Teorema fondamentale dell'algebra e geometria Riemanniana.

23 novembre 2011

Indice

Introduzione

Il Teorema fondamentale dell'algebra (*TFA*), la cui formulazione è datata all'inizio del XVII secolo, asserisce che il campo dei numeri complessi è algebricamente chiuso e cioè che ogni polinomio non costante di variabile complessa ha almeno una radice complessa.

E' ben noto che esistono diverse dimostrazioni del TFA e che non esiste una sua dimostrazione algebrica. Infatti tutte le dimostrazioni conosciute utilizzano metodi di analisi e di topologia. Per esempio Carl Friedrich Gauss nell'arco della sua vita ha fornito quattro dimostrazioni distinte. La prima di esse viene presentata nel 1799 nella sua tesi di dottorato e si sviluppa dalle idee di D'Alambert che compaiono in [1]. In $[2, pag.111]$ Gauss sfrutta il fatto che una funzione continua a valori reali definita su un compatto $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^2$ è limitata. Un'altra dimostrazione, strettamente topologica, è fornita da John Milnor in [3] che fa uso del concetto di grado topologico.

Lo scopo di questa tesi è di presentare una dimostrazione del TFA dovuta a J.M. Almira e A. Romero [4] basata sul fatto che una varietà differenziabile di dimensione 2 diffeomorfa alla sfera non può ammettere una metrica Riemanniana con curvatura Gaussiana identicamente nulla.

La tesi è organizzata in un unico capitolo che contiene la dimostrazione del TFA e di tre appendici dove vengono richiamati gli strumenti algebrici, geometrici e di analisi complessa utili alla dimostrazione del teorema.

Capitolo 1

Teorema fondamentale dell'algebra

La formulazione classica del Teorema Fondamentale dell'Algebra, che indicheremo con TFA, è la seguente:

Teorema 1 *Sia $a(x)$ un polinomio di grado n nell'indeterminta x a coefficenti nel campo $\mathbb{C}$,*

$$a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad a_i \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$$

Esistono allora $s \leq n$ numeri complessi $\rho_1, \ldots, \rho_s \in \mathbb{C}$ tali che:

$$a(x) = a_n (x - \rho_1)^{r_1} (x - \rho_2)^{r_2} \cdots (x - \rho_s)^{r_s} \qquad \text{con } r_1 + \cdots + r_s = n.$$

Consideriamo quindi un polinomio $p(x)$ a coefficenti complessi ovvero $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ allora vale il seguente:

Lemma 1.1 *Se esiste un polinomio irriducibile $p(x)$ con $deg(p) = n > 1$ allora esiste una metrica Riemanniana g su $\mathbb{S}^2$ tale che la sua curvatura gaussiana, sia identicamente nulla.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $p(x)$ un polinomio irriducibile di grado $n > 1$ questo implica che $A := \mathbb{C}[x]/p(x)$ è un campo (*cfr App. A*). Consideriamo la funzione $\tau : \mathbb{C}^n \to A$ data da:

$$\tau(a_0, \dots, a_{n-1}) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + p(x).$$

Come è facile verificare esso definisce un isomorfismo tra spazi vettoriali complessi. Per le proprietà degli isomorfismi risulta che:

$$\beta = \{\tau(0, \dots, 1_i, \dots, 0)\}_{i=1}^n$$

è una base di A. Si ha inoltre che $\tau(-w, 1, 0, \dots, 0), \tau(-1, w, 0, \dots, 0)$ sono diversi da zero per ogni $w \in \mathbb{C}$. Posto:

$$H(w) = \tau(-w, 1, 0, \dots, 0)\tau(-1, w, 0, \dots, 0)$$

si ha che $H(w) \neq 0 \quad \forall w \in \mathbb{C}$. Sia $L_w : A \to A$ l'operatore lineare complesso dato da:

$$L_w\big(\tau(a_0, \dots, a_{n-1})\big) = H(w)\tau(a_0, \dots, a_{n-1})$$

e sia $M(w)$ la matrice associata dell'operatore rispetto alla base β. Essendo $H(w) \neq 0$ e A un campo L_w è un isomorfismo e quindi $\det\big(M(w)\big) \neq 0$ per ogni w. Inoltre $f(w) := \det\big(M(w)\big)$ è un polinomio.
Supponiamo quindi che esista una metrica Riemanniana g su $\mathbb{S}^2 = \widehat{\mathbb{C}} =$
$= \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (*cfr App. B*) tale che:

$$g = \frac{1}{|f(w)|^{\frac{2}{n}}}|dw|^2 \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

e

$$g = \frac{1}{|f(\frac{1}{w})|^{\frac{2}{n}}}\left|d\Big(\frac{1}{w}\Big)\right|^2 \qquad \forall w \in \widehat{\mathbb{C}} \backslash \{0\}.$$

Affinchè g sia una metrica deve essere diversa da 0 e lungo l'intersezione di $\mathbb{C}$ con $\widehat{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$ la prima e la seconda espressione devono coincidere. Che sia diversa da zero discende dal fatto che $f(w) \neq 0$ sempre. Mostriamo quindi la seconda condizione. La linearità di τ garantisce che per ogni $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$H\Big(\frac{1}{w}\Big) = \tau\Big(-\frac{1}{w}, 1, 0, \ldots, 0\Big)\tau\Big(-1, \frac{1}{w}, 0, \ldots, 0\Big)$$

$$= \Big[\frac{1}{w}\tau(-1, w, 0, \ldots, 0)\Big]\Big[\frac{1}{w}\tau(-w, 1, 0, \ldots, 0)\Big] = \frac{1}{w^2}H(w).$$

Da ciò consegue:

$$L_{\frac{1}{w}} = H\Big(\frac{1}{w}\Big)\tau(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \frac{1}{w^2}H(w)\tau(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \frac{1}{w^2}L_w$$

perciò

$$f\Big(\frac{1}{w}\Big) = det\Big[M\Big(\frac{1}{w}\Big)\Big] = det\Big[\Big(\frac{1}{w^2}\Big)M(w)\Big] = \frac{1}{w^{2n}}det\Big[M(w)\Big] = \frac{1}{w^{2n}}f(w).$$

Inoltre si ha che

$$d\Big(\frac{1}{w}\Big) = -\frac{1}{w^2}dw$$

quindi svolgendo i calcoli risulta che lungo l'intersezione g si incolla bene. Siccome la nostra metrica è della forma $g = \lambda(du^2 + dv^2)$ la curvatura di Gauss K_g soddisfa (*cfr App. B*):

$$\frac{1}{|f(w)|^{\frac{2}{n}}}K_g = \frac{1}{n}\frac{|f(w)|^{\frac{2}{n}}}{|f(w)|^{\frac{2}{n}}}\Delta\, log\big(|f(w)|\big)$$

$$= \frac{1}{n}\Delta\, log\big(|f(w)|\big) = \frac{1}{n}\mathbf{Re}\,\Delta\, log\big(|f(w)|\big) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

in quanto la parte reale di una funzione olomorfa è armonica (*cfr App. C*). Questo implica che la curvatura di Gauss è nulla sull'intera sfera. □

La dimostrazione del TFA si ottiene sfruttando il Lemma 1 e il fatto che la sfera non può avere curvatura di Gauss identicamente nulla. Per fare questo ci serviremo di un corollario del teorema di **Gauss-Bonnet** (*cfr App. B*). Infatti essendo la caratteristica di Eulero-Poincairè della sfera $\mathbb{S}^2$ diversa da 0, più precisamente uguale 2, ricaviamo che

$$\int\int_{S^2} K_g d\sigma = 4\pi$$

questo significa che esiste sempre almeno un punto con curvatura positiva in contraddizione con il fatto che K_g sia identicamente nulla, perciò una metrica tale non può essere definita su $\mathbb{S}^2$. Quindi il Teorema Fondamentale dell'algebra è dimostrato.

Appendice A

Richiami di Algebra.

A.1 Campi

Definizione A.1.1 *Consideriamo un insieme A dotato di due operazioni binarie σ e τ tale che valgono i seguenti:*

- *σ e τ sono associative e commutative e chiameremo tali operazioni addizione e moltiplicazione;*
- *vale la legge distributiva $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a, b, c \in A$;*
- *esistono in A un elemento neutro u per σ e un elemento neutro u' per τ;*
- *per ogni elemento $x \in \mathrm{A}$ esistono un y e un z di A tale che $y \sigma x = u$ e $z \tau x = u'$.*

Diremo allora che σ e τ dotano A della struttura di ***campo****.*

Proposizione A.1.1 *In un campo non vi sono divisori dello zero*

DIMOSTRAZIONE: Sia $ax = 0$ con $a \neq 0$. Moltiplicando entrambi i membri per a', inverso moltiplicativo di a, si ottiene $(a'a)\, x = a'0 \Longrightarrow u' \cdot x = 0 \Longrightarrow$

$x = 0$. $\square$

A.2 Anello dei polinomi

Un polinomio p nell'indeterminata x a coefficenti in un campo A è un'espressione della forma $f = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ dove $a_i \in A$ per $i = 0 \ldots n$ e $a_n \neq 0$. n è il grado del polinomio e viene indicato con $deg(f)$ e se $a_n = 1$ lo chiamiamo monico. L'insieme di tutti i polinomi f nell'indeterminata x a coefficenti nel campo A è dotato della struttura di anello e viene indicato con $A[x]$.

Proposizione A.2.1 *Siano f e g due polinomi di $A[x]$ con $g \neq 0$. Allora esiste una ed una sola coppia di polinomi q ed r di $A[x]$, chiamati* quoziente *e* resto *della divisione di f per g, tale che*

$$f = qg + r$$

con $deg(r) < deg(g)$.

DIMOSTRAZIONE: Se $\deg(f) < \deg(g)$ si ottiene banalmente $q = 0$ e $r = f$; supponiamo ora che $\deg(f) < \deg(g)$ e sia

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$$
$$g(x) = b_0 + \cdots + b_m x^m$$

con $m < n$. Se $n = m = 0$, si ha $r = 0$ e $q = a_n b_m^{-1}$. Se $n > 0$ vale l'uguaglianza:

$$f(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x) + f_1(x),$$

con $\deg(f_1) < \deg(f)$; se inoltre $\deg(f_1) < \deg(g)$ il teorema rimane verificato per $q = a_n b_m^{-1}$ e $r = f_1$; in caso contrario possiamo ripetere il procedimento con f_1 al posto di f. Supponendo che il teorema sia vero sinchè il grado del dividendo è minore di n si ha:

$$f_1(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r(x),$$

da cui si ottiene

$$f(x) = \left(a_n b_m^{-1} x^{n-m} + q_1(x)\right) \cdot g(x) + r(x),$$

che dimostra l'esistenza della coppia q,r. Dimostriamo l'unicità. Supponiamo per assurdo che esista una seconda coppia $q^{'}$ $r^{'}$ tale che

$$f = q \cdot g + r = q^{'} \cdot g + r^{'}$$

con $\deg(r^{'}) < \deg(g)$. Da cui si deduce

$$(q - q^{'}) \cdot g = r^{'} - r.$$

Poichè il grado del prodotto di due polinomi non nulli è uguale alla somma dei gradi dei singoli polinomi, si ha che se $q - q^{'}$ fosse diverso da zero il primo membro avrebbe grado maggiore o uguale di g in contraddizione con il fatto che il secondo membro ha grado minore di g. Perciò $q^{'} = q$ e $r^{'} = r$. $\square$

Definizione A.2.1 *Un polinomio $f(x) \in F[x]$ è detto irriducibile se comunque si prenda una sua scomposizione $f = g \cdot h$ risulta $g(x) \in F[x]$ o $h(x) \in F[x]$.*

A.3 Estensione di campi

Definizione A.3.1 *Siano E e F due campi tali che $F \subset E$ si dice allora che E è una estensione di F e si indica con E/F.*

Un insieme V è uno *spazio vettoriale* sul campo F se per ogni $v, w \in V$

e per ogni $\lambda \in F$ si ha $v + w \in V$ e $\lambda v \in V$. Presa un'estensione di campi E/F si vede che E è uno spazio vettoriale su F. Infatti presi $a, b \in E$ e $\lambda \in F$ allora si ha $a + b \in E$ e $\lambda a \in E$. Indichiamo con $\mid E : F \mid$ la dimensione di E visto come spazio vettoriale su F e viene chiamato *grado* di E su F.
Per la $Prop.A.2.1$ per ogni $g \in F[x]$ rimane associata una e una sola coppia quoziente e resto. Preso quindi $f \in F[x]$ rimane associato un unico resto $r(x) \in F[x]$ con $\deg(r) < \deg(f)$ nella divisione di g per f. Possiamo esprimere ciò con $g = r \; mod \, f$, inoltre si vede subito che $g_1 = g_2 \; mod \, f$ se e solo se $g_1 - g_2$ è divisibile per f. Consideriamo ora (f) l'ideale generato da f, e quozientiamo $F[x]$ rispetto ad esso:

$$F[x] \,/\, (f) := \{g \; mod \, f \mid g \in F[x]\} \,.$$

Se $f = x^n - c_{n-1}x^{n-1} + \cdots - c_0$ si ha che

$$F[x]/f \cong \left\{a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \mid \alpha^n = c_0 + c_1\alpha + \cdots + c_{n-1}\alpha^{n-1}\right\}.$$

Esempio A.3.1 Prendiamo $f = x^2 - 4x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$. Se consideriamo il monomio x^2 si ha: $x^2 \equiv 4x - 3 \; mod \, f$, e $\forall g \in \mathbb{Q}[x]$ esistono unici $a_0, a_1 \in \mathbb{Q}[x]$ tali che $g = a_0 + a_1 x \; mod \, f$. Perciò

$$\mathbb{Q}[x]/f \cong \{a_0 + a_1\alpha | \alpha^2 = 4x - 3\}.$$

Se però f è un polinomio irriducibile si ha la seguente proposizione :

Proposizione A.3.1 *Sia F un campo e sia $f \in F[x]$ un polinomio monico irriducibile. Allora $F[x]/(f)$ è un campo.*

DIMOSTRAZIONE: Definiamo le operazioni $+$ e $\cdot$ nel seguente modo:

$$(g_1 \; mod \, f) + (g_2 \; mod \, f) = (g_1 + g_2) \; mod \, f,$$
$$(g_1 \; mod \, f)(g_2 \; mod \, f) = (g_1 g_2) \; mod \, f.$$

Per prima cosa bisogna dimostrare che le operazioni così definite non dipendano dai particolari esponenti g_1, g_2 delle classi scelte. Sia quindi $h_i \equiv g_i \; mod\, f$ per $i = 1, 2$ altri due elementi delle classi. Si deve avere quindi $h_i = g_i + p_i f$ per opportuni $p_i \in F[x]$. Perciò $h_1 h_2 = g_1 g_2 + pf$ per un opportuno $p \in F[x]$ in quanto $F[x]$ di conseguenza $h_1 h_2 = g_1 g_2 \; mod\, f$. Allo stesso modo $h_1 + h_2 = g_1 + g_2 + p' f$ per un opportuno $p' \in F[x]$ da cui $h_1 + h_2 = g_1 + g_2 \; mod\, f$. Abbiamo mostrato che le operazioni sono ben definite. Per dimostrare che $F[x]/(f)$ è un campo occorre dimostrare che ogni suo elemento ammette inverso moltiplicativo. Sia allora $g \in F[x]/(f)$. Siccome il polinomio f è irriducibile, ne consegue che il massimo comun divisore di f e g è 1 e quindi esistono polinomi $a, b \in F[x]$ tali che

$$af + bg = 1$$

quindi

$$bg = 1 \; mod\, f.$$

Da ciò si conclude che $b \; mod\, f$ è l'inverso moltiplicativo di $g \; mod\, f$. Rimangono da dimostrare le proprietà che attestano che $F[x]/(f)$ è un campo. La commutatività, l'esistenza dell'elemento neutro discendono subito dalla definizione delle operazioni. Dimostriamolo per la somma, per la moltiplicazione si procede in modo analogo. $(g_1 \; mod\, f) + (g_2 \; mod\, f) = (g_1 + g_2) \; mod\, f$, l'addizione al secondo membro è commutativa in quanto è la stessa operazione definita sull'anello $F[x]$ quindi $(g_1 + g2) \; mod\, f = (g_2 + g_1) \; mod\, f = (g_2 \; mod\, f) + (g_1 \; mod\, f)$. Per l'elemento neutro basta considerare che $f \equiv 0 \; mod\, f$ perciò $(g \; mod\, f) + (f \; mod\, f) = (g + 0) \; mod\, f = g \; mod\, f$.
Infine rimane da dimostrare la distributività del prodotto rispetto alla somma: $(p \; mod\, f)[(g_1 \; mod\, f) + (g_2 \; mod\, f)] = p(g_1 + g_2) \; mod\, f = (pg_1 + pg_2) \; mod\, f = (pg_1 \; mod\, f) + (pg_2 \; mod\, f) = (p \; mod\, f)(g_1 \; mod\, f) + (p \; mod\, f)(g_2 \; mod\, f)$.
$\square$

Osservazione A.3.1 Il campo $F[x]/(f)$ gode di una importante proprietà, esso contiene l'elemento α che è soluzione dell'equazione polinomiale $f = 0$. Abbiamo così costruito un insieme che contiene uno zero del nostro polinomio.

Appendice B

Richiami di geometria.

B.1 La proiezione stereografica

Consideriamo la sfera $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ e prendiamo la retta passante per il polo nord $N = (0, \dots, 1)$ e un punto $P(z_1, \dots, z_n)$ della sfera, essa avrà equazione parametrica $\{x_1 = tz_1, \dots, x_n = 1 + t(z_n - 1)\}$. Se intersechiamo tale retta con l'iperpiano $H \in \mathbb{R}^n$ dobbiamo porre $x_n = 0$ da cui deduciamo $t = \frac{1}{1-z_n}$ ottenendo il punto

$$p' = \Big(\frac{z_1}{1-z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{1-z_n}, 0\Big).$$

Questa è quindi la proiezione del punto P dal polo nord della sfera. Consideriamo la sfera meno il suo polo nord $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ e l'applicazione

$$\pi_N : \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\} \to H,$$

la cui espressione analitica è:

$$\pi_N(P) = \Big(\frac{z_1}{1-z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{1-z_n}, 0\Big), \ con\, P = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Tale applicazione prende il nome di *proiezione stereografica* dal polo nord. Come si evince dalla forma analitica la funzione è rapporto di funzioni continue e di conseguenza è continua, inoltre possiamo ricavarci un'inversa π_N^{-1}. Per fare ciò procediamo in questa maniera: sia $P' = (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in H$ e sia r la retta passante per p'e N. La retta in forma parametrica è espressa come $\{z_1 = tx_1, \dots, z_{n-1} = tx_{n-1}, z_n = 1-t\}$ e intersecherà la sfera in N e un altro punto P radice non nulla dell'equazione $(tx_1)^2 + \cdots + (tx_{n-1})^2 + (1-t)^2 = 1$. Risolvendola si arriva a $t^2(1 + ||p'||^2) = 2t$ e quindi $t = \frac{2}{1+||p'||^2}$. Definiamo quindi l'applicazione continua:

$$\pi_N^{-1} : H \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}, p' \mapsto P = \Big(\frac{2x_1}{1+||p'||^2}, \dots, \frac{2x_{n-1}}{1+||p'||^2}, \frac{||p'||^2-1}{1+||p'||^2}\Big).$$

Abbiamo quindi costruito geometricamente l'inversa di π_N.
Ripetendo lo stesso ragionamento ma considerando il polo sud $S = (0, \dots, -1)$ otteniamo l'applicazione $\pi_S : \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{S\} \to H$ la cui espressione è :

$$\pi_S(P) = \Big(\frac{z_1}{1+z_n}, \dots, \frac{z_{n-1}}{1+z_n}, 0\Big), \; con\, P = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$$

che è anch'essa continua e ammette come inversa la funzione:

$$\pi_S^{-1} : H \to \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{S\}, P \mapsto P = \left(\frac{2x_1}{1+||p'||^2}, \dots, \frac{2x_{n-1}}{1+||p'||^2}, \frac{||p'||^2-1}{1+||p'||^2}\right).$$

Osservazione B.1.1 Se identifichiamo $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ attraverso l'isomorfismo che associa a $(x+iy) = z \in \mathbb{C}$ la coppia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ possiamo interpretare le applicazioni π_N,π_S come funzioni da $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$, $\mathbb{S}^{n-1} \setminus \{S\}$ in $\mathbb{C}$ ponendo

$$\pi_N(P) = \frac{z_1}{1-z_3} + i\frac{z_2}{1-z3} \qquad \pi_S(P) = \frac{z_1}{1+z_3} + i\frac{z_2}{1+z3}$$

la cui inversa nel caso di πN^{-1} è:

$$\pi_N(z)^{-1} = \frac{1}{1+|z|}(2Re(z), 2Im(z), |z|^2 - 1).$$

Se ora consideriamo $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ possiamo trovare una relazione biunivoca tra $\mathbb{S}^2$ e $\widehat{\mathbb{C}}$. Sia infatti $f : \mathbb{S}^2 \mapsto \widehat{\mathbb{C}}$ tale che $f(p) = \pi_N$ per $p \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{N\}$ e $f(N) = \infty$. La sfera così ottenuta con l'inversa f prende il nome di *sfera di Riemann* e si ha $\mathbb{S}^2 = \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

B.2 Calcolo di curvature

Definizione B.2.1 *Una superficie regolare parametrizzata da* $x : U \to \mathbb{R}^3$ *viene chiamata isoterma se i coefficenti della prima forma fondamentale soddisfano la seguente proprietà:*

$$E = G \quad F = 0.$$

Da ciò deduciamo che la metrica è della forma $f(u,v)(du^2 + dv^2)$.

Proposizione B.2.1 *Sia* $x : U \to \mathbb{R}^3$ *una superficie parametrizzata con F=0. Allora la curvatura di Gauss* K_g *si ottiene da:*

$$(1) \qquad K_g = \frac{-1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u}\right)\right\}$$
$$= \frac{-1}{2\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)\right\}.$$

DIMOSTRAZIONE: Se $F = 0$ la formula di Brioschi diventa :

$$(2) \qquad K_g = \frac{1}{(EG)^2} det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & \frac{1}{2}E_v \\ -\frac{1}{2}G_u & E & 0 \\ \frac{1}{2}G_v & 0 & G \end{pmatrix} - \frac{1}{(EG)^2} det \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & 0 \\ \frac{1}{2}G_u & 0 & G \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(EG)^2}\left\{\left(-\frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}\right)EG + \frac{1}{4}E_uG_uG + \frac{1}{4}E_vG_vE + \frac{1}{4}{E_v}^2G + \frac{1}{4}{G_u}^2E\right\} =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{E_{vv}}{EG} + \frac{1}{4}\frac{{E_v}^2}{E^2G} + \frac{1}{4}\frac{E_vG_v}{EG^2} - \frac{1}{2}\frac{G_{uu}}{EG} + \frac{1}{4}\frac{{G_u}^2}{EG^2} + \frac{1}{4}\frac{E_uG_u}{E^2G}.$$

Analizzando la (1) si ha che:

$$(3) \qquad \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{-\frac{G_v}{2G^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{E}}{\partial v^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{-\frac{G_vE_v}{4G^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}} + \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(E^{-\frac{1}{2}}E_v\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{-\frac{G_vE_v}{4G^{\frac{3}{2}}\sqrt{E}} + \frac{1}{2\sqrt{G}}\left(-\frac{{E_v}^2}{2E^{\frac{3}{2}}} + \frac{E_{vv}}{\sqrt{E}}\right)\right\}$$

$$= -\frac{G_v E_v}{4G^2 E} - \frac{{E_v}^2}{4E^2 G} + \frac{E_{vv}}{2EG}.$$

In modo analogo si perviene a:

$$\frac{-1}{2\sqrt{EG}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right) = -\frac{E_u G u}{4E^2 G} - \frac{{G_u}^2}{4EG^2} + \frac{G_{uu}}{2EG}. \tag{4}$$

Da cui confontando (2)(3)(4) rimane dimostrata la (1). $\square$

Osservazione B.2.1 Se consideriamo una metrica della forma $ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$. Si vede subito che:

$$\frac{\lambda_u}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial u} \log \lambda \qquad \frac{\lambda_v}{\lambda} = \frac{\partial}{\partial v} \log \lambda$$

Perciò utilizzando la 1 la curvatura di Gauss risulta essere:

$$K_g = \frac{-1}{2\lambda}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)\right\} = -\frac{1}{2\lambda}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial}{\partial u}\log\lambda\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial v}\log\lambda\right)\right\}$$

$$= -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}\log\lambda + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\log\lambda\right) = -\frac{1}{2\lambda}\Delta(\log\lambda)$$

dove con $\Delta(f)$ indichiamo il laplaciano della funzione f.

B.3 Il teorema di Gauss - Bonnet

Teorema B.3.1 *Sia $R \subset S$ una regione regolare di una superfice orientata e siano $C_1, \dots, C_n$ curve regolari,chiuse,semplici a tratti che formano il bordo ∂R di R. Supponiamo che ciascuna C_i sia orientata positivamente è indichiamo con $\theta_1, \dots, \theta p$ l'insieme degli angoli esterni delle curve C_i. Allora*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} k_g(s)\, ds + \int\int_R K\, d\sigma + \sum_{j=1}^{p} \theta_j = 2\pi\chi(R)$$

dove con K intendiamo la curvatura di Gauss di R, k_g la curvatura geodetica di ∂R e $\chi(R)$ la caratteristica di Eulero.

Corollario B.3.1 *Sia S una superfice compatta senza bordo, allora si ha:*

$$\int\int_S K_g\, d\sigma = 2\pi\chi(S).$$

Appendice C

Richiami di analisi complessa

C.1 Funzioni olomorfe

Possiamo definire anche per le funzioni di variabile complessa, il concetto di derivata in un punto estendendo la definizione attraverso il limite dei rapporti incrementali usata per le funzioni di variabile reale.

Definizione C.1.1 *Sia f una funzione a valori complessi, definita in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$. Essa si dice* derivabile in z_0 *se esiste finito il limite*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

e indichiamo la derivata con i simboli $f'(z_0)$, $\frac{df}{dz}(z_0)$.

Definizione C.1.2 *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un insieme aperto non vuoto, e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione a valori complessi. Se f è derivabile in ogni punto $z_0 \in \Omega$ si dice che f è* analitica *o* olomorfa *in Ω.*

Vediamo alcuni esempi:

Esempio C.1 Consiederiamo la funzione $f(z) = z$ allora si ha

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z_0 + \Delta z - z_0}{\Delta z} = 1.$$

Quindi risulta derivabile in ogni punto in cui è definita e per la def. C.1.2 risulta essere olomorfa.

Esempio C.2 Sia $f(z) = z^2$,si ha

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - {z_0}^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z_0 + \Delta z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0$$

quindi anche $f(z) = z^2$ risulta essere olomorfa.

Si possono dimostrare anche per queste derivate le proprietà viste per quelle di funzioni a variabili reali. Da ciò possiamo concludere che una combinazione lineare di funzioni olomorfe è olomorfa e in particolar modo i polinomi risultano essere funzioni olomorfe.

C.2 Funzioni armoniche

Definizione C.2.1 *Una funzione reale di due variabili reali* $h : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *si dice* funzione armonica *in* Ω *se è di classe* $C^2(\Omega)$ *e soddisfa in* Ω

$$\Delta h(x, y) = 0 \qquad \forall\, (x, y) \in \Omega$$

dove con Δ *intendiamo l'operato di Laplace*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Supponiamo che f sia definita in un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ come

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z = x + iy \in \Omega$$

dove le funzioni reali $u : \Omega \to \mathbb{R}$ e $v : \Omega \to \mathbb{R}$ sono, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria della funzione f.

Tra Le funzioni armoniche e le funzioni olomorfe vi è un'importante relazione, prima di dimostrare ciò richiamiamo senza dimostrare le condizioni di Cauchy-Riemann.

Teorema C.2.1 *Sia* Ω *un insieme aperto del piano complesso, e sia* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *una funzione a valori complessi. Allora, indicando con* $u(x; y)$ *e* $v(x; y)$ *la parte reale e la parte immaginaria di* f*, le due condizioni seguenti sono tra loro equivalenti:*

1. *la funzione* f *è olomorfa in* Ω*,*

2. *le due funzioni* $u(x, y)$ *e* $v(x, y)$ *sono di classe* C^1 *in* Ω *e verificano le condizioni di Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{cases}$$

   in ogni punto $(x_0, y_0) \in \Omega$*.*

Inoltre se f *è olomorfa la derivata complessa si esprime in funzione delle derivate parziali di* u *e* v *come*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Ora possiamo dimostrare il legame fra le funzioni armoniche e le analitiche.

Teorema C.2.2 *Sia* $f(x) = u(x, y) + iv(x, y)$ *olomorfa in* $\Omega \subseteq \mathbb{C}$*. Allora le funzioni* $u(x, y)$ *e* $v(x, y)$ *sono armoniche in* Ω*.*

DIMOSTRAZIONE. Si può dimostrare che se una funzione è analitica allora le funzioni parte reale u e parte immaginaria v sono di classe $C^2(\Omega)$.

Per dimostrare il teorema bisogna dunque verificare che le funzioni $u(x, y)$ e $v(x, y)$ soddisfano l'equazione di Laplace in Ω. Prendendo in esame le condizioni di Cauchy-Riemann e derivando entrambe le equazioni rispetto x e a y si ha

$$\begin{cases} u_{xx} = \quad v_{yx} \\ u_{yx} = -v_{xx} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} u_{xy} = \quad v_{yy} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{cases}$$

Per il teorema di Schwartz applicato alle funzioni u e v, si ha

$$u_{xx} + v_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0, \qquad v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = 0$$

e quindi sono armoniche in Ω. $\square$

Bibliografia

[1] J. le Rond d'Alembert (1745), *Recherches sur le calcul integral*, Proces-verbaux de l'Academie royale des sciences de Paris, 102-123.

[2] E. Sernesi (1994), *Geometria 2*, Bollati Boringhieri.

[3] J. Milnor (1997), *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[4] J.M. Almira, A. Romero (2011), *Riemannian Geometry and the Fundamental Theorem of Algebra*, arXiv, Cornell University.

[5] Serena Cicalò, Willem A. de Graaf (2008), *Teoria di Galois*, Aracne, Roma

[6] Luigi Cerlienco (2010), *Rudimenti di Algebra Astratta*, Università di Cagliari.

[7] Andrea Loi (2009), *Appunti di Topologia Generale*, Università di Cagliari.

[8] R. Caddeo, A. Gray (2001), *Lezioni di geometria differenziale. Curve e Superfici. vol. 1 e vol.2*, Cooperativa Universitaria Editrice Cagliaritana, Cagliari.

[9] Manfredo P. do Carmo (1976), *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey.

[10] Manfredo P. do Carmo (1994), *Differential Form, and Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Germany.

[11] F. Fagnani, A. Tabacco, P. Tilli (2006), *Introduzione all'Analisi complessa e alla Teoria delle Distribuzioni*, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino.

[12] Riccardo Rosso (2010), *Dispense del corso di Storia dell'Equazioni Algebriche*, Dipartimento di Matematica, Università di Pavia, cap V.