppo di Lie discreto di H.*

Dimostrazione. Γ è un gruppo munito del prodotto di gruppo indotto da H; inoltre munito della topologia indotta da H è N_2, quindi per la proposizione 2.1.2 è un gruppo di Lie discreto e ciò mostra che il prodotto di gruppo e l'inversione su Γ sono C^∞.

Sia poi $i_\Gamma : \Gamma \to H$ l'inclusione: essa è un omomorfismo algebrico iniettivo e

$$\Gamma \text{ discreto } \implies i_\Gamma \text{ continua}$$

pertanto per il Corollario 1.3.22 i_Γ è un omomorfismo di gruppi di Lie iniettivo, e per il Teorema 1.3.11 $i_\Gamma(\Gamma) = \Gamma$ è un sottogruppo di Lie di H, discreto per ipotesi.

□

Osservazione 2.1.5. Per la Proposizione 2.1.4 un sottogruppo algebrico di un gruppo di Lie è discreto se e solo se è un sottogruppo di Lie discreto del relativo gruppo di Lie, pertanto nel seguito chiameremo tali oggetti semplicemente sottogruppi discreti.
Chiaramente un sottogruppo discreto di un gruppo di Lie è un gruppo di Lie discreto, se munito delle operazioni di gruppo e della topologia indotte dal relativo gruppo di Lie.

Proposizione 2.1.6. *Sia H un gruppo di Lie. Un sottogruppo algebrico $\Gamma \subseteq H$ è un sottogruppo discreto di H se e solo se $\exists$ A aperto di H tale che $A \cap \Gamma = \{e\}$.*

Dimostrazione. " $\implies$ " Poiché Γ è un sottogruppo di H allora $e \in \Gamma$, quindi per definizione di sottogruppo discreto $\exists$ A aperto di H tale che $A \cap \Gamma = \{e\}$.

" $\impliedby$ " Sia A l'aperto di H tale che $A \cap \Gamma = \{e\}$. Siccome Γ è un sottogruppo di H, se $\gamma \in \Gamma$ allora $L_\gamma(\Gamma) = \Gamma$ e dunque l'aperto $L_\gamma(A)$ è tale che

$$L_\gamma(A) \cap \Gamma = L_\gamma(A) \cap L_\gamma(\Gamma) = L_\gamma(A \cap \Gamma) = L_\gamma(\{e\}) = \{\gamma\}$$

da cui per l'arbitrarietà di γ segue che Γ è sottogruppo discreto di H.

□

Proposizione 2.1.7. *Sia H un gruppo di Lie e Γ un sottogruppo discreto di H. Allora Γ è un chiuso di H.*

Dimostrazione. Sia A un aperto di H tale che $A \cap \Gamma = \{e\}$, per il Lemma 1.3.23 $\exists\ V$ intorno simmetrico di e relativo ad A. Per verificare che Γ sia chiuso mostriamo che $H \setminus \Gamma$ è aperto. Sia $x \in H \setminus \Gamma$ e sia xV aperto con $x \in xV$, allora distinguiamo due casi:

- $xV \cap \Gamma = \varnothing$, allora x è interno a $H \setminus \Gamma$
- $xV \cap \Gamma \neq \varnothing$, allora $xV \cap \Gamma$ ha un solo elemento.
  Infatti, se $\gamma_1, \gamma_2 \in xV \cap \Gamma$, quindi $\exists\ v_1, v_2 \in V$ tali che $\gamma_1 = xv_1, \gamma_2 = xv_2$ risulta

  $$\gamma_1 v_1^{-1} = x = \gamma_2 v_2^{-1} \implies \gamma_2^{-1}\gamma_1 = v_2^{-1} v_1 \implies$$

  $$\gamma_2^{-1}\gamma_1 \in VV^{-1} \cap \Gamma = VV \cap \Gamma \subseteq A \cap \Gamma = \{e\} \implies$$

  $$\gamma_1 = \gamma_2$$

  Poniamo allora $xV \cap \Gamma = \{\gamma\}$, e dal fatto che $x \neq \gamma$ perché $x \notin \Gamma$, poiché H è T_2 $\exists\ U, W$ aperti di H tali che $x \in U$, $\gamma \in W$, $U \cap W = \varnothing$. Conseguentemente $U \cap xV$ è aperto di H perché intersezione finita di aperti di H con $x \in U \cap xV$, e $U \cap xV \subseteq H \setminus \Gamma$ perché se $y \in (U \cap xV) \cap \Gamma$ si ha

  $$y \in xV \cap \Gamma = \{\gamma\} \implies y = \gamma \implies \gamma \in U$$

  e ciò non può accadere per costruzione. Pertanto x è interno a $H \setminus \Gamma$.

In entrambi i casi x è interno a $H \setminus \Gamma$, da cui per l'arbitrarietà di x $H \setminus \Gamma$ è aperto e quindi Γ è chiuso.

□

Proposizione 2.1.8. *Sia $f : H \to G$ un omomorfismo di gruppi di Lie. Se f è un diffeomorfismo locale in e_H allora $ker(f)$ è un sottogruppo discreto di H.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.1.25 $ker(f)$ è un sottogruppo algebrico di H. Inoltre, sia U aperto di H tale che $e_H \in U$ e $f : U \to f(U)$ è un diffeomorfismo. In particolare f è iniettiva su U, dunque

$$\forall u \in U, u \neq e_H : f(u) \neq e_G \implies U \cap ker(f) = \{e_H\}$$

pertanto per la Proposizione 2.1.6 $ker(f)$ è un sottogruppo discreto di H.

□

2.2 Quozienti di gruppi di Lie

Qui vediamo come possiamo dotare un quoziente di un gruppo di Lie per un sottogruppo discreto di una struttura di gruppo di Lie tramite la proiezione naturale.

Teorema 2.2.1. ***(Struttura differenziabile sul quoziente nel caso discreto)*** *Sia H un gruppo di Lie e sia Γ un sottogruppo discreto H. Allora esiste una struttura differenziabile $\mathfrak{U}$ su ${}^{H}\!/_{\Gamma}$, insieme delle classi laterali sinistre rispetto a Γ, tale che la proiezione naturale sul quoziente*

$$\pi : H \to {}^{H}\!/_{\Gamma} : g \mapsto g\Gamma$$

sia C^∞. Inoltre π è un diffeomorfismo locale e $\mathfrak{U}$ è unica rispetto alle strutture differenziabili che rendono π un diffeomorfismo locale.

Dimostrazione. Dotiamo ${}^{H}\!/_{\Gamma}$ della topologia quoziente relativa a π, rispetto a essa π è continua. Mostriamo che ${}^{H}\!/_{\Gamma}$ è una varietà topologica:

(i) π è aperta. Per verificarlo, mostriamo che se U è aperto di H allora il suo saturato è $\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U\gamma$.
"$\subseteq$" sia $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$, ovvero $x\Gamma \in \pi(U)$ e allora $\exists\ u \in U$ tale che $u\Gamma = x\Gamma$. Ciò significa che $u \sim x$, ovvero $\exists\ \gamma \in \Gamma$ tale che

$$u^{-1}x = \gamma \implies x = u\gamma$$

pertanto $x \in U\gamma \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U\gamma$.
"$\supseteq$" sia $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} U\gamma$, cioè $\exists\ u \in U, \gamma \in \Gamma$ tali che $x = u\gamma$. Allora

$$u^{-1}x = u^{-1}u\gamma = \gamma \implies u \sim x$$

e quindi $x\Gamma \in \pi(U)$, da cui $x \in \pi^{-1}(\pi(U))$.

Osserviamo che $\forall \gamma \in \Gamma$: $U\gamma$ è aperto di G perché U è aperto di H, conseguentemente il saturato di U è unione di aperti di H e quindi aperto di H. Ciò mostra che π è aperta, e quindi per la Proposizione 1.2.6 $H/_{\Gamma}$ è N_2.

(ii) Mostriamo che $S = \{(x, y) \in H \times H : x \sim y\}$ è un chiuso di $H \times H$, verificando che il suo complementare in $H \times H$ è aperto.
Sia $(x, y) \in (H \times H) \smallsetminus S$, cioè $x \nsim y$, allora $x\Gamma, y\Gamma$ sono chiusi di H perché Γ è chiuso e $y \notin x\Gamma, x \notin y\Gamma$: per la regolarità di H $\exists$ U^x, U^y aperti di H tali che

$$x \in U^x \text{ e } U^x \cap y\Gamma = \varnothing,\ y \in U^y \text{ e } U^y \cap x\Gamma = \varnothing$$

Conseguentemente $V_1 = U^x x^{-1}$, $V_2 = U^y y^{-1}$ sono aperti di H con $e \in V_1, V_2$ e dunque $V_1 \cap V_2$ è aperto perché intersezione finita di aperti con $e \in V_1 \cap V_2$. Per il Lemma 1.3.23 $\exists$ V intorno simmetrico di e relativo a $V_1 \cap V_2$, e in particolare

$$VV \subseteq V_1 \implies VVx \subseteq V_1 x = U^x$$

Pertanto Vx, Vy sono aperti di H perché V è aperto di H, $x \in Vx, y \in Vy$, e risulta

$$\pi(Vx) \cap \pi(Vy) = \varnothing$$

Infatti se per assurdo $\exists$ $z \in \pi(Vx) \cap \pi(Vy)$, cioè $z = v_1 x\Gamma = v_2 y\Gamma$ per qualche $v_1, v_2 \in V$, allora $v_1 x \sim v_2 y$ e cioè $\exists$ $\gamma \in \Gamma$ tale che $(v_1 x)^{-1} v_2 y = \gamma$, quindi $y\gamma^{-1} = v_2^{-1} v_1 x$. Ma poiché

- $y\gamma^{-1} \in y\Gamma$ perché $\gamma^{-1} \in \Gamma$ sottogruppo
- $v_2^{-1} v_1 x \in V^{-1} V x = VVx \subseteq U^x$

abbiamo che $U^x \cap y\Gamma \neq \varnothing$, assurdo. In altre parole nessun elemento di Vx è in relazione con alcun elemento di Vy, e conseguentemente

$$(x, y) \in Vx \times Vy \subseteq (H \times H) \smallsetminus S$$

Essendo $Vx \times Vy$ aperto di $H \times H$ perché prodotto di aperti di H, (x, y) è interno a $(H \times H) \smallsetminus S$. Per l'arbitrarietà di (x, y), $(H \times H) \smallsetminus S$ è aperto di $H \times H$ e quindi S è chiuso di $H \times H$, e ciò prova per la Proposizione 1.2.7 che $H/_{\Gamma}$ è T_2.

(iii) Iniziamo costruendo una carta locale di $H/_{\Gamma}$ intorno a Γ. Poiché Γ è discreto $\exists$ A aperto di H con $A \cap \Gamma = \{e\}$, allora presa (U, ϕ) carta locale di H intorno a e

$U \cap A$ è aperto di H perché intersezione finita di aperti di H, $e \in U \cap A$ dunque per il Lemma 1.3.23 $\exists$ V intorno simmetrico di e relativo a $U \cap A$. Indichiamo con ϕ_V l'applicazione $\phi|_V : V \to \phi(V)$ e consideriamo la carta locale di H intorno a e (V, ϕ_V). Osserviamo che

$$\pi|_V : V \to {}^{H}\!/_{\Gamma}$$

è continua perché restrizione di continua, aperta perché restrizione di aperta su un aperto del dominio, ed è iniettiva in quanto

$$\pi(v_1) = \pi(v_2) \implies v_1\Gamma = v_2\Gamma \implies v_1 \sim v_2 \implies v_1^{-1}v_2 \in \Gamma \implies$$

$$v_1^{-1}v_2 \in V^{-1}V \cap \Gamma \subseteq U \cap A \cap \Gamma \subseteq A \cap \Gamma = \{e\} \implies$$

$$v_1 = v_2$$

e allora, se indichiamo con π_V l'applicazione $\pi|_V : V \to \pi(V)$, essa è continua, aperta e iniettiva perché indotta di continua, aperta e iniettiva e in più è suriettiva, ovvero è un omeomorfismo. Inoltre $\pi(V)$ è aperto di ${}^{H}\!/_{\Gamma}$ perché V è aperto di H e π è aperta, e $\phi_V \circ (\pi_V)^{-1} : \pi(V) \to \phi(V)$ è omeomorfismo perché composizione di omeomorfismi. Pertanto

$$(\pi(V), \phi_V \circ (\pi_V)^{-1}) \text{ è carta locale di } {}^{H}\!/_{\Gamma} \text{ intorno a } \pi(e) = \Gamma$$

Sia ora $p \in {}^{H}\!/_{\Gamma}$ e scegliamo $x \in \pi^{-1}(p)$, che esiste per la suriettività di π. Allora xV è aperto di H con $x \in xV$ e quindi $\pi(xV)$ è aperto di ${}^{H}\!/_{\Gamma}$ con $p \in \pi(xV)$. Osserviamo che

$$\pi|_{xV} : xV \to {}^{H}\!/_{\Gamma}$$

è continua perché restrizione di continua, aperta perché restrizione di aperta su un aperto del dominio, ed è inoltre iniettiva in quanto

$$\pi(xv_1) = \pi(xv_2) \implies xv_1\Gamma = xv_2\Gamma \implies xv_1 \sim xv_2 \implies$$

$$v_1^{-1}x^{-1}xv_2 \in \Gamma \implies v_1^{-1}v_2 \in \Gamma$$

e come osservato precedentemente segue che $v_1 = v_2$, da cui $xv_1 = xv_2$. Allora π_{xV} è omeomorfismo, ed poiché $(L_{x^{-1}})_{xV}$ è omeomorfismo perché restrizione e indotta di omeomorfismo segue che $\phi_V \circ (L_{x^{-1}})_{xV} \circ (\pi_{xV})^{-1}$ è omeomorfismo perché composizione di omeomorfismi e pertanto

$$(\pi(V), \phi_V \circ (L_{x^{-1}})_{xV} \circ (\pi_{xV})^{-1}) \text{ è carta locale di } {}^{H}\!/_{\Gamma} \text{ intorno a } p$$

Per l'arbitrarietà di p segue che ${}^{H}\!/_{\Gamma}$ è localmente euclideo di dimensione *dim* H.

Abbiamo dimostrato che ${}^{H}\!/_{\Gamma}$ è una varietà topologica, e un suo atlante topologico è $\mathfrak{B} = \{(\pi(xV), \phi_V \circ (L_{x^{-1}})_{xV} \circ (\pi_{xV})^{-1}) : x \in H\}$. Osserviamo che prese due carte di $\mathfrak{B}$

- $(U_1, f_1) = (\pi(xV), \phi_V \circ (L_{x^{-1}})_{xV} \circ (\pi_{xV})^{-1})$
- $(U_2, f_2) = (\pi(yV), \phi_V \circ (L_{y^{-1}})_{yV} \circ (\pi_{yV})^{-1})$

allora la composizione $f_1 \circ f_2^{-1} : \phi(y^{-1}(xV \cap yV)) \to \phi(x^{-1}(xV \cap yV))$ è tale che

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2^{-1} &= (\phi_V \circ (L_{x^{-1}})_{xV} \circ (\pi_{xV})^{-1}) \circ (\phi_V \circ (L_{y^{-1}})_{yV} \circ (\pi_{yV})^{-1})^{-1} = \\ &= \phi_V \circ (L_{x^{-1}})_{xV} \circ (\pi_{xV})^{-1} \circ \pi_{yV} \circ (L_y)_V \circ \phi_V^{-1} = \\ &= \phi_V \circ L_{x^{-1}} \circ L_y \circ \phi_V^{-1} \end{aligned} \tag{2.1}$$

e quest'ultima è C^∞ perché composizione di C^∞. Si prova lo stesso risultato per $f_2 \circ f_1^{-1}$, dunque le carte $(U_1, f_1), (U_2, f_2)$ sono C^∞- compatibili e poiché esse sono scelte arbitrariamente $\mathfrak{B}$ è un atlante differenziabile.
Allora $\exists!$ $\mathfrak{U}$ struttura differenziabile su ${}^{H}\!/_{\Gamma}$ tale che $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}$, e ${}^{H}\!/_{\Gamma}$ munito di essa è una varietà differenziabile di dimensione *dim* H.

Osserviamo che per costruzione, se $g \in H$ e $(gV, \phi_V \circ (L_{g^{-1}})_{gV}))$ è carta intorno a g e $(\pi(gV), \phi_V \circ (L_{g^{-1}})_{gV} \circ (\pi_{gV})^{-1})$ è carta intorno a $\pi(g)$, allora

$$(\pi_{gV})^{-1} = (\phi_V \circ (L_{g^{-1}})_{gV})^{-1} \circ (\phi_V \circ (L_{g^{-1}})_{gV} \circ (\pi_{gV})^{-1})$$

da cui $(\pi_{gV})^{-1}$ è diffeomorfismo perché composizione di diffeomorfismi e dunque π_{gV} è un diffeomorfismo. Poiché g è arbitrario e gV è aperto di H, ciò mostra che π è localmente C^∞ e quindi C^∞, e in particolare è un diffeomorfismo locale.

Infine, sia $\mathfrak{I}$ una struttura differenziabile su ${}^{H}\!/_{\Gamma}$ rispetto a cui π sia un diffeomorfismo locale, e mostriamo che $id_{{}^{H}\!/_{\Gamma}} : ({}^{H}\!/_{\Gamma}, \mathfrak{U}) \to ({}^{H}\!/_{\Gamma}, \mathfrak{I})$ è un diffeomorfismo. Useremo la seguente notazione:

- $\pi : H \to ({}^{H}\!/_{\Gamma}, \mathfrak{U}) \equiv \pi_1$
- $\pi : H \to ({}^{H}\!/_{\Gamma}, \mathfrak{I}) \equiv \pi_2$

quindi risulta $\pi_2 = id_{H/\Gamma} \circ \pi_1$, $\pi_1 = (id_{H/\Gamma})^{-1} \circ \pi_2$. Sia $p \in (H/\Gamma, \mathfrak{U})$ e sia $x \in (\pi_1)^{-1}(p)$, poiché π_1 è un diffeomorfismo locale $\exists\ U$ aperto di H con $x \in U$, W aperto di $(H/\Gamma, \mathfrak{U})$ con $p \in W$ tali che $\pi_1 : U \to W$ è diffeomorfismo. Allora

$$\begin{aligned}(id_{H/\Gamma})|_W &= (id_{H/\Gamma})|_W \circ ((\pi_1)_U \circ ((\pi_1)_U)^{-1}) = \\ &= ((id_{H/\Gamma})|_W \circ (\pi_1)_U) \circ ((\pi_1)_U)^{-1} = \\ &= (\pi_2)|_W \circ ((\pi_1)_U)^{-1}\end{aligned} \tag{2.2}$$

quindi $(id_{H/\Gamma})|_W$ è C^∞ perché composizione di C^∞, da cui per l'arbitrarietà di p segue che $id_{H/\Gamma}$ è localmente C^∞ e dunque è C^∞. Analogamente per $(id_{H/\Gamma})^{-1}$, e ciò prova che $id_{H/\Gamma}$ è un diffeomorfismo. Pertanto se $(U, \phi) \in \mathfrak{B}$ allora

$$(U, \phi) = (id_{H/\Gamma}(U), id_{H/\Gamma} \circ \phi) \in \mathfrak{J}$$

quindi $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{J}$ e per l'unicità della struttura differenziabile contenente $\mathfrak{B}$ si ha $\mathfrak{J} = \mathfrak{U}$, ovvero $\mathfrak{U}$ è unica.

□

Corollario 2.2.2. ***(Gruppo di Lie quoziente nel caso discreto)*** *Sia H un gruppo di Lie e sia Γ un sottogruppo di Lie di H normale e discreto. Allora H/Γ è un gruppo di Lie con le operazioni*

$$\mu : H/\Gamma \times H/\Gamma \to H/\Gamma : (x\Gamma, y\Gamma) \mapsto xy\Gamma$$

$$inv : H/\Gamma \to H/\Gamma : x\Gamma \mapsto x^{-1}\Gamma$$

Dimostrazione. Poiché Γ è un sottogruppo normale di H, per il Teorema 1.1.18 $(H/\Gamma, \mu, \Gamma)$ è un gruppo. Inoltre, per il Teorema 2.2.1 H/Γ è una varietà differenziabile e π è un diffeomorfismo locale. Verifichiamo che μ, inv siano C^∞:

(i) Indichiamo con μ_H il prodotto di H. Sia $(x\Gamma, y\Gamma) \in H/\Gamma$, siccome π è un diffeomorfismo locale $\exists\ V_1, V_2$ aperti di H con $x \in V_1, y \in V_2$, $\exists\ U_1, U_2$ aperti di H/Γ con $x\Gamma \in U_1, y\Gamma \in U_2$ tali che

$$\pi : V_i \to U_i \text{ è un diffeomorfismo, } i = 1, 2$$

In particolare osserviamo che $V_1 \times V_2$ è aperto di $H \times H$ perché prodotto di aperti di H e dunque è una sottovarietà di $H \times H$. L'applicazione

$$(\pi^{-1} \times \pi^{-1}) : U_1 \times U_2 \to V_1 \times V_2 : (g\Gamma, h\Gamma) \mapsto (g, h)$$

è un diffeomorfismo perché prodotto di diffeomorfismi, allora presa l'inclusione $i : V_1 \times V_2 \to H \times H$, C^∞ in quanto $V_1 \times V_2$ è sottovarietà di $H \times H$, si ha

$$\mu|_{U_1 \times U_2} = \pi \circ \mu_H \circ i \circ (\pi^{-1} \times \pi^{-1})$$

quindi $\mu|_{U_1 \times U_2}$ è C^∞ perché composizione di C^∞. Per l'arbitrarietà di $(x\Gamma, y\Gamma)$ segue che μ è localmente C^∞ e pertanto è C^∞.

(ii) Indichiamo con inv_H l'inversione di H. Sia $z\Gamma \in H/\Gamma$, siccome π è un diffeomorfismo locale $\exists\, V$ aperto di H con $z \in V$, $\exists\, U$ aperto di H/Γ con $z\Gamma \in U$ tali che

$$\pi : V \to U \text{ è un diffeomorfismo}$$

V è sottovarietà di H perché aperto di H, quindi l'inclusione $i : V \to H$ è C^∞ e si ha

$$inv|_U = \pi \circ i_H \circ i \circ \pi^{-1}$$

dunque $inv|_U$ è C^∞ perché composizione di C^∞. Per l'arbitrarietà di z segue che inv è localmente C^∞ e pertanto è C^∞.

Conseguentemente, H/Γ è un gruppo di Lie.

$\square$

2.3 Il primo teorema di isomorfismo per gruppi di Lie

Teorema 2.3.1. ***(Il primo teorema di isomorfismo per gruppi di Lie nel caso discreto)*** *Sia $F : H \to G$ un omomorfismo di gruppi di Lie tale che $ker(F)$ è discreto. Allora $F(H)$ è un sottogruppo di Lie di G ed esiste un unico isomorfismo di gruppi di Lie*

$$\widetilde{F} : H/ker(F) \to F(H)$$

tale che $F = \widetilde{F} \circ \pi$, ovvero $\widetilde{F}$ rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "F"'] & H/ker(F) \arrow[d, "\widetilde{F}"] \\ & F(H) \end{tikzcd}$$

Dimostrazione. Indicheremo l'indotta di F su $F(H)$ con $\overline{F}$, quindi

$$F = i_{F(H)} \circ \overline{F}, \text{ dove } i_{F(H)} : F(H) \to G \text{ è l'inclusione}$$

Essendo F un omomorfismo di gruppi, per la Proposizione 1.1.25 $F(H)$ è un sottogruppo di G e per il Teorema 1.1.26

$$\exists!\ \widetilde{F} : {}^{H}\!/_{ker(F)} \to F(H) \text{ isomorfismo di gruppi tale che } \overline{F} = \widetilde{F} \circ \pi$$

Inoltre, poiché $ker(F)$ è un sottogruppo di Lie normale e discreto di H, per il Corollario 2.2.2 ${}^{H}\!/_{ker(F)}$ è un gruppo di Lie e π è un diffeomorfismo locale. In particolare

$$\pi \text{ continua, suriettiva e aperta } \implies \pi \text{ è un'identificazione}$$

allora l'applicazione $i_{F(H)} \circ \widetilde{F} : {}^{H}\!/_{ker(F)} \to G$ è continua per la proprietà universale del quoziente in quanto

$$(i_{F(H)} \circ \widetilde{F}) \circ \pi = i_{F(H)} \circ (\widetilde{F} \circ \pi) = i_{F(H)} \circ \overline{F} = F$$

e F è continua perché omomorfismo di gruppi di Lie. Siccome $i_{F(H)} \circ \widetilde{F}$ è anche un omomorfismo algebrico iniettivo perché composizione di omomorfismi algebrici iniettivi si ha per il Corollario 1.3.22 che

$$i_{F(H)} \circ \widetilde{F} \text{ è omomorfismo iniettivo di gruppi di Lie}$$

pertanto per il Teorema 1.3.11 $(i_{F(H)} \circ \widetilde{F})({}^{H}\!/_{ker(F)}) = F(H)$ è un sottogruppo di Lie di G.

Inoltre, $F(H)$ è un gruppo di Lie di dimensione $dim{}^{H}\!/_{ker(F)} = dimH$ con la struttura indotta da $\widetilde{F}$ e quest'ultima è isomorfismo di gruppi di Lie perché diffeomorfismo relativamente alla struttura su $F(H)$ indotta tramite esso e isomorfismo algebrico per ipotesi, ed è univocamente determinato dal primo teorema di isomorfismo per gruppi.

□

Corollario 2.3.2. *Sia $F : H \to G$ omomorfismo di gruppi di Lie suriettivo tale che $ker(F)$ è discreto. Allora ${}^{H}\!/_{ker(F)}$ è isomorfo a G.*

Dimostrazione. Per il Teorema 2.3.1, ${}^{H}\!/_{ker(F)}$ è isomorfo a $F(H) = G$.

□

Capitolo 3

Spazi vettoriali reali come gruppi di Lie

In questo capitolo tratteremo un esempio notevole di gruppo di Lie, gli spazi vettoriali reali finito-dimensionali: questa scelta è motivata dalla presenza di una relazione forte tra gruppi di Lie e le relative algebre di Lie, le quali sono spazi vettoriali reali finito-dimensionali.
Daremo, oltre alla costruzione di una specifica struttura di gruppo di Lie, una classificazione dei sottogruppi di Lie discreti degli spazi vettoriali reali e dei quozienti per essi.

Teorema 3.0.1. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dim $V = n$. Allora V è un gruppo di Lie abeliano di dimensione n isomorfo a $\mathbb{R}^n$, le cui strutture topologica e differenziabile non dipendono dalla base scelta per V.*

Dimostrazione. Indichiamo con $\overline{B} = \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Sia $B = \{e_1, ..., e_n\}$ una base di V, dal teorema fondamentale delle applicazioni lineari esiste un unico isomorfismo lineare

$$F_B : \mathbb{R}^n \to V : \overline{e}_j \mapsto e_j, j = 1, ..., n$$

che chiameremo isomorfismo canonico relativo a B. Consideriamo $\mathbb{R}^n$ come spazio topologico munito della topologia euclidea e dotiamo V della topologia quoziente relativa a F_B, allora

$$F_B \text{ è omeomorfismo } \implies V \text{ è una varietà topologica di dimensione } n$$

Inoltre, sia $\tau_{\mathbb{R}^n}$ la topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$. Se τ_B è la topologia quoziente su V relativa a F_B e $\tau_{B'}$ è la topologia quoziente su V relativa a $F_{B'}$ dove B'

è un'altra base di V, poiché $F_{B'}^{-1} \circ F_B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è omeomorfismo in quanto isomorfismo lineare perché composizione di isomorfismi lineari risulta

$$\begin{aligned} U \in \tau_B &\iff F_B^{-1}(U) \in \tau_{\mathbb{R}^n} \\ &\iff (F_{B'}^{-1} \circ F_B)(F_B^{-1}(U)) \in \tau_{\mathbb{R}^n} \\ &\iff F_{B'}^{-1}(U) \in \tau_{\mathbb{R}^n} \iff U \in \tau_{B'} \end{aligned} \tag{3.1}$$

ovvero $\tau_B = \tau_{B'}$ e cioè τ_B è unica. La indichiamo con τ.

Osserviamo che un atlante topologico di (V, τ) è $\mathfrak{B} = \{(V, F_B^{-1})\}$, e poiché

$$(V, F_B^{-1}) \text{ è } C^\infty\text{- compatibile con sé stessa}$$

esso è un atlante differenziabile: pertanto esiste un'unica struttura differenziabile $\mathfrak{U}_B$ tale che $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}_B$, e V munito di essa è una varietà differenziabile di dimensione n.
Inoltre, sia $\mathfrak{U}_{B'}$ l'unica struttura differenziabile tale che $\mathfrak{B}$' $\subseteq \mathfrak{U}_{B'}$, dove B' è un'altra base di V e $\mathfrak{B}' = \{(V, F_{B'}^{-1})\}$ è un atlante differenziabile di (V, τ) poiché $F_{B'}$ è un omeomorfismo. Allora

$$F_{B'}^{-1} \circ F_B,\ F_B^{-1} \circ F_{B'} \text{ sono } C^\infty \text{ perché isomorfismi lineari di } \mathbb{R}^n$$

ovvero (V, F_B^{-1}) è C^∞- compatibile con $(V, F_{B'}^{-1})$ e dunque $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{U}_{B'}$, da cui per l'unicità della struttura differenziabile contenente $\mathfrak{B}$ si ha $\mathfrak{U}_{B'} = \mathfrak{U}_B$ e cioè $\mathfrak{U}_B$ è unica. La indichiamo con $\mathfrak{U}$.

Infine, siano $+ : V \times V \to V$, $- : V \to V$ le operazioni di gruppo di V. Mostriamo che esse sono C^∞:

(i) presi $\mathfrak{C} = \{(V \times V, F_B^{-1} \times F_B^{-1})\}$ atlante differenziabile di $V \times V$, $\mathfrak{B}$ atlante differenziabile di V si ha

$$F_B^{-1} \circ + \circ (F_B^{-1} \times F_B^{-1})^{-1} = F_B^{-1} \circ + \circ (F_B \times F_B) = +_{\mathrm{e}}$$

dove $+_{\mathrm{e}}$ è la somma di $\mathbb{R}^n$ e quindi è C^∞, ovvero $+$ è C^∞.

(ii) preso $\mathfrak{B}$ atlante differenziabile di V si ha

$$F_B^{-1} \circ - \circ (F_B^{-1} \times F_B^{-1})^{-1} = F_B^{-1} \circ - \circ (F_B \times F_B) = -_{\mathrm{e}}$$

dove $-_{\mathrm{e}}$ è l'inversione di $\mathbb{R}^n$ e quindi è C^∞, ovvero $-$ è C^∞.

Pertanto V è un gruppo di Lie di dimensione n. Siccome F_B è omomorfismo algebrico in quanto lineare ed è un diffeomorfismo perché F_B è un sistema di coordinate per V allora F_B è un isomorfismo di gruppi di Lie.

□

Osservazione 3.0.2. Per costruzione, un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^m \to V$ è un omomorfismo di gruppi di Lie, infatti è omomorfismo algebrico perché lineare ed è C^∞ perché $F_B^{-1} \circ f$ è C^∞ in quanto lineare da $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$.

3.1 Spazi vettoriali normati

Per studiare i sottogruppi discreti di uno spazio vettoriale reale abbiamo bisogno di introdurre un concetto di limitatezza, e dunque abbiamo bisogno della nozione di spazio vettoriale normato.

Definizione 3.1.1. ***(Norma)*** *Sia V uno spazio vettoriale reale. Una norma su V è un'applicazione*

$$||\cdot|| : V \to \mathbb{R} : v \mapsto ||v||$$

tale che soddisfi le seguenti condizioni:

- $\forall v \in V : ||v|| \geq 0$ *e* $||v|| = 0 \iff v = \boldsymbol{0}$
- $\forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R} : ||\lambda v|| = |\lambda| \; ||v||$
- $\forall v, w \in V : ||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$

La coppia $(V, ||\cdot||)$ è detta spazio vettoriale normato.

Definizione 3.1.2. ***(Palla aperta)*** *Sia $(V, ||\cdot||)$ uno spazio vettoriale normato. Definiamo una palla aperta centrata in $v \in V$ e di raggio $r \in \mathbb{R}$*

$$B_r(v) = \{w \in W : ||w - v|| < r\}$$

In particolare, una palla aperta centrata in $\boldsymbol{0}$ e di raggio r è l'insieme $B_r(\boldsymbol{0}) = \{w \in W : ||w|| < r\}$.

Definizione 3.1.3. ***(Limitatezza)*** *Sia $(V, ||\cdot||)$ uno spazio vettoriale normato. Un sottoinsieme A di V si dice limitato se $\exists\ B_r(\boldsymbol{0})$ palla aperta di centro $\boldsymbol{0}$ e raggio r tale che $A \subseteq B_r(\boldsymbol{0})$.*

Definizione 3.1.4. ***(Equivalenza tra norme)*** *Sia V uno spazio vettoriale reale e siano $||\cdot||, ||\cdot||'$ due norme su V. $||\cdot||$ si dice equivalente a $||\cdot||'$ se $\exists\ m, M \in \mathbb{R},\ m, M > 0$ tali che*

$$\forall v \in V : m\ ||v|| \leq ||v||' \leq M\ ||v||$$

Osservazione 3.1.5. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $||\cdot||$ una norma equivalente a $||\cdot||'$. Osserviamo che $\forall v \in V$

$$m\ ||v|| \leq ||v||' \leq M\ ||v|| \implies \frac{1}{M}\ ||v||' \leq ||v|| \leq \frac{1}{m}\ ||v||'$$

dunque $||\cdot||'$ è equivalente a $||\cdot||$.
Conseguentemente diciamo che le due norme $||\cdot||$, $||\cdot||'$ sono norme equivalenti.

Osservazione 3.1.6. Sia V uno spazio vettoriale reale e siano $||\cdot||$, $||\cdot||'$ due norme equivalenti. Se A è limitato rispetto a $||\cdot||$ e cioè $A \subseteq B_r(\mathbf{0})$ per un opportuno $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, allora

$$\forall a \in A\colon\ ||a||' \leq M\ ||a|| \leq Mr$$

ovvero $A \subseteq B'_{Mr}(\mathbf{0})$ e quindi A è limitato rispetto a $||\cdot||'$.

Nel caso di nostro interesse lavoriamo con spazi vettoriali reali finito-dimensionali, che possiamo munire di una struttura di spazio vettoriale normato come segue.

Teorema 3.1.7. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dim $V = n$. Sia B una base di V e sia F_B il relativo isomorfismo canonico. Allora l'applicazione*

$$||\cdot||_B : V \to \mathbb{R} : v \mapsto ||F_B^{-1}(v)||_{\mathbb{R}^n}$$

dove $||\cdot||_{\mathbb{R}^n}$ è la norma euclidea su $\mathbb{R}^n$, è una norma su V. Inoltre, se B' è un'altra base di V e $||\cdot||_{B'}$ è la norma associata allora $||\cdot||_B$, $||\cdot||_{B'}$ sono norme equivalenti.

Dimostrazione. Verifichiamo che $||\cdot||_B$ soddisfa gli assiomi di norma:

(i) $\forall v \in V\colon\ ||v||_B = ||F_B^{-1}(v)||_{\mathbb{R}^n} \geq 0$, e

$$||v||_B = 0 \iff ||F_B^{-1}(v)||_{\mathbb{R}^n} = 0 \iff F_B^{-1}(v) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} \iff v = \mathbf{0}$$

(ii) sia $v \in V$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$||\lambda v||_B = ||F_B^{-1}(\lambda v)||_{\mathbb{R}^n} = ||\lambda F_B^{-1}(v)||_{\mathbb{R}^n} = |\lambda|\ ||F_B^{-1}(v)||_{\mathbb{R}^n} = |\lambda|\ ||v||_B$$

(iii) siano $v, w \in V$, allora

$$||v + w||_B = ||F_B^{-1}(v + w)||_{\mathbb{R}^n} = ||F_B^{-1}(v) + F_B^{-1}(w)||_{\mathbb{R}^n} \leq$$

$$\leq ||F_B^{-1}(v)||_{\mathbb{R}^n} + ||F_B^{-1}(w)||_{\mathbb{R}^n} = ||v||_B + ||w||_B$$

Ciò prova che $||\cdot||_B$ è una norma su V.

Inoltre, sia $||\cdot||_{B'}$ la norma su V relativa a un'altra base di V. Poiché

$$||\cdot||_{B'} \circ F_{B'} = ||\cdot||_{\mathbb{R}^n} \implies ||\cdot||_{B'} \circ F_{B'} \text{ è continua}$$

ed essendo $F_{B'}$ un'identificazione perché omeomorfismo, dalla proprietà universale del quoziente $||\cdot||_{B'}$ è continua. Sia

$$\mathrm{S}^{n-1} = \{v \in V : ||v||_B = 1\}$$

munito della topologia di sottospazio di V, siccome $\mathrm{S}^{n-1} = F_B(\mathbb{S}^{n-1})$ dove $\mathbb{S}^{n-1}$ è la sfera unitaria di $\mathbb{R}^n$, compatta per il teorema di Heine-Borel e connessa, allora S^{n-1} è compatto e connesso. Dato che $||\cdot||_{B'}|_{\mathrm{S}^{n-1}}$ è continua perché restrizione di continua, per il Teorema 1.2.3

$$\exists\ m = min_{\mathrm{S}^{n-1}}||\cdot||_{B'},\ M = max_{\mathrm{S}^{n-1}}||\cdot||_{B'}$$

Conseguentemente, se $v \in V, v \neq \mathbf{0}$ allora $\frac{v}{||v||_B} \in \mathrm{S}^{n-1}$ e dunque

$$m \leq ||\tfrac{v}{||v||_B}||_{B'} \leq M \implies$$

$$m \leq \tfrac{1}{||v||_B}||v||_{B'} \leq M \implies$$

$$m||v||_B \leq ||v||_{B'} \leq M||v||_B$$

da cui per l'arbitrarietà di v le due norme sono equivalenti.

□

Osservazione 3.1.8. In virtù del Teorema 3.1.7 la nozione di limitatezza in uno spazio vettoriale reale finito-dimensionale ha senso, e non dipende dalla base scelta.

3.2 Sottogruppi di Lie discreti di spazi vettoriali reali

In questa sezione vedremo come caratterizzare i sottogruppi di Lie discreti degli spazi vettoriali reali finito-dimensionali sotto varie prospettive. Una di esse ci permetterà di classificare i quozienti degli spazi vettoriali per i sottogruppi di Lie discreti.

Proposizione 3.2.1. ***(Caratterizzazione sottogruppi discreti degli spazi vettoriali)*** *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n e sia Γ un sottogruppo algebrico di V. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Γ è un sottogruppo discreto di V*
2. *$\forall K$ compatto di V si ha $|K \cap \Gamma| < \infty$*
3. *$\forall B$ limitato di V si ha $|B \cap \Gamma| < \infty$*

Dimostrazione. "1. $\Longrightarrow$ 2." Per la Proposizione 2.1.7 Γ è un chiuso di V. Sia K un compatto di V, allora

- $K \cap \Gamma$ munito della topologia di sottospazio di V è discreto perché sottospazio di Γ
- $K \cap \Gamma$ è compatto perché chiuso del compatto K

dunque preso $\{\{p\} : p \in K \cap \Gamma\}$ ricoprimento aperto di $K \cap \Gamma$, per la compattezza è possibile estrarre un sottoricoprimento finito di $K \cap \Gamma$ e cioè $K \cap \Gamma$ è ricoperto da un numero finito di suoi punti, ovvero $|K \cap \Gamma| < \infty$.

"2. $\Longrightarrow$ 3." Sia B limitato in V. Se fissiamo una base C di V e consideriamo il relativo isomorfismo canonico F_C, presa $B_r(\mathbf{0})$ una palla contenente B allora $F_C^{-1}(B)$ è limitato in $\mathbb{R}^n$ perché $F_C^{-1}(B) \subseteq F_C^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$ e

$$\begin{aligned} F_C^{-1}(B_r(\mathbf{0})) &= \{x \in \mathbb{R}^n : F_C(x) \in B_r(\mathbf{0})\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : ||F_C(x)||_C < r\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : ||F_C^{-1}(F_C(x))||_{\mathbb{R}^n} < r\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : ||x||_{\mathbb{R}^n} < r\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

ovvero $F_C^{-1}(B_r(\mathbf{0}))$ è la palla aperta centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$ e di raggio r. Conseguentemente $\overline{F_C^{-1}(B)}$ è ancora limitato perché è il più piccolo chiuso contenente $F_C^{-1}(B)$ e $F_C^{-1}(B)$ è contenuto nella palla chiusa centrata nell'origine di raggio r, da cui per il teorema di Heine-Borel è compatto. Segue che $\overline{B}$ è compatto di V in quanto F_C è omeomorfismo e

$$F_C(\overline{F_C^{-1}(B)}) = \overline{F_C(F_C^{-1}(B))} = \overline{B}$$

pertanto per ipotesi $|\overline{B} \cap \Gamma| < \infty$ e poiché $B \cap \Gamma \subseteq \overline{B} \cap \Gamma$ si ha $|B \cap \Gamma| < \infty$.

"3. $\Longrightarrow$ 1." Sia B un aperto limitato con $\mathbf{0} \in B$, per ipotesi $|B \cap \Gamma| < \infty$ e quindi $|B \cap (\Gamma \smallsetminus \{\mathbf{0}\})| < \infty$. Ciò significa che $S = B \cap (\Gamma \smallsetminus \{\mathbf{0}\})$ è finito, ed essendo V uno spazio T_1 allora S è un chiuso di V e dunque di B: segue che $U = B \smallsetminus S$ è aperto di B e quindi aperto di V perché B è aperto di V, e risulta

$$U \cap \Gamma = \{x \in B \smallsetminus S : x \in \Gamma\} = \{x \in B \cap \Gamma : x \notin S\} =$$

$$= \{x \in B : x \in \Gamma, x \notin (\Gamma \smallsetminus \{\mathbf{0}\})\} = \{\mathbf{0}\}$$

pertanto, per la Proposizione 2.1.6 Γ è un sottogruppo discreto di V.

$\square$

Definizione 3.2.2. ***(Reticolo)*** *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n. Un reticolo Λ di V è un sottogruppo di V della forma*

$$\Lambda = \{m_1 e_1 + ... + m_k e_k : m_j \in \mathbb{Z}\ \forall j = 1, ..., k\} = \mathbb{Z}e_1 + ... + \mathbb{Z}e_k$$

dove $e_1, ..., e_k$ sono vettori linearmente indipendenti in V, $k \leq n$. Essi sono detti generatori del reticolo e k è detta dimensione del reticolo. Se $k = n$ il reticolo è detto pieno.

Osservazione 3.2.3. Si pone per definizione che $\Lambda = \{\mathbf{0}\}$ è un reticolo generato da un insieme di vettori vuoto, cioè $k = 0$. Inoltre V non è un reticolo di sé stesso perché è uno spazio vettoriale reale.

L'importanza dei reticoli è messa in evidenza dal seguente:

Teorema 3.2.4. ***(Caratterizzazione dei reticoli)*** *Sia V uno spazio vettoriale reale di dim $V = n$. Un sottogruppo Λ di V è un reticolo se e solo se è un sottogruppo discreto.*

Dimostrazione. " $\Longrightarrow$ " Sia $\Lambda = \mathbb{Z}e_1 + ... + \mathbb{Z}e_k$ un reticolo di V. Completiamo i vettori $e_1, ..., e_k$ a una base di V: $C = \{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$ e sia F_C il relativo isomorfismo canonico. Allora

$$\Lambda = F_C(\mathbb{Z}^k \times \{0\}^{n-k})$$

e presa $F_C(B_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0}))$ l'immagine tramite F_C palla aperta centrata nell'origine di $\mathbb{R}^n$ e di raggio $\frac{1}{2}$, aperto di V perché F_C è omeomorfismo, si ha

$$\Lambda \cap F_C(B_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0})) = F_C(\mathbb{Z}^k \times \{0\}^{n-k}) \cap F_C(B_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0})) =$$

$$= F_C((\mathbb{Z}^k \times \{0\}^{n-k}) \cap B_{\frac{1}{2}}(\mathbf{0})) = F_C(\{\mathbf{0}\}) = \{\mathbf{0}\}$$

quindi per la Proposizione 2.1.6 Λ è un sottogruppo discreto.

" $\Longleftarrow$ " Sia Λ un sottogruppo discreto di V e sia k il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che possiamo estrarre contemporaneamente da Λ. Se $k = 0$ allora $\Lambda = \{\mathbf{0}\}$, dunque è un reticolo; supponiamo allora $k \geq 1$ e procediamo per induzione su k.

- $k = 1$. Sia $e_1 \in \Lambda$, $e_1 \neq \mathbf{0}$, e poiché 1 è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che possiamo estrarre contemporaneamente da Λ segue che $\Lambda \subseteq \mathbb{R}e_1$.
  Completiamo e_1 a una base di V: $C = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ e dato $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, consideriamo

$$E_M = \{te_1 : t \in \mathbb{R}, |t| < M\}$$

Esso è limitato in quanto $E_M \subseteq B_M(\mathbf{0})$, e poiché Λ è discreto, per la Proposizione 3.2.1 si ha $|E_M \cap \Lambda| < \infty$. Siccome $\Lambda \subseteq \mathbb{R}e_1$ e $\Lambda \neq \{\mathbf{0}\}$

$$\exists\ me_1 \in \Lambda,\ m \neq 0 \implies$$

$$E_M \cap \Lambda \neq \{\mathbf{0}\}, \text{ se } M > |m| + 1$$

Inoltre $E_M \cap \Lambda$ soddisfa la condizione

$$\text{se } te_1 \in E_M \cap \Lambda \text{ allora } -te_1 \in E_M \cap \Lambda$$

perché $-te_1 \in \Lambda$ sottogruppo e $|-t| = |t|$: conseguentemente, per M sufficientemente grande $\exists\ ve_1 \in E_M \cap \Lambda$ tale che $v > 0$, e allora essendo $E_M \cap \Lambda$ finito esiste $a = min\{v : ve_1 \in E_M \cap \Lambda, v > 0\}$.
Posto $f = ae_1$ mostriamo che $\Lambda = \mathbb{Z}f$:

"$\supseteq$" Per definizione di a risulta $f \in \Lambda$, dunque $\mathbb{Z}f \subseteq \Lambda$ perché Λ è un sottogruppo.

"$\subseteq$" Supponiamo per assurdo che $\Lambda \setminus \mathbb{Z}f \neq \varnothing$ e sia $\alpha \in \Lambda \setminus \mathbb{Z}f$. Poiché $\alpha \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}e_1 = \mathbb{R}f\ \exists\ d \in \mathbb{R}$ tale che $\alpha = df$, ma $\alpha \notin \mathbb{Z}f$ e dunque $d \notin \mathbb{Z}$: presa $[d]$ la parte intera di d si ha

$$d = [d] + (d - [d]),\ [d] \in \mathbb{Z},\ (d - [d]) \in (0, 1)$$

quindi scriviamo $\alpha = (m + c)f = mf + cf,\ m \in \mathbb{Z},\ c \in (0, 1)$. Osserviamo allora che

1. $cf = \alpha - mf \in \Lambda$ perché sottogruppo e $\alpha \in \Lambda$, $mf \in \mathbb{Z}f \subseteq \Lambda$
2. $cf = cae_1$, $|ca| = |c|\ |a| < M$

ovvero $cae_1 \in E_M \cap \Lambda$ e $0 < ca < a = min\{v : ve_1 \in E_M \cap \Lambda, v > 0\}$, assurdo. Pertanto $\Lambda \setminus \mathbb{Z}f = \varnothing$ e cioè $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}f$.

- supponiamo che la tesi sia vera per $k-1$, ovvero se possiamo estrarre contemporaneamente da un sottogruppo discreto di V al massimo $k-1$ vettori linearmente indipendenti allora esso è un reticolo.
  Sia Λ un sottogruppo discreto di V da cui possiamo estrarre contemporaneamente al massimo k vettori linearmente indipendenti. Siano $e_1, ..., e_{k-1}$ vettori linearmente indipendenti in Λ e sia

$$\Lambda' = \Lambda \cap \mathbb{R}e_1 + ... + \mathbb{R}e_{k-1}$$

Λ' è un sottogruppo di V perché intersezione di sottogruppi di V e se munito della topologia indotta da V è discreto perché sottospazio di Λ, da cui per ipotesi induttiva $\exists\ f_1, ..., f_{k-1}$ vettori linearmente indipendenti in V tali che

$$\Lambda' = \mathbb{Z}f_1 + ... + \mathbb{Z}f_{k-1}$$

In particolare $f_1, ..., f_{k-1} \in \Lambda' \subseteq \Lambda$, dunque possiamo estrarre e_k da Λ cosicché $f_1, ..., f_{k-1}, e_k$ siano linearmente indipendenti. Essendo k il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che possiamo estrarre contemporaneamente da Λ segue che

$$\Lambda \subseteq \mathbb{R}f_1 + ... + \mathbb{R}f_{k-1} + \mathbb{R}e_k$$

dunque se $w \in \Lambda$ allora

$$w = a_1 f_1 + ... + a_{k-1} f_{k-1} + a_w e_k,\ a_1, ..., a_{k-1}, a_w \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}f_1 + ... + \mathbb{R}f_{k-1} + \mathbb{R}e_k$ è un sottospazio vettoriale di V del quale una base è $\{f_1, ..., f_{k-1}, e_k\}$, allora per l'unicità delle componenti rispetto a una base è ben definita l'applicazione

$$\Phi : \mathbb{R}f_1 + ... + \mathbb{R}f_{k-1} + \mathbb{R}e_k \to \mathbb{R} : w \mapsto a_w$$

e perciò possiamo considerare la restrizione $\phi = \Phi|_\Lambda$. Essa è un omomorfismo di gruppi abeliani, infatti se $w, v \in \Lambda$, $w = a_1 f_1 + ... + a_{k-1} f_{k-1} + a_w e_k$, $v = b_1 f_1 + ... + b_{k-1} f_{k-1} + b_v e_k$ allora

$$\begin{aligned} \phi(w + v) &= \phi((a_1 f_1 + ... + a_w e_k) + (b_1 f_1 + ... + b_v e_k)) = \\ &= \phi((a_1 + b_1) f_1 + ... + (a_w + b_v) e_k) = \\ &= a_w + b_v = \phi(w) + \phi(v) \end{aligned} \tag{3.3}$$

e conseguentemente $\phi(\Lambda)$ è sottogruppo di $\mathbb{R}$. Inoltre, sia $r \in \phi(\Lambda)$ e sia $w \in \phi^{-1}(r)$, $w = a_1 f_1 + ... + a_{k-1} f_{k-1} + r e_k$. Consideriamo il vettore $w' = [a_1] f_1 + ... + [a_{k-1}] f_{k-1}$, quindi $w' \in \Lambda' \subseteq \Lambda$. Allora $w - w' \in \Lambda$ sottogruppo e

$$\phi(w - w') = \phi(w) - \phi(w') = r - 0 = r$$

dove le componenti rispetto a $f_1, ..., f_{k-1}$ di $w - w'$ sono

$$(a_j - [a_j]) \in [0,1),\ j = 1, ..., k-1$$

Completiamo $f_1, ..., f_{k-1}, e_k$ a una base di V: $C = \{f_1, ..., e_k, ..., e_n\}$ e consideriamo $||\cdot||_C$. Sia $m > 0$ e $M = max\{1, m\}$, per quanto appena osservato se $r \in \phi(\Lambda) \cap \{t \in \mathbb{R} : |t| < m\}$ allora $r = \phi(v)$ per qualche $v \in B_M(\mathbf{0})$ e dunque

$$|\phi(\Lambda) \cap \{t \in \mathbb{R} : |t| < m\}| \leq |\Lambda \cap B_M(\mathbf{0})| < \infty$$

dove l'ultima disuguaglianza è vera per la Proposizione 3.2.1 in quanto Λ è sottogruppo discreto di V e $B_M(\mathbf{0})$ è limitato di V. Per l'arbitrarietà di m deduciamo che se B è un limitato di $\mathbb{R}$ e cioè $\exists\ m > 0$ tale che $B \subseteq \{t \in \mathbb{R} : |t| < m\}$ allora

$$\phi(\Lambda) \cap B \subseteq \phi(\Lambda) \cap \{t \in \mathbb{R} : |t| < m\} \implies$$

$$|\phi(\Lambda) \cap B| \leq |\phi(\Lambda) \cap \{t \in \mathbb{R} : |t| < m\}| < \infty$$

da cui per la Proposizione 3.2.1 $\phi(\Lambda)$ è un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}$. Dato che $\Lambda \neq \{\mathbf{0}\}$ e quindi $\phi(\Lambda) \neq \{0\}$, e poiché $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale di dimensione 1, deduciamo che

il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che possiamo estrarre contemporaneamente da $\phi(\Lambda)$ è 1

allora per la base induttiva $\phi(\Lambda)$ è un reticolo e cioè $\phi(\Lambda) = \mathbb{Z}r$ per qualche $r \neq 0$, e siccome $r \in \phi(\Lambda)\ \exists\ f_k \in \Lambda$ tale che $r = \phi(f_k)$.
Per costruzione $f_1, ..., f_{k-1}, f_k$ sono linearmente indipendenti, altrimenti la componente di f_k rispetto a e_k sarebbe nulla e cioè $r = \phi(f_k) = 0$. Essendo k il massimo numero di vettori linearmente indipendenti che possiamo estrarre contemporaneamente da Λ segue che

$$\Lambda \subseteq \mathbb{R}f_1 + ... + \mathbb{R}f_{k-1} + \mathbb{R}f_k$$

Osserviamo inoltre che $e_1, ..., e_{k-1}, e_k$ sono k vettori linearmente indipendenti in Λ. Infatti, se per assurdo fossero linearmente dipendenti, dato che $e_1, ..., e_{k-1}$ sono linearmente indipendenti per costruzione ciò implica che

$$e_k \in \mathbb{R}e_1 + ... + \mathbb{R}e_{k-1}$$

ma poiché $e_k \in \Lambda$ allora $e_k \in \Lambda' = \mathbb{Z}f_1 + ... + \mathbb{Z}f_{k-1}$, assurdo perché abbiamo scelto e_k cosicché $f_1, ..., f_{k-1}, e_k$ siano linearmente indipendenti. Pertanto

$$\Lambda \subseteq \mathbb{R}e_1 + ... + \mathbb{R}e_{k-1} + \mathbb{R}e_k$$

e dal fatto che $f_1, ..., f_{k-1}, f_k \in \Lambda$ risulta che $\mathbb{R}f_1 + ... + \mathbb{R}f_{k-1} + \mathbb{R}f_k \subseteq \mathbb{R}e_1 + ... + \mathbb{R}e_{k-1} + \mathbb{R}e_k$. Verifichiamo che $\Lambda = \mathbb{Z}f_1 + ... + \mathbb{Z}f_k$:

"$\supseteq$" Poiché $f_1, ..., f_k \in \Lambda$ sottogruppo si ha $\mathbb{Z}f_1 + ... + \mathbb{Z}f_k \subseteq \Lambda$

"$\subseteq$" Sia $\alpha \in \Lambda$ e sia $\phi(\alpha) = a\phi(f_k)$, $a \in \mathbb{Z}$. Poiché $af_k \in \mathbb{Z}f_k \subseteq \Lambda$ allora $\alpha - af_k \in \Lambda$ sottogruppo e dunque possiamo valutare ϕ in $\alpha - af_k$:

$$\phi(\alpha - af_k) = \phi(\alpha) - a\phi(f_k) = 0 \implies$$

$$\begin{aligned} \alpha - af_k \in \Lambda \cap \mathbb{R}f_1 + ... + \mathbb{R}f_{k-1} \subseteq \\ \subseteq \Lambda \cap \mathbb{R}e_1 + ... + \mathbb{R}e_{k-1} = \\ = \Lambda' = \mathbb{Z}f_1 + ... + \mathbb{Z}f_{k-1} \end{aligned} \tag{3.4}$$

da cui $\exists\ a_1, ..., a_{k-1} \in \mathbb{Z}$ tali che $\alpha - af_k = a_1 f_1 + ... + a_{k-1}f_{k-1}$ e pertanto $\alpha = a_1 f_1 + ... + a_{k-1}f_{k-1} + af_k \in \mathbb{Z}f_1 + ... + \mathbb{Z}f_k$.

Ciò prova che Λ è un reticolo.

□

3.3 Quozienti di spazi vettoriali reali per sottogruppi di Lie discreti

Incontriamo di seguito un'applicazione notevole dei risultati visti fin'ora, e in particolare del primo teorema di isomorfismo per gruppi di Lie.

Teorema 3.3.1. ***(Classificazione dei quozienti di spazi vettoriali nel caso discreto)*** *Sia V uno spazio vettoriale reale di dim $V = n$ e sia Γ un reticolo di V di dimensione k. Allora ${}^{V}\!/_{\Gamma}$ è un gruppo di Lie, isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 3.0.1 V è un gruppo di Lie isomorfo a $\mathbb{R}^n$, mentre per il Teorema 3.2.4 Γ è un sottogruppo discreto di V; poiché V è abeliano allora Γ è sottogruppo normale di V, da cui per il Corollario 2.2.2 ${}^{V}\!/_{\Gamma}$ è un gruppo di Lie.

Siano $e_1, ..., e_k$ generatori di Γ e completiamoli a una base di V: $B = \{e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n\}$. Se F_B è il relativo isomorfismo canonico risulta $\Gamma = F_B(\mathbb{Z}^k \times \{0\}^{n-k})$. Osserviamo che

$$\pi \circ F : \mathbb{R}^n \to {}^{V}\!/_{\Gamma}$$

è omomorfismo suriettivo di gruppi di Lie perché composizione di omomorfismi suriettivi di gruppi di Lie e il suo nucleo è

$$\begin{aligned} ker(\pi \circ F) &= \{x \in \mathbb{R}^n : \pi(F(x)) = \Gamma\} = \\ &= F_B^{-1}(\{v \in V : \pi(v) = \Gamma\}) = \\ &= F_B^{-1}(ker(\pi)) = \\ &= F_B^{-1}(\Gamma) = \\ &= \mathbb{Z}^k \times \{0\}^{n-k} \end{aligned} \tag{3.5}$$

il quale per il Teorema 3.2.1 è un sottogruppo discreto di $\mathbb{R}^n$, pertanto per il Corollario 2.3.2 ${}^{\mathbb{R}^n}\!/_{\mathbb{Z}^k \times \{0\}^{n-k}}$ è isomorfo a ${}^{V}\!/_{\Gamma}$.

Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ l'applicazione definita da

$$f(t_1, ..., t_n) = ((e^{2\pi i t_1}, ..., e^{2\pi i t_k}), (t_{k+1}, ..., t_n))$$

Essa è un omomorfismo di gruppi di Lie suriettivi perché prodotto delle applicazioni

- $f_1 : \mathbb{R}^k \to \mathbb{T}^k : (t_1, ..., t_k) \mapsto (e^{2\pi i t_1}, ..., e^{2\pi i t_k})$, omomorfismo di gruppi di Lie suriettivo perché prodotto degli omomorfismi di gruppi di Lie suriettivi

$$g_j : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi i t},\ j = 1, ..., k$$

- $f_2 = id_{\mathbb{R}^{n-k}}$, isomorfismo di gruppi di Lie

e il suo nucleo è

$$\begin{aligned} ker(f) &= ker(f_1) \times ker(f_2) = \\ &= (ker(g_1) \times ker(g_2) \times ... \times ker(g_k)) \times ker(f_2) = \\ &= (\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}) \times \{0\}^{n-k} = \\ &= \mathbb{Z}^k \times \{0\}^{n-k} \end{aligned} \tag{3.6}$$

pertanto per il Corollario 2.3.2 ${}^{\mathbb{R}^n}\!\diagup_{\mathbb{Z}^k \times \{0\}^{n-k}}$ è isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, e poiché la composizione di isomorfismi di gruppi di Lie è un isomorfismo di gruppi di Lie si ha che ${}^{V}\!\diagup_{\Gamma}$ è isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

$\square$

Capitolo 4

Classificazione dei gruppi di Lie abeliani

In questo capitolo dimostreremo il secondo risultato principale della tesi, ovvero la classificazione dei gruppi di Lie abeliani. Vedremo come si inserisce l'abelianità nel contesto dei gruppi di Lie, in particolare tramite i gruppi divisibili e le loro caratteristiche.

4.1 Gruppi divisibili

Definizione 4.1.1. ***(Gruppo divisibile)*** *Sia D un gruppo abeliano. D è detto divisibile se $\forall a \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $\exists\, b \in D$ tale che $a = nb$.*

Esempio 4.1.2. Sia $(\mathbb{Q}, +)$ gruppo abeliano. Se $a \in \mathbb{Q}$ e $n \in \mathbb{N}^+$ allora $b = \frac{a}{n} \in \mathbb{Q}$ è tale che

$$nb = n(\tfrac{a}{n}) = \tfrac{na}{n} = a$$

dunque $\mathbb{Q}$ è divisibile.

Esempio 4.1.3. Sia $(\mathbb{Z}, +)$ gruppo abeliano. Preso $1 \in \mathbb{Z}$ e $2 \in \mathbb{N}^+$ si ha $\forall z \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$

$$2|z| \geq 2 > 1 \implies 2z \neq 1$$

mentre se $z = 0$ allora $2z = 0 \neq 1$: pertanto $\mathbb{Z}$ non è divisibile.

Lemma 4.1.4. ***(Lemma di incollamento)*** *Sia C un gruppo abeliano e siano A, B sottogruppi di C. Se G è un gruppo abeliano qualsiasi e $f : A \to G$, $g : B \to G$ sono omomorfismi di gruppi abeliani tali che $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$ allora esiste un unico omomorfismo di gruppi abeliani $h : A + B \to G$ tale che $h|_A = f$, $h|_B = g$.*

Dimostrazione. Dato che A e B sono sottogruppi normali di C perché C è abeliano allora $A+B$ è sottogruppo di C, e dunque è un gruppo abeliano con la somma indotta da C. Sia l'applicazione $h : A+B \to G$ definita da

$$h(a+b) = f(a) + g(b)$$

h è ben definita, cioè non dipende dalla decomposizione come somma in $A+B$. Infatti, sia $\alpha \in A+B$, $\alpha = a+b = c+d$ dove $a, c \in A$, $b, d \in B$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} h(a+b) = h(c+d) &\iff f(a)+g(b) = f(c)+g(d) \\ &\iff f(a)-f(c) = g(d)-g(b) \\ &\iff f(a-c) = g(d-b) \end{aligned} \tag{4.1}$$

e quest'ultima è vera in quanto poiché $a-c \in A$ sottogruppo, $d-b \in B$ sottogruppo allora

$$a+b = c+d \implies a-c = d-b \implies d-b \in A \cap B$$

e poiché $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$ allora $f(a-c) = f(d-b) = g(d-b)$. Inoltre, se a_1+b_1, $a_2+b_2 \in A+B$ si ha

$$\begin{aligned} h((a_1+b_1)+(a_2+b_2)) &= h((a_1+a_2)+(b_1+b_2)) = \\ &= f(a_1+a_2)+g(b_1+b_2) = \\ &= (f(a_1)+f(a_2))+(g(b_1)+g(b_2)) = \\ &= (f(a_1)+g(b_1))+(f(a_2)+g(b_2)) = \\ &= h((a_1+b_1))+h((a_2+b_2)) \end{aligned} \tag{4.2}$$

ovvero h è omomorfismo di gruppi abeliani, e

- $a \in A \implies h(a) = h(a+0) = f(a)+g(0) = f(a)+0 = f(a)$
- $b \in B \implies h(b) = h(0+b) = f(0)+g(b) = 0+g(b) = g(b)$

ovvero $h|_A = f$, $h|_B = g$. Infine, se $p : A+B \to G$ è un omomorfismo di gruppi abeliani tale che $p|_A = f$, $p|_B = g$, allora $\forall a+b \in A+B$ si ha

$$p(a+b) = p(a)+p(b) = f(a)+g(b) = h(a+b)$$

ovvero $p = h$ e pertanto h è unico.

□

Teorema 4.1.5. ***(Caratterizzazione dei gruppi divisibili)*** *Sia D un gruppo abeliano. Allora D è divisibile se e solo se per ogni A gruppo abeliano: se $f : A \to D$ è omomorfismo di gruppi abeliani e B è un gruppo abeliano con A sottogruppo di B esiste un omomorfismo di gruppi abeliani $\overline{f} : B \to D$ tale che $\overline{f}|_A = f$.*

Dimostrazione. " $\Longrightarrow$ " Sia A un gruppo abeliano, sia $f : A \to D$ un omomorfismo di gruppi abeliani e sia B un gruppo abeliano tale che A è sottogruppo di B. Sia la famiglia

$$\mathfrak{P} = \{(C, g) : C \text{ sottogruppo di } B \text{ e } A \text{ sottogruppo di } C,\\ g : C \to D \text{ omomorfismo tale che } g|_A = f\}$$

Essa è non vuota perché $(A, f) \in \mathfrak{P}$. Definiamo una relazione su $\mathfrak{P}$:

$$(C_1, g_1) \sim (C_2, g_2) \iff C_1 \text{ è sottogruppo di } C_2 \text{ e } g_2|_{C_1} = g_1$$

che definisce una relazione d'ordine parziale su $\mathfrak{P}$ in quanto

- $(C, g) \sim (C, g)$ perché C è sottogruppo di sé stesso e $g|_C = g$
- se $(C_1, g_1) \sim (C_2, g_2)$ e $(C_2, g_2) \sim (C_1, g_1)$, allora

  $$C_1 \subseteq C_2,\, C_2 \subseteq C_1 \implies C_1 = C_2$$

  e conseguentemente $g_1 = g_2|_{C_1} = g_2|_{C_2} = g_2$, da cui $(C_1, g_1) = (C_2, g_2)$
- se $(C_1, g_1) \sim (C_2, g_2)$ e $(C_2, g_2) \sim (C_3, g_3)$, allora

  $$C_1 \text{ è sottogruppo di } C_2,\, C_2 \text{ è sottogruppo di } C_3 \implies C_1 \text{ è}\\ \text{sottogruppo di } C_3$$

  e poiché $g_1 = g_2|_{C_1} = (g_3|_{C_2})|_{C_1} = g_3|_{C_1}$ si ha $(C_1, g_1) \sim (C_3, g_3)$

Indichiamo allora $\sim$ con $\leq$. Sia $\{(C_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una catena di $\mathfrak{P}$ e consideriamo

$$C_I = \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$$

sottogruppo di B per la Proposizione 1.1.10 perché $\{C_\alpha\}$ è una catena di sottogruppi di B e tale che A è sottogruppo di C_I perché per $\alpha \in I$ A è sottogruppo di C_α e C_α è sottogruppo di C_I. Definiamo l'applicazione

$$g_I : C_I \to D : g_I(c) = g_\alpha(c), \text{ se } c \in C_\alpha$$

Essa è ben definita, cioè se $c \in C_\alpha \cap C_\beta$ allora $g_\alpha(c) = g_\beta(c)$. Infatti, se $c \in C_\alpha \cap C_\beta$, essendo $\{(C_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ totalmente ordinato si ha

$$(C_\alpha, g_\alpha) \leq (C_\beta, g_\beta) \implies g_\alpha(c) = g_\beta|_{C_\alpha}(c) = g_\beta(c)$$

(oppure $(C_\alpha, g_\alpha) \leq (C_\beta, g_\beta)$, ma i due casi sono analoghi e dunque ne trattiamo solo uno). Osserviamo che g_I è un omomorfismo di gruppi abeliani, infatti se $c, d \in C_I$ e cioè $c \in C_\alpha$, $d \in C_\beta$ per qualche $\alpha, \beta \in I$, poiché C_α è sottogruppo di C_β (o analogamente C_β è sottogruppo di C_α) allora $c, d \in C_\beta$ da cui $c + d \in C_\beta$ sottogruppo e pertanto

$$g_I(c+d) = g_\beta(c+d) = g_\beta(c) + g_\beta(d) = g_I(c) + g_I(d)$$

Inoltre per definizione, se $\alpha \in I$ allora $g_I|_{C_\alpha} = g_\alpha$ e dunque preso $\alpha \in I$ si ha $g_I|_A = g_\alpha|_A = f$, mostrando così che $(C_I, g_I) \in \mathfrak{P}$. Per costruzione risulta

$$\forall \alpha \in I\colon\ (C_\alpha, g_\alpha) \leq (C_I, g_I)$$

ovvero (C_I, g_I) è un maggiorante in $\mathfrak{P}$ per $\{(C_\alpha, g_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, da cui per l'arbitrarietà della catena di $\mathfrak{P}$ segue che $\mathfrak{P}$ è un insieme induttivo e per il lemma di Zorn ammette un elemento massimale $(\overline{A}, \overline{f})$. In particolare

- $\overline{A}$ è un sottogruppo di B e A è un sottogruppo di $\overline{A}$
- $\overline{f} : \overline{A} \to D$ è omomorfismo tale che $\overline{f}|_A = f$

Supponiamo per assurdo che $\overline{A} \neq B$, dunque che $\overline{A} \subsetneq B$, e sia $x \in B \smallsetminus \overline{A}$. Distinguiamo due casi:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^+$ si ha $nx \notin \overline{A}$. Sia $<x>$ il gruppo ciclico generato da x, allora $\overline{A} \cap <x> = \{0\}$ e $K = \overline{A} + <x>$ è sottogruppo di B per la Proposizione 1.1.11 con A sottogruppo di K. Definiamo l'applicazione

$$\phi : K \to D : a + mx \mapsto \overline{f}(a)$$

Essa è ben definita, cioè non dipende dalla decomposizione come somma in K. Infatti, sia $k \in K$, $k = a + mx = b + nx$ dove $a, b \in \overline{A}$, $m, n \in \mathbb{N}$, allora

$$a + mx = b + nx \implies a - b = nx - mx = (n-m)x \implies$$

$$a - b \in \overline{A} \cap < x > = \{0\} \implies a = b \implies$$

$$\phi(a + mx) = \overline{f}(a) = \overline{f}(b) = \phi(b + nx)$$

Inoltre ϕ è omomorfismo di gruppi abeliani in quanto se $a+mx$, $b+nx \in K$ allora

$$\begin{aligned} \phi((a+mx)+(b+nx)) &= \phi((a+b)+(m+n)x) = \\ &= \overline{f}(a+b) = \overline{f}(a) + \overline{f}(b) = \\ &= \phi(am+mx) + \phi(b+nx) \end{aligned} \tag{4.3}$$

e se $k \in A$ si ha $\phi(k) = \phi(k+0) = \overline{f}(k) = \overline{f}|_A(k) = f(a)$, ovvero $\phi|_A = f$. Ciò mostra che $(K, \phi) \in \mathfrak{P}$, tuttavia poiché $\overline{A}$ è sottogruppo proprio di K e per costruzione $\phi|_{\overline{A}} = \overline{f}$ allora $(\overline{A}, \overline{f}) < (K, \phi)$ e ciò è assurdo per la massimalità di $(\overline{A}, \overline{f})$.

(ii) $\exists\ n \in \mathbb{N}^+$ tale che $nx \in \overline{A}$. Sia il sottoinsieme dei numeri naturali

$$T = \{m \in \mathbb{N}^+ : mx \in \overline{A}\}$$

Esso è non vuoto in quanto $n \in T$, quindi per il principio del buon ordinamento T ammette minimo t. Poiché $tx \in \overline{A}$ allora esiste $\overline{f}(tx)$ e $\overline{f}(tx) \in D$, da cui essendo D divisibile $\exists\ z \in D$ tale che $\overline{f}(tx) = tz$. Consideriamo l'applicazione

$$p : <x> \to D : mx \mapsto mz$$

che è omomorfismo di gruppi abeliani in quanto se $mx, sx \in <x>$ allora

$$p(mx + sx) = p((m + s)x) = (m + s)z = mz + sz = p(mx) + p(sx)$$

Osserviamo che dato $y \in \overline{A} \cap <x>$, $y = kx$ per $k \in \mathbb{N}^+$, dal teorema della divisione euclidea $\exists\ q \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ con $0 \leq r < t$ tali che $k = qt + r$ e allora

$$kx = (qt + r)x = (qt)x + rx \implies$$

$$rx = kx - (qt)x = kx - q(tx) \in \overline{A}$$

perché $q(tx) \in \overline{A}$ sottogruppo, da cui essendo t il più piccolo naturale non nullo la cui relativa potenza di x appartiene a $\overline{A}$ e $r < t$ segue che $r = 0$ e dunque $y = (qt)x = q(tx)$. Conseguentemente, se $y \in \overline{A} \cap <x>$, $y = q(tx)$

$$\overline{f}(y) = \overline{f}(q(tx)) = q\overline{f}(tx) =$$

$$= q(tz) = (qt)z = p((qt)x) = p(y)$$

ovvero $\overline{f}|_{\overline{A}\cap<x>} = p|_{\overline{A}\cap<x>}$ e quindi per il Lemma 4.1.4 esiste un unico omomorfismo di gruppi abeliani $h : \overline{A} + <x> \to D$ tale che $h|_{\overline{A}} = \overline{f}$, $h|_{<x>} = p$. In particolare $h|_A = \overline{f}|_A = f$, e ciò mostra che

$$(\overline{A} + <x>, h) \in \mathfrak{P}$$

ma poiché $\overline{A}$ è un sottogruppo proprio di $\overline{A} + <x>$ in quanto $x \notin \overline{A}$ deduciamo che $(\overline{A}, \overline{f}) < (\overline{A} + <x>, h)$ e ciò è assurdo per la massimalità di $(\overline{A}, \overline{f})$.

Avendo trovato in entrambi i casi un assurdo si ha che $\overline{A} = B$, e cioè $\overline{f} : B \to D$ è tale che $\overline{f}|_A = f$.

" $\Longleftarrow$ " Sia $x \in D$ e sia $n \in \mathbb{N}^+$. Sia $\mathbb{Z}$ gruppo abeliano e sia $n\mathbb{Z}$ sottogruppo di $\mathbb{Z}$. L'applicazione

$$f : n\mathbb{Z} \to D\text{:}\ nz \mapsto zx$$

è un omomorfismo di gruppi abeliani, infatti se $nz, ny \in n\mathbb{Z}$ si ha

$$f(nz + ny) = f(n(z + y)) = (z + y)x = zx + yx = f(nz) + f(ny)$$

allora $\exists\ \overline{f} : \mathbb{Z} \to D$ omomorfismo di gruppi abeliani tale che $\overline{f}|_{n\mathbb{Z}} = f$, e $\overline{f}(1) \in D$ è tale che

$$n\overline{f}(1) = \overline{f}(n) = \overline{f}|_{n\mathbb{Z}}(n) = f(n) = x$$

Per l'arbitrarietà di x, n, segue che D è divisibile.

□

Corollario 4.1.6. *Sia G un gruppo abeliano e sia D un sottogruppo di G divisibile. Allora esiste un gruppo abeliano A tale che G è isomorfo a $D \times A$.*

Dimostrazione. Se consideriamo l'omomorfismo di gruppi abeliani

$$id_D : D \to D$$

poiché D è divisibile, per il Teorema 4.1.5 $\exists\ \overline{id}_D : G \to D$ omomorfismo di gruppi abeliani tale che $\overline{id}_D|_D = id_D$. Sia $A = ker(\overline{id}_D)$, allora D, A sono sottogruppi normali di G perché G è abeliano tali che

- $G = D + A$, infatti se $g \in G$ allora $\overline{id}_D(g) \in D$ e

$$\begin{aligned}\overline{id}_D(g - \overline{id}_D(g)) &= \overline{id}_D(g) - \overline{id}_D(\overline{id}_D(g)) = \\ &= \overline{id}_D(g) - id_D(\overline{id}_D(g)) = \\ &= \overline{id}_D(g) - \overline{id}_D(g) = 0\end{aligned} \tag{4.4}$$

  ovvero $g - \overline{id}_D(g) \in ker(\overline{id}_D)$, da cui $g = \overline{id}_D(g) + (g - \overline{id}_D(g)) \in D + A$

- $D \cap A = \{0\}$, infatti se $g \in D \cap A$ allora

$$0 = \overline{id}_D(g) = \overline{id}_D|_D(g) = id_D(g) = g$$

Sono cioè soddisfatte le condizioni del Teorema 1.1.29, il quale asserisce che G è isomorfo a $D \times A$.

□

4.2 Classificazione dei gruppi di Lie abeliani

Affrontiamo l'ultima sezione della tesi, riguardante la classificazione dei gruppi di Lie abeliani. Prima di procedere con dimostrazione di quest'ultima necessitiamo alcuni risultati preliminari riguardanti i gruppi di Lie abeliani.

Teorema 4.2.1. *Sia G un gruppo di Lie abeliano e connesso. Allora* exp *è un omomorfismo di gruppi di Lie suriettivo.*

Dimostrazione. Verifichiamo che $\forall t \in \mathbb{R}$ vale:

$$\exp(t(\omega+\eta)) = \exp(t\omega) + \exp(t\eta),\ \omega, \eta \in T_0G$$

Sia il sottogruppo a un parametro di G $\alpha(t) = \exp(t(\omega+\eta))$ e sia l'applicazione

$$\beta : \mathbb{R} \to G : t \mapsto \exp(t\omega) + \exp(t\eta)$$

Essa è C^∞ perché composizione di C^∞, infatti se μ è la somma di G e prendiamo l'applicazione

$$f : \mathbb{R} \to G \times G : t \mapsto (\exp(t\omega), \exp(t\eta))$$

la quale è C^∞ perché le sue componenti sono sottogruppi a un parametro di G, si ha $\beta = \mu \circ f$. Inoltre β è un omomorfismo in quanto se $t, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\beta(t+s) &= \exp((t+s)\omega) + \exp((t+s)\eta) = \\ &= \exp(t\omega) + \exp(s\omega) + \exp(t\eta) + \exp(s\eta) = \\ &= (\exp(t\omega) + \exp(t\eta)) + (\exp(s\omega) + \exp(s\eta)) = \\ &= \beta(t) + \beta(s)\end{aligned} \tag{4.5}$$

e quindi β è sottogruppo a un parametro di G. Se calcoliamo il vettore velocità iniziale di α, β troviamo

- $\frac{d}{dt}\alpha(t)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\exp(t(\omega+\eta))_{|t=0} = \omega + \eta$
- $$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\beta(t)_{|t=0} &= \frac{d}{dt}\mu(\exp(t\omega), \exp(t\eta))_{|t=0} = \\ &= \mu_{*(e,e)}(\frac{d}{dt}\exp(t\omega)_{|t=0}, \frac{d}{dt}\exp(t\eta)_{|t=0}) = \\ &= \mu_{*(e,e)}(\omega, \eta) = \omega + \eta\end{aligned} \tag{4.6}$$

ma poiché un sottogruppo a un parametro è univocamente determinato dal suo vettore velocità iniziale deduciamo che $\alpha = \beta$, come volevasi dimostrare. Per $t = 1$ la relazione diventa

$$\exp(\omega + \eta) = \exp(\omega) + \exp(\eta)$$

da cui per l'arbitrarietà di ω, η segue che exp è un omomorfismo di gruppi di Lie.

Inoltre, dato che per il Teorema 1.3.16 exp è un diffeomorfismo locale in $\mathbf{0}$, segue per il Teorema 1.3.5 è un diffeomorfismo locale, dunque è localmente aperta e pertanto è aperta. Allora

$$\exp(T_0G) \text{ è un sottogruppo aperto di } G$$

e poiché G è connesso, per la Proposizione 1.3.27 si ha $\exp(T_0G) = G$, ovvero exp è suriettivo.

□

Proposizione 4.2.2. *Sia G un gruppo di Lie. Sia G_e la componente connessa di G che contiene e. Allora G_e è un sottogruppo di Lie embedded di G, normale e aperto in G.*

Dimostrazione. Innanzitutto, $G_e \neq \varnothing$ perché $e \in G_e$. Siano μ, inv le operazioni di gruppo di G e osserviamo che

- $G_e \times G_e$ è connesso di $G \times G$ perché prodotto di connessi, da cui per la continuità di μ si ha $G_eG_e = \mu(G_e \times G_e)$ connesso di G. Poiché $G_e \subseteq G_eG_e$, per la massimalità di G_e si ha $G_e = G_eG_e$

- $G_e^{-1} = inv(G_e)$ è una componente connessa di G perché inv è un omeomorfismo; inoltre contiene $e^{-1} = e$, quindi $G_e \cap G_e^{-1} \neq \varnothing$ e poiché le componenti connesse sono disgiunte a coppie si ha $G_e = G_e^{-1}$

pertanto per la Proposizione 1.1.8 G_e è un sottogruppo di G. Inoltre, se $g \in G$ allora $g^{-1}G_eg$ è una componente connessa di G perché

$$g^{-1}G_eg = R_g(L_{g^{-1}}(G_e))$$

con $e = g^{-1}eg \in g^{-1}G_eg$, ovvero $g^{-1}G_eg = G_e$. Essendo g arbitrario, G_e è sottogruppo normale di G.
Osserviamo poi che G_e è aperto di G per la Proposizione 1.2.4, dunque G_e è sottovarietà di G e pertanto per il Teorema 1.3.8 è sottogruppo di Lie embedded di G.

□

Corollario 4.2.3. *Sia G un gruppo di Lie abeliano. Allora G_0 è un gruppo di Lie abeliano divisibile.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 4.2.2 G_0 è un sottogruppo di Lie embedded di G e quindi è un gruppo di Lie abeliano se munito delle operazioni di gruppo e della topologia indotte da G. Dato che G_0 è connesso, per il Teorema 4.2.1

$$\exp\colon T_0G_0 \to G_0 \text{ è suriettiva}$$

quindi se $a \in G_0$ e $n \in \mathbb{N}^+$, preso $\psi \in T_eG_0$ tale che $\exp(\psi) = a$ allora $b = \exp(\frac{\psi}{n}) \in G_0$ è tale che

$$nb = n\exp(\tfrac{\psi}{n}) = \exp(n\tfrac{\psi}{n}) = \exp(\psi) = a$$

da cui per l'arbitrarietà di a, n segue che G_0 è divisibile.

$\square$

Teorema 4.2.4. ***(Classificazione dei gruppi di Lie abeliani)*** *Sia G un gruppo di Lie abeliano. Allora G è isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times A$, dove A è un gruppo di Lie abeliano discreto.*

Dimostrazione. Per il Corollario 4.2.3 G_0 è un sottogruppo divisibile di G e dunque per il Corollario 4.1.6 G è isomorfo come gruppo abeliano a $G_0 \times A$, dove ricordiamo che l'isomorfismo è

$$f : G_0 \times A \to G\colon\ (h, k) \mapsto hk$$

e $A = ker(\overline{id}_{G_0})$, dove $\overline{id}_{G_0} : G \to G_0$ è omomorfismo di gruppi abeliani tale che $\overline{id}_{G_0}|_{G_0} = id_{G_0}$. Se consideriamo G e G_0 come gruppi di Lie, dato che G_0 è aperto di G

$$\overline{id}_{G_0} \text{ è un diffeomorfismo in } G_0 \text{ intorno di } 0$$

pertanto per il Teorema 1.3.5

$$\overline{id}_{G_0} \text{ è omomorfismo di gruppi di Lie e diffeomorfismo locale}$$

Segue per la Proposizione 2.1.8 che A è un sottogruppo discreto di G e dunque è un gruppo di Lie abeliano discreto se munito delle operazioni di gruppo e della topologia indotte da G.
Conseguentemente $G_0 \times A$ è un gruppo di Lie perché prodotto di gruppi di Lie ed è un sottospazio di $G \times G$. Osserviamo allora che

$$F = \mu|_{G_0 \times A} \implies F \text{ continua perché restrizione di } \mu \text{ continua}$$

e F è aperta: sia $\mathrm{B} = \{B_j\}_{j \in J}$ una base di G_0 e dunque sia $\mathfrak{B} = \{B_j \times \{p\} : B_j \in \mathrm{B}, p \in A\}$ una base di $G_0 \times A$, allora

$$F(B_j \times \{p\}) = B_j + p$$

ed esso è un aperto di G perché B_j è aperto di G in quanto B_j è aperto di G_0 e G_0 è aperto di G. Ciò mostra che F è un omeomorfismo, ed essendo un isomorfismo algebrico risulta per il Corollario 1.3.22 che è un isomorfismo di gruppi di Lie. Pertanto G è isomorfo come gruppo di Lie a $G_0 \times A$.

Inoltre, poiché G_0 è abeliano e connesso per il Teorema 4.2.1 $\exp : T_0G_0 \to G_0$ è omomorfismo di gruppi di Lie suriettivo, da cui essendo un diffeomorfismo locale in $\mathbf{0}$ per il Teorema 1.3.5 è un diffeomorfismo locale e quindi per la Proposizione 2.1.8 $ker(\exp)$ è un sottogruppo discreto di T_0G_0. Dunque, per il Corollario 2.3.2

$$G_0 \text{ è isomorfo a } {T_0G_0}\big/{ker(\exp)}$$

ma poiché T_0G_0 è uno spazio vettoriale reale finito-dimensionale, per il Teorema 3.3.1

$$T_0G_0 / ker(\exp) \text{ è isomorfo a } \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

e conseguentemente G è isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times A$.

□

Corollario 4.2.5. *Sia G un gruppo di Lie abeliano. Allora:*

1. *Se G è connesso, G è isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.*

2. *Se G è compatto e connesso, G è isomorfo a $\mathbb{T}^n$.*

Dimostrazione.

1. Per il Teorema 4.2.4 G è isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times A$, da cui $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times A$ è connesso. Ciò implica che A è connesso, e poiché uno spazio topologico X discreto è sempre sconnesso se $|X| \geq 2$ deduciamo che $A = \{0\}$ e dunque

$$f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \times A \to \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}\colon\ (t, r, 0) \mapsto (t, r)$$

è un isomorfismo di gruppi di Lie. Conseguentemente G è isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

2. Per il punto 1. G è isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, da cui $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ è compatto. Ciò implica che $\mathbb{R}^{n-k}$ è compatto, e poiché per $m \geq 1$ $\mathbb{R}^m$ non è compatto deduciamo che $n = k$ e dunque

$$g : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^0 \to \mathbb{T}^n\colon\ (t, p) \mapsto t$$

è un isomorfismo di gruppi di Lie. Conseguentemente G è isomorfo a $\mathbb{T}^n$.

□

Bibliografia

[1] Loi, Andrea, *Introduzione alla topologia generale (2013)*, Aracne

[2] Lee, John M., *Introduction to smooth manifolds (2013)*, Second Edition, Springer

[3] Milne, James S., *Algebraic number theory (2020)*, (v3.08)

[4] Dikranjan, Dikran, *Aritmetica e algebra (2007)*, Prima Edizione, Liguori Editore