Università degli Studi di Cagliari

Corso di Laurea in Matematica

NUMERI 2-PALINVERTIBILI

TESI A CURA DI: **Calamia Nicola**

RELATORE: **Prof. Loi Andrea**

Anno Accademico

2017-2018

1 Introduzione

- Come scriviamo i numeri?
- Cosa significa invertire le cifre e quali conseguenze ha?

Esempio

Se abbiamo centoventitre oggetti, come li rappresentiamo?

1 Come scriviamo i numeri?

Quindi se $a \in \mathbb{N}$ possiamo scriverlo in base 10 come:

$$\begin{aligned} a &= a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \dots + a_1 \times 10^0 = \\ &= (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)_{10} \\ &= a_n a_{n-1} \cdots a_1 \end{aligned}$$

dove:

$$a_n \neq 0 \quad \text{e} \quad a_i < 10, \quad \text{per ogni } i$$

1 Come scriviamo i numeri?

In generale allora, se $a \in \mathbb{N}$ possiamo scriverlo in una certa base b come:

$$
\begin{aligned}
a &= a_n \times b^{n-1} + a_{n-1} \times b^{n-2} + \ldots + a_1 \times b^0 = \\
&= (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)_b \\
&= a_n a_{n-1} \cdots a_1
\end{aligned}
$$

dove:

$$a_n \neq 0 \quad \text{e} \quad a_i < b\,, \quad \text{per ogni } i$$

1 Cosa significa invertire le cifre?

1 Cosa significa invertire le cifre?

Funzione di Inversione Cifraria

Sia $a \in \mathbb{N}$ e sia b una base per la rappresentazione di a. Consideriamo a di n cifre:

$$a = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)_b, \qquad \text{con } a_n, a_1 \neq 0.$$

Definiamo la funzione «inverso cifrario», “i_b”, come

$$i_b : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$a = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)_b \longmapsto i(a) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)_b$$

1 Cosa significa invertire le cifre?

ALCUNE CONSEGUENZE DELL'INVERSIONE

- L'inversione cifraria <u>cambia il valore del numero</u>
- L'inversione cifraria è una <u>proprietà intrinseca</u> della notazione posizionale
- <u>I numeri palindromi sono invarianti per inversione cifraria</u>

Ovvero quei numeri tali che: $a = i_b(a)$

NOTA: i numeri con una sola cifra sono considerati palindromi

Palindromi: Tante Curiosità, poche soluzioni.

- **Ogni numero come somma di palindromi in base 10**

2015: Si è dimostrato che ogni numero naturale può essere espresso come somma di non più di 49 palindromi.

2017: Si è affinato il risultato dimostrando che ogni numero $n \in \mathbb{N}$ può essere espresso come somma di, al più, 3 soli palindromi per $n > 5$.

Problema Aperto: E in base b ?

Palindromi: Tante Curiosità, poche soluzioni.

- **Quadrati Palindromi**

Numeri palindromi $a \in \mathbb{N}$ in base b i cui quadrati siano ancora dei numeri palindromi, cioè quando

$$a = i_b(a) \quad \wedge \quad a^2 = i_b(a^2)$$

Numeri qualsiasi i cui quadrati siano palindromi

$$a^2 = i_b(a^2)$$

1 Cosa significa invertire le cifre?

PALINDROMI: TANTE CURIOSITÀ, POCHE SOLUZIONI.

- **Potenze h-esime di Palindromi**

Numeri qualsiasi le cui potenze h-esime siano palindromi

$$a^h = i_b(a^h)$$

PROBLEMA APERTO: Classificare tali numeri.

Esempi:

$$26^2 = 676$$

$$2201^3 = 10662526601$$

Una curiosa proprietà:

2 Una curiosa proprietà

Notiamo subito che:

2 Una curiosa proprietà

In termini matematici

$$
\begin{array}{r}
12 \times \\
12 \\
\hline
24 \\
12 + \\
\hline
144
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{r}
21 \times \\
21 \\
\hline
42 \\
21 + \\
\hline
441
\end{array}
$$

2 Una curiosa proprietà

Possiamo osservare che

$$
\begin{array}{r}
1\ 2\ \times \\
1\ 2\ \\
\hline
2\ 4\ \\
1\ 2\ \ + \\
\hline
1\ 4\ 4\
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{r}
2\ 1\ \times \\
2\ 1\ \\
\hline
4\ 2\ \\
2\ 1\ \ + \\
\hline
4\ 4\ 1\
\end{array}
$$

2 Una curiosa proprietà

DEF. : Chiamiamo «banali» i numeri con zeri tra le loro cifre.

Ridefiniamo quindi il nostro problema in base 10 come:

DOMANDA : Sia $a \in \mathbb{N}$ «non banale» e i_{10} la funzione di inversione cifraria. Vogliamo classificare tutti i numeri a in base 10 tali che:

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

2 Una curiosa proprietà

- Caso di una cifra : $a=(a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2)=i_{10}(a)^2$

1: $i(1^2) = i(1)^2 \implies i(1) = 1 = 1^2 = 1$ ●

2: $i(2^2) = i(2)^2 \implies i(4) = 4 = 2^2 = 4$ ●

3: $i(3^2) = i(3)^2 \implies i(9) = 9 = 3^2 = 9$ ●

4: $i(4^2) = i(4)^2 \implies i(16) = 61 \neq 4^2 = 16$ ✕

5: $i(5^2) = i(5)^2 \implies i(25) = 52 \neq 5^2 = 25$ ✕

2 Una curiosa proprietà

- Caso di una cifra : $a = (a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

6:	$i(6^2) = i(6)^2$	$\Longrightarrow$	$i(36) = 31 \neq 6^2 = 36$	✗
7:	$i(7^2) = i(7)^2$	$\Longrightarrow$	$i(49) = 94 \neq 7^2 = 49$	✗
8:	$i(8^2) = i(8)^2$	$\Longrightarrow$	$i(64) = 46 \neq 8^2 = 64$	✗
9:	$i(9^2) = i(9)^2$	$\Longrightarrow$	$i(81) = 18 \neq 9^2 = 81$	✗

2 Una curiosa proprietà

- <u>Caso di una cifra</u> : $a = (a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Nel caso di una cifra abbiamo:

1,

2,

3.

2 Una curiosa proprietà

- Caso di due cifre : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $\qquad i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Analizziamo l'algoritmo:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & a_2 & a_1 & \times \\
 & a_2 & a_1 & \\
\hline
 & a_{12} & a_{11} & \\
a_{22} & a_{21} & + & \\
\hline
a_{22} & 2a_{12} & a_{11} &
\end{array}
$$

2 Una curiosa proprietà

- Caso di due cifre : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $\qquad i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Ogni a_{ij} è prodotto di due cifre per cui il risultato può essere di una sola cifra o di due.

In base 10 risulta:

$$1^2 \leq a_{ij} \leq 9^2$$

$$\begin{array}{cccc}
 & a_2 & a_1 & \text{x} \\
 & a_2 & a_1 & \\
\hline
 & a_{12} & a_{11} & \\
a_{22} & a_{21} & + & \\
\hline
a_{22} & 2a_{12} & a_{11} &
\end{array}$$

2 Una curiosa proprietà

- Caso di due cifre : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $\qquad i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Se o a_{ii} o $2a_{ij}$ superano la base, cioè se

$$a_{ii} \geq 10 \qquad \text{o} \qquad 2a_{ij} \geq 10 \, ,$$

come sappiamo, facciamo il riporto, sommando la cifra in più nella successiva colonna a sinistra.

$$\begin{array}{cccc}
 & a_2 & a_1 & \text{x} \\
 & a_2 & a_1 & \\
\hline
 & a_{12} & a_{11} & \\
a_{22} & a_{21} & + & \\
\hline
a_{22} & 2a_{12} & a_{11} &
\end{array}$$

2 Una curiosa proprietà

Ad esempio, nel caso di 14:

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & & 1^{1} & 4 & \times \\
 & & 1 & 4 & \\
\hline
 & & 5 & 6 & \\
 & 1 & 4 & & + \\
\hline
 & 1 & 9 & 6 &
\end{array}
\quad \not\Rightarrow \quad
\begin{array}{rrrrl}
 & & 4 & 1 & \times \\
 & & 4 & 1 & \\
\hline
 & & 4 & 1 & \\
1 & 6 & 4 & & + \\
\hline
1 & 6 & 8 & 1 &
\end{array}
$$

2 Una curiosa proprietà

- <u>Caso di due cifre</u> : $a = (a_2 , a_1)_{10}$, $\quad i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

<u>Un dettaglio importante</u>

Il riporto consiste nel sommare a sinistra le cifre che sforano le unità.

E' chiaro quindi che, invertendo le cifre, i riporti rimangono gli stessi ma vanno a sommarsi a cifre diverse!

$$
\begin{array}{cccc}
 & a_2 & a_1 & \mathrm{x} \\
 & a_2 & a_1 & \\
\hline
 & a_{12} & a_{11} & \\
a_{22} & a_{21} & + & \\
\hline
a_{22} & 2a_{12} & a_{11} &
\end{array}
$$

2 Una curiosa proprietà

- <u>Caso di due cifre</u> : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

<u>Intuizione:</u> la soluzione è nel riporto!

Se non abbiamo riporti non abbiamo termini da sommare.

Se non abbiamo termini da sommare, invertendo, si avranno le stesse cifre invertite, ovvero avremo:

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

$$\begin{array}{cccc}
 & a_2 & a_1 & \text{x} \\
 & a_2 & a_1 & \\
\hline
 & a_{12} & a_{11} & \\
a_{22} & a_{21} & + & \\
\hline
a_{22} & 2a_{12} & a_{11} &
\end{array}$$

2 Una curiosa proprietà

- Caso di due cifre : $a = (a_2, a_1)_{10}$, $i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Nel caso della base 10 abbiamo:

11,

12, 21,

22,

13, 31

$$
\begin{array}{cccc}
 & a_2 & a_1 & \text{x} \\
 & a_2 & a_1 & \\
\hline
 & a_{12} & a_{11} & \\
a_{22} & a_{21} & + & \\
\hline
a_{22} & 2a_{12} & a_{11} &
\end{array}
$$

2 Una curiosa proprietà

- <u>Caso di tre o più cifre</u>: $a = (\ldots, a_3, a_2, a_1)_{10}, \quad i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & a_3 & a_2 & a_1 & \mathbf{x} \\
 & & a_3 & a_2 & a_1 & \\
\cline{3-6}
 & & a_{13} & a_{12} & a_{11} & \\
 & a_{23} & a_{22} & a_{21} & + & \\
a_{33} & a_{32} & a_{31} & + & & \\
\hline
\alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 &
\end{array}
$$

2 Una curiosa proprietà

- <u>Caso di tre o più cifre</u> $\qquad i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$

Reinterpretiamo l'algoritmo della Moltiplicazione:

$$a = (a_1)_{10}$$

$$\begin{array}{r} a_1 \quad \text{x} \\ a_1 \\ \hline \alpha_1 \end{array} \longrightarrow a_{11} \longrightarrow \begin{array}{c} a_{11} \\ \swarrow \\ \alpha_1 \end{array}$$

2 Una curiosa proprietà

- <u>Caso di tre o più cifre</u>

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

$$a = (a_2, a_1)_{10}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & a_2 & a_1 & \text{x} \\
 & a_2 & a_1 & \\
\hline
 & a_{12} & a_{11} & \\
a_{22} & a_{21} & + & \\
\hline
\color{red}{\alpha_3} & \color{red}{\alpha_2} & \color{red}{\alpha_1} &
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{cc}
a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22}
\end{array}
\quad \longrightarrow \quad
\begin{array}{ccc}
 & a_{11} & a_{12} \\
\color{red}{\alpha_1} & a_{21} & a_{22} \\
\color{red}{\alpha_2} & \color{red}{\alpha_3} &
\end{array}$$

2 Una curiosa proprietà

- <u>Caso di tre o più cifre</u>

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

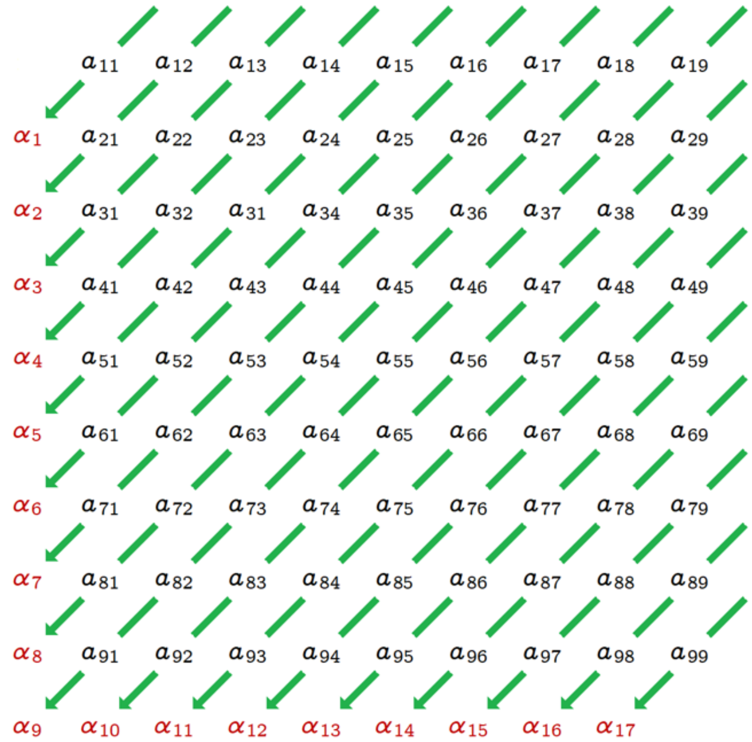
$$a = (a_3, a_2, a_1)_{10}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & a_3 & a_2 & a_1 \quad \text{x} \\
 & & a_3 & a_2 & a_1 \\
\hline
 & & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\
 & a_{23} & a_{22} & a_{21} & + \\
a_{33} & a_{32} & a_{31} & + & \\
\hline
\alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33}
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{cccc}
 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
\alpha_1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
\alpha_2 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
\alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 &
\end{array}$$

2 Una curiosa proprietà

- <u>Caso di tre o più cifre</u>

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$



UNA NOTA:

in base 10,

il numero di cifre massime è 9

- Il Teorema

TEOREMA (Classificazione dei Numeri 2-Palinvertibili)

Sia $a \in \mathbb{N}$ «non banale» e i_{10} la funzione di inversione cifraria. In base 10, $a = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)_{10}$ è 2-*Palinvertibile*, ovvero gode della proprietà

$$i_{10}(a^2) = i_{10}(a)^2$$

se e solo se

$$\sum_{i+j=k+1} a_i \times a_j < 10 , \quad \text{per ogni } k = 1, \ldots, 2n-1 .$$

- Basi qualunque

TEOREMA

Sia $a \in \mathbb{N}$ «non banale» e i_b la funzione di inversione cifraria. In base b, $a = (a_n, a_{n\text{-}1}, \ldots, a_1)_b$ è 2-*Palinvertibile*, ovvero gode della proprietà

$$i_b(a^2) = i_b(a)^2$$

se e solo se

$$\sum_{i+j=k+1} a_i \times a_j < b, \quad \text{per ogni } k = 1, \ldots, 2n-1 .$$

- Potenze h-esime

TEOREMA

Sia $a \in \mathbb{N}$ «non banale» e i_b la funzione di inversione cifraria. In base b, $a = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1)_b$ è h-*Palinvertibile*, ovvero gode della proprietà

$$i_b(a^h) = i_b(a)^h \quad ,$$

se e solo se

$$\sum_{i_1+\ldots+i_h = k+(h-1)} a_{i_1} \times \ldots \times a_{i_h} < b, \quad \text{per ogni } k = 1, \ldots, hn-(h-1).$$

3 Generalizzazioni

Numeri (non banali) h-Palinvertibili in Base 10

$h = 2$

1
2
3

11
12, 21
22
13, 31

111
112, 121, 211
122, 212, 221
113, 311

1111
1112, 1121, 1211, 2111
1122, 1212, 2121, 2211
1113, 3111

11111
11112, 11121, 11211, 12111, 21111
11122, 22111
11113, 31111

111111
111112, 111121, 111211, 112111, 121111, 211111

1111111
1111112, 1111121, 1111211, 1121111, 1211111, 2111111

11111111

111111111

Numeri (non banali) h-Palinvertibili in Base 10

$h = 3$,	$h = 4$,	$h \geq 5$
1	1	1
2		
	11	
11		
111		