# Embedding di uno spazio metrizzabile e compatto nello spazio Euclideo

Marco Vincenzo Secci

27/09/2013

# Indice

# Introduzione

Argomento della tesi di laurea è dimostrare che esiste un embedding topologico da uno spazio metrizzabile e compatto $X$ di dimensione topologica $m$ nello spazio euclideo di dimensione $2m + 1$.

Nel primo capitolo della tesi richiameremo alcuni concetti che serviranno per dimostrare il teorema principale quali la definizione di Spazio Topologico, di insiemi aperti, chiusi, e alcuni concetti elementari della teoria degli insiemi.

Nel secondo capitolo verranno invece affrontati argomenti inerenti gli spazi metrici completi, con alcuni esempi importanti.

Il terzo capitolo contiene cenni di teoria della dimensione e di spazi di Baire.

Nel quarto capitolo infine verrà dimostrato il teorema in oggetto della tesi, ed enunciato un importante corollario.

# Capitolo 1

# Richiami

Per riferimenti agli argomenti trattati in questo capitolo, cfr. Munkres, *Topology, A First Course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J.

## 1.1 Insiemi densi

Consideriamo ora un sottoinsieme S dello spazio topologico X; possiamo definire la sua **chiusura**.

**Definizione 1.1** (Chiusura di un insieme)**.** *La chiusura $\bar{S}$ è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono S, ossia $\bar{S}$ è il più piccolo chiuso che contiene S*

Si osservi che $\bar{S}$ è chiuso perché l'intersezione arbitraria di insiemi chiusi è un chiuso. Inoltre, se S è chiuso, $S = \bar{S}$. Si noti infine che la chiusura si distribuisce sul prodotto: $\bar{A} \times \bar{B} = \overline{A \times B}$
Introduciamo quattro nuovi insiemi; sia S un sottoinsieme dello spazio topologico X.

**Definizione 1.2.**

1. *Int(S) (**Interno di S**) è l'insieme dei punti interni di S*
2. *Est(S) (**Esterno di S**) è l'insieme dei punti interni del complementare di S, $C(S)$*
3. *$Fr(S) = C(Int(S) \cup Est(S))$ (**Frontiera di S**) è l'insieme dei punti né interni, né esterni a S.*
4. *D(S) (**Derivato di S**) è l'insieme dei punti di accumulazione di S.*

I primi tre insiemi formano, qualunque sia l'insieme S, una partizione dello spazio topologico X

$$X = \mathrm{Int(S)} \cup \mathrm{Est(S)} \cup \mathrm{Fr(S)}$$

(unione disgiunta).

Inoltre si ha sempre $Int(S) \subseteq S$ e negli insiemi chiusi $Fr(S) \subseteq S$ (invece $Est(S) \nsubseteq S$, nemmeno parzialmente)
Queste nozioni chiariscono il significato della chiusura. Difatti, se prendiamo un sottoinsieme qualunque S di X, esso sarà composto da tutti i suoi punti interni ed eventualmente da parte dei suoi punti di frontiera. Cosa dobbiamo aggiungere perché diventi un insieme chiuso? La risposta è la seguente:

$$\bar{S} = S \cup Fr(S) = S \cup D(S)$$

dove la seconda uguaglianza è garantita dal fatto che tutti i punti di accumulazione sono o interni o di frontiera per definizione.

**Definizione 1.3** (Insieme denso)**.** *$S \subseteq (X, \mathcal{T})$ è un insieme* ***denso*** *se* $\bar{S} = X$

Dimostriamo ora alcune proprietà degli insiemi densi che ci torneranno parecchio utili in seguito:

**Proposizione 1.1.** *Sia $S \subseteq (X, \mathcal{T})$. Le seguenti sono equivalenti:*

1. *$S$ è denso*
2. *$Int(X \setminus S) = Est(S) = \emptyset$*
3. *per $\forall U \subseteq X$ aperto diverso dal vuoto $\Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$*

*Dimostrazione.* 1) $\Rightarrow$ 2) Se vale 1) allora $X \setminus \bar{S} = \emptyset$ ; ma $Int(X \setminus \bar{S}) = Est(S) = Int(X \setminus S) = \emptyset$
2) $\Rightarrow$ 3) Per assurdo, sia U aperto di X tale che $U \cap A = \emptyset$ ; allora si ha $U \subseteq Est(S) = Int(X \setminus S)$ , ma $Int(X \setminus S) = \emptyset$ per 1), assurdo.
3) $\Rightarrow$ 1) Sia $x \in X$ e sia $U_x \subseteq X$ aperto centrato in $x$ ; allora per 3) $U_x \cap S \neq \emptyset$ , quindi per la caratterizzazione della chiusura $x \in \bar{S} \Rightarrow \bar{S} = X$ $\square$

**Esempio 1.1.** Un esempio notevole di insieme denso è dato dall'insieme dei razionali all'interno dei reali con la topologia euclidea standard; $\mathbb{Q} \subseteq (\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Proviamo infatti a vedere come sono in questo caso gli insiemi interno, di frontiera ed esterno:
$Int(\mathbb{Q}) = \emptyset$ (infatti $\mathbb{Q}$ non è aperto in $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$)
$Fr(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}$ non è nemmeno chiuso)
$Est(\mathbb{Q}) = \emptyset$ e per la proprietà precedente si ha $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, e quindi $\mathbb{Q}$ è denso.

## 1.2 Embeddings

In questa sezione ricordiamo alcuni concetti sugli omeomorfismi e gli embeddings (o immersioni topologiche) che costituiranno il nucleo centrale di questa tesi di laurea. Il concetto di omeomorfismo sta alla base della teoria topologica come funzione di riferimento che mantiene le proprietà. Ma prima, diamo una definizione più generale:

**Definizione 1.4** (Funzione Continua)**.** *Sia $f : X \to Y$. $f$ è* ***continua nel punto*** *$x \in X$ se $\forall V \subseteq Y$ aperto contentente $f(x)$ allora esiste $U_x \subseteq X$ aperto contenente $x$ tale che*

$$f(U_x) \subseteq V.$$

*$f$ verrè detta* ***continua*** *se è continua in ogni punto.*

Introduciamo un concetto equivalente di funzione continua, che utilizzeremo più spesso di quello della Definizione 1.4.

**Proposizione 1.2.** *Sia $f : X \to Y$.*

$$f \text{ è continua} \iff f^{-1}(V) \text{ è aperto in } (X, \mathcal{T}) \text{ per ogni } V \text{ aperto di } (Y, \mathcal{T}')$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo prima la condizione necessaria. Sia V aperto di $(Y, \mathcal{T}')$.
Se $V \cap f(X) = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(V) = \emptyset$ che è aperto.
Sia quindi $V \cap f(X) \neq \emptyset$; allora esiste $x \in f^{-1}(V)$ tale che $f(x) \in V$; perché $f$ è continua in $x \Rightarrow \exists\ U_x$ aperto contenente $x$ tale che $f(U_x) \subseteq V$; allora passando alla controimmagine si ha

$$U_x \subseteq f^{-1}(V) \Rightarrow f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$$

e $f^{-1}(V)$ è un aperto in quanto unione di aperti.
Passiamo alla condizione sufficiente. Sia $x \in X$ e V aperto di $(Y, \mathcal{T}')$ contenente $f(x)$.
Allora $x \in f^{-1}(V)$ è aperto e $f(f^{-1}(V)) \subseteq V \Rightarrow f^{-1}(V)$ è proprio l'aperto $U_x$ cercato. □

**Definizione 1.5** (Omeomorfismo)**.** *Sia $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')$.$f$ è un* ***omeomorfismo*** *se valgono le seguenti:*

1. *$f$ è continua*
2. *$f$ è bigettiva*
3. *$f^{-1} : (Y, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ è continua*

**Definizione 1.6** (Embedding)**.** *Sia $f : X \to Y$. $f$ è un'immersione topologica o embedding se l'applicazione $X \to f(X)$ indotta da $f$ su $f(X)$ è un omeomorfismo.*

**Esempio 1.2.** Sia $S \subseteq X$; Sia $i : S \to X$ l'inclusione canonica.
Questo è banalmente un embedding; infatti la restrizione all'immagine altro non è che l'identitè di S, che è banalmente un omeomorfismo.

Per terminare questo paragrafo introduciamo un'ultima definizione:

**Definizione 1.7** (Funzione aperta (chiusa))**.** *Sia $f : X \to Y$. $f$ è **aperta** (risp. chiusa) se per qualsiasi $U \subseteq X$ aperto (chiuso) allora $f(U)$ è aperto (chiuso) in $Y$*

## 1.3 Spazi Metrici

Sia ora X un generico insieme non vuoto.

**Definizione 1.8** (Spazio Metrico)**.** *Uno Spazio metrico è una coppia (X, d) dove $d$ è una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $d(x, y) \geq 0$ *e* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *(positività)*
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(simmetria)*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ *(transitivitè)*

*X verrè chiamato **supporto** dello spazio metrico e d **metrica o distanza**.*

In un solo supporto possono essere definiti molti tipi di metriche. Vediamo qualche esempio su $\mathbb{R}^n$:

**Esempio 1.3.** Definiamo su $\mathbb{R}^n$ la distanza classica o **euclidea**:

$$d_{eucl.}(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} = \|x - y\| .$$

Dimostriamo che si tratta di una distanza come definito in 1.8. La positività e la simmetria sono banali. Per dimostrare la disuguaglianza triangolare utilizziamo la disuguaglianza di Chauchy-Schwarz:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

Ma allora abbiamo:

$$\begin{aligned} \|x + z\|^2 &= \langle x + z, x + z \rangle = \langle x, x \rangle + \langle z, z \rangle + 2\langle x, z \rangle \leq \\ &\leq \langle x, x \rangle + \langle z, z \rangle + 2 \|x\| \cdot \|z\| = \\ &= \|x\|^2 + \|z\|^2 + 2 \|x\| \cdot \|z\| = \\ &= (\|x\| + \|z\|)^2 \\ &\Rightarrow \|x + z\| \leq \|x\| + \|z\| \end{aligned}$$

Ma allora:

$$d_{eucl.}(x,z) = \|x-z\| = \|x \pm y - z\| \leq \\ \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d_{eucl.}(x,y) + d_{eucl.}(y,z)$$

**Esempio 1.4.** Definiamo sempre su $\mathbb{R}^n$ la **distanza quadrato** definita come:

$$\rho(x,y) = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j - y_j|$$

Anche in questo caso si verifica facilmente che è una distanza come definitivo in 1.8 (cfr. Munkres pag. 122).

**Definizione 1.9** (Disco e Insieme aperto)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico e r ¿ 0. Allora*

$$D_r(x) := \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

*è detto **disco aperto** di centro x e raggio r Un **insieme aperto** è invece l'unione di dischi aperti oppure il vuoto.*

Si possono quindi definire dischi di natura diversa a seconda della metrica utilizzata; nella metrica euclidea questi saranno rappresentati come dischi, mentre nella metrica quadrato saranno dei quadrati senza il bordo (ed è per questo che è definita con questo nome).

Ora proviamo a definire, avendo uno spazio metrico (X, d), uno spazio topologico associato $(X, \mathcal{T}_d)$ in questo modo:

$$U \in \mathcal{T}_d \iff \forall x \in U \quad \exists \varepsilon > 0 \text{ tale che } D_\varepsilon(x) \subseteq U$$

Osserviamo che può capitare di avere $d_1 \neq d_2$ ma $(X, \mathcal{T}_{d_1}) = (X, \mathcal{T}_{d_2})$ se le metriche sono topologicamente equivalenti (cioè producono gli stessi aperti). Per esempio si può dimostrare che la metrica euclidea definita nell'Esempio 1.3 e la metrica quadrato definita nell'Esempio 1.4 sono equivalenti (cfr. Munkres pag. 123)

**Definizione 1.10** (Spazio Metrizzabile)**.** *Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. $(X, \mathcal{T})$ è detto **metrizzabile** se esiste una metrica d su X tale che $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$*

**Proposizione 1.3** (Metrica limitata standard)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico. Definiamo la metrica $\bar{d} : X \times X \to \mathbb{R}$ con l'equazione*

$$\bar{d}(x,y) = \min\{d(x,y), 1\}.$$

*E $\bar{d}$ induce su X la stessa topologia di d.*

*Dimostrazione.* Dimostriamo che $\bar{d}$ è una metrica. La positività e la simmetria sono banali; dimostriamo quindi la proprietà transitiva.

$$\bar{d}(x,z) \leq \bar{d}(x,y) + \bar{d}(y,z)$$

Se si ha che $d(x, y) \geq 1$ o $d(y, z) \geq 1$ allora il secondo membro è sicuramente più grande o uguale ad uno, e l'ineguaglianza vale. Se entrambi sono minori di 1 si ha invece:

$$\bar{d}(x, z) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) = \bar{d}(x, y) + \bar{d}(y, z)$$

Per dimostrare che le due metriche inducono la stessa topologia, basta notare che i dischi della metrica d con $\varepsilon < 1$, che sono comuni anche con la metrica $\bar{d}$, costituiscono una base per la topologia indotta dalla metrica d. Si ha quindi $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\bar{d}}$ □

## 1.4 Spazi Compatti

**Definizione 1.11** (Spazio Compatto)**.** *$X$ è **compatto** se per ogni ricoprimento aperto $\{U_j\}_{j \in J}$ di $X$ esiste un sottoinsieme finito del ricoprimento $U_1, \dots, U_k$ tale che $\bigcup_{i=1}^{k} U_i = X$*

Si osservi che la compattezza è una proprietà topologica (quindi si conserva negli omeomorfismi) e che si mantiene anche nel prodotto di spazi: $X_1 \times \ldots \times X_k$ è compatto se e solo se lo è ciascun $X_j$. Inoltre si mantiene anche nelle funzioni continue: se $X$ è compatto, lo è anche $f(X)$ (cfr. Munkres pagg.166 e seguenti).

**Esempio 1.5.** Consideriamo il cubo n-dimensionale:

$$Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x_j - y_j| \leq r \quad \forall j = 1, \dots, n\}$$

Ma possiamo anche scrivere il cubo come $Q_r(x) = (x_1 - r, x_1 + r) \times \ldots \times (x_n - r, x_n + r)$. Quindi distribuiamo la chiusura nel prodotto:

$$\begin{aligned} \overline{Q_r(x)} &= \overline{(x_1 - r, x_1 + r)} \times \ldots \times \overline{(x_n - r, x_n + r)} \\ &= [x_1 - r, x_1 + r] \times \ldots \times [x_n - r, x_n + r] \end{aligned}$$

Che sono tutti omeomorfi a [0,1], quindi sono tutti compatti. Ma il prodotto di compatti è un compatto, quindi anche il cubo $\overline{Q_r(x)}$ è un compatto.

**Definizione 1.12** (Spazio Limitato)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico e $S \subseteq X$ $S$ è **limitato** se esiste un disco $D_r(x)$ con $x \in S$ tale che $S \subseteq D_r(x)$*

**Definizione 1.13** (Spazio di Hausdorff)**.** *$(X, \mathcal{T})$ è di Hausdorff se $\forall x, y \in X; \quad x \neq y; \qquad \exists U_x$ aperto contenente $x$ e $V_y$ aperto contenente $y$ tali che $U_x \cap V_y = \emptyset$*

**Proposizione 1.4.** *Sia (X,d) uno spazio metrico e $S \subseteq X$ compatto. Allora $S$ è chiuso e limitato.*

*Dimostrazione.* Per il primo punto, dimostriamo che un sottospazio compatto di un insieme di Hausdorff è un chiuso.
Sia quindi $x \in X \backslash S$; allora $\{x\}$ è chiuso perché X è di Hausdorff. Proviamo a dimostrare ora che esiste un insieme aperto V contenente S e un aperto U contenente x disgiunti. Sia quindi $p \in S$; allora esistono $U_x$ e $V_p$ disgiunti perché X è di Hausdorff, e $\{V_p \mid p \in S\}$ è un ricoprimento di S. Siccome S è compatto, esiste un sottoricoprimento finito $V_{p_1}, \ldots, V_{p_m}$ e corrispondenti $U_{x_1}, \ldots U_{x_m}$. Quindi $U = \bigcap_{i=1}^m U_{x_i}$ è aperto perché intersezione finita di aperti e contiene $x$ ed è disgiunto da $S \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{p_i} = V$.
Quindi U e V sono aperti disgiunti contenenti rispettivamente x e S; allora $U_x \subseteq X \backslash S \quad \forall x \Rightarrow \bigcup_{x \in X} U_x = X \backslash S$; quindi $X \backslash S$ è un aperto e di conseguenza S è chiuso. Per dimostrare la limitatezza, sia ora $\bigcup_{x \in S} D_r(x) \supseteq S$ un ricoprimento di S; allora esiste un sottoricoprimento finito $D_r(x_1), \ldots, D_r(x_k)$ tale che $\bigcup_{i=1}^k D_r(x_i) \supseteq S$; ma $\bigcup_{i=1}^k D_r(x_i)$ è unione finita di dischi, quindi esiste $r' = \sup_{x,y \in \bigcup_{i=1}^k D_r(x_i)} d(x,y) < \infty$ tale che $D_{r'}(x) \supseteq \bigcup_{i=1}^k D_r(x_i) \supseteq S$ ed S è limitato. □

Concludiamo questo capitolo con due importanti teoremi, fondamentali in tutta la teoria topologica e non sono ai fini della nostra dimostrazione.

**Teorema 1.5** (di Weierstrass)**.** *Sia $f : X \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Se X è uno spazio topologico compatto allora f assume un valore massimo e un valore minimo su X.*

*Dimostrazione.* X compatto $\Rightarrow f(X)$ compatto perché f è continua $\Rightarrow$
$f(X) \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso e limitato, e quindi ammette un valore massimo (e minimo). □

**Lemma 1.6.** *Sia $C \subseteq X$ chiuso e X compatto $\Rightarrow$ C è compatto.*

*Dimostrazione.* Sia $U = \{U_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di C, cioè valga $C \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j, U_j$ aperti di X; allora $U_j \cup (X \backslash C)$ è un ricoprimento aperto di X. Quindi esistono $U_1, \ldots, U_k$ tali che $X = \bigcup_{i=1}^k (U_i \cup (X \backslash C))$ perché X è compatto; ma quindi $C \subseteq \bigcup_{i=1}^k U_i$ e quindi C compatto. □

**Teorema 1.7** (Lemma dell'Applicazione Chiusa)**.** *Siano X, Y due spazi topologici e $f : X \to Y$ continua, con X compatto e Y di Hausdorff. Allora valgono le seguenti:*

1. *f è chiusa*
2. *se f è bigettiva, allora f è un omeomorfismo*
3. *se f è iniettiva, allora f è un'immersione topologica.*

*Dimostrazione.*
1. sia $C \subseteq X$ chiuso; allora C è compatto perché sottoinsieme di un compatto. Quindi anche $f(C) \subseteq Y$ è compatto e quindi f(C) chiuso perché Y è di Hausdorff.

2. f è bigettiva e continua, e quindi per il punto 1) è anche chiusa; quindi è un omeomorfismo.

3. $f^* : X \to f(X)$ restrizione di f all'immagine è bigettiva, continua e chiusa; quindi $f^*$ è un omeomorfismo, e f un'immersione topologica.

$\square$

# Capitolo 2

# Spazi Metrici Completi

## 2.1 Spazi Sequenzialmente compatti

In questa sezione della tesi introduciamo il concetto di compattezza sequenziale, e vedremo che, seppur negli spazi metrici, questa è equivalente alla compattezza già studiata nel capitolo precedente.

**Definizione 2.1** (proprietà di Bolzano-Weierstrass)**.** *Uno spazio $X$ rispetta la proprietà di Bolzano-Weierstrass se ogni suo sottoinsieme infinito possiede almeno un punto di accumulazione.*

Questa che abbiamo chiamato come proprietà di Bolzano-Weierstrass si può trovare sotto vari nomi in altri testi (proprietà di Frèchet, limit-point compactness, ecc.), ed è storicamente importante perché originariamente questa era la definizione di compattezza, prima che fosse introdotta la definizione dei sottoricoprimenti. Le definizioni in generale non sono equivalenti, infatti:

**Proposizione 2.1.** *La compattezza implica la proprietà di Bolzano-Weierstrass, ma non viceversa.*

*Dimostrazione.* cfr. Munkres pag. 179 □

**Definizione 2.2** (Compattezza Sequenziale)**.** *Sia $X$ uno spazio topologico. Se $(x_n)$ è una successione di punti di $X$, e se*

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots$$

*è una successione crescente di interi positivi, allora la successione $(y_i)$ definita come $y_i = x_{n_i}$ è detta **sottosuccessione** della successione $(x_n)$. Lo spazio $X$ è detto **sequenzialmente compatto** se ogni successione di punti di $X$ ha una sottosuccessione convergente.*

Come preannunciato, si dimostra (non senza difficoltà) l'equivalenza dei tre concetti di compattezza appena descritti all'interno degli spazi metrici:

**Proposizione 2.2.** *Sia X uno spazio metrizzabile. Allora le seguenti sono equivalenti:*

1. *X è compatto*

2. *X rispetta la proprietà di Bolzano-Weierstrass*

3. *X è sequenzialmente compatto*

*Dimostrazione.* cfr. Munkres pag. 179 □

## 2.2 Completezza

**Definizione 2.3** (Successione di Cauchy o fondamentale)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico. Una successione* $(x_n)$ *di punti di X è detta* ***di Cauchy*** *se,* $\forall \varepsilon > 0$ *si trova un intero N tale che*

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \qquad \textit{quando } n, m \geq N$$

E lo spazio metrico *(X, d)* è detto **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente.
Osserviamo che ogni successione convergente è necessariamente di Cauchy; la completezza quindi ci assicura che valga anche il viceversa. Inoltre, si può facilmente provare che ogni successione di Cauchy è limitata.

**Proposizione 2.3.** *Sia A un sottoinsieme di uno spazio metrico completo (X, d). A è completo nella metrica indotta se e solo se A è chiuso.*

*Dimostrazione.* A chiuso $\Rightarrow$ A completo. Sia $(x_n) \subseteq A$ una successione di Cauchy; essa converge ad un elemento $x \in X$ essendo X completo; se $(x_n)$ è definitivamente costante allora $x \in A$ banalmente; in caso contrario $x$ appartiene al derivato di A $\Rightarrow$ appartiene ad A in quanto A è chiuso.
A completo $\Rightarrow$ A chiuso. Sia $x \in A$ un punto di accumulazione per A; allora possiamo costruire una successione $(x_n) \subseteq A$ convergente ad $x$; ma allora $x \in A$ perché A è completo. □

Osserviamo che se *(X, d)* è uno spazio metrico completo, lo è anche X con la distanza limitata

$$\bar{d}(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$$

Infatti c'è perfetta corrispondenza tra le successioni di Cauchy di
*(X, d)* e di *(X,* $\bar{d}$*)*: infatti una successione $(x_n)$ è di Cauchy in $\bar{d}$ se e solo se lo è anche in $d$. Lo stesso si può dire della convergenza.

## 2.3 La metrica quadrato è completa

Dimostriamo ora che $\mathbb{R}^k$ con la metrica quadrato $\rho$ è uno spazio metrico completo. Ricordiamo che i dischi con la metrica quadrato sono definiti come

$$\rho(x, y) = \max_{j=1,\ldots,k} |x_j - y_j|$$

**Lemma 2.4.** *Uno spazio metrico $X$ è completo se ogni successione di Cauchy in $X$ ha una sottosuccessione convergente.*

*Dimostrazione.* Sia $(x_n)$ una successione di Cauchy in *(X, d)*. Mostriamo che se $(x_{n_i})$ è una sottosuccessione convergente ad un punto $x$ allora la successione stessa $(x_n)$ converge a $x$.
Sia $\varepsilon > 0$; sfruttando il fatto che $(x_n)$ è una successione di Cauchy scegliamo un intero $N$ grande abbastanza per cui

$$d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{per ogni } n, m \geq N$$

Quindi scegliamo un altro intero $i$ tale che si abbia $n_i \geq N$ e

$$d(x_{n_i}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

sfruttando il fatto che $n_1 < n_2 < \ldots$ è una successione crescente di interi tale che $x_{n_i} \to x$ per ipotesi. Mettendo assieme questi risultati riusciamo a provare che

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x) < \varepsilon$$

□

**Proposizione 2.5.** *Lo spazio $\mathbb{R}^k$ è completo sia nella sua usuale metrica euclidea $d$ che in quella quadrato $\rho$.*

*Dimostrazione.* Sia $(x_n)$ una successione di Cauchy in $(\mathbb{R}^k, \rho)$. Quindi l'insieme $\{x_n\}$ è limitato in $(\mathbb{R}^k, \rho)$. Possiamo quindi scegliere N tale che

$$\rho(x_n, x_m) \leq 1 \qquad \text{per ogni } n, m \geq N$$

e quindi il numero

$$M = \max\{\rho(x_1, 0), \ldots, \rho(x_{N-1}, 0), \rho(x_N, 0) + 1\}$$

è un limite superiore per $\rho(x_n, 0)$. Inoltre i punti della successione $(x_n)$ stanno tutti sul cubo $[-M, M]^k$. Visto che il cubo è compatto, la successione $(x_n)$ converge sequenzialmente (vd. Teorema 2.2), ed è convergente. Quindi $(\mathbb{R}^k, \rho)$ è completo.
Per mostrare che $(\mathbb{R}^k, d)$ è completo non è difficile vedere che una successione è di Cauchy rispetto a $d$ se e solo se è una successione di Cauchy rispetto a $\rho$, e una successione converge in $d$ se e solo se converge in $\rho$ □

## 2.4 Metrica Uniforme

In questa sezione supporremo che J sia uno spazio arbitrario (anche non numerabile), e $Y^J$ il prodotto cartesiano non numerabile di Y.

**Definizione 2.4** (Metrica Uniforme)**.** *Sia (Y, d) uno spazio metrico e* $\bar{d} = \min\{d(a,b), 1\}$ *la metrica standard limitata derivata da d.*
*Se* $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ *e* $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{\alpha \in J}$ *sono due punti del prodotto cartesiano* $Y^J$*, allora*

$$\bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\{\bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \mid \alpha \in J\}$$

*è detta* ***metrica uniforme*** *definita su* $Y^J$ *corrispondente alla metrica d di Y.*

Qua abbiamo usato una notazione un po' scomoda per denotare gli elementi di $Y^J$, ma dato che questi elementi non sono altro che funzioni da J a Y, d'ora in poi useremo solo la notazione funzionale per essi. In quel caso la definizione di metrica uniforme assume l'aspetto seguente:

$$\bar{\rho}(f, g) = \sup\{\bar{d}(f(\alpha), g(\alpha)) \mid \alpha \in J\}$$

**Proposizione 2.6.** *Se lo spazio metrico* $(Y, d)$ *è completo con la metrica d, allora lo è anche lo spazio* $Y^J$ *con la metrica* $\bar{\rho}$ *corrispondente a d.*

*Dimostrazione.* Se (Y, d) è completa, lo è anche anche (Y, $\bar{d}$) dove $\bar{d}$ è la metrica limitata corrispondente a d. Ora supponiamo che la successione $f_1, f_2, \ldots$ di punti di $Y^J$ sia una successione di Cauchy relativa a $\bar{\rho}$; quindi si ha

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) \leq \bar{\rho}(f_n, f_m)$$

per ogni n,m, e quindi è una successione di Cauchy anche nella metrica $(Y, \bar{d})$ e converge ad un certo punto $y_\alpha$ in quanto $(Y, \bar{d})$ completo.
Sia $f : J \to Y$ la funzione definita come $f(\alpha) = y_\alpha$. Intendiamo dimostrare che la successione $(f_n)$ converge a $f$ nella metrica $\bar{\rho}$. Dato $\varepsilon > 0$ scegliamo un intero N tale che $\bar{\rho}(f_n, f_m) < \varepsilon/2$ qualsiasi siano $n, m \geq N$. Quindi in particolare

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f_m(\alpha)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

per $n, m \geq N$ e $\alpha \in J$. Se fissiamo n e $\alpha$ e lasciamo m arbitrariamente grande, abbiamo

$$\bar{d}(f_n(\alpha), f(\alpha)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Questa ineguaglianza è valida per ogni $\alpha \in J$ con la sola condizione che $n \geq N$. Quindi:

$$\bar{\rho}(f_n, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

per $n \geq N$, come desiderato. □

Introduciamo un altro concetto noto nell'analisi matematica, generalizzato però a spazi metrici qualunque: quello di convergenza uniforme.

**Definizione 2.5** (Convergenza Uniforme)**.** *Sia $f_n : X \to Y$ una successione di funzioni dall'insieme X allo spazio metrico (Y, d). La successione $(f_n)$* ***converge uniformemente*** *alla funzione $f : X \to Y$ se, dato un $\varepsilon > 0$ esiste un intero N tale che*

$$d(f_n, f_m) < \varepsilon$$

*per ogni $n > N$ ed ogni $x$ appartenente ad X.*

L'uniformità dipende sia dalla topologia dentro Y che dalla sua metrica. Si trova a tal proposito il seguente risultato:

**Teorema 2.7** (del limite uniforme)**.** *Sia $f_n : X \to Y$ una successione di funzioni continue dallo spazio topologico X allo spazio metrico (Y, d). Se $(f_n)$ converge uniformemente a $f$, allora $f$ è continua.*

*Dimostrazione.* Sia V un aperto di Y e $x_0$ un punto di $f^{-1}(V)$. Vorremmo trovare un intorno U di $x_0$ tale che $f(U) \subseteq V$. Sia $y_0 = f(x_0)$. Prima scegliamo $\varepsilon$ in modo che la bolla $B(y_0, \varepsilon)$ sia contenuta in V. Quindi, usando la convergenza uniforme, scegliamo N tale che per ogni $n \geq N$ e ogni $x$ appartenente a X sia abbia

$$d(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Infine usando la continuitè di $f_N$ scegliamo un intorno U di $x_0$ tale che $f_N$ porti U nella bolla di raggio $\varepsilon/3$ in Y centrata in $f_N(x_0)$.
Intendiamo dimostrare che $f$ porta U in $B(y_0, \varepsilon)$ e quindi in V, come desiderato. Ma questo è vero in quanto, se $x \in U$ si ha:

$$\begin{aligned} d(f(x), f_N(x)) &< \frac{\varepsilon}{3} && \text{per scelta di N} \\ d(f_N(x), f_N(x_0)) &< \frac{\varepsilon}{3} && \text{per scelta di U} \\ d(f_N(x_0), f(x_0)) &< \frac{\varepsilon}{3} && \text{per scelta di N} \end{aligned}$$

Sommando le tre formule troviamo che:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) \geq \\ &\geq d(f(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0)) \geq \\ &\geq d(f(x), f(x_0)) \end{aligned}$$

□

Si osservi che la nozione di convergenza uniforme è interconnessa con quella di metrica uniforme data precedentemente. Si consideri per esempio lo spazio $\mathbb{R}^X$ di tutte le funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ nella metrica uniforme $\bar{\rho}$. Non è difficile da dimostrare che una successione di funzioni $(f_n)$ converge uniformemente a $f$ se e solo se la successione $(f_n)$ converge a $f$ quando sono considerati come elementi dello spazio metrico $(\mathbb{R}^X, \bar{\rho})$.

Ora consideriamo un caso più particolare, dove, nell'insieme $Y^X$ stavolta X è uno spazio topologico, e non un insieme arbitrario qualunque. Questa caratteristica non ha rilevanza nelle proposizioni precedenti, ma ora possiamo considerare anche l'insieme $\mathcal{C}(X,Y)$ delle funzioni continue tra X e Y e nella seguente dimostrazione mostreremo che se Y è completo, lo è anche $\mathcal{C}(X,Y)$ insieme con la metrica uniforme. Lo stesso risultato vale anche per l'insieme $\mathcal{B}(X,Y)$ delle funzioni limitate tra X e Y.

**Proposizione 2.8.** *Sia X uno spazio topologico e (Y,d) spazio metrico. L'insieme $\mathcal{C}(X,Y)$ delle funzioni continue tra X e Y è* ***chiuso*** *in $Y^X$ con la metrica uniforme, e così anche l'insieme $\mathcal{B}(X,Y)$. Inoltre, se Y è completo, lo sono anche questi spazi con la metrica uniforme.*

*Dimostrazione.* Mostreremo prima che una successione di elementi $(f_n)$ di $Y^X$ converge ad un elemento $f$ di $Y^X$ relativamente alla metrica $\bar{\rho}$, e poi che converge a $f$ **uniformemente** relativamente alla metrica $\bar{d}$ di Y. Dato $\varepsilon > 0$, scegliamo un intero N tale che

$$\bar{\rho}(f, f_n) < \varepsilon$$

per ogni $n > N$. Allora per ogni $x \in X$ e per ogni $n \geq N$ si ha

$$\bar{d}(f_n(x), f(x)) \leq \bar{\rho}(f_n, f) < \varepsilon$$

E quindi $(f_n)$ converge a $f$.
Ora mostriamo che $\mathcal{C}(X,Y)$ è chiuso in $Y^X$ relativamente alla metrica $\bar{\rho}$. Sia $f$ un elemento di $Y^X$ che è un punto di accumulazione in $\mathcal{C}(X,Y)$. Allora esiste una successione $(f_n)$ di elementi di $\mathcal{C}(X,Y)$ convergente a $f$ nella metrica $\bar{\rho}$. Per il teorema del limite uniforme, $f$ è continua e quindi $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ .
Analogamente si prova lo stesso per $\mathcal{B}(X,Y)$. (cfr. Munkres pag. 267)
Concludiamo che $\mathcal{C}(X,Y)$ e $\mathcal{B}(X,Y)$ sono completi nella metrica $\bar{\rho}$ se Y è completa nella metrica d. □

**Definizione 2.6** (Metrica sup)**.** *Se (Y, d) è uno spazio metrico, possiamo definire nello spazio $\mathcal{B}(X,Y)$ delle funzioni limitate tra X e Y una metrica in questo modo:*

$$\rho(f,g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$$

*chiamata* ***metrica del sup****.*

E' facile dimostrare che $\rho$ è ben definita in quanto l'insieme $f(X) \cup g(X)$ è limitato se entrambi $f(X)$ e $g(X)$ lo sono.

C'è una semplice relazione tra la metrica del sup e quella uniforme. Infatti, se $f, g \in \mathcal{B}(X, Y)$ allora

$$\bar{\rho}(f, g) = \min\{\rho(f, g), 1\}.$$

Inoltre se $\rho(f, g) > 1$ allora $d(f(x_0), g(x_0)) > 1$ per almeno un punto $x_0 \in X$, e quindi $\bar{d}(f(x_0), g(x_0)) = 1$ e $\bar{\rho}(f, g) = 1$. Dall'altra parte, se $\rho(f, g) \leq 1$ allora $d(f(x), g(x)) = \bar{d}(f(x), g(x)) \leq 1$ per ogni $x$, così come $\bar{\rho}(f, g) = \rho(f, g)$. Quindi in $\mathcal{B}(X, Y)$ la metrica $\bar{\rho}$ è semplicemente la metrica limitata standard derivata da $\rho$. Questo è il motivo per cui si è introdotta la notazione col trattino!

La definizione sopra della metrica del sup può essere facilmente estesa all'insieme $\mathcal{C}(X, Y)$ purchè X sia un compatto. Infatti il teorema di Weierstrass (Teorema 1.5) ci assicura la limitatezza degli insiemi immagine in Y.

# Capitolo 3

# Teoria della dimensione

## 3.1 Partizione dell'unità

**Teorema 3.1** (Lemma di Urysohn)**.** *Sia $X$ uno spazio normale e $C_0$ e $C_1 \subseteq X$ due chiusi disgiunti. Allora esiste $f : X \to [0,1]$ continua tale che $f(C_0) = 0$ e $f(C_1) = 1$*

*Dimostrazione.* cfr. Munkres pag. 207. □

Sia $\phi : X \to \mathbb{R}$ una funzione; allora il **supporto** di $\phi$ è definito come la chiusura dell'insieme $\phi^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Quindi se $x$ non appartiene al supporto di $\phi$ esiste un intorno di $x$ dove $\phi$ è uguale a zero.

**Definizione 3.1** (Partizione dell'unità)**.** *Sia $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un ricoprimento finito di aperti di $X$. Una famiglia di funzioni continue*

$$\phi_i : X \to [0,1] \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n$$

*è detta **partizione dell'unità** subordinata ad $\{U_i\}$ se:*

1. *(supporto $\phi_i$) $\subseteq U_i$ per ogni $i$;*
2. *$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x) = 1$ per ogni $x$.*

Dimostriamo ora l'esistenza di una partizione finita dell'unità per ogni ricoprimento finito.

**Lemma 3.2.** *Sia $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un ricoprimento aperto finito di uno spazio normale $X$. Allora esiste un altro ricoprimento aperto finito $\{V_1, \ldots, V_n\}$ di $X$ tale che $\bar{V}_i \subseteq U_i$ per ogni $i$.*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione. Prima, notiamo che l'insieme

$$A = X \setminus (U_2 \cup \ldots \cup U_n)$$

è un sottoinsieme chiuso di X. Dato che $\{U_1, \ldots, U_n\}$ ricopre X, l'insieme A è contenuto nell'aperto $U_1$. Sfruttando la normalità di X, scegliamo un aperto $V_1$ contenente A tale che $\bar{V}_1 \subseteq U_1$. Allora la famiglia $\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$ ricopre X. In generale, dati gli insiemi aperti $V_1, \ldots, V_{k-1}$ tali che la famiglia

$$\{V_1, \ldots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$$

ricopre X, sia

$$A = X \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1}) \setminus (U_{k+1} \cup \ldots \cup U_n).$$

Quindi A è un sottoinsieme chiuso di X contenuto nell'insieme aperto $U_k$. Scegliamo $V_k$ in modo che sia un insieme aperto contenente A tale che $\bar{V}_k \subseteq U_k$. Allora $\{V_1, \ldots, V_{k-1}, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$ ricopre X. All'n-esimo passo dell'induzione, il risultato è provato. □

**Proposizione 3.3.** *Sia $\{U_1, \ldots, U_n\}$ un ricoprimento aperto finito di uno spazio normale X. Allora esiste una partizione dell'unità subordinata ad $\{U_i\}$*

*Dimostrazione.* Dato il ricoprimento aperto $\{U_1, \ldots, U_n\}$ di X, scegliamo un ricoprimento aperto $\{V_1, \ldots, V_n\}$ di X tale che $\bar{V}_i \subseteq U_i$ per ogni $i$. Quindi scegliamo un altro ricoprimento aperto $\{W_1, \ldots, W_n\}$ di X tale che $\overline{W}_i \subseteq V_i$ per ogni $i$. Usando il lemma di Urysohn (Teorema 3.1), scegliamo infine per ogni $i$ una funzione continua

$$\psi_i : X \to [0, 1]$$

tale che $\psi_i(\overline{W}_i) = \{1\}$ e $\psi_i(X \setminus V_i) = \{0\}$. Allora $\psi_i^{-1}([0, 1] \setminus \{0\})$ è contenuto in $V_i$, e abbiamo

$$(\text{supporto } \psi_i) \subseteq \bar{V}_i \subseteq U_i.$$

Poichè la famiglia $\{W_i\}$ ricopre X, la somma $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x)$ è positiva per ogni $x$. Quindi, possiamo definire per ogni $j$,

$$\phi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\Psi(x)}$$

E' facile controllare a questo punto che le funzioni $\phi_1, \ldots, \phi_n$ formano la partizione dell'unità desiderata. □

## 3.2 Spazi di Baire

**Definizione 3.2** (Spazio di Baire)**.** *Uno spazio X è detto **di Baire** se data una qualsiasi famiglia numerabile $\{A_n\}$ di insiemi chiusi di X ognuno dei quali ha parte interna vuota in X, la loro unione $\cup A_n$ ha anch'essa parte interna vuota.*

**Esempio 3.1.** Lo spazio $\mathbb{Z}^+$ degli interi positivi forma uno spazio di Baire. Ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}^+$ è aperto, quindi non esiste alcun insieme di $\mathbb{Z}^+$ avente interno vuoto, quindi banalmente soddisfa la definizione. Più in generale, ogni sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}$ essendo uno spazio metrico completo, è uno spazio di Baire. Persino l'insieme dei numeri irrazionali in $\mathbb{R}$ forma uno spazio di Baire.

**Lemma 3.4.** *$X$ è uno spazio di Baire se e solo se se data una collezione numerabile $\{U_n\}$ di aperti di $X$, ognuno denso in $X$, la loro intersezione $\bigcap U_n$ è anch'essa densa in $X$.*

*Dimostrazione.* Ricordiamo che un insieme è denso in $X$ se $\bar{C} = X$. Il lemma segue dal fatto che $A$ è chiuso in $X$ se e solo se $X \setminus A$ è aperto in $X$, e $B$ ha interno vuoto in $X$ se e solo se $X \setminus B$ è denso in $X$. □

Enunciamo infine, senza dimostrarlo, il teorema della categoria di Baire.

**Teorema 3.5** (Teorema della categoria di Baire)**.** *Se $X$ è uno spazio di Hausdorff compatto o uno spazio metrico completo, allora $X$ è uno spazio di Baire.*

## 3.3 Dimensione topologica

Definiamo in questa sezione uno dei concetti topologici più importanti, quello di dimensione, dovuto a Lebesgue. Nei fatti, la dimensione di Lebesgue non cambia rispetto a quella "canonica": quindi su $\mathbb{R}^n$ la dimensione topologica sarà $n$, così come in una m-varietà sarà $m$ anche la dimensione topologica. La maggior parte di quanto definito in questa sezione vale in generale anche per spazi non compatti, ma noi ci limiteremo a dimostrarlo solo per spazi compatti.

**Definizione 3.3** (Ordine)**.** *Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi dello spazio $X$ ha ordine $m + 1$ se qualche punto di $X$ appartiene a $m + 1$ elementi di $\mathcal{A}$, e nessun punto di $X$ appartiene a più di $m + 1$ elementi di $\mathcal{A}$*

Ora definiamo cosa intendiamo per dimensione topologica di uno spazio X. Ricordiamo che per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X, $\mathcal{B}$ è detto *un raffinamento* di $\mathcal{A}$ se per ogni elemento B di $\mathcal{B}$ esiste un elemento A di $\mathcal{A}$ tale che $B \subseteq A$.

**Definizione 3.4** (Dimensione topologica)**.** *Uno spazio $X$ è detto **finito** se esiste un intero $m$ tale che per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di $X$ esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{B}$ di $X$ che raffina $\mathcal{A}$ e ha ordine al massimo $m+1$. La **dimensione topologica** di $X$ è il più piccolo valore di $m$ per il quale vale questa proprietà. Indicheremo questo valore con dimX.*

## 3.4 Posizione generale

Introduciamo ora un ultimo concetto, derivato dall'algebra e dalla geometria, di *posizione generale*. Un insieme S di punti di $\mathbb{R}^3$ è detto in posizione generale se non esistono 3 punti di S collineari e non esistono 4 punti di S complanari. E' facile trovare un insieme di questo tipo. Un esempio è dato dalla curva

$$S = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

I punti di questa curva sono in posizione generale. Infatti se esistessero quattro punti appartenenti ad un singolo piano $Ax + By + Cz = D$ allora l'equazione polinomiale

$$At + Bt^2 + Ct^3 = D$$

dovrebbe avere quattro radici reali distinte! (impossibile perché è un'equazione cubica). E se tre punti fossero collineari, basterebbe aggiungerne un altro per avere quattro punti complanari, da qui l'assurdo.

Si può facilmente generalizzare la nozione di posizione generale ad una riguardante un qualunque spazio affine, utilizzando un po' di algebra lineare.

**Definizione 3.5.** *Un insieme $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ di punti di $\mathbb{R}^N$ è detto **geometricamente indipendente** o **affinemente indipendente** se le equazioni*

$$\sum_{i=0}^{k} a_i \mathbf{x}_i = 0 \qquad e \qquad \sum_{i=0}^{k} a_i = 0$$

*valgono solo se ogni $a_i = 0$.*

Chiaramente un insieme formato da un solo punto è geometricamente indipendente. Ma cosa significa in generale l'indipendenza geometrica? Se risolviamo la seconda equazione per $a_0$ e sostituiamo il risultato nella prima equazione, ritroviamo la formula equivalente

$$\sum_{i=1}^{k} a_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) = 0$$

che vale se e solo se ogni $a_i = 0$. Questa è semplicemente la definizione di *indipendenza lineare* per l'insieme di vettori $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$ dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^N$. Questo ci permette di dire che: ogni coppia di punti distinti forma un insieme geometricamente indipendente; tre punti non allineati formano uno insieme di punti geometricamente indipendente; quattro punti di $\mathbb{R}^3$ non complanari formano un insieme geometricamente indipendente, e così via. Segue da questo che i punti

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= (0, 0, \ldots, 0), \\
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0), \\
&\cdots \\
\mathbf{e}_N &= (0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

sono geometricamente indipendenti in $\mathbb{R}^N$. Segue inoltre che ogni insieme geometricamente indipendente di $\mathbb{R}^N$ contiene non più di $N+1$ punti.

**Definizione 3.6.** *Sia $\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ un insieme di punti di $\mathbb{R}^N$ geometricamente indipendenti. Il **piano P determinato da questi punti** è definito come l'insieme di tutti i punti $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^N$ tali che*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{k} t_i \mathbf{x}_i, \qquad \textit{dove} \qquad \sum_{i=0}^{k} t_i = 1$$

E' semplice controllare che $P$ può essere espresso come l'insieme di tutti i punti tali che

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0) \tag{3.1}$$

per qualche scalare $a_1, \ldots, a_k$. In più $P$ può essere descritto non solo come "piano determinato dai punti $\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k$" ma anche come "il piano passante per $\mathbf{x}_0$ parallelo ai vettori $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$".

Consideriamo ora l'omeomorfismo $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definito dall'equazione $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ che è una **traslazione** di $\mathbb{R}^N$. L'Espressione 3.1 mostra che questa mappa porta il piano $P$ nel sottospazio vettoriale $V^k$ di $\mathbb{R}^N$ avendo come base di vettori $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0$. Per questa ragione, di solito $P$ viene chiamato il **k-piano** di $\mathbb{R}^N$.

Due risultati seguono immediatamente: primo, se $k < N$, l'interno del k-piano $P$ è vuoto in $\mathbb{R}^N$, perché lo è $V^k$. Secondo, se $\mathbf{y}$ è un qualche punto di $\mathbb{R}^N$ non appartenente a $P$, allora l'insieme

$$\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}\}$$

è geometricamente indipendente. Quindi se $\mathbf{y} \notin P$ allora $T(\mathbf{y}) = \mathbf{y} - \mathbf{x}_0$ non si trova in $V^k$. Da un teorema basico dell'algebra lineare, segue che i vettori $\{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0, \mathbf{y} - \mathbf{x}_0\}$ sono linearmente indipendenti, da cui segue il nostro risultato.

**Definizione 3.7.** *Un insieme $A$ di punti di $\mathbb{R}^N$ è detto in **posizione generale** se per ogni sottoinsieme $A$ contenente non più di $N$ + 1 punti è geometricamente indipendente.*

**Lemma 3.6.** *Dato un insieme finito $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ di punti di $\mathbb{R}^N$ e dato $\delta > 0$, allora esiste un insieme $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ di punti di $\mathbb{R}^N$ in posizione generale in $\mathbb{R}^N$ tali che $|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i| < \delta$ per ogni $i$*

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione. Imponiamo innanzitutto $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$. Supponiamo di avere dati $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p$ in posizione generale in $\mathbb{R}^N$. Consideriamo l'insieme di tutti i piani di $\mathbb{R}^N$ determinati da sottoinsiemi di $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p\}$ che contengono non più di $N$ elementi. Ogni sottoinsieme di questo tipo è geometricamente indipendente e determina un k-piano di $\mathbb{R}^N$ per qualche $k < N - 1$. Ognuno di questi piani ha interno pari al vuoto in $\mathbb{R}^N$. Dato che ne esistono solo un numero finito, anche la loro unione ha interno vuoto in $\mathbb{R}^N$ (ricordiamo che $\mathbb{R}^N$ è uno spazio di Baire). Scelto un punto $\mathbf{y}_{p+1}$ di $\mathbb{R}^N$ che non appartiene a questi piani in modo tale che $|\mathbf{x}_{p+1} - \mathbf{y}_{p+1}| < \delta$, segue che l'insieme

$$C = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p, \mathbf{y}_{p+1}\}$$

è in posizione generale in $\mathbb{R}^N$. Sia poi $D$ un qualunque sottoinsieme di $C$ contenente $N + 1$ o meno elementi. Se $D$ non contiene $\mathbf{y}_{p+1}$, allora è geometricamente indipendente per ipotesi. Se $D$ contiene $\mathbf{y}_{p+1}$, allora $D \setminus \{\mathbf{y}_{p+1}\}$ contiene $N$ o meno punti e $\mathbf{y}_{p+1}$ non è nel piano determinato da questi punti, per costruzione. Allora $D$ è geometricamente indipendente. $\square$

# Capitolo 4

# Il teorema dell'embedding

Dopo la parte teorica introdotta nei precedenti capitoli, è arrivata l'ora di dimostrare il teorema principale di questa tesi, e cioè quello che dimostra l'esistenza di una immersione topologica da uno spazio metrizzabile compatto di dimensione $m$ in $\mathbb{R}^N$ con $N = 2m + 1$. A questo risultato seguirà pure una generalizzazione, che può essere dimostrata come semplice corollario del risultato principale. Il teorema è dovuto a K.Menger e a G. Noberling

## 4.1 Enunciato e dimostrazione

**Teorema 4.1** (Teorema dell'embedding)**.** *Ogni spazio compatto metrizzabile $X$ di dimensione topologica $m$ può essere immerso in $\mathbb{R}^{2m+1}$.*

*Dimostrazione.* Sia $N = 2m + 1$. Denotiamo la metrica quadrato di $\mathbb{R}^N$ come

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \max\{|x_i - y_i|; i = 1, \ldots, N\}.$$

Allora possiamo usare $\rho$ per denotare la corrispondente metrica del sup sullo spazio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ delle funzioni continue tra X e $\mathbb{R}^N$:

$$\rho(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in X\}.$$

Lo spazio $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^N)$ è completo nella metrica $\rho$, visto che lo è $\mathbb{R}^N$ con la metrica quadrato. (vedi Teorema 2.8 e commenti seguenti).

Scegliamo una metrica $d$ per $X$ compatibile con la topologia; siccome $X$ è compatto, allora $d$ è limitata (vedi Teorema 1.4). Data un'applicazione continua $f : X \to \mathbb{R}^N$ definiamo

$$\Delta(f) = \sup\{\text{diam} f^{-1}(\{z\}) \mid z \in f(X)\}.$$

Il numero $\Delta(f)$ misura quanto $f$ è lontana dall'essere iniettiva: se $\Delta(f) = 0$ ogni insieme $f^{-1}(\{z\})$ consiste di un solo punto, e quindi $f$ è iniettiva.

Ora, dato $\varepsilon > 0$, definiamo $U_\varepsilon$ come l'insieme di tutte le funzioni continue $f : X \to \mathbb{R}^N$ per le quali $\Delta(f) < \varepsilon$ (l'insieme consiste di tutte le funzioni che si allontanano dall'essere iniettive meno di $\varepsilon$). Il nostro obiettivo è mostrare che $U_\varepsilon$ è sia aperto che denso in $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$. Segue che l'intersezione

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_+} U_{1/n}$$

è densa in $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$ per il Teorema 3.4. In particolare quest'insieme è non vuoto per le proprietà di un insieme denso dimostrate nella Proposizione 1.1.

Se $f$ è un elemento di questa intersezione, allora $\Delta(f) < 1/n$ per ogni $n$. Quindi $\Delta(f) = 0$ e $f$ è iniettiva. Siccome $X$ è un compatto, allora $f$ è un embedding (per il lemma dell'applicazione chiusa, Teorema 1.7). Dimostriamo che $U_\varepsilon$ è sia aperto che denso in $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$:

(1) $U_\varepsilon$ *è aperto in* $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$. Dato un elemento $f$ di $U_\varepsilon$ vorremmo trovare una bolla $B_\rho(f,\delta)$ di $f$ che è contenuta in $U_\varepsilon$. Prima scegliamo un numero $b$ tale che $\Delta(f) < b < \varepsilon$. Si noti che se $f(x) = f(y) = z$ allora $x$ e $y$ appartengono all'insieme $f^{-1}(\{z\})$, e quindi $d(x,y)$ deve essere minore di $b$. Segue che, se poniamo $A$ come il sottoinsieme di $X \times X$ definito come

$$A = \{x \times y \mid d(x,y) \geq b\}$$

allora la funzione $|f(x)-f(y)|$ è positiva su $A$ (e quindi non è mai zero). Ora $A$ è chiuso in $X \times X$ e quindi anche compatto per il Teorema 1.6; e quindi per il Teorema di Weierstrass 1.5 la funzione $|f(x) - f(y)|$ ha un minimo positivo su $A$. Sia

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{|f(x) - f(y)|; x \times y \in A\}.$$

Vogliamo ora dimostrare che questo è il valore di $\delta$ cercato.

Supponiamo che $g$ sia un'applicazione tale che $\rho(f,g) < \delta$. Se $x \times y \in A$, allora $|f(x) - f(y)| \geq 2\delta$ per definizione; Essendo $g(x)$ e $g(y)$ a distanza $\delta$ rispettivamente da $f(x)$ e da $f(y)$, dobbiamo avere per forza $|g(x) - g(y)| > 0$. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} 2\delta \leq |f(x) - f(y)| &= |f(x) \pm g(x) \pm g(y) - f(y)| = \\ &= |f(x) - g(x) + g(x) - g(y) + g(y) - f(y)| \leq \\ &\leq \underbrace{|f(x) - g(x)|}_{<\delta} + |g(x) - g(y)| + \underbrace{|f(y) - g(y)|}_{<\delta} \end{aligned}$$

Quindi anche la funzione $|g(x) - g(y)|$ è positiva in $A$. Come risultato, se $x$ e $y$ sono due punti tali che $g(x) = g(y)$, allora necessariamente $d(x,y) < b$. Concludiamo quindi che $\Delta(g) \leq b < \varepsilon$, come desiderato.

(2) $U_\varepsilon$ *è denso in* $\mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$. Sia $f \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$. Dato $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ vorremmo trovare una funzione $g \in \mathcal{C}(X,\mathbb{R}^N)$ tale che $g \in U_\varepsilon$ e $\rho(f,g) < \delta$.

Ricopriamo $X$ di un numero finito di aperti $\{U_1, \ldots, U_n\}$ tali che:

1. $\text{diam}U_i < \varepsilon/2$ in $X$
2. $\text{diam}f(U_i) < \delta/2$ in $\mathbb{R}^N$
3. $\{U_1, \ldots, U_n\}$ ha ordine $\leq m+1$.

Sia $\{\phi_i\}$ la partizione dell'unità dominata da $\{U_i\}$ (vedi Definizione 3.1). Per ogni $i$, scegliamo un punto $x_i \in U_i$ e un punto $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^N$ tale che $\mathbf{z}_i$ sia in un intorno $\delta/2$ del punto $f(x_i)$, e tale che l'insieme $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n\}$ è in posizione generale in $\mathbb{R}^N$. Finalmente, definiamo $g : X \to \mathbb{R}^N$ dall'equazione

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\mathbf{z}_i.$$

Intendiamo dimostrare che $g$ è proprio la funzione cercata.

Prima, mostriamo che $\rho(f, g) < \delta$. Facciamo notare che

$$g(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\mathbf{z}_i - \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)f(x);$$

quindi sfruttiamo il fatto che $\sum \phi_i(x) = 1$. Allora

$$g(x) - f(x) = \sum \phi_i(x)(\mathbf{z}_i - f(x_i)) + \sum \phi_i(x)(f(x_i) - f(x)).$$

Ora si ha $|\mathbf{z}_i - f(x_i)| < \delta/2$ per ogni $i$ per scelta dei punti $\mathbf{z}_i$. E se $i$ è un indice tale che $\phi_i(x) \neq 0$ allora $x \in U_i$; poichè abbiamo $\text{diam}f(U_i) < \delta/2$, segue che $|f(x_i) - f(x)| < \delta/2$. E visto che, sfruttando ancora le proprietà della partizione dell'unità, si ha $\sum \phi_i(x) = 1$ , possiamo concludere che $|g(x) - f(x)| < \delta$ e quindi $\rho(f, g) < \delta$ come desiderato.

Secondo, vogliamo mostrare che $g \in U_\varepsilon$. Dobbiamo provare che se $x, y \in X$ e $g(x) = g(y)$, allora $x$ e $y$ appartengono ad uno degli aperti $U_i$, e quindi necessariamente si avrà $d(x, y) < \varepsilon/2$ (visto che $\text{diam}U_i < \varepsilon/2$). Come risultato avremo $\Delta(g) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ come desiderato.

Quindi supponiamo $g(x) = g(y)$. Allora

$$\sum_{i=1}^{n} [\phi_i(x) - \phi_i(y)]\mathbf{z}_i = 0.$$

Poichè il ricoprimento $\{U_i\}$ ha ordine al massimo $m+1$, al massimo $m+1$ numeri $\phi_i(x)$ sono diversi da zero, e al massimo $m+1$ numeri $\phi_i(y)$ sono diversi da zero. Quindi la somma $\sum[\phi_i(x) - \phi_i(y)]\mathbf{z}_i$ ha al massimo $2m+2$ termini diversi da zero. Si noti che la somma dei coefficienti si annulla in quanto

$$\sum[\phi_i(x) - \phi_i(y)] = 1 - 1 = 0.$$

I punti $\mathbf{z}_i$ sono in posizione generale in $\mathbb{R}^N$, quindi ogni loro sottoinsieme avente $N+1$ o meno elementi è geometricamente indipendente. E per ipotesi $N+1 = 2m+2$. Quindi concludiamo che

$$\phi_i(x) - \phi_i(y) = 0$$

per ogni $i$.

Ora $\phi_i(x) > 0$ per qualche $i$, quindi $x \in U_i$. Essendo $\phi_i(y) = \phi_i(x)$, abbiamo che $y \in U_i$, come da tesi. $\square$

## 4.2 Corollario

**Corollario 4.2.** *Esiste sempre un embedding tra una m-varietà compatta e lo spazio euclideo* $\mathbb{R}^{2m+1}$