Il Teorema di Morse

Nicolò Leuzzi

Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea in Matematica

Argomenti

1. Definizioni
   - indice di un campo di vettori X
   - punti critici non degeneri
   - singolarità semplici
   - punti di massimo, di minimo e di sella
2. Alcuni Risultati
3. Il Teorema di Morse

L'Indice di un campo di vettori X

Sia M una varietà differenziabile orientata e compatta e scelgo una metrica Riemanniana su M. Sia X un campo di vettori su M avente singolarità isolata p. Sia C una curva semplice che delimita una regione semplice che contiene p nel suo interno. Oriento C come bordo di tale regione e definisco:

Definizione

L'*indice di X in p* come l'intero I tale che:

$$\int_C d\varphi = 2\pi I$$

in cui φ è la funzione angolo tra il campo $e_1 = \frac{X}{|X|}$ e un altro campo unitario $\bar{e}_1$ definito su C.

Punti critici non degeneri e singolarità semplici

Definizione: Punto critico non degenere

Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile su una varietà differenziabile M. $p \in M$ è detto *critico per f* se $df_p = 0$.
Un punto critico è detto *non degenere* se per qualche parametrizzazione $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ di $p = g(0,0)$ si ha che la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial y^2} \end{pmatrix} (0,0)$$

ha determinante non nullo.

Punti critici non degeneri e singolarità semplici

Definizione: Singolarità Semplice

Sia X un campo di vettori differenziabile su M e sia $p \in M$ un punto singolare di X. Sia $g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to M$ una parametrizzazione di un intorno di $p = g(0,0)$ in cui $X = \alpha(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \beta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$.
$p \in M$ è una *singolarità semplice* per X se la matrice:

$$A_g = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \beta}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \beta}{\partial y}\right)_0 \end{pmatrix}$$

ha determinante non nullo.

Punti critici non degeneri e singolarità semplici

Proposizione 1

Sia $p \in M$ un punto critico di una funzione differenziabile $f : M \to \mathbb{R}$ su una varietà Riemanniana M. Allora:
p è un punto critico non degenere di $f \iff p$ è una singolarità semplice di $\operatorname{grad} f$.

Punti di massimo, di minimo e di sella

Sviluppando in serie di Taylor $h(x,y) = f \circ g(x,y)$ attorno a $(0,0)$ e posto $d = h(x,y) - h(0,0)$, allora:

$$d = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_0 x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\right)_0 xy + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)_0 y^2\right\} + c$$

in cui c indica i termini di ordine superiore.

Se $\det(A) > 0$:

- p è *punto di massimo* se $d < 0$;
- p è *punto di minimo* se $d > 0$.

Se $\det(A) < 0$:

- p è detto *punto di sella*.

Alcuni Risultati

Lemma

Sia $p \in M$ una singolarità semplice di un campo di vettori differenziabile X su M, allora p è una singolarità isolata di M.

Corollario

I punti critici non degeneri di una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ sono isolati.

Proposizione 2

Sia $p \in M$ una singolarità semplice di un campo di vettori X differenziabile su M, allora l'indice I di X in p è:

- $+1$ se $\det(A_g) > 0$;
- -1 se $\det(A_g) < 0$.

Il Teorema di Morse

Teorema di Morse

Sia $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile su una superficie compatta e orientata M tale che tutti i suoi punti critici sono non degeneri. Denotato con $\mathtt{M}$, $\mathtt{m}$ ed $\mathtt{s}$ rispettivamente il numero di punti di massimo, di minimo e di sella di f, allora il numero $\mathtt{M} - \mathtt{s} + \mathtt{m}$ non dipende dall'applicazione f ed inoltre:

$$\mathtt{M} - \mathtt{s} + \mathtt{m} = \chi(M)$$

in cui $\chi(M)$ è la caratteristica di Eulero-Poincarè di M.

Dimostrazione

Scelgo una metrica Riemanniana su M.
Poichè i punti critici per f sono non degeneri $\Longrightarrow$ le singolarità di $\operatorname{grad} f$ sono semplici e isolate.

$$\Longrightarrow I_i = \begin{cases} 1 & \text{in corrispondenza dei minimi o massimi} \\ -1 & \text{in corrispondenza dei punti di sella} \end{cases}$$

Il numero $M - s + m$ sarà quindi la somma degli indici dei punti singolari di $\operatorname{grad} f$ su M.

$$M - s + m = \sum_{i=1}^{M+s+m} I_i = \chi(M) = \frac{1}{2\pi}\int_M K\sigma$$

Per il *Teorema di Gauss-Bonnet* tale somma non dipende dal campo $\operatorname{grad} f$, quindi non dipende dall'applicazione f, ed inoltre è uguale alla caratteristica di Eulero-Poincarè.