Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Gruppo Fondamentale di Varietà a Curvatura Sezionale Negativa

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di
Marianna Saba

Anno Accademico 2009/2010

Indice

Capitolo 1

Introduzione

La topologia algebrica studia gli invarianti topologici, tra cui i gruppi di omotopia di dimensione $k \geq 1$. E' stato dimostrato che tali gruppi possono essere definiti come classi di omotopia di funzioni $f : S^k \to M$, inoltre, se M ammette $\mathbf{R}^n$ come rivestimento, allora ognuna di queste f, per $k > 1$, è omotopa a una costante. Quindi in questo caso, i gruppi di omotopia di dimensione maggiore di uno sono banali e tutte le informazioni sulla topologia di M sono contenute in $\pi(M)$, ovvero nel gruppo fondamentale di M (o gruppo di omotopia di dimensione uno).

Il tema di questa tesi é lo studio del gruppo fondamentale di particolari varietà Riemanniane, ossia complete e dotate di curvatura sezionale negativa. Essa è strutturata in tre capitoli, i primi due dei quali contengono i prerequisiti necessari per trattare l'argomento centrale della tesi, ovvero il Teorema di Preissman e i risultati ad esso connessi. Nel primo capitolo sono raccolte le nozioni di topologia algebrica riguardanti essenzialmente il gruppo fondamentale e la teoria dei rivestimenti, elementi portanti di questa trattazione. Il secondo capitolo è invece dedicato alla geometria Riemanniana, in particolare isometrie, geodetiche e applicazione esponenziale, fino a giungere alle varietà complete e agli importanti teoremi ad esse relativi: il teorema di Hopf-Rinow e il teorema di Hadamard, che ne è un'applicazione. Quest'ultimo teorema afferma che una varietà completa M con curvatura sezionale negativa, ammette un rivestimento universale diffeomorfo a $\mathbf{R}^n$, e, se M è semplicemente connessa, è la stessa M ad essere diffeomorfa a $\mathbf{R}^n$. Esso inoltre è un esempio di legame tra proprietà globali e locali di una varietà, in questo caso omeomorfismo e curvatura rispettivamente. Nell'ultimo capitolo le nozioni trattate nei primi due si uniscono. Partendo da un rivestimento universale di una varietà completa, ci si sofferma sulle trasformazioni del rivestimento (in quanto isomorfe a $\pi(M)$), su come queste agiscano in relazione alle geodetiche e viene dimostrato il Teorema di Cartan sull'esistenza delle geodetiche chiuse. La seconda parte del capitolo è dedicata alla dimostrazione del Teorema di Preissman. Questo afferma che *se M é una varietá compatta e $K < 0$, allora ogni sottogruppo abeliano non banale di $\pi(M)$ é infinitamente ciclico.* La sua dimostrazione è basata su quattro lemmi. Il primo fornisce due proprietà di un triangolo geodetico su una varietà completa, semplicemente connessa e con curvatura negativa. Il secondo afferma che *se $K < 0$ e $f : \tilde{M} \to \tilde{M}$ è una traslazione lungo la geodetica $\tilde{\gamma}$, con f diversa dall'applicazione identica, allora $\tilde{\gamma}$ è l'unica geodetica che viene lasciata invariante da f.* Il terzo e il quarto affermano rispettivamente che *se $K < 0$ e $g : \tilde{M} \to \tilde{M}$ è un'isometria senza punti fissi che commuta con una traslazione f lungo $\tilde{\gamma}$, allora anche g è una traslazione lungo $\tilde{\gamma}$*, e che *se tutti gli elementi di un sottogruppo non banale H di $\pi(M)$ lasciano invariata una geodetica fissata $\tilde{\gamma}$, allora H è infinitamente ciclico.* Un altro importante teorema trattato in questa tesi è anch'esso dovuto a Preissman, e fornisce il seguente risultato: *se M è compatta e $K < 0$, allora il gruppo fondamentale $\pi(M)$ non è abeliano.*

Capitolo 2

Richiami di Topologia Algebrica

2.1 Omotopia e Gruppo fondamentale

Definizione 1. *Un* arco *(o cammino) in uno spazio X è un'applicazione continua $f : I \to X$ (dove $I = [0, 1] \subset \boldsymbol{R}$); $f(0)$ è detto* punto iniziale *e $f(1)$* punto finale *dell'arco; diremo che f è un arco da $f(0)$ a $f(1)$.*

Definizione 2. *Uno spazio X è detto* connesso per archi *se, dati comunque due punti x_0 e x_1 in X, esiste un arco in X da x_0 a x_1.*

Definizione 3. *Uno spazio X è detto* localmente connesso per archi *se per ogni $x \in X$ e per ogni aperto U che contiene x, esiste un aperto V, con $x \in V \subset U$, tale che V è connesso per archi.*

Lemma 1. *i) Sia f un arco in X e definiamo $\bar{f}$ come $\bar{f} = f(1-t)$; allora anche $\bar{f}$ è un arco;*

ii) Siano f e g due archi in uno spazio X tali che $f(1) = g(0)$; allora il loro prodotto $f * g$, ovvero l'applicazione $f * g : I \to X$ definita da:

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

è un arco in X.

Dimostrazione: La (i) è ovvia e la (ii) segue immediatamente dal seguente lemma d'incollamento.

Lemma 2. *(d'incollamento) Siano W e X due spazi topologici, con $W = A \cup B$, dove A e B sono sottoinsiemi chiusi di W. Se $f : A \to X$ e $g : B \to X$ sono due funzioni continue tali che $f(w) = g(w)$ per ogni $w \in A \cap B$, la funzione $h : W \to X$ definita da*

$$h(w) = \begin{cases} f(w) & \text{se } w \in A, \\ g(w) & \text{se } w \in B. \end{cases}$$

è continua.

Dimostrazione: Innanzitutto h è ben definita. Se C è un sottoinsieme chiuso di X, avremo:

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C) \cap (A \cup B) \\ &= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B) \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C). \end{aligned}$$

Essendo f continua, $f^{-1}(C)$ è chiuso in A e quindi in W, e analogamente $g^{-1}(C)$ è chiuso in W, perciò $h^{-1}(C)$ è chiuso in W e quindi h è continua.

Definizione 4. *Due funzioni continue f_0, $f_1 : X \to Y$ sono dette* omotope *se esiste un'applicazione continua $F : X \times I \to Y$ tale che $F(x, 0) = f_0(x)$ $F(x, 1) = f_1(x)$ per ogni $x \in X$. Se f_0 e f_1 sono omotope scriveremo $f_0 \approx f_1$.*

Esempio 1. Ogni arco $f : I \to Y$, con Y spazio topologico qualunque, è omotopo all'arco costante $\varepsilon_{f(0)}$, mediante l'omotopia $F(x, t) = f((1 - t)x)$.

Esempio 2. Sia X uno spazio topologico qualunque e Y un sottospazio convesso di $\mathbf{R}^n$ (ovvero tale che per ogni x,$y \in Y$, esiste un segmento di retta interamente contenuto in Y che li unisce). Se $f_0, f_1 : X \to Y$ sono due applicazioni continue arbitrarie allora f_0 è omotopa a f_1. Si può infatti costruire un'omotopia lineare sfruttando la convessità di Y, e questa omotopia è definita da

$$F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x).$$

Definizione 5. *Siano A un sottoinsieme di X e $f_0, f_1 : X \to Y$ due funzioni continue. f_0 e f_1 sono dette* omotope relativamente *ad A se esiste un'omotopia $F : X \times I \to Y$ tra f_0 e f_1 tale che, se $a \in A$, $F(a, t)$ non dipende da t; in altre parole $F(a, t) = f_0(a)$ per ogni $a \in A$ e per ogni $t \in I$. Segue quindi che $f_0(a) = f_1(a)$ per ogni $a \in A$. Si dice che F è un'* omotopia relativa ad A *e si scrive $f_0 \approx_A f_1$.*

Lemma 3. *La relazione $\approx_A$ è un'equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da X a Y.*

Dimostrazione

i) riflessività: si ponga $F(x,t) = f(x)$;

ii) simmetria: si ponga $G(x,t) = F(x, 1-t)$, dove F è l'omotopia relativa ad A tra f e g;

iii) transitività: se F è un'omotopia relativa ad A tra f e g e G è un'omotopia relativa ad A tra g e h, allora la funzione $H : X \times I \to Y$ definita da
$$H(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$
è continua per il lemma d'incollamento ed è perciò un'omotopia tra f e h relativamente ad A.

Definizione 6. *Due spazi X e Y sono detti* omotopicamente equivalenti*, e si indica con $X \sim Y$, se esistono due funzioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tali che*
$$gf \approx Id_X,$$
$$fg \approx Id_Y.$$
In tal caso le applicazioni f e g sono chiamate equivalenze omotopiche*.*

Definizione 7. *Uno spazio X è detto* contraibile *se è omotopicamente equivalente ad un punto.*

Esempio 3. Il disco $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n | \|x\|^2 \leq 1\}$ è contraibile. Infatti, sia $y \in D^n$ e si considerino l'applicazione costante $\varepsilon_y : D^n \to \{y\}$ e l'inclusione $i : \{y\} \to D^n$. Allora $\varepsilon_y \circ i = Id_{\{y\}}$ e $i \circ \varepsilon_y \approx Id_{D^n}$ perchè D^n è uno spazio convesso di $\mathbf{R}^n$ e si può quindi costruire l'omotopia lineare come visto nell'Esempio 2.

Esempio 4. Con un ragionamento analogo al caso del disco D^n, si dimostra che ogni sottoinsieme convesso di $\mathbf{R}^n$ è contraibile.

Definizione 8. *Sia X uno spazio, $A \subset X$ un suo sottoinsieme e $r : X \to A$ un'applicazione continua. r è detta* retrazione *se $r \circ i = Id_A$.*

Definizione 9. *Sia $A \subset X$. Diremo che A è un* retratto di deformazione *di X se esiste $r : X \to A$ che sia una retrazione e se $i \circ r \sim Id_X$.*

Osservazione 1. Se A è un retratto di deformazione di X allora $A \sim X$.

Definizione 10. *Sia $A \subset X$. A è un* retratto forte di deformazione *se esiste una retrazione $r : X \to A$ e se $i \circ r \sim_A Id_X$, cioè se $i \circ r$ è omotopa a Id_X attraverso un'omotopia relativa ad A.*

Esempio 5. Sia $C_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | (x-1)^2 + y^2 = 1\}$, $C_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | (x+1)^2 + y^2 = 1\}$ e $X = C_1 \cup C_2 \setminus \{(-2, 0), (2, 0)\}$. Vogliamo dimostrare che $\{(0, 0)\} \subset X$ è un retratto forte di deformazione di X.

Dimostrazione: Si considera la seguente omotopia $F : X \times I \to X$ definita da

$$G(p, t) = \begin{cases} \frac{(1-t)p}{\|((1-t)x-1,(1-t)y)\|} & \text{se } p \in C_1 \setminus \{(2, 0)\}, \\ \frac{(1-t)p}{\|((1-t)x+1,(1-t)y)\|} & \text{se } p \in C_2 \setminus \{(-2, 0)\}. \end{cases}$$

con $p = (x, y)$.

Definizione 11. *Due archi f_0 e f_1 in X sono* equivalenti *(e scriveremo $f_0 \sim f_1$) se f_0 e f_1 sono omotopi relativamente a $\{0, 1\}$.*

Si noti che due archi f_0 e f_1 sono equivalenti se e solo se esiste una funzione continua $F : I \times I \to X$ tale che

$$\begin{array}{lll} F(t, 0) = f_0(t), & F(t, 1) = f_1(t), & \forall t \in I \\ F(0, s) = f_0(0), & F(1, s) = f_0(1), & \forall s \in I \end{array}$$

Il Lemma 3 assicura che $\sim$ è una relazione d'equivalenza sull'insieme degli archi di X; denoteremo con $[f]$ la classe di equivalenza dell'arco f. Ponendo

$$[f][g] = [f * g]$$

si ottiene un prodotto ben definito di due classi d'equivalenza; vale infatti il seguente lemma:

Lemma 4. *Siano f_0, f_1, g_0, g_1 degli archi in X, con $f_0(1) = g_0(0)$ e $f_1(1) = g_1(0)$. Se $f_0 \sim f_1$ e $g_0 \sim g_1$, allora $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$.*

Dimostrazione: Siano $F : f_0 \sim f_1$ e $G : g_0 \sim g_1$ due omotopie relative a $\{0, 1\}$, e definiamo $H : I \times I \to X$ come

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(2t-1, s) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Poichè $F(1, s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0, s)$, H è continua per il lemma d'incollamento. Quindi H definisce un'omotopia tra $f_0 * g_0$ e $f_1 * g_1$.

Lemma 5. *Siano f, g, h tre archi in X tali che $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$; allora $(f * g) * h \sim f * (g * h)$.*

Dimostrazione: I due archi $(f * g) * h$ e $f * (g * h)$ sono definiti da

$$((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ g(4t-1) & \text{se } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$$(f * (g * h)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(4t-2) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ h(4t-3) & \text{se } \frac{3}{4} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

e l'omotopia tra essi è l'applicazione $F : I \times I \to X$ definita da:

$$F(t, s) = \begin{cases} f(4t/(1+s)) & \text{se } 0 \leq t \leq (s+1)/4, \\ g(4t-s-1) & \text{se } (s+1)/4 \leq t \leq (s+2)/4, \\ h((4t-s-2)/(2-s)) & \text{se } (s+2)/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Lemma 6. *Se f è un arco in X con punto inziale x e punto finale y, allora $\varepsilon_x * f \sim f$ e $f * \varepsilon_y \sim f$.*

Dimostrazione: Viene qui dimostrata soltanto la relazione $\varepsilon_x * f \sim f$, in quanto l'altra è del tutto analoga. Definiamo $F : I \times I \to X$ come

$$F(t, s) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq t \leq (1-s)/2, \\ f((2t-1+s)/(1+s) & \text{se } (1-s)/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Avremo allora $F(t, 0) = (\varepsilon_x * f)(t)$, $F(t, 1) = f(t)$ e inoltre F è un'omotopia relativa a $\{0, 1\}$.

Lemma 7. *Se f è un arco in X con $f(0) = x$ e $f(1) = y$, allora $f * \bar{f} \sim \varepsilon_x$ e $\bar{f} * f \sim \varepsilon_y$.*

Dimostrazione: Anche in questo caso viene dimostrata solo la prima relazione $f * \bar{f} \sim \varepsilon_x$. L'arco $f * \bar{f}$, dato da

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

è omotopo al cammino ε_x mediante l'omotopia $F : I \times I \to X$ data da

$$F(t,s) = \begin{cases} f(2t(1-s)) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ f((2-2t)(1-s)) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

e la verifica è immediata.

Definizione 12. *Un arco f è detto* chiuso *(o* laccio*) se $f(0) = f(1)$. Se $f(0) = f(1) = x$, diremo che f è un arco chiuso di* base x.

L'insieme delle classi d'equivalenza di archi chiusi basati in $x \in X$ viene denotato con $\pi(X,x)$. Questo insieme è dotato di un'operazione binaria ben definita (Lemma 4) da $[f][g] = [f*g]$, che rende $\pi(X,x)$ un gruppo, chiamato *gruppo fondamentale* o *primo gruppo di omotopia* di X con punto base x.

Teorema 1. *$\pi(X,x)$ è un gruppo.*

Dimostrazione: Il prodotto è $[f][g] = [f*g]$, l'elemento neutro è la classe $[\varepsilon_x]$, l'inverso è dato da $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ e l'associatività segue dal Lemma 5.

Teorema 2. *Se esiste un arco in X dal punto $x \in X$ al punto $y \in X$, allora i gruppi $\pi(X,x)$ e $\pi(X,y)$ sono isomorfi.*

Dimostrazione Sia f un arco da x a y, per ogni arco chiuso g di base x, $(\bar{f}*g)*f$ è un arco chiuso di base y. Definiamo allora

$$u_f : \pi(X,x) \to \pi(X,y)$$

come

$$u_f[g] = [\bar{f}*g*f].$$

L'applicazione u_f è un omomorfismo di gruppi, essendo

$$\begin{aligned} u_f([g][h]) &= u_f[g*h] = [\bar{f}*g*h*f] \\ &= [\bar{f}*g*f*\bar{f}*h*f] \\ &= [\bar{f}*g*f][\bar{f}*h*f] \\ &= u_f[g]u_f[h]. \end{aligned}$$

Usando inoltre l'arco $\bar{f}$ possiamo definire

$$u_{\bar{f}} : \pi(X,y) \to \pi(X,x)$$

come

$$u_{\bar{f}}[h] = [f*h*\bar{f}].$$

Si verifica facilmente che $u_{\bar{f}}u_f[g] = [g]$ e che $u_f u_{\bar{f}}[h] = [h]$. Quindi u_f è un isomorfismo.

Corollario 1. *Se X è uno spazio connesso per archi, $\pi(X,x)$ e $\pi(X,y)$ sono gruppi isomorfi per ogni coppia di punti x,$y \in X$.*

Vediamo ora l'effetto di una funzione continua sul gruppo fondamentale. Sia $\varphi : X \to Y$ una funzione continua, fissiamo $x \in X$ e consideriamo il gruppo fondamentale $\pi(X,x)$. Sia

$$\varphi_* : \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x))$$

definita da

$$\varphi_*[f] = [\varphi f].$$

Lemma 8. *φ_* è un omomorfismo di gruppi ben definito ed è chiamato* omomorfismo indotto *da φ.*

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \varphi_*([f][g]) &= \varphi_*[f * g] = [\varphi(f * g)] = \\ &= [\varphi f * \varphi g] = [\varphi f][\varphi g] \\ &= \varphi_*[f]\varphi_*[g] \end{aligned}$$

Segue ora un lemma (per la cui dimostrazione si rimanda il lettore a [1] p.144) necessario per la dimostrazione del teorema successivo.

Lemma 9. *Siano $\varphi, \psi : X \to Y$ due funzioni continue, $F : \varphi \approx \psi$ un'omotopia e indichiamo con $f : I \to Y$ l'arco da $\varphi(x_0)$ a $\psi(x_0)$ definito da $f(t) = F(x_0,t)$. Allora $\psi_* = u_f\varphi_*$, dove $u_f : \pi(Y,\varphi(x_0)) \to \pi(Y,\psi(x_0))$ è l'omomorfismo associato all'arco f, e $\varphi_* : \pi(X,x_0) \to \pi(Y,\varphi(x_0))$, $\psi_* : \pi(X,x_0) \to \pi(Y,\psi(x_0))$ sono gli omomorfismi indotti rispettivamente φ e ψ.*

Teorema 3. *Se $\varphi : X \to Y$ è un'equivalenza omotopica, $\varphi_* : \pi(X,x) \to \pi(Y,\varphi(x))$ è un isomorfismo per ogni $x \in X$.*

Dimostrazione: Poichè φ è un'equivalenza omotopica, esiste una funzione continua $\psi : Y \to X$ tale che $\varphi\psi \approx Id : Y \to Y$ e $\psi\varphi \approx Id : X \to X$. Per il Lemma 9 si avrà $u_f(\psi\varphi)_* = Id_*$ per un certo arco f; ma u_f e Id_* sono due isomorfismi, per cui anche $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$ è un isomorfismo; ne segue che ψ_* è suriettiva e che φ_* è iniettiva. Analogamente, anche $\varphi_*\psi_*$ è un isomorfismo e quindi φ_* è suriettiva e ψ_* è iniettiva.

Questo teorema ha un importante corollario:

Corollario 2. *Il gruppo fondamentale di uno spazio contraibile è il gruppo banale.*

Definizione 13. *Uno spazio topologico X si dice* semplicemente connesso *se è connesso per archi e se $\pi(X, x) = \{1\}$ per qualche (e quindi, necessariamente per ogni) $x \in X$.*

Perciò ogni spazio contraibile è semplicemente connesso, ma non vale il viceversa. Si può infatti dimostrare che la sfera $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} | \|x\|^2 = 1\}$, per $n \geq 2$, è semplicemente connessa ma non contraibile (vedere esempio in seguito).

Definizione 14. *X è* localmente semplicemente connesso *se per ogni $x \in X$ e per ogni aperto U contenente x, esiste un intorno V, con $x \in V \subset U$, tale che sia semplicemente connesso.*

Quindi se uno spazio è localmente semplicemente connesso, allora è localmente connesso per archi.

Definizione 15. *Uno spazio topologico X è* semi-localmente semplicemente connesso *se per ogni $x_0 \in X$ esiste un aperto U contenente x_0 tale che $i_* \pi(U, x_0) = \{1\}$*

Osservazione 2. Se X è localmente semplicemente connesso allora è semi-localmente semplicemente connesso.

Teorema 4. *Se X e Y sono due spazi connessi per archi, il gruppo fondamentale del prodotto $X \times Y$ è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi fondamentali di X e Y.*

Dimostrazione: Siano $p : X \times Y \to X$ e $q : X \times Y \to Y$ le proiezioni e si definisca un'applicazione

$$\varphi : \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$$

mediante

$$\varphi[f] = (p_*[f], q_*[f]) = ([pf], [qf]).$$

- φ è ben definita. Se $f \sim g$, esiste una funzione continua $F : I \times I \to X \times Y$ tale che $F(t, 0) = f(t)$, $F(t, 1) = g(t)$ e $F(0, s) = F(1, s) = (x_0, y_0)$; allora le funzioni $pF : I \times I \to X$ e $qF : I \times I \to Y$ sono due omotopie (relative a $\{0, 1\}$) tra pf e pg e fra qf e qg rispettivamente. Quindi $\varphi[f] = \varphi[g]$, il che vuol dire che φ è ben definita.

- φ è suriettiva. Se $([f_1], [f_2])$ è un elemento di $\pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$, allora $\varphi[f] = ([f_1][f_2])$, dove $f : I \to X \times Y$ è definita da $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$.

- φ è iniettiva. Se $\varphi[f] = \varphi[g]$, allora $pf \sim pg$ e $qf \sim qg$, quindi esisteranno due omotopie $F_1 : pf \sim pg$ e $F_2 : qf \sim qg$; definendo $F : I \times I \to X \times Y$ tramite $F(t,s) = (F_1(t,s), F_2(t,s))$, otterremo allora un'omotopia fra f e g, e quindi $[f] = [g]$.

- φ è un isomorfismo. $p(f * g) = pf * pg$ e $q(f * g) = qf * qg$ per ogni coppia di archi $f, g : I \to X \times Y$ tali che $f(1) = g(0)$.

Dimostreremo in seguito, mediante la teoria dei rivestimenti, il seguente risultato:

Esempio 6. $\pi(S^1) = \mathbf{Z}$.

Da questo e dal Teorema 4 segue che:

Esempio 7. $\pi(S^1 \times S^1, x) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$.

Come precedentemente accennato, dimostriamo ora esplicitamente che il gruppo fondamentale della sfera S^n, per $n \geq 2$, è il gruppo banale. Nella dimostrazione faremo uso del seguente lemma:

Lemma 10. *(esistenza del numero di Lebesgue) Sia X uno spazio metrico (con metrica d) e compatto, e sia $\{U_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste un numero reale $\delta > 0$ (il numero di Lebesgue del ricoprimento $\{U_j\}$), tale che per ogni $S \subset X$ che abbia diametro minore di δ ($diam(S) = \sup_{x,y \in S} d(x,y) < \delta$), esiste $k \in J$ tale che $S \subset U_k$.*

Esempio 8. $\pi(S^n) = \{1\}$ se $n \geq 2$.

Dimostrazione: Sia $N = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n$ e $S = (0, \ldots, 0, -1) \in S^n$. Consideriamo i due aperti $U = S^n \setminus \{N\}$ e $V = S^n \setminus \{S\}$. Sia $f : I \to S^n$ un laccio di base $x \in S^n$, $x \neq \{S, N\}$. Vorremmo mostrare che $f \sim \varepsilon_x$, e per farlo, dimostreremo che esiste un laccio $h : I \to S^n$ di base x tale che $h \sim f$ e $h(I) \subset S^n$. In questo caso infatti, si può usare la proiezione stereografica da N e proiettare su $\mathbf{R}^n$, ed essendo $\mathbf{R}^n$ contraibile, possiamo sempre trovare un omotopia tra quel cammino e un cammino costante.

Consideriamo il ricoprimento aperto $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ di I. I è compatto e applicando il Lemma 10 esiste $\delta > 0$ e una suddivisione dell'intervallo I

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k < 1,$$

con $t_j - t_{j-1} < \delta$, tale che $[t_{j-1}, t_j]$ sia contenuto in $f^{-1}(U)$ oppure in $f^{-1}(V)$, allora $f([t_{j-1}, t_j]) \subset U$ oppure in V. E' di semplice verifica il fatto che $f(t_j) \in U \cap V$. Sia $f_j : I \to S^n$ la riparametrizzazione tale che $f_j(s) =$

$f((1-s)t_{j-1}+st_j)$, $j=1,\ldots,k$, allora $f \sim f_1 * f_2 * \ldots * f_k$. Se $f_1,\ldots,f_k$ fossero tutti contenuti in U avrei trovato un cammino che non tocca N. Ma ci possono essere alcuni f_i che stanno in V, e di conseguenza potrebbero toccare N.

Sia f_j tale che $f_j(I) \subset V \simeq \mathbf{R}^n$. Se questo cammino f_j non passa per $\{N\}$ abbiamo concluso, ma se passa per $\{N\}$ consideriamo $V \setminus \{N\} \simeq \mathbf{R}^n \setminus \{N\}$ che, per $n \geq 2$ è connesso per archi, perciò esiste un cammino h_j che congiunge $f(t_{j-1})$ e $f(t_j)$ e che sta in $V \setminus \{N\}$. Considerando i cammini f_j e h_j in $V \simeq \mathbf{R}^n$, essi sono equivalenti perchè $\mathbf{R}^n$ è convesso. Quindi

$$f = f_1 * \ldots * f_j * \ldots f_k \sim f_1 * \ldots * h_j * \ldots f_k$$

e si ripete questo ragionamento per ogni cammino che sta in V e tocca $\{N\}$, ottenendo così una concatenazione di cammini che non toccano N.

Definizione 16. *Un insieme Λ di cammini chiusi in M è chiamata* classe libera di omotopia *se, data $f \in \Lambda$ e $g : I \to M$ tale che esiste un'omotopia*

$$F : I \times I \to M, \quad F(0,t) = f(t), \quad F(1,t) = g(t), \quad F(s,0) = F(s,1)$$

allora $g \in \Lambda$. L'insieme di tali classi è denotata con $C_1(M)$.

La differenza rispetto alle classi del gruppo fondamentale è che nelle classi libere è concesso far variare in M la base dei cammini.

2.2 Il teorema di Seifert-Van Kampen

Un risultato che ci servirà nell'ultimo capitolo è il gruppo fondamentale di una superficie con 2-buchi, ma per calcolarlo è necessario usare il teorema di Seifert-Van Kampen. Seguono quindi le due formulazioni di questo teorema, un esempio, e per concludere, il calcolo esplicito del suddetto gruppo fondamentale.

Teorema 5. *(Seifert-Van Kampen, genaratori) Sia X uno spazio topologico, $X = U_1 \cup U_2$, con U_1 e U_2 aperti di X tali che U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ siano connessi per archi. Siano i_1 e i_2 le inclusioni, rispettivamente, di $U_1 \cap U_2$ in U_1 e U_2, e siano j_1 e j_2 le inclusioni di U_1 e U_2 rispettivamente, in X. Queste inclusioni inducono le seguenti mappe:*

$$\varphi_k = i_{k*} : \pi(U_1 \cap U_2, x_0) \to \pi(U_k, x_0), \quad k = 1, 2$$

$$\psi_k = j_{k*} : \pi(U_k, x_0) \to \pi(X, x_0), \quad k = 1, 2$$

Allora $\pi(X, x_0)$ è generato da $\psi_1(\pi(U_1, x_0)) \cup \psi_2(\pi(U_2, x_0))$.

Da ora in poi in questa sezione U_1, U_2 e $U_1 \cap U_2$ saranno considerati connessi per archi.

Corollario 3. *Sia $X = U_1 \cup U_2$, con U_1 e U_2 aperti. Se U_1 e U_2 sono semplicemente connessi allora X è semplicemente connesso.*

Come esempio calcoliamo nuovamente il gruppo fondamentale della sfera S^n, con $n \geq 2$.

Esempio 9. $\pi(S^n) = \{1\}$, $n \geq 2$.

Dimostrazione: Siano $U = S^n \setminus \{N\}$ e $V = S^n \setminus \{S\}$, entrambi questi aperti sono omeomorfi a $\mathbf{R}^n$ mediante la proiezione stereografica dal polo nord o sud, rispettivamente, e sono quindi semplicemente connessi. Inoltre $U \cap V = S^n \setminus \{S, N\} \simeq \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ che è connesso per archi per $n \geq 2$. Perciò si può applicare il corollario precedente.

Il teorema di Seifert-Van Kampen può essere espresso anche in un'altra forma, utilizzando la presentazione dei gruppi (si veda [1]).

Teorema 6. *(Seifert-Van Kampen, relazioni) Sia $\pi(U_1, x_0) = \langle S_1 | R_1 \rangle$, $\pi(U_2, x_0) = \langle S_2 | R_2 \rangle$ e $\pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle S | R \rangle$, allora*

$$\pi(X, x_0) = \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle$$

dove R_S sono le parole dell'alfabeto $S_1 \cup S_2$ della forma $\varphi_1(s)\varphi_2(s)^{-1}$, $s \in S$.

Corollario 4. *Se $U_1 \cap U_2$ e U_2 sono semplicemente connessi, allora $\pi(X, x_0) \simeq \pi(U_1, x_0)$.*

Corollario 5. *Se $U_1 \cap U_2$ è semplicemente connesso, allora $\pi(X, x_0) = \langle S_1 \cup S_2 | R_1 \cup R_2 \rangle$.*

Definizione 17. *Siano S_1 e S_2 due superfici, $p_1 \in S_1$ e $p_2 \in S_2$ due punti, D_1 e D_2 due dischetti contenenti rispettivamente p_1 e p_2 omeomorfi a $D^2 = \{\|x\|^2 \leq 1\}$. Consideriamo $S_1 \setminus Int(D_1)$ (dove $Int(D_1)$ è l'interno di D_1) e $S_2 \setminus Int(D_2)$, vogliamo incollare le due superfici nei due cerchietti. Prendiamo quindi due omeomorfismi $h_i : D_i \to D^2$, $i = 1, 2$, e definiamo la* somma connessa *di S_1 e S_2 come*

$$S = S_1 \sharp S_2 = \frac{(S_1 \setminus Int(D_1)) \cup (S_2 \setminus Int D_2)}{\sim}$$

dove $\sim$ è la relazione d'equivalenza che risulta non banale solo su $\partial(S_1 \setminus Int(D_1)) \cup \partial(S_2 \setminus Int(D_2))$, dove è definita da $x \sim h_2^{-1} h_1(x)$ per $x \in D_1$.

Si può dimostrare che la definizione di somma connessa non dipende dalla scelta dei dischi D_1 e D_2, degli omeomorfismi h_1 e h_2, e che S è una superficie.

Indichiamo con Σ_g la superficie con g-buchi, ovvero la somma connessa di g tori
$$\Sigma_g = \mathbf{T}^2 \sharp \ldots \sharp \mathbf{T}^2.$$
Un toro $\mathbf{T}^2$ può essere rappresentato come un quadrato coi lati opposti identificati, chiamati a e b, il cui bordo è individuato da $aba^{-1}b^{-1}$, e i cui vertici si identificano tutti nello stesso punto x_1. Perciò fare la somma connessa di due tori vuol dire considerare lo spazio quoziente del poligono il cui bordo è individuato da $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$, con i lati identificati e i vertici identificati nello stesso punto x_1.

Calcoliamo perciò il gruppo fondamentale del toro doppio Σ_2.

Si prenda un punto $y \in \Sigma_2$, un laccio c attorno a y, si fissi un punto x_0 in c e sia x_1 il vertice di Σ_2. Chiamiamo δ il cammino che collega x_0 a x_1. Siano $U_1 = X \setminus \{y\}$ e $U_2 = X \setminus \{a_1, b_1, a_2, b_2\}$. U_1 si deforma verso il bordo di X, che risulta essere un'unione puntata di 4 circonferenze. Denotiamo con α_1, α_2, β_1 e β_2 gli archi chiusi in U_1 di base x_1 ottenuti percorrendo rispettivamente a_1, a_2, b_1 e b_2 nel verso indicato. Allora $\pi(U_1, x_1) = \langle [\alpha_1], [\beta_1], [\alpha_2][\beta_2] \rangle$, ovvero il gruppo libero su 4 generatori. Consideriamo ora x_0. Allora $\pi(U_1, x_0) = \langle [\delta * \alpha_1 * \overline{\delta}][\delta * \beta_1 * \overline{\delta}][\delta * \alpha_2 * \overline{\delta}][\delta * \beta_2 * \overline{\delta}] | \emptyset \rangle = \langle A_1, B_1, A_2, B_2 | \emptyset \rangle$. Per quanto riguarda $\pi(U_2, X_0)$, essendo U_2 contraibile ad un punto, si ha $\pi(U_2, x_0) = \{1\} = \langle [\varepsilon_{x_0}] | \emptyset \rangle$. Invece $\pi(U_1 \cap U_2, x_0) = \langle [\gamma] | \emptyset \rangle$, ovvero il gruppo libero con un generatore, che rappresenta c. Dal Teorema 6 si ha $\pi(\Sigma_2, x_0) = \langle A_1, B_1, A_2, B_2 | \emptyset \cup R_S \rangle$. Determiniamo R_S. $\varphi_2([\gamma]) = 1$ perchè $\pi(U_2, x_0) = \{1\}$, invece $\varphi_1([\gamma]) = [\delta * \alpha_1 * \beta_1 * \overline{\alpha_1} * \overline{\beta_1} * \alpha_2 * \beta_2 * \overline{\alpha_2} * \overline{\beta_2} * \overline{\delta}] = A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}A_2B_2A_2^{-1}B_2^{-1}$. Poichè deve aversi $\varphi_1([\gamma]) = \varphi_2([\gamma])$, si ha $A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}A_2B_2A_2^{-1}B_2^{-1} = 1$. Quindi
$$\pi(\Sigma_2, x_0) = \langle A_1, B_1, A_2, B_2 | A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}A_2B_2A_2^{-1}B_2^{-1} = 1 \rangle.$$

Corollario 6. *Il gruppo fondamentale del toro doppio contiene un sottogruppo ciclico.*

Dimostrazione: $\pi(\Sigma_2, x_0) = \langle A_1, B_1, A_2, B_2 | A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}A_2B_2A_2^{-1}B_2^{-1} = 1 \rangle$, e questo gruppo ammette come suo sottogruppo per esempio $\langle A_1, 1, 1, 1 | \emptyset \rangle$, cioè il gruppo libero sul solo generatore A_1, che non è altro che il gruppo infinitamente ciclico $\mathbf{Z}$.

2.3 Rivestimenti

Sia $p : \tilde{X} \to X$ un'applicazione continua. Un aperto $U \subseteq X$ è detto *banalizzante* o *uniformemente rivestito* da p se la controimmagine $p^{-1}(U)$ è un'unione disgiunta di sottoinsiemi aperti di $\tilde{X}$ ognuno dei quali è omeomorfo a U tramite l'applicazione p. Si dice che $(\tilde{X}, p)$ è un rivestimento di X se ogni punto $x \in X$ ammette un intorno aperto uniformemente rivestito da p; l'applicazione p viene detta *proiezione*, X viene detto *spazio base* e $\tilde{X}$ *spazio totale.*

Definizione 18. *Sia $p : \tilde{X} \to X$, $(\tilde{X}, p)$ è un* rivestimento *se:*

i) p è suriettiva;

ii) per ogni $x \in X$ esistono un intorno aperto U di x e una famiglia $\{U_j | j \in J\}$ di aperti di $\tilde{X}$ tali che:

- $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} U_j$;
- $U_j \cap U_k = \emptyset$ *se* $j \neq k \in J$;
- $p|U_j : U_j \to U$ *è un omeomorfismo per ogni* $j \in J$.

Definizione 19. *Un'applicazione $f : X \to Y$ è un* omeomorfismo locale *se, per ogni $x \in X$, esistono un aperto A contenente x e un aperto $B \subset Y$ tali che*

$$f|_A : A \to B$$

sia un omeomorfismo.

Osservazione 3. Per comodità gli spazi saranno assunti connessi per archi, localmente connessi per archi e localmente semplicemente connessi. Una varietà differenziabile (vedi Definizione 30 più avanti), per esempio, soddisfa queste proprietà.

2.4 Sollevamento dei cammini e delle omotopie

Lemma 11. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X e sia Y uno spazio connesso. Date due applicazioni continue $f_0, f_1 : Y \to \tilde{X}$ tali che $pf_0 = pf_1$, allora l'insieme $A = \{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$ è l'insieme vuoto o tutto Y.*

Dimostrazione: Essendo Y connesso, è sufficiente dimostrare che l'insieme A è contemporaneamente aperto e chiuso.

- A è chiuso.

  Sia y un punto della chiusura di A e sia

  $$x = pf_0(y) = pf_1(y).$$

Assumiamo $f_0(y) \neq f_1(y)$; sia U un aperto banalizzante di x e V_0 e V_1 le componenti di $p^{-1}(U)$ che contengono rispettivamente $f_0(y)$ e $f_1(y)$. Poichè f_0 e f_1 sono continue, è possibile trovare un intorno W di y tale che $f_0(W) \subset V_0$ e $f_1(W) \subset V_1$. Ma questo contraddice il fatto che ogni intorno W di y deve intersecare A. Deve perciò aversi $f_0(y) = f_1(y)$, ovvero la chiusura di A è uguale ad A.

- Con un ragionamento analogo si mostra che ogni punto dell'insieme $\{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$ è un punto interno.

Teorema 7. *(sollevamento degli archi) Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Per ogni arco $f : I \to \tilde{X}$ con punto iniziale x_0 e per ogni punto $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$, esiste un unico arco $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ tale che $p\tilde{f} = f$ e $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$.*

Dimostrazione: L'unicità del sollevamento segue dal fatto che I è connesso, e quindi vale il Lemma 11. Per quanto riguarda l'esistenza consideriamo due casi:

- $f(I)$ interamente contenuto in un aperto banalizzante U.

  Sia $\tilde{U}_0$ un aperto contenente $\tilde{x}_0$ tale che $p|_{\tilde{U}_0} : \tilde{U}_0 \to U$ sia un omeomorfismo, allora $p^{-1}|_{\tilde{U}_0} \circ f = \tilde{f}$ è un sollevamento di f.

- $f(I)$ non è interamente contenuto in un aperto banalizzante.

  Utilizzando il Lemma 10 sul numero di Lebesgue, si suddivida I in intervalli $[s_{j-1}, s_j] \subset I$, $j = 1, \ldots n$, $0 = s_0 < s_1 \ldots < s_n = 1$, tali che $f([s_{j-1}, s_j])$ sia interamente contenuto in un aperto banalizzante. Definiamo $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ e supponiamo di aver definito $\tilde{f} : [0, s_j] \to \tilde{X}$ in modo tale che $p \circ \tilde{f} = f$. $f([s_j, s_{j+1}])$ è contenuto in un aperto banalizzante U e quindi esiste $\tilde{U}_0$ contenente $\tilde{f}(s_j)$ tale che $p_0 = p|_{\tilde{U}_0} : \tilde{U}_0 \to U$ sia un omeomorfismo. Possiamo perciò definire un sollevamento $\tilde{f} : [s_j, s_{j+1}] \to \tilde{X}$ come $\tilde{f} = p_0^{-1} \circ f$, e per il lemma d'incollamento (in un punto) possiamo definire $\tilde{f} : [0, s_{j+1}] \to \tilde{X}$, con $p \circ \tilde{f} = f$.

Teorema 8. *(sollevamento delle omotopie) Per ogni funzione continua $F : I \times I \to X$ e per ogni punto $x_0 \in \tilde{X}$ con $p(x_0) = F(0,0)$, esiste un'unica funzione continua $\tilde{F} : I \times I \to \tilde{X}$ tale che $p\tilde{F} = F$ e $\tilde{F}(0,0) = x_0$.*

Dimostrazione: La dimostrazione è simile a quella del teorema precedente. L'unicità del sollevamento segue dalla connessione di $I \times I$. Per dimostrare l'esistenza si sfrutta invece la compattezza di $I \times I$, infatti possiamo trovare due successioni di punti

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1,$$

$$0 = b_0 < b_1 < \ldots < b_m = 1$$

tali che se R_{ij} è il rettangolo

$$R_{ij} = \{(t,s) \in I^2 | a_i \leq t \leq a_{i+1}, b_j \leq s \leq b_{j+1}\},$$

$F(R_{ij})$ è contenuto in un aperto banalizzante. Il sollevamento $\tilde{F}$ può essere allora definito induttiamente sui rettangoli

$$R_{00}, R_{01}, \ldots, R_{0m}, R_{10}, \ldots$$

con un procedimento simile a quello usato nel teorema precedente.

Corollario 7. *(Teorema di monodromia) Siano f_0 e f_1 due archi equivalenti in X e $\tilde{f}_0$, $\tilde{f}_1$ due rispettivi sollevamenti. Se $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$, allora $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$.*

Dimostrazione: Se F è un'omotopia relativa a $\{0,1\}$ tra f_0 e f_1, possiamo sollevarla in modo unico a un'applicazione $\tilde{F} : I^2 \to \tilde{X}$ tale che $\tilde{F}(0,0) = \tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$; per l'unicità del sollevamento si avrà $\tilde{F}(t,0) = \tilde{f}_0(t)$ e $\tilde{F}(t,1) = \tilde{f}_1(t)$ e quindi $\tilde{f}_0 \sim \tilde{f}_1$. Inoltre per ogni $s \in I$, $p(\tilde{F}(1,s)) = F(1,s) = f_0(1) = f_1(1)$, quindi $\tilde{F}(1,s) = \tilde{x}_1$ per ogni $s \in I$, e quindi $\tilde{f}_0(1) = \tilde{F}(1,0) = \tilde{x}_1 = \tilde{F}(1,s) = \tilde{F}(1,1) = \tilde{f}_1(1)$.

Siamo ora in grado di dimostrare che il gruppo fondamentale di S^1 è isomorfo a $\mathbf{Z}$.

Teorema 9. $\pi(S^1, 1) = \boldsymbol{Z}$.

Dimostrazione: Consideriamo l'applicazione esponenziale

$$\begin{aligned} e : \mathbf{R} &\to S^1 \\ t &\mapsto \exp(2\pi i t). \end{aligned}$$

Essa è continua e suriettiva, inoltre $e^{-1}(1) = \mathbf{Z}$ e $e^{-1}(S^1 \setminus \{1\}) = \cup_{n \in \mathbf{Z}}(n, n+1)$. Chiamiamo $e_n = e|_{(n,n+1)} : (n, n+1) \to S^1 \setminus \{1\} = U$. e_n è un omeomorfismo, infatti è continua, bigettiva e chiusa. Verifichiamo che è chiusa. Sia $W \subset (n, n+1)$, allora $\overline{W} \subset [n, n+1] \subset \mathbf{R}$, ma un chiuso in un compatto è compatto, ed essendo e_n continua anche $C = e_n(\overline{W})$ è compatto nello spazio di Hausdorf S^1, e quindi è chiuso. Poichè $e_n(W) = e(\overline{W}) \cap U$, segue che $e_n(W)$ è chiuso in U. Questo discorso si può fare per ogni $x \in S^1$, infatti è possibile trovare un aperto $U = S^1 \setminus \{y\}$ contenente x tale che $e^{-1}(U) = \cup_{j \in J} U_j$, dove gli U_j sono disgiunti ed $e|_{U_j} : U_j \to U$ è un omeomorfismo (con una rotazione si torna al caso $S^1 \setminus \{1\}$). Perciò $(\mathbf{R}, e)$ è un rivestimento di S^1.

Consideriamo ora l'applicazione $\Phi : \pi(S^1, 1) \to \mathbf{Z}$ definita da $\Phi([f]) = \tilde{f}(1)$, e definiamo $\tilde{f}(1)$ il *grado* di f (dove, per il Teorema 7, $\tilde{f}$ è l'unico sollevamento di f, mediante l'applicazione esponenziale, tale che $\tilde{f}(0) = 0$). Per il Teorema di monodromia l'applicazione Φ è ben definita.

Verifichiamo ora che Φ è un omomorfismo di gruppi. Sia $a \in e^{-1}(f(0))$ e indichiamo con $l_a(f)$ l'unico sollevamento di f che inizia in a; avremo allora $l_0(f) = \tilde{f}$ e $l_a(f)(t) = \tilde{f}(t) + a$. Se $b = \tilde{f}(1) + a$, vale la relazione

$$l_a(f * g) = l_a(f) * l_b(g);$$

di conseguenza, se $[f]$, $[g] \in \pi(S^1, 1)$, si ha

$$\begin{aligned}
\Phi([f][g]) &= \Phi[f * g] = l_0(f * g)(1) \\
&= (l_0(f) * l_{\tilde{f}(1)+0}(g))(1) \\
&= l_{\tilde{f}(1)}(g)(1) \\
&= (\tilde{g}(t) + \tilde{f}(1))(1) \\
&= \tilde{g}(1) + \tilde{f}(1) \\
&= \Phi[g] + \Phi[f]
\end{aligned}$$

Quindi Φ è un omomorfismo di gruppi.

Dimostriamo ora la suriettività. Sia $n \in \mathbf{Z}$ e $f(t) = \exp(2\pi i t n)$ un cammino chiuso in S^1 di base 1. Il suo unico sollevamento che inizia in 0 è $\tilde{f}(t) = nt$, infatti $e(\tilde{f}(t)) = \exp(2\pi i n t) = f(t)$. Ne segue che $\Phi[f] = \tilde{f}(1) = n$, e quindi Φ è suriettiva.

Dimostriamo ora che è iniettiva, ovvero che se $\Phi([f]) = 0$ allora $[f] = [\varepsilon_1]$. Supponiamo che $\Phi([f]) = 0$, ovvero che $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$ e quindi $\tilde{f}$ sia un cammino chiuso in $\mathbf{R}$. Essendo $\mathbf{R}$ semplicemente connesso, $\tilde{f}$ è omotopicamente equivalente, relativamente a $\{0, 1\}$, al laccio costante ε_0, per esempio mediante l'applicazione $F : I \times I \to \mathbf{R}$ definita da $F(t, s) = (1 - s)\tilde{f}(t)$. Poichè $eF(t, 0) = f(t)$, $eF(t, 1) = 1$, $eF(0, s) = eF(1, s) = 1$, ne segue che eF è un'omotopia tra f e ε_1 relativa a $\{0, 1\}$. Di conseguenza $[f] = 1$ in $(\pi(S^1), 1)$, ovvero $[f] = [\varepsilon_1]$, il che dimostra che Φ è iniettiva. Abbiamo quindi dimostrato che Φ è un isomorfismo dei gruppi $\pi(S^1, 1)$ e $\mathbf{Z}$.

Teorema 10. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ un omeomorfismo locale tale che vale la proprietà di sollevamento degli archi. Se $\tilde{X}$ è connesso per archi e X è semplicemente connesso, allora p è un omeomorfismo.*

Dimostrazione:

- Suriettività.

  Si ottiene sollevando gli archi costanti;

- Iniettività.

  Siano $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ due punti di $\tilde{X}$ tali che $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{x}_2) = x \in M$. Poichè $\tilde{X}$ è connesso per archi, esiste un arco $\tilde{\alpha}$ che collega $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$. Allora $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ è una arco chiuso in X, ed essendo X semplicemente connesso, α è omotopo all'arco costante ε_x. Il sollevamento di ε_x, $\tilde{\varepsilon}_x$, è omotopo a $\tilde{\alpha}$ per il Corollario 7, perciò $\tilde{\varepsilon}_x$ è l'arco costante che collega $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$, e quindi $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$.

Teorema 11. *Sia $p : \tilde{X} \to X$ un omeomorfismo locale che soddisfa la proprietà di sollevamento degli archi. Se $\tilde{X}$ è localmente connesso per archi e X è localmente semplicemente connesso, allora p è un rivestimento.*

Dimostrazione: Sia U un intorno semplicemente connesso di $x \in X$, poichè $\tilde{X}$ è localmente connesso per archi, è possibile scrivere $p^{-1}(U)$ come $p^{-1}(U) = \cup_{j \in J} \tilde{U}_j$, dove gli $\tilde{U}_j$ sono aperti connessi per archi e $\tilde{U}_j \cap \tilde{U}_k = \emptyset$ se $j \neq k$. Si vuole dimostrare che $p : \tilde{U}_j \to U$ è un omeomorfismo per ogni $j \in J$. Si supponga per assurdo che non sia suriettiva, ovvero che $p(\tilde{U}_j) \subset U$, e si prenda un $y \in U \setminus p(\tilde{U}_j)$. Poichè U è connesso per archi, esiste un arco α che collega x e y in U. Si sollevi quest'arco su $\tilde{X}$ e si chiami questo sollevamento $\tilde{\alpha}$, esso sarà interamente contenuto in $\tilde{U}_j$ perchè $\tilde{U}_j$ è connesso per archi ed è disgiunto dagli altri $\tilde{U}_k$. Allora $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e $\tilde{\alpha}(I) \subset \tilde{U}_j$; perciò $\tilde{\alpha}(1) \in \tilde{U}_j$, $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = y$, e quindi $y \in p(\tilde{U}_j)$, ottenendo una contraddizione. Si conclude quindi che è suriettiva. Dal Teorema 10 segue che $p : \tilde{U}_j \to U$ è un omeomorfismo.

2.5 Omomorfismi e automorfismi di rivestimenti

Definizione 20. *Siano $(\tilde{X}_1, p_1)$ e $(\tilde{X}_2, p_2)$ due rivestimenti di X. Un* omomorfismo *di $(\tilde{X}_1, p_1)$ in $(\tilde{X}_2, p_2)$ è un'applicazione continua $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tale che $p_1 = p_2\varphi$.*

Definizione 21. *Un omomorfismo φ di $(\tilde{X}_1, p_1)$ in $(\tilde{X}_2, p_2)$ è chiamato* isomorfismo *se esiste un omomorfismo ψ di $(\tilde{X}_1, p_1)$ in $(\tilde{X}_2, p_2)$ tale che le composizioni $\varphi\psi = Id_{\tilde{X}_2}$ e $\psi\varphi = Id_{\tilde{X}_1}$. Un* automorfismo *è un isomorfismo da un rivestimento in sè.*

Gli automorfismi di un rivestimento sono chiamati trasformazioni del rivestimento *e indicati con $A(\tilde{X})$. E' di immediata verifica che $A(\tilde{X})$ è un gruppo con l'operazione di composizione.*

Lemma 12. *Siano φ_0 e φ_1 omomorfismi di $(\tilde{X}_1, p_1)$ in $(\tilde{X}_2, p_2)$. Se esiste almeno un punto $x \in \tilde{X}_1$ tale che $\varphi_0(x) = \varphi_1(x)$, allora $\varphi_0 = \varphi_1$.*

Dimostrazione: E' un caso particolare del Lemma 11. Infatti, se φ_0 e φ_1 coincidono in un punto x, allora l'insieme $\{x \in \tilde{X}_1 | \varphi_0(x) = \varphi_1(x)\}$ è necessariamente tutto $\tilde{X}_1$.

Corollario 8. *Il gruppo $A(\tilde{X})$ opera senza punti fissi sullo spazio $\tilde{X}$, cioè, se $\varphi \in A(\tilde{X})$ e $\varphi \neq Id_{\tilde{X}}$, allora φ non ha punti fissi.*

Dimostrazione: Se per assurdo esistesse un punto $\tilde{x_0}$ tale che $\varphi(\tilde{x_0}) = \tilde{x_0}$, allora per il Lemma 12 si avrebbe $\varphi = Id_{\tilde{X}}$.

Teorema 12. *Siano $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X, Y uno spazio connesso e localmente connesso per archi, $y_0 \in Y$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Se $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ è un'applicazione continua tale che $f(y_0) = x_0$, allora esiste un sollevamento $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ con $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ se e solo se*

$$f_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Dimostrazione: Per brevità in questo lavoro viene dimostrata solo la condizione necessaria. Se esiste il sollevamento $\tilde{f}$, $p_*\tilde{f}_*\pi(Y, y_0) = f_*\pi(Y, y_0)$; essendo $\tilde{f}_*\pi(Y, y_0)$ un sottogruppo di $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, allora $p_*\tilde{f}_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

Per la dimostrazione della condizione sufficiente si veda [1] p.185.

Teorema 13. *(criterio per l'esistenza di omomorfismi) Siano $(\tilde{X}_1, p_1)$ e $(\tilde{X}_2, p_2)$ rivestimenti di X e $\tilde{x}_i \in \tilde{X}_i$, con $i = 1, 2$, punti tali che $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$. Allora esiste un omomorfismo φ di $(\tilde{X}_1, p_1)$ in $(\tilde{X}_2, p_2)$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ se e solo se $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subseteq p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$.*

Dimostrazione: E' un caso particolare del precedente teorema, considerando p_1 e φ come f e $\tilde{f}$ rispettivamente.

Seguono ora gli enunciati di un teorema e di un lemma per le cui dimostrazioni si veda [4] p.159.

Teorema 14. *(criterio per l'esistenza di isomorfismi) Siano $(\tilde{X}_1, p_1)$ e $(\tilde{X}_2, p_2)$ due rivestimenti di X. Allora esiste un isomorfismo da $(\tilde{X}_1, p_1)$ a $(\tilde{X}_2, p_2)$ se e solo se, dati $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ tali che $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2)$, allora $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, p_1)$ e $p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, p_2)$ sono coniugati.*

Lemma 13. *Siano $(\tilde{X}_1, p_1)$ e $(\tilde{X}_2, p_2)$ rivestimenti di X, e sia φ un omomorfismo del primo rivestimento nel secondo. Allora, $(\tilde{X}_1, \varphi)$ è un rivestimento di $\tilde{X}_2$.*

Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X tale che $\tilde{X}$ sia semplicemente connesso. Se $(\tilde{X}', p')$ è un altro rivestimento di X, allora, per il Teorema 13, esiste un omomorfismo φ di $(\tilde{X}, p)$ in $(\tilde{X}', p')$ e, per il Lemma 13, $(\tilde{X}, \varphi)$ è un rivestimento di $\tilde{X}'$. Diamo perciò la seguente definizione:

Definizione 22. *Un rivestimento* $(\tilde{X}, p)$ *di* X*, con* $\tilde{X}$ *semplicemente connesso, è chiamato rivestimento universale.*

Proposizione 1. *Se* $(\tilde{X}_1, p_1)$ *e* $(\tilde{X}_2, p_2)$ *sono rivestimenti di* X *e sono entrambi semplicemente connessi, allora* $(\tilde{X}_1, p_1)$ *è isomorfo a* $(\tilde{X}_2, p_2)$*.*

Dimostrazione: Segue dal Teorema 14.

Teorema 15. *Sia* X *uno spazio connesso e localmente connesso per archi. Allora* X *ammette un rivestimento universale se e solo se* X *è semilocalmente semplicemente connesso.*

Per la dimostrazione si veda [1] p.196.

Osservazione 4. Dall'Osservazione 3 segue che le varietà soddifano tale condizione ed ammettono quindi un rivestimento universale.

2.6 L'azione del gruppo $\pi(X, x)$ sull'insieme $p^{-1}(x)$

Definizione 23. *Sia* G *un gruppo e* X *un insieme. Diremo che* X *è un* G*-insieme, o che* G agisce a sinistra *(risp. destra) su* X *se esiste un'applicazione* $\theta : G \times X \to X$ *definita da* $\theta(g, x) = g \cdot x$ *(risp.* $\theta(g, x) = x \cdot g$*) tale che:*

i) *per ogni* $x \in X$*,* $e \cdot x = x$*, dove* e *è l'elemento neutro di* G*;*

ii) $g_1(g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$ *(risp.* $(x \cdot g_1)g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$*) per ogni* $x \in X$ *e* $g_1, g_2 \in G$*.*

Definizione 24. *Sia* X *uno spazio topologico. Diremo che* X *è un* G-spazio *se* X *è un* G*-insieme e l'applicazione* $\theta_g : X \to X$ *definita da* $\theta_g(x) = g \cdot x$ *è continua.*

Definizione 25. *Un'azione è detta:*

(a) propriamente discontinua*: se per ogni* $x \in X$ *esiste un intorno* $U \subset X$ *tale che* $U \cap (g \cdot U) = \emptyset$ *per ogni* $g \neq e$*;*

(b) transitiva*: se per ogni* $x, y \in X$ *esiste* $g \in G$ *tale che* $g \cdot x = y$*; se* G *agisce transitivamente su* X*, allora* X *è detto* G-insieme omogeneo*;*

(c) libera*: se per ogni* $g \in G, g \neq e$ *e per ogni* $x \in X$ *si ha* $g \cdot x \neq x$*.*

Definizione 26. *Sia* X *un* G*-spazio e sia* $x_0 \in X$*. Il* sottogruppo di isotropia *di* G *è l'insieme* $G_{x_0} = \{g \in G | g \cdot x_0 = x_0\}$*.*

Definizione 27. *Consideriamo l'azione destra e transitiva del gruppo G su X. Definiamo l'insieme degli automorfismi di X come $A(X) = \{\varphi : X \to X | \varphi$ è bigettiva, $\varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g\}$.*

E' immediato verificare che $A(X)$ è un gruppo.

Teorema 16. *Sia X un G-spazio omogeneo e $x_0 \in X$. Allora $A(X)$ è isomorfo a $N(H)/H$, dove $H = G_{x_0}$ e $N(H)$ è il normalizzatore di H in G, ovvero $N(H) = \{g \in G | gHg^{-1} = H\} \subset G$.*

Dimostrazione: Non viene riportata per brevità (si veda [4] p.258).

Definizione 28. *(Azione di monodromia) Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Fissiamo $x_0 \in X$ e consideriamo $\pi(X, x_0)$. Definiamo l'azione destra di $\pi(X, x_0)$ su $p^{-1}(x_0)$ nel seguente modo:*

$$\begin{aligned} p^{-1}(x_0) \times \pi(X, x_0) &\to p^{-1}(x_0) \\ (\tilde{x}, [f]) &\mapsto \tilde{x} \cdot [f] := \tilde{f}(1) \end{aligned}$$

dove $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ è il sollevamento di f che inizia in $\tilde{x}$.

Poichè abbiamo assunto $\tilde{X}$ connesso per archi, l'azione è transitiva. Siano infatti $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$, essendo $\tilde{X}$ connesso per archi esiste un cammino $\tilde{f} \in \tilde{X}$ con punto iniziale $\tilde{x}_0$ e punto finale $\tilde{x}_1$. Ma allora $p\tilde{f} = f$, con $[f] \in \pi(X, x)$; quindi $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{x}_1$.

Segue quindi che per ogni punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, il sottogruppo d'isotropia corrispondente a questo punto è il sottogruppo $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ di $\pi(X, x)$. Perciò, come spazio su cui agisce a destra $\pi(X, x)$, $p^{-1}(x)$ è isomorfo allo spazio delle classi laterali $\pi(X, x)/p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$, e la cardinalità della fibra è uguale all'indice del sottogruppo $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$.

Proposizione 2. *Per ogni automorfismo $\varphi \in A(\tilde{X})$, per ogni punto $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ e per ogni $\alpha \in \pi(X, x)$ si ha*

$$\varphi(\tilde{x} \cdot \alpha) = (\varphi\tilde{x}) \cdot \alpha$$

ovvero ogni elemento $\varphi \in A(\tilde{X})$ induce un automorfismo dell'insieme $p^{-1}(x)$ considerato come spazio su cui agisce a destra $\pi(X, x)$.

Dimostrazione: Sia $\tilde{\alpha}$ il sollevamento di α in $\tilde{X}$ con punto iniziale $\tilde{x}$ e tale che $p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha$; allora $\tilde{x} \cdot \alpha$ è il punto finale di $\tilde{\alpha}$. Consideriamo ora il cammino $\varphi_*(\tilde{\alpha})$ in $\tilde{X}$. Il suo punto iniziale è $\varphi(\tilde{x})$ e il suo punto finale è $\varphi(\tilde{x} \cdot \alpha)$. Osserviamo poi che

$$p_*[\varphi_*(\tilde{\alpha})] = (p\varphi)_*(\tilde{\alpha}) = p_*(\tilde{\alpha}) = \alpha,$$

ovvero $\varphi_*(\tilde{\alpha})$ è un sollevamento del cammino α. Quindi, dalla definizione, $(\varphi\tilde{x})\cdot\alpha$ è il punto finale del cammino $\varphi_*(\tilde{\alpha})$, ovvero $(\varphi\tilde{x})\cdot\alpha = \varphi(\tilde{x}\cdot\alpha)$, come richiesto.

Teorema 17. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X. Allora $A(\tilde{X})$ è isomorfo al gruppo degli automorfismi dell'insieme $p^{-1}(x), x \in X$, considerato come spazio su cui agisce a destra $\pi(X, x)$.*

Dimostrazione: Se φ è un automorfismo di $(\tilde{X}, p)$, allora la restrizione di φ a $p^{-1}(x)$, per quanto visto nella Proposizione 2, è un automorfismo di $p^{-1}(x)$ come spazio su cui agisce a destra $\pi(X, x)$. Inoltre, dal Corollario 8 segue che ogni automorfismo φ è completamente determinato dalla sua restrizione a $p^{-1}(x)$. In altre parole, l'applicazione $\varphi \to \varphi|_{p^{-1}(x)}$, che a φ associa la sua restrizone a $p^{-1}(x)$, è un monomorfismo di $A(\tilde{X})$ nel gruppo degli automorfismi di $p^{-1}(x)$ su cui agisce a destra $\pi(X, x)$. Essendo inoltre l'applicazione $\varphi \to \varphi|p^{-1}(x)$ un epimorfismo (si veda [4] p.163), abbiamo concluso la dimostrazione.

Corollario 9. *Per ogni punto $x \in X$ e per ogni $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$, il gruppo $A(\tilde{X})$ è isomorfo al gruppo quoziente $N[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})]/p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$, dove $N[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})]$ denota il normalizzatore del sottogruppo $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ in $\pi(X, x)$.*

Dimostrazione: Si ottiene applicando il Teorema 16 al Teorema 17.

Corollario 10. *Se $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ è un sottogruppo normale di $\pi(X, x)$ (ovvero il rivestimento è regolare), allora $A(\tilde{X}, p)$ è isomorfo al gruppo quoziente $\pi(X, x)/p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ per ogni $x \in X$ e per ogni $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$.*

Dimostrazione: Segue dal Corollario 9, essendo in questo caso $N[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})] = \pi(X, x)$.

Corollario 11. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento universale di X. Allora $A(\tilde{X})$ è isomorfo a $\pi(X, x)$.*

Dimostrazione Segue dal Corollario 10 avendosi $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}) = 1$.

Teorema 18. *Sia $(\tilde{X}, p)$ un rivestimento di X, allora $A(\tilde{X})$ agisce in modo propriamente discontinuo su $\tilde{X}$.*

Dimostrazione: Sia $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $\tilde{U}$ un aperto di $\tilde{X}$ contenente $\tilde{x}$ tale che $p|\tilde{U} : \tilde{U} \to p(\tilde{U})$ sia un omeomorfismo. Dimostriamo che per ogni φ di $A(\tilde{X})$ diversa dall'identità, si ha $\varphi(\tilde{U}) \cap \tilde{U} = \emptyset$. Supponiamo per assurdo che $\tilde{y} \in \tilde{U} \cap \varphi(\tilde{U})$; poichè $\tilde{y} \in \varphi(\tilde{U})$, esiste $\tilde{z} \in \tilde{U}$ tale che $\tilde{y} = \varphi(\tilde{z}) \neq \tilde{z}$. Ma allora $p(\tilde{y}) = p(\varphi(\tilde{z})) = p(\tilde{z})$ (perchè φ è un automorfismo). Ma $p|_{\tilde{U}}$ è iniettiva e quindi $\tilde{y} = \tilde{z}$, che è assurdo.

2.7 Rivestimento tra varietà differenziabili

Definizione 29. *Una* varietà topologica *M di dimensione n è uno spazio topologico che soddisfa le seguenti proprietà:*

i) M è di Hausdorff;

ii) M possiede una base numerabile di aperti;

iii) M è localmente euclideo, ovvero per ogni punto $x \in M$, esiste un intorno aperto di x omeomorfo a un aperto di $\boldsymbol{R}^n$.

Definizione 30. *Una* struttura differenziabile *su una varietà topologica di dimensione n è una famiglia di intorni coordinati $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, con φ_α un omeomorfismo di U_α in un aperto di $\boldsymbol{R}^n$, tale che:*

i) $\cup_\alpha U_\alpha = M$;

ii) per ogni coppia α, β, con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, l'applicazione $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ è un diffeomorfismo.

Una varietà topologica con una una struttura differenziabile è detta varietà differenziabile.

Definizione 31. *Sia M una varietà differenziabile. Una funzione differenziabile $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ è chiamata* curva *(differenziabile) in M. Supponiamo che $\alpha(0) = x \in M$, e sia D l'insieme delle funzioni su M che sono differenziabili in x. Il vettore tangente alla curva α in $t = 0$ è una funzione $\alpha'(0) : D \to \boldsymbol{R}$ data da*

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}, \quad f \in D.$$

Un vettore tangente in x è il vettore tangente in $t = 0$ di qualche curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = x$. L'insieme di tutti i vettori tangenti a M in x è indicato con T_xM ed è chiamato lo spazio tangente *di M in x.*

Proposizione 3. *Siano M e N due varietà differenziabili di dimensione m ed n rispettivamente, e sia $\varphi : M \to N$ un'applicazione differenziabile. Per ogni $x \in M$ e per ogni $v \in T_xM$, si scelga una curva differenziabile $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = v$. Si prenda $\beta = \varphi \circ \alpha$. L'applicazione $d\varphi_x : T_xM \to T_{\varphi(x)}N$ data da $d\varphi_x(v) = \beta'(0)$ è un'applicazione lineare che non dipende dalla scelta di α.*

Questa proposizione, data senza dimostrazione (si veda [2]), permette di dare la seguente definizione:

Definizione 32. *L'applicazione lineare $d\varphi_x$ definita nella Proposizione 3 è chiamata il differenziale di φ in x.*

Sino ad ora, gli oggetti a cui abbiamo applicato la teoria dei rivestimenti, sono stati gli spazi topologici X e $\tilde{X}$. Esiste però un teorema, detto *Teorema di Poincarè-Volterra per i rivestimenti*, che assicura che data una varietà topologica X, è possibile costruire un rivestimento $(\tilde{X}, p)$ di X, tale che anche $\tilde{X}$ sia una varietà topologica.

Dimostrare che $\tilde{X}$ è localmente euclideo è semplice. Infatti, si prenda $\tilde{x} \in \tilde{X}$ con $p(\tilde{x}) = x$ e sia U un aperto banalizzante di x interamente contenuto in una carta locale; esiste allora un omeomorfismo $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$. Per definizione di rivestimento, sia $\tilde{U}_j$ l'aperto di $\tilde{X}$ contenente $\tilde{x}$ tale che l'applicazione $p|_{\tilde{U}_j} : \tilde{U}_j \to U$ sia un omeomorfismo; allora la composizione $\varphi \circ p|_{\tilde{U}_j}$ è un omeomorfismo dall'aperto $\tilde{U}_j$ di $\tilde{X}$ in un aperto di $\mathbf{R}^n$.

E' invece più complicato dimostrare che $\tilde{X}$ è di Hausdorff e che possiede una base numerabile di aperti (si veda [6], p.271).

Dopo aver dotato il rivestimento di una struttura topologica mediante il teorema di Poincar-Volterra, è semplice dimostrare che se X è una varietà differenziabile, allora il rivestimento $(\tilde{X}, p)$ di X può essere costruito in maniera tale che anche $\tilde{X}$ sia una varietà differenziabile e p sia un diffeomorfismo locale.

La dimostrazione si avvale di un ragionamento simile al precedente. Sia $\tilde{x} \in \tilde{X}$ tale che $p(\tilde{x}) = x$ e supponiamo che l'aperto banalizzante U di $x \in X$ sia interamente contenuto in una carta locale, allora $\varphi : U \to \mathbf{R}^n$ è un omeomorfismo. Sia $\tilde{U}_j \in p^{-1}(U)$, con $\tilde{x} \in \tilde{U}_j$, e definiamo $p|\tilde{U}_j : \tilde{U}_j \to U$ in modo tale che sia un diffeomorfismo se e solo se lo è la composizione $\varphi \circ p$. In questo modo otteniamo sia che il cambio di carta locale in $\tilde{X}$ sia un diffeomorfismo, sia che p sia un diffeomorfismo locale.

Una conseguenza importante è che il teorema di sollevamento dei cammini (e conseguentemente il teorema di sollevamento delle omotopie) è valido anche per curve differenziabili. Infatti sia $\alpha : I \to X$ una curva differenziabile e $\tilde{\alpha} : I \to \tilde{X}$ il suo sollevamento. Utilizzando il Lemma 10 sul numero di Lebesgue, si consideri una partizione dell'intervallo I: $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ tale che ogni $\alpha|_{[t_{i-1}, t_i]} = \alpha^i$, con $i = 1, \ldots, n$ sia interamente contenuta in un aperto banalizzante U_i, allora il sollevamento di α^i, ovvero $\tilde{\alpha}^i = \tilde{\alpha}|_{[t_{i-1}, t_i]}$, è interamente contenuto in $\tilde{U}_i$ ed è differenziabile perchè composizione delle due applicazioni differenziabili α e $p|_{\tilde{U}_i}^{-1}$, essendo $p|_{\tilde{U}_i}$ un diffeomorfismo. Rimane quindi da verificare la differenziabilità di $\tilde{\alpha}$ nei punti $\tilde{\alpha}(t_i)$. Ma è facile vedere che nemmeno in questi punti abbiamo problemi. Infatti, $\alpha|_{(t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon)}$ è differenziabile ed è interamente contenuta nell'intersezione di U_i e U_{i+1}, perciò

$$\tilde{\alpha}|_{(t_i-\varepsilon,t_i+\varepsilon)} = p|_{\tilde{U}_i}^{-1}\alpha|_{(t_i-\varepsilon,t_i+\varepsilon)}$$

è differenziabile perchè composizione di applicazioni differenziabili; lo stesso risultato si ottiene sollevando l'archetto mediante $p|_{\tilde{U}_{i+1}}^{-1}$.

Nel prossimo capitolo considereremo varietà differenziabili dotate di una metrica, ovvero varietà Riemanniane.

Capitolo 3

Richiami di Geometria Riemanniana

Definizione 33. *Una* metrica Riemanniana *su una varietá differenziabile M è una corrispondenza che associa a ogni punto x di M un prodotto scalare g_x sullo spazio tangente T_xM, che varia differenziabilmente in questo senso:*

Se $\boldsymbol{x} : U \subset \boldsymbol{R}^n \to M$ è un sistema di coordinate per x, con $\boldsymbol{x}(x_1, \ldots, x_n) = y \in \boldsymbol{x}(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(y) = d\boldsymbol{x}_y(0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, allora $g(\frac{\partial}{\partial x_i}(y), \frac{\partial}{\partial x_j}(y))_y = g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ è una funzione differenziabile su U. La funzione g_{ij} è chiamata la rappresentazione locale della metrica Riemanniana *nel sistema di coordinate $\boldsymbol{x} : U \subset \boldsymbol{R}^n \to M$. Una varietà differenziabile con una metrica riemanniana è chiamata* varietà Riemanniana.

Definizione 34. *Siano M ed N due varietá Riemanniane. Un diffeomorfismo $f : M \to N$ è chiamato* isometria *se:*

$$\text{(1)} \quad g(u, v)_x = g(df_x(u), df_x(v))_{f(x)}, \quad \forall x \in M, \quad u, v \in T_xM.$$

Definizione 35. *Siano M e N due varietà Riemanniane. Un'applicazione differenziabile $f : M \to N$ è un'* isometria locale in $x \in M$ *se esiste un intorno $U \subset M$ di x tale che $f : U \to f(U)$ sia un diffeomorfismo che soddisfa (1).*

E' comune dire che una varietà riemanniana M è *localmente isometrica* a una varietà riemanniana N se, per ogni $x \in M$, esiste un intorno U di x in M e un'isometria locale $f : U \to f(U) \subset N$.

Definizione 36. *Una* curva differenziabile a tratti *è un'applicazione continua $c : [a, b] \subset \boldsymbol{R} \to M$ che soddisfa la seguente condizione: esiste una partizione $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b$ di $[a, b]$ tale che le restrizioni $c|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i = 1, \ldots, k$, sono differenziabili.*

Definizione 37. *Un* campo di vettori *V lungo una curva $c : I \to M$ è un'applicazione differenziabile che associa ad ogni $t \in I$ un vettore tangente $V(t) \in T_{c(t)}M$. Dire che V è differenziabile vuol dire che per ogni funzione differenziabile f su M, la funzione $t \mapsto V(t)f$ è una funzione differenziabile su I. Il vettore tangente $dc(\frac{d}{dt})$, denotato con $\frac{dc}{dt}$, $\dot{c}(t)$ o $c'(t)$, è chiamato* campo dei vettori velocità*.*

La restrizione di una curva c a un intervallo chiuso $[a,b] \subset I$ è chiamato *segmento*. Se M è una varietà Riemanniana, definiamo la lunghezza del segmento come

$$l_a^b(c) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}dt$$

Definizione 38. *Il* commutatore $[,]$ *è l'applicazione* $[,] : TM \times TM \to TM$ *definita da $[X,Y] = XY - YX$.*

Osservazione 5. Il commutatore $[,]$ soddisfa le seguenti proprietà, elencate senza dimostrazione:

(a) $[X,Y] = -[Y,X]$ (anticommutatività);
(b) $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ (linearità);
(c) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ (Identità di Jacobi);
(d) $[fX, gY] = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$;
(e) se F è un diffeomorfismo, allora $[F_*X, F_*Y] = F_*[X,Y]$.

Introduciamo ora lo strumento che consente di derivare campi di vettori su una varietà.

Definizione 39. *Sia M una varietà differenziabile e indichiamo con $T(M)$ l'insieme dei campi di vettori su M di classe C^∞. Una* connessione affine ∇ *su M è un'applicazione*

$$\nabla : T(M) \times T(M) \to T(M)$$

denotata con $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ che soddisfa le seguenti proprietà:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

ii) $\nabla_X(\alpha Y + \beta Z) = \alpha\nabla_X Y + \beta\nabla_X Z$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

dove $X, Y, Z \in T(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ e $\alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$.

Proposizione 4. *Sia (M, ∇) una varietà differenziabile con una connessione affine ∇. Esiste allora un'unica corrispondenza che associa a ogni campo di vettori V lungo la curva differenziabile $c : I \to M$ un altro campo di vettori lungo c, denotato con $\frac{DV}{dt}$, chiamato la derivata covariante di V lungo c, tale che:*

i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;

ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *dove W è un altro campo di vettori lungo c e $f \in C^\infty(I)$;*

iii) Se V è la restrizione di un campo di vettori $Y \in T(M)$ alla curva c, cioè $V(t) = Y(c(t))$, allora

$$\frac{DV}{dt} = (\nabla_{\dot{c}(t)} Y)(c(t)).$$

Dimostrazione: Supponiamo che esista la derivazione $\frac{D}{dt}$ soddisfacente le tre proprietà, dimostriamo allora che unica esibendo una formula che la descrive in maniera univoca.

Sia $\gamma : I \to M$ una curva, e (U, φ) una carta locale che interseca l'immagine della curva $\gamma(t)$. Localmente la curva è $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ e $\dot{\gamma}(t) = \dot{x}^i(t) E_i(\gamma(t))$, dove gli $E_i(\gamma(t))$ sono i campi coordinati di U ristretti alla curva. Sia Y un campo lungo la curva $\gamma(t)$, $Y = Y^j(t) E_j(\gamma(t))$ e supponiamo che esista $\frac{DY}{dt}$ che soddisfa le tre proprietà, allora in coordinate locali si ha

$$\frac{DY}{dt} = \frac{D}{dt}(y^j E_j) = \dot{y^j} E_j + y^j \frac{DE_j}{dt}$$

e dalla (iii) si ha

$$\frac{DE_j}{dt} = (\nabla_{\gamma \dot{(t)}} E_j)(\gamma(t)) = (\nabla_{\dot{x}^i E_i} E_j)_\gamma = \dot{x}^i \nabla_{E_i} E_j$$

Quindi

$$(1) \qquad \frac{DY}{dt} = \dot{x}^j E_j + y^j \dot{x}^i \nabla_{E_i} E_j.$$

Verifichiamo ora l'esistenza. Consideriamo una carta locale U e definiamo in essa la derivazione $\frac{DY}{dt}$ come in (1), sia V un'altra carta locale tale che $U \cap V \neq \emptyset$, e definiamo anche in V $\frac{DY}{dt}$ come in (1). Le due definizioni nell'intersezione coincidono per l'unicità di $\frac{DY}{dt}$ in U. E' quindi possibile estendere la definizione a tutta M.

Teorema 19. *(di Levi-Civita) Data (M, g), esiste un'unica connessione affine ∇ su M che soddisfa le condizioni:*

i) *∇ è simmetrica, ovvero $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$;*

ii) *∇ è compatibile con la metrica g, ovvero $Zg(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$.*

Questa connessione è detta di Levi-Civita o Riemanniana.

Dimostrazione: Supponiamo che esista una tale ∇ e dimostriamone l'unicità.

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ Yg(Z,X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\ Zg(X,Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \end{aligned}$$

sommando i primi due e sottraendo il terzo si ottiene

$$(1) \quad g(\nabla_Y X, Z) = \begin{array}{l} \frac{1}{2}\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ -g(X,[Y,Z]) - g(Y,[X,Z]) - g([X,Y],Z)\} \end{array}$$

Questa espressione mostra che ∇ è univocamente determinata dalla metrica g; quindi se esiste, essa è unica. Per dimostrare l'esistenza di una tale ∇, è sufficiente che la definisca come nella (1).

Una conseguenza importante dell'unicità della connessione di Levi-Civita è la seguente:

Proposizione 5. *Sia $F : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ un'isometria tra due varietà Riemanniane. Allora*

i) *F porta la connessione di Levi-Civita ∇ di M nella connessione di Levi-Civita $\tilde{\nabla}$ di $\tilde{M}$ nel senso che*

$$dF(\nabla_X Y) = \tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y) \quad \forall X, Y \in T(M);$$

ii) *se σ è una curva in M e $\tilde{\sigma} = F \circ \sigma$ allora, per ogni campo di vettori V lungo la curva σ si ha*

$$dF(\frac{DV}{dt}) = \frac{\tilde{D}}{dt}(dF(V))$$

dove $\frac{\tilde{D}}{dt}$ è la derivata covariante associata a $\tilde{\nabla}$.

Dimostrazione:

i) Definiamo un'applicazione $F^*\tilde{\nabla} : T(M) \times T(M) \to T(M)$ ponendo, per ogni $X, Y \in T(M)$

$$(F^*\tilde{\nabla})_X Y = (dF)^{-1}(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y)).$$

E' immediato verificare che $F^*(\tilde{\nabla})$ è una connessione. Dimostriamo ora la compatibilità con la metrica, utilizzando il fatto che F è un'isometria.

$$\begin{aligned} & g((F^*\tilde{\nabla})_X Y, Z) + g(Y, (F^*\tilde{\nabla})_X Z) = \\ & \quad = g((dF)^{-1}(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y)), Z) + g(Y, (dF)^{-1}(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Z))) \\ & \quad = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y), dF(Z)) + \tilde{g}(dF(Y), \tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Z)) \\ & \quad = dF(X)\tilde{g}(dF(Y), dF(Z)) = dF(X)(g(Y,Z) \circ F^{-1}) \\ & \quad = (dF)^{-1}(dF)(X) g(Y,Z) = X g(Y,Z). \end{aligned}$$

Verifichiamo ora la simmetria:

$$\begin{aligned} & (F^*\tilde{\nabla})_X Y - (F^*\tilde{\nabla})_Y X - [X,Y] = \\ & \quad = (dF)^{-1}(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y)) - (dF)^{-1}(\tilde{\nabla}_{dF(Y)} dF(X)) - [X,Y] \\ & \quad = (dF)^{-1}(\tilde{\nabla}_{dF(X)} dF(Y) - \tilde{\nabla}_{dF(Y)} dF(X)) - [X,Y] \\ & \quad = (dF)^{-1}([dF(X), dF(Y)]) - [X,Y] \\ & \quad = (dF)^{-1}(dF)[X,Y] - [X,Y] = 0. \end{aligned}$$

Dal Teorema 19 di Levi-Civita concludiamo che $F^*\tilde{\nabla} = \nabla$.

ii) Definiamo

$$(F^*\frac{\tilde{D}}{dt})(V) = (dF)^{-1}(\frac{\tilde{D}}{dt} dF(V))$$

e verifichiamo che soddisfa le tre condizioni della Proposizione 4.

- $$\begin{aligned} (F^*\tfrac{\tilde{D}}{dt})(V+W) &= (dF)^{-1}(\tfrac{\tilde{D}}{dt} dF(V+W)) \\ &= (dF)^{-1}(\tfrac{\tilde{D}}{dt}(dF(V) + dF(W))) \\ &= (dF)^{-1}(\tfrac{\tilde{D}}{dt} dF(V) + \tfrac{\tilde{D}}{dt} dF(W)) \\ &= (dF)^{-1}(\tfrac{\tilde{D}}{dt} dF(V)) + (dF)^{-1}(\tfrac{\tilde{D}}{dt} dF(W)) \\ &= (F^*\tfrac{\tilde{D}}{dt})(V) + (F^*\tfrac{\tilde{D}}{dt})(W). \end{aligned}$$

- Sia $f \in C^\infty(I)$, allora

$$\begin{aligned}(F^*\tfrac{\tilde{D}}{dt})(fV) &= (dF)^{-1}(\tfrac{\tilde{D}}{dt}dF(fV)) = (dF)^{-1}(\tfrac{\tilde{D}}{dt}fdF(V)) \\ &= (dF)^{-1}(\tfrac{df}{dt}dF(V) + f\tfrac{\tilde{D}}{dt}dF(V)) = \tfrac{df}{dt}V + fF^*\tfrac{\tilde{D}}{dt}(V).\end{aligned}$$

- Se V è la restrizione di un campo di vettori $Y \in T(M)$ alla curva σ, allora verifichiamo che

$$(F^*\frac{\tilde{D}}{dt})V = (\nabla_{\dot{\sigma}(t)}Y)(\sigma(t)).$$

ricordando che $F^*\tilde{\nabla}_X Y = (dF)^{-1}(\tilde{\nabla}_{dF(X)}dF(Y))$ e che $F^*\tilde{\nabla} = \nabla$.

$$\begin{aligned}(F^*\tfrac{\tilde{D}}{dt})V &= (dF)^{-1}(\tfrac{\tilde{D}}{dt}dF(V)) = (dF)^{-1}((\tilde{\nabla}_{\tilde{\sigma}'}dF(Y))(\tilde{\sigma})) \\ &= ((F^*\tilde{\nabla})_{\sigma'}Y)(\sigma) = (\nabla_{\sigma'}Y)(\sigma).\end{aligned}$$

Quindi per l'unicità della derivata covariante si ha $F^*\frac{\tilde{D}}{dt} = \frac{D}{dt}$, da cui si deduce l'asserzione.

3.1 Geodetiche e loro proprietà di minimo

Definizione 40. *Sia (M, g, ∇). Una curva parametrizzata $\gamma : I \to M$ è una* geodetica *se $\forall t \in I$ si ha*

$$\frac{D\dot{\gamma}(t)}{dt} = 0$$

Osservazione 6. La velocità delle geodetiche è costante. Infatti

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 2g(\frac{D\dot{\gamma}}{dt}, \dot{\gamma}) = 0$$

e quindi $\|\dot{\gamma}\|^2 = cost.$ La lunghezza d'arco s di γ, che parte da un punto fissato t_0, è data da

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\frac{d\gamma}{dt}|dt = c(t - t_0).$$

Quindi il parametro di una geodetica è proporzionale alla lunghezza d'arco.

Teorema 20. *Data (M, g, ∇), siano $x \in M$ e $v_x \in T_xM$. Allora esiste un'unica geodetica passante per x e avente in x velocità v_x, indicata con $\gamma(t, x, v_x)$.*

Dimostrazione: Poniamoci in coordinate locali. Sia U la carta contenente x e sia $\gamma(t, x, v_x)$ la geodetica. Allora

$$\frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \{\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j\} E_k = 0$$

Poichè gli $\{E_k\}$ sono una base di $T_x M$, una loro combinazione lineare è nulla se e solo se sono nulli tutti i coefficienti, ovvero

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

per ogni $k = 1, \ldots, n$. Dando le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x = \gamma(0); \\ v_x = \dot{\gamma}(0) \end{cases}$$

si ottiene un'unica soluzione, ovvero la geodetica.

Lemma 14. *(omogeneità delle geodetiche) Se la geodetica $\gamma(t, y, v)$ è definita su $(-\delta, \delta)$, allora la geodetica $\gamma(t, y, av)$, con $a \in \boldsymbol{R}^+$, è definita sull'intervallo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e*

$$\gamma(t, y, av) = \gamma(at, y, v).$$

Dimostrazione: Sia $h : (\frac{-\delta}{a}, \frac{\delta}{a}) \to M$ la curva definita da $h(t) = \gamma(at, y, v)$. Allora $h(0) = y$ e $\frac{dh}{dt}(0) = av$. Inoltre, poichè $h'(t) = a\gamma'(at, y, v)$,

$$\frac{D}{dt}(\frac{dh}{dt}) = \nabla_{h'(t)} h'(t) = a^2 \nabla_{\gamma'(at,y,v)} \gamma'(at, y, v) = 0,$$

dove, per la prima uguaglianza, estendiamo $h'(t)$ a un intorno di $h(t)$ in M. Quindi, h è una geodetica che passa per y con velocità av nell'istante $t = 0$. Per l'unicità,

$$h(t) = \gamma(at, y, v) = \gamma(t, y, av).$$

Siano $x \in M$, U_x un intorno di x tale che per ogni $y \in U_x$ si abbia $v_y \in T_y^{\varepsilon}(U_x)$, dove $T_y^{\varepsilon}(U_x) = \{v_y \in T_x(U_x) : \|v_y\| < \varepsilon\}$. Sfruttando l'omogeneità delle geodetiche è possibile modificare l'intervallo di definizione delle geodetiche $(-\delta, \delta)$ in modo che $1 \in (-\delta, \delta)$.

Definizione 41. *Definiamo l'*applicazione esponenziale *come*

$$\exp_y : T_y^{\varepsilon} U \to M$$

definita da $\exp_y(v) = \gamma(1, y, v) = \gamma(\|v\|, y, \frac{v}{\|v\|})$.

Geometricamente, $\exp_y(v)$ è il punto di M individuato dalla geodetica che per $t = 0$ passa in y con velocità $\frac{v}{\|v\|}$ e valutando in $t = \|v\|$.

Osservazione 7. E' immediato verificare che la lunghezza dell'arco di geodetica da y a $\exp_y(v)$ è esattamente uguale alla norma del vettore v.

Proposizione 6. *Dato $x \in M$, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\exp_x : B_\varepsilon(0) \subset T_xM \to M$ sia un diffeomorfismo di $B_\varepsilon(0)$ in un aperto U di M, con $B_\varepsilon(0) = \{v \in T_xM : \|v\| < \varepsilon\}$.*

Dimostrazione: Calcoliamo $d(\exp_x)_0$:

$$\begin{aligned} d(\exp_x)_0(v) &= \tfrac{d}{dt}(\exp_x(tv))|_{t=0} &= \tfrac{d}{dt}(\gamma(1, x, tv))|_{t=0} \\ &= \tfrac{d}{dt}(\gamma(t, x, v))|_{t=0} &= v. \end{aligned}$$

ovvero $d(\exp_x)_0$ è l'identità di T_xM, perciò $d(\exp_x)_0$ è un isomorfismo e quindi $\exp_x$ è un diffeomorfismo locale in un intorno di 0.

Enunciamo un lemma, di cui tralasciamo la dimostrazione (si veda [2] p.68).

Lemma 15. *(di simmetria) Se M è una varietà differenziabile con una connessione simmetrica e $s : A \subset \boldsymbol{R}^2 \to M$ è una superficie parametrizzata, allora*

$$\frac{D}{\partial v}\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial s}{\partial v}.$$

Lemma 16. *(di Gauss) Siano $x \in M$ e $v \in T_xM$ tale che sia definita l'applicazione $\exp_x(v)$, e sia $w \in T_xM \approx T_v(T_xM)$. Allora*

$$g((d\exp_x)_v(v), (d\exp_x)_v(w)) = g(v, w).$$

Dimostrazione: Sia $w = w_T + w_N$, dove w_T è la componente parallela a v e w_N è la componente normale a v. Distinguiamo due casi:

- $w = w_T = \lambda v$

$$\begin{aligned} g((d\exp_x)_v(v), (d\exp_x)_v(w)) &= g((d\exp_x)_v(v), (d\exp_x)_v(\lambda v)) \\ &= \lambda g((d\exp_x)_v(v), (d\exp_x)_v(v)) \\ &= \lambda g(v, v) = g(v, w). \end{aligned}$$

- $w = w_N$

  Essendo $g(v, w_N) = 0$ vogliamo dimostrare che $g(d(\exp_x)_v(v), d(\exp_x)_(w)) = 0$. Poichè $\exp_x(v)$ è definito, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\exp_x(u)$ è definito per

$$u = tv(s), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad -\varepsilon < s < \varepsilon,$$

dove $v(s)$ è una curva in T_xM con $v(0) = v$, $v'(0) = w_N$ e $|v(s)| = cost$. Possiamo quindi considerare la superficie parametrizzata $f : A \to M$, con $A = \{(t,s)|0 \leq t \leq 1, -\varepsilon < s < \varepsilon\}$ data da

$$f(t,s) = \exp_x tv(s).$$

Osserviamo che le curve $t \mapsto f(t, s_0)$ sono geodetiche, inoltre

$$g(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})(1,0) = g((d\exp_x)_v(w_N), (d\exp_x)_v(v)) \tag{1}$$

e per ogni (t,s) abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial t} g(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) = g(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) + g(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial t}).$$

Poichè $\frac{\partial f}{\partial t}$ è il vettore tangente di una geodetica, l'ultimo prodotto scalare della precedente formula è nullo. Dalla simmetria della connessione

$$g(\frac{D}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}) = g(\frac{D}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s} g(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}) = 0.$$

Segue che $g(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})$ è indipendente da t. Poichè

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial f}{\partial s}(t,0) = \lim_{t\to 0} (d\exp_x)_{tv} tw_N = 0,$$

concludiamo che $g(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t})(1,0) = 0$, che con la (1) dimostra il lemma.

Definizione 42. *Se* $\exp_x$ *è un diffeomorfismo di un intorno* V *dell'origine in* T_xM, $\exp_x(V) = U$ *è chiamato* intorno normale *di* x. *Definiamo* $\exp_x(B_\varepsilon(0)) = B_\varepsilon(x)$ *la* bolla normale *con centro* x *e raggio* ε. *Dal lemma di Gauss, il bordo della bolla normale è un'ipersuperficie in* M *ortogonale alle geodetiche che escono da* x, *viene indicata con* $S_\varepsilon(x)$ *ed è chiamata* sfera geodetica *in* x. *Le geodetiche in* $B_\varepsilon(x)$ *che iniziano in* x *sono chiamate* geodetiche radiali.

Proposizione 7. *Sia* $x \in M$, U *un intorno normale di* x *e* $B \subset U$ *una bolla normale di centro* x. *Sia* $\gamma : [0,1] \to B$ *un segmento di geodetica con* $\gamma(0) = x$. *Se* $c : [0,1] \to M$ *è una curva differenziabile a tratti che congiunge* $\gamma(0)$ *a* $\gamma(1)$ *allora* $l(\gamma) \leq l(c)$ *e, se vale l'uguaglianza, allora* $\gamma([0,1]) = c([0,1])$.

Dimostrazione: Supponiamo inizialmente che $c([0,1]) \subset B$. Poichè $\exp_x$ è un diffeomorfismo su U, la curva $c(t)$, per $t \neq 0$, può essere scritta in modo unico come $\exp_x(r(t) \cdot v(t)) = f(r(t), t)$, dove $t \to v(t)$ è una curva in T_xM

con $|v(t)| = 1$ e $r : (0,1] \to \mathbf{R}$ è una funzione positiva differenziabile a tratti (possiamo supporre che se $t_1 \in (0,1]$, allora $c(t_1) \neq x$; altrimenti ignoriamo l'intervallo $[0, t_1)$). Segue che, eccetto che per un numero finito di punti,

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Dal Lemma di Gauss, $g(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t}) = 0$. Poichè $|\frac{\partial f}{\partial r}| = 1$,

$$(1) \qquad |\frac{dc}{dt}|^2 = |r'(t)|^2 + |\frac{\partial f}{\partial t}|^2 \geq |r'(t)|^2$$

e così

$$(2) \qquad \int_\varepsilon^1 |\frac{dc}{dt}| dt \geq \int_\varepsilon^1 |r'(t)| dt \geq \int_\varepsilon^1 r'(t) dt = r(1) - r(\varepsilon).$$

Considerando $\varepsilon \to 0$ otteniamo $l(c) \geq l(\gamma)$, perchè $r(1) = l(\gamma)$.

E' chiaro che se la disuguaglianza (1) o la disuguaglianza (2) è stretta, allora $l(c) > l(\gamma)$. Se $l(c) = l(\gamma)$, allora $|\frac{\partial f}{\partial t}| = 0$, cioè $v(t) = cost$ e $|r'(t)| = r'(t) > 0$. Segue che c è una riparametrizzazione monotona di γ, e quindi $c([0,1]) = \gamma([0,1])$.

Se $c([0,1])$ non è contenuta in B, consideriamo il primo punto $t_1 \in (0,1)$ per il quale $c(t_1)$ appartiene al bordo di B. Se ρ è il raggio di B, abbiamo:

$$l(c) \geq l_{[0,t_1]}(c) \geq \rho > l(\gamma).$$

Definizione 43. *Sia $x \in M$, diciamo che un intorno W di x è un* intorno totalmente normale *se esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $y \in W$,* $\exp_y$ *è un diffeomorfismo su $B_\delta(0) \subset T_yM$ e* $\exp_y(B_\delta(0)) \supset W$*, cioè se W è un intorno normale di ogni suo punto.*

Teorema 21. *Per ogni $x \in M$ esiste un intorno totalmente normale di x.*

Per la dimostrazione si veda [2] p.72.

Proposizione 8. *In un intorno totalmente normale W esiste un'unica geodetica che congiunge due suoi punti e che realizza la minima distanza.*

Dimostrazione: Siano $x, y \in W$ e consideriamo la bolla normale di x. Poichè W è contenuto nella bolla normale di x e $y \in W$, allora y appartiene alla bolla normale di x, e questo vale per ogni $y \in W$. x è il centro della sua bolla normale e quest'ultima può essere ricoperta con geodetiche radiali uscenti da x; consideriamo quella che collega x e y. Ma una geodetica nella sua bolla normale è il minimo della distanza, e quindi abbiamo concluso.

Corollario 12. *Se una curva differenziabile a tratti $\gamma : [a, b] \to M$, con parametro proporzionale all'ascissa curvilinea, ha lunghezza minore o uguale alla lunghezza di ogni altra curva differenziabile a tratti che congiunge $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$, allora γ è una geodetica. In particolare, γ è regolare.*

Dimostrazione: Sia $t \in [a, b]$ e sia W un intorno totalmente normale di $\gamma(t)$. Esiste un intervallo chiuso $I \subset [a, b]$, con interno non vuoto, $t \in I$, tale che $\gamma(I) \subset W$; la restrizione $\gamma_I : I \to W$ è allora una curva differenziabile a tratti che collega due punti di una bolla normale. Dalle ipotesi e dalla Proposizione 7, $l(\gamma_I)$ è uguale alla lunghezza della geodetica radiale che collega questi due punti. Ancora dalla Proposizone 7 e dal fatto che γ_I è parametrizzata proporzionalmente all'ascissa curvilinea, γ_I è una geodetica su I,e quindi in t.

Proposizione 9. *Sia $F : (M, g) \to (N, \tilde{g})$ un'isometria tra due varietà Riemanniane. Allora F manda geodetiche di M in geodetiche di N e ne conserva la lunghezza.*

Dimostrazione: Sia $\gamma : I \to M$ una geodetica, vogliamo dimostrare che $\frac{\tilde{D}}{dt}(dF(\dot{\gamma})) = 0$. Dalla proposizione 2.3 si ha

$$\frac{\tilde{D}}{dt}(dF(\dot{\gamma})) = dF(\frac{D}{dt}\dot{\gamma}) = dF(0) = 0.$$

Che la lunghezza venga conservata è una conseguenza ovvia del fatto che sia un'isometria.

Osservazione 8. La Proposizione 9 è valida anche se $F : M \to N$ è un'isometria locale, in quanto il suddetto ragionamento può essere applicato a ogni restrizione di F che sia un'isometria. Consideriamo quindi una partizione di I, $0 = t_0 < \ldots < t_k = 1$ tale che ogni $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $i = 1, \ldots, k$ sia contenuto in un aperto $U_i \subset M$ e $F|_{U_i} : U_i \to F(U_i)$ sia un'isometria. In ognuno di questi U_i è valida la Proposizione 9. Assicuriamoci che non ci sono problemi nemmeno nelle intersezioni. Infatti, per ogni punto d'intersezione di due segmenti di curva esiste un intorno , interamente contenuto nell'intersezione dei due relativi aperti, in cui la derivata covariante è nulla e applicando la Proposizione 9 è nulla anche nell'immagine. Per quanto riguarda la lunghezza della curva, mediante ogni $F|_{U_i}$ si ottengono segmenti di geodetica della stessa lunghezza, per cui dalla somma delle lunghezze dei k segmenti, sia in M che in $F(M)$, otteniamo lo stesso risultato.

3.2 Intorni convessi

Ogni punto $x \in M$ possiede un intorno totalmente normale, e quindi presi due qualsiasi punti al suo interno, esiste una geodetica che li collega e che ha lunghezza minima. Ma tale geodetica potrebbe non giacere interamente in questo intorno. Definiamo quindi *strettamente convesso* un sottoinsieme S di M tale che, presi due qualunque punti x_1, x_2 nella chiusura di S, esiste un'unica geodetica γ che collega x_1 e x_2, con lunghezza minima, e il cui interno è interamente contenuto in S.

Lemma 17. *Per ogni $x \in M$ esiste un numero $c > 0$ tale che ogni geodetica tangente in $y \in M$ alla sfera geodetica $S_r(x)$ di raggio $r < c$, sta fuori dalla bolla normale $B_r(x)$, per qualche intorno di y.*

Per la dimostrazione di questo lemma si veda [2] p.75, e utilizziamolo per dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 10. *(intorni convessi) Per ogni $x \in M$ esiste un numero $\beta > 0$ tale che la bolla normale $B_\beta(x)$ è strettamente convessa.*

Dimostrazione: Sia c il numero dato nel Lemma 17. Si scelga un $\delta > 0$ e un intorno totalmente normale W tale che $\delta < \frac{c}{2}$. Si prenda $\beta < \delta$ tale che $B_\beta(x) \subset W$. Vogliamo dimostrare che $B_\beta(x)$ è strettamente convesso. Siano q_1 e q_2 appartenenti alla chiusura di $B_\beta(x)$ e sia γ l'unica geodetica di lunghezza $< 2\delta < c$ che collega q_1 e q_2. E' chiaro che γ è contenuta in $B_c(x)$. Se l'interno di γ non fosse contenuto in $B_\beta(x)$, esisterebbe un punto m nell'interno di γ dove si otterrebbe il massimo della distanza r da x a γ. I punti di γ in un intorno di m rimarrebbero nella chiusura di $B_r(x)$. Poichè $m \in B_c(x)$ viene contraddetto il Lemma 17 e la nostra proposizione è quindi dimostrata.

Definizione 44. *Un* triangolo geodetico T *in una varietà Riemanniana è un insieme formato da tre segmenti di geodetiche, parametrizzate con ascissa curvilinea e minimizzanti, chiamate* lati *del triangolo*

$$\gamma_1 : [0, l_1] \to M, \quad \gamma_2 : [0, l_2] \to M, \quad \gamma_3 : [0, l_3] \to M$$

tali che $\gamma_i(l_i) = \gamma_{i+1}(0)$, con $i = 1, 2$ e $\gamma_3(l_3) = \gamma_1(0)$. I punti finali delle geodetiche sono chiamati vertici *di* T*. Gli angoli dei corrispondenti vertici sono*

$$\angle(-\gamma_i'(l_i), \gamma_{i+1}'(0)), \quad i = 1, 2$$

e

$$\angle(-\gamma_3'(l_3), \gamma_1'(0)).$$

3.3 Curvatura

Definizione 45. *La* curvatura R *di una varietà Riemanniana* M *è una corrispondenza che associa a ogni coppia* $X, Y \in T(M)$ *un'applicazione* $R(X,Y) : T(M) \to T(M)$ *data da*

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

dove $Z \in T(M)$ *e* ∇ *è la connsessione Riemanniana di* M*.*

Osservazione 9. Elenchiamo senza dimostrazione le proprietà di R:

i) R è bilineare in $T(M) \times T(M)$ cioè:

   $R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1)$,

   $R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2)$

   con $f, g \in C^\infty(M)$ e $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in T(M)$.

ii) Per ogni $X, Y \in T(M)$, l'operatore di curvatura $R(X,Y) : T(M) \to T(M)$ è lineare, cioè

   $R(X,Y)(Z + W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W$,

   $R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z$

   con $f \in C^\infty(M)$ e $Z, W \in T(M)$.

iii) L'identità di Bianchi:

   $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

Proposizione 11. *(a)* $g(R(X,Y)Z,T) + g(R(Y,Z)X,T) + g(R(Z,X)Y,T) = 0$*;*

(b) $g(R(X,Y)Z,T) = -g(R(Y,X)Z,T)$*;*

(c) $g(R(X,Y)Z,T) = -g(R(X,Y)T,Z)$*;*

(d) $g(R(X,Y)Z,T) = g(R(Z,T)X,Y)$*.*

Dimostrazione:

(a) Deriva dall'Identità di Bianchi;

(b) segue dalla definizione di R;

(c) è equivalente a $g(R(X,Y)Z,Z) = 0$, quindi:

$$g(R(X,Y)Z,Z) = g(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, Z).$$

Ma

$$g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) = Yg(\nabla_X Z, Z) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z),$$

e

$$g(\nabla_{[X,Y]} Z, Z) = \frac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z).$$

Quindi

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,Z) &= Yg(\nabla_X Z, Z) - Xg(\nabla_Y Z, Z) + \tfrac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) \\ &= \tfrac{1}{2}Y(Xg(Z,Z)) - \tfrac{1}{2}X(Yg(Z,Z)) + \tfrac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) \\ &= -\tfrac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) + \tfrac{1}{2}[X,Y]g(Z,Z) = 0 \end{aligned}$$

(d) utilizziamo la (a):

$$g(R(X,Y)Z,T) + g(R(Y,Z)X,T) + g(R(Z,X)Y,T) = 0$$

$$g(R(Y,Z)T,X) + g(R(Z,T)Y,X) + g(R(T,Y)Z,X) = 0$$

$$g(R(Z,T)X,Y) + g(R(T,X)Z,Y) + g(R(X,Z)T,Y) = 0$$

$$g(R(T,X)Y,Z) + g(R(X,Y)T,Z) + g(R(Y,T)X,Z) = 0$$

sommando le precedenti equazioni otteniamo

$$2g(R(Z,X)Y,T) + 2g(R(T,Y)Z,X) = 0$$

e quindi

$$g(R(Z,X)Y,T) = g(R(Y,T)Z,X).$$

Proposizione 12. *Sia $\sigma \subset T_xM$ un sottospazio bidimensionale dello spazio tangente T_xM e siano $X, Y \in \sigma$ due vettori linearmente indipendenti. Allora*

$$K(X,Y) = \frac{g(R(X,Y)X,Y)}{\|X\|^2\|Y\|^2 - g(X,Y)^2}$$

non dipende dalla scelta dei vettori $X, Y \in \sigma$.

Dimostrazione: Per evitare calcoli, osserviamo che possiamo passare dalla base $\{X,Y\}$ di σ a un'altra base $\{X', Y'\}$ iterando le seguenti trasformazioni elementari:

(a) $\{X,Y\} \to \{Y,X\}$

(b) $\{X, Y\} \to \{\lambda X, Y\}$

(c) $\{X, Y\} \to \{X + \lambda Y, Y\}$.

E' immediato verificare che $K(X, Y)$ è invariante per tali trasformazioni.

Definizione 46. *Dato un punto $x \in M$ e un sottospazio bidimensionale $\sigma \subset T_x M$, il numero reale $K(X, Y) = K(\sigma)$, dove $\{X, Y\}$ è una qualunque base di σ, è chiamata* curvatura sezionale *di σ in x.*

3.4 Varietà complete

Definizione 47. *Una varietà Riemanniana è (geodeticamente)* completa *se, per ogni $x \in M$, l'applicazione esponenziale* $\exp_x$ *è definita per ogni $v \in T_x M$, ovvero se ogni geodetica $\gamma(t)$ che parte da x è definita per tutti i valori del parametro $t \in \boldsymbol{R}$.*

Definizione 48. *La* distanza $d(x, y)$ *è definita come l'estremo inferiore delle lunghezze di tutte le curve $f_{x,y}$ differenziabili a tratti che collegano x e y.*

Proposizione 13. *Con la distanza d, M è uno spazio metrico, ovvero:*

i) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

iii) $d(x, y) \geq 0$, *a* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Dimostrazione: Le prime tre derivano dalla definizione di estremo inferiore, rimane solo da dimostrare che se $d(x, y) = 0$ allora $x = y$. Supponiamo il contrario e prendiamo una bolla normale $B_r(x)$ che non contiene y. Poichè $d(x, y) = 0$, esiste una curva c che collega x e y di lunghezza minore di r. Ma il segmento di c contenuto in $B_r(x)$ ha certamente lunghezza maggiore o uguale a r, per la Proposizione 7, e questa è una contraddizione.

Teorema 22. *(Hopf - Rinow) Sia M una varietà Riemanniana e sia $x \in M$. Le seguenti asserzioni sono equivalenti:*

i) $\exp_x$ *è definita su tutto il $T_x M$;*

ii) i sottoinsiemi chiusi e limitati di M sono compatti;

iii) M è completa come spazio metrico;

iv) M è geodeticamente completa;

Inoltre, ognuna delle precedenti asserzioni implica che

v) per ogni $y \in M$ esiste una geodetica γ che collega x a y, con $l(\gamma) = d(x, y)$.

Dimostrazione:

(i) $\Rightarrow$ (v). Sia $d(x, y) = r$ e sia $B_\delta(x)$ una bolla normale in x, con $S_\delta(x) = S$ bordo di $B_\delta(x)$. Sia x_0 un punto dove la funzione continua $d(y, z)$, $z \in S$, raggiunge un minimo. Allora $x_0 = \exp_x(\delta v)$, dove $v \in T_xM$ e $|v| = 1$. Sia γ una geodetica data da $\gamma(s) = \exp_x(sv)$. Dimostreremo che $\gamma(r) = y$. Per dimostrare questo fatto consideriamo l'equazione

$$(1) \qquad d(\gamma(s), y) = r - s$$

e sia $A = \{s \in [0, r]| \quad (1)\text{è valida}\}$. A è non vuoto, perchè (1) è verificata almeno per $s = 0$. Inoltre, A è chiuso in $[0, r]$. Sia $s_0 \in A$. Dimostreremo che se $s_0 < r$, allora (1) è valida per $s_0 + \delta'$, dove $\delta' > 0$ è sufficientemente piccolo. Questo implica che $\sup A = r$; poichè A è chiuso, allora $r \in A$, che mostra che $\gamma(r) = y$.

Per dimostrare che (1) è vera per $s_0 + \delta'$, consideriamo $B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ una bolla normale in $\gamma(s_0)$, sia S' il suo bordo e sia x'_0 un punto dove $d(z, y)$, con $z \in S'$, ha un minimo. E' sufficiente mostrare che $x'_o = \gamma(s_0 + \delta')$. Infatti, se $x'_0 = \gamma(s_0 + \delta')$, poichè

$$d(\gamma(s_0), y) = \delta' + \min d(z, y) = \delta' + d(x'_0, y)$$

e

$$d(\gamma(s_0), y) = r - s_0,$$

abbiamo

$$(2) \quad r - s_0 = \delta' + d(x'_0, y) = \delta' + d(\gamma(s_0 + \delta'), y),$$

o che

$$d(\gamma(s_0 + \delta'), y) = r - (s_0 + \delta'),$$

che è la (1) per $s_0 + \delta'$.

Per dimostrare che $\gamma(s_0 + \delta') = x'_0$, osserviamo che, dalla disuguaglianza triangolare e dalla prima uguaglianza della (2),

$$d(x, x'_0) \geq d(x, y) - d(y, x'_0) = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'.$$

D'altra parte, la curva spezzata che collega x e x'_0, che va da x a $\gamma(s_0)$ mediante la geodetica γ, e da $\gamma(s_0)$ a x'_0 mediante la geodetica radiale, ha lunghezza uguale a $s_0 + \delta'$. Perciò $d(x, x_0') = s_0 + \delta'$, e tale curva, per il Corollario 12, è una geodetica. In particolare, la curva non è spezzata, quindi $\gamma(s_0 + \delta') = x_0'$. Questo conclude la dimostrazione.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sia $A \subset M$ chiuso e limitato. Poichè A è limitato, $A \subset B$, dove B è una bolla di centro x nella metrica d. Dalla (v), esiste una bolla $B_r(0) \subset T_xM$, tale che $B \subset \exp_x \overline{B_r(0)}$. Essendo l'immagine di un compatto mediante un'applicazione continua, $\exp_x \overline{B_r(0)}$ è compatto. Quindi A è un insieme chiuso contenuto in un compatto, ed è perciò compatto.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). E' sufficiente osservare che un sottoinsieme $\{x_n\}$ formato da una successione di Cauchy è limitato, quindi ha chiusura compatta per la (ii). Così $\{x_n\}$ contiene una sottosuccessione convergente e, essendo di Cauchy, converge.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Supponiamo che M non sia geodeticamente completa. Allora qualche geodetica γ di M, parametrizzata con ascissa curvilinea, è definita per $s < s_0$ e non è definita per s_0. Sia $\{s_n\}$ una successione convergente a s_0, con $s_n < s_0$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste un indice n_0 tale che se $n, m > n_0$ allora $|s_n - s_m| < \varepsilon$. Segue che

$$d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq |s_n - s_m| < \varepsilon,$$

e quindi la successione $\{\gamma(s_n)\}$ è una successione di Cauchy in M. Poichè M è completa nella metrica d, $\{\gamma(s_n)\} \to x_0 \in M$.

Sia (W, δ) un intorno totalmente normale di x_0. Scegliamo n_1 tale che se $n, m > n_1$, allora $|s_m - s_n| < \delta$ e $\gamma(s_n)$, $\gamma(s_m)$ appartengono a W. Allora, esiste un'unica geodetica g, la cui lunghezza è minore di δ, che collega $\gamma(s_n)$ a $\gamma(s_m)$. E' chiaro che g coincide con γ, dove γ è definita. Poichè $\exp_{\gamma(s_n)}$ è un diffeomorfismo su $B_\delta(0)$ e $\exp_{\gamma(s_n)}(B_\delta(0)) \supset W$, g estende γ oltre s_0.

(iv) $\Rightarrow$ (i). Ovvia.

Corollario 13. *Se M è compatta allora è completa.*

Definizione 49. *Sia $\gamma : [0, a] \to M$ una geodetica in M. un campo di vettori J lungo γ è detto* campo di Jacobi *se, per ogni $t \in [0, a]$, soddisfa la seguente equazione, detta* equazione di Jacobi*:*

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\dot\gamma(t), J(t))\dot\gamma(t) = 0.$$

Useremo la notazione J' in luogo di $\frac{DJ}{dt}$.

Definizione 50. *Sia $\gamma : [0, a] \to M$ una geodetica. Il punto $\gamma(t_0)$ è detto* coniugato *a $\gamma(0)$ lungo γ, con $t_0 \in (0, a]$, se esiste un campo di Jacobi J lungo γ, non identicamente nullo, tale che $J(0) = 0 = J(t_0)$.*

Definizione 51. *L'insieme dei punti coniugati al punto x di M, per tutte le goedetiche che iniziano in x, è chiamato il* luogo coniugato *di x ed è denotato con $C(x)$.*

Proposizione 14. *Sia $\gamma : [0, a] \to M$ una geodetica e sia $\gamma(0) = x$. Il punto $y = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (0, a]$, è coniugato a x lungo γ se e solo se $v_0 = t_0\gamma'(0)$ è un punto critico di* $\exp_x$.

Dimostrazione Il punto $y = \gamma(t_0)$ è un punto coniugato di x lungo γ se e solo se esiste un campo di Jacobi J non nullo lungo γ con $J(0) = J(t_0) = 0$. Sia $v = \gamma'(0)$ e $w = J'(0)$. $J(t) = (d\exp_x)_{tv}(tw)$, $t \in [0, a]$. Si osservi che J è non nullo se e solo se $w \neq 0$. Quindi $y = \gamma(t_0)$ è un punto coniugato di x se e solo se

$$0 = J(t_0) = (d\exp_x)_{t_0 v}(t_0 w), \quad w \neq 0,$$

cioè, se e solo se $t_0 v$ è un punto critico di $\exp_x$.

Dimostriamo ora due lemmi necessari per la dimostrazione del teorema di Hadamard.

Lemma 18. *Sia M una varietà Riemanniana completa con $K(x, \sigma) \leq 0$, per ogni $x \in M$ e per ogni $\sigma \subset T_x M$. Allora per ogni $x \in M$, il luogo coniugato $C(x) = \emptyset$; in particolare l'applicazione esponenziale* $\exp_x : T_x M \to M$ *è un diffeomorfismo locale.*

Dimostrazione: Sia J un campo di Jacobi non banale lungo una geodetica $\gamma : [0, \infty) \to M$, dove $\gamma(0) = x$ e $J(0) = 0$. Allora si ha

$$\begin{aligned} g(J, J)'' &= 2g(J', J') + 2g(J'', J) \\ &= 2g(J', J') - 2g(R(\gamma', J)\gamma', J) \\ &= 2|J'|^2 - 2K(\gamma', J)(|\gamma'|^2|J|^2 - g(\gamma', J)^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Quindi $g(J, J)'(t_2) \geq g(J, J)'(t_1)$ quando $t_2 > t_1$. Poichè $J'(0) \neq 0$ e $g(J, J)'(0) = 0$, segue che per un numero positivo sufficientemente piccolo t

$$g(J, J)(t) > g(J, J)(0).$$

Quindi per ogni $t > 0$, $g(J, J)(t) > 0$, e $\gamma(t)$ non è coniugato a $\gamma(0)$ lungo γ. Per la Proposizione 14 concludiamo che $\exp_x$ non ha punti critici e quindi è un diffeo locale.

Lemma 19. *Sia M una varietà Riemanniana completa e sia $f : M \to N$ un diffeomorfismo locale e suriettivo su una varietà Riemanniana N, che ha la seguente proprietà: per ogni $x \in M$ e per ogni $v \in T_x M$, si ha $|df_x(v)| \geq |v|$. Allora f è un rivestimento.*

Dimostrazione: Dal Teorema 11, per dimostrare che p è un rivestimento, è sufficiente mostrare che f soddisfa la proprietà di sollevamento dei cammini per curve in N, ovvero che, data una curva differenziabile $c : [0,1] \to N$ e un punto $y \in M$ con $f(y) = c(0)$, allora esiste una curva $\tilde{c} : [0,1] \to M$ con $\tilde{c}(0) = y$ e $f \circ \tilde{c} = c$.

Per dimostrare questo, osserviamo che, essendo f un diffeomorfismo locale in y, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che è possibile definire $\tilde{c} : [0,\varepsilon] \to M$ con $\tilde{c}(0) = y$ e $f \circ \tilde{c} = c$; ovvero c può essere sollevato a un piccolo intervallo che inizia in y. Essendo f un diffeomorfismo locale su M, l'insieme dei valori $A \subset [0,1]$, tali che c può essere sollevato su A con y come punto iniziale, è un intervallo aperto a destra, cioè $A = [0,t_0)$. Se mostriamo che $t_0 \in A$, avremo A aperto e chiuso in $[0,1]$, e quindi $A = [0,1]$, ovvero c sarebbe sollevabile sull'intero intervallo.

Per mostrare che $t_0 \in A$, sia $\{t_n\}$, $n = 1, \ldots$, una successione crescente in A con $\lim t_n = t_0$. Allora la successione $\{\tilde{c}(t_n)\}$ è contenuta in un insieme compatto $K \subset M$. Infatti, se così non fosse, essendo M completa, la distanza da $\tilde{c}(t_n)$ a $\tilde{c}(0)$ sarebbe arbitrariamente grande. Dall'ipotesi si ha

$$\begin{aligned} l_{0,t_n}(c) &= \int_0^{t_n} |c'(t)|dt &&= \int_0^{t_n} |df_{\tilde{c}(t)}(\tilde{c}'(t))|dt \\ &\geq \int_0^{t_n} |\tilde{c}'(t)|dt &&\geq d(\tilde{c}(t_n), \tilde{c}(0)), \end{aligned}$$

implicando che la lunghezza di c tra 0 e t_0 è arbitrariamente grande, che è assurdo.

Quindi, poichè $\{\tilde{c}(t_n)\} \subset K$, $n = 1, \ldots$, esiste un punto di accumulazione $r \in M$ di $\tilde{c}(t_n)$. Sia V un intorno di r tale che $f|_V$ è un diffeomorfismo. Allora $c(t_0) \in f(V)$, e per la continuità, esiste un intervallo $I \subset [0,1]$, con $t_0 \in I$, tale che $c(I) \subset f(V)$. Scegliamo un indice n tale che $\tilde{c}(t_n) \in V$ e consideriamo il sollevamento g di c su I passante per r. I sollevamenti g e $\tilde{c}$ coincidono su $[0,t_n) \cap I$, perchè $f|_V$ è bigettiva. Quindi, g è un'estensione di $\tilde{c}$ a I, e quindi $\tilde{c}$ definita in t_0 e $t_0 \in A$.

Teorema 23. *Hadamard Sia M una varietà Riemanniana completa, semplicemente connessa, con curvatura sezionale $K \leq 0$, per ogni $x \in M$ e per ogni $\sigma \in T_x(M)$. Allora M è diffeomorfa a $\boldsymbol{R}^n$, $n = dimM$; più precisamente $\exp_x : T_xM \to M$ è un diffeomorfismo.*

Dimostrazione: Poichè M è completa, $\exp_x : T_xM \to M$ è definita per ogni $x \in M$ ed è suriettiva. Dal Lemma 18, $\exp_x$ è un diffeomorfismo locale. Questo ci permette di introdurre una metrica Riemanniana su T_xM in maniera tale che $\exp_x$ sia un'isometria locale. Tale metrica è completa, perchè le geodetiche di T_xM passanti per l'origine sono linee rette (Teorema di Hopf-Rinow, (i)$\Rightarrow$ (iv)). Dal Lemma 19 $\exp_x$ è un rivestimento. Poichè

M è semplicemente connessa, per il Teorema 10 $\exp_x$ è un omeomorfismo e quindi è un diffeomorfismo.

Segue ora una proposizione che verrà utilizzata successivamente nel Lemma 21 e per la cui dimostrazione si rimanda il lettore a [2] p.218.

Proposizione 15. *Siano M^n e $\tilde{M}^n$ varietà Riemanniane e supponiamo che per ogni $x \in M$, $\tilde{x} \in \tilde{M}$, $\sigma \subset T_xM$, $\tilde{\sigma} \subset T_{\tilde{x}}\tilde{M}$, si abbia $\tilde{K}_{\tilde{x}}(\tilde{\sigma}) \geq K_x(\sigma)$. Siano $x \in M$, $\tilde{x} \in \tilde{M}$ e fissiamo un'isometria lineare $i : T_xM \to T_{\tilde{x}}\tilde{M}$. Sia $r > 0$ tale che la restrizione $\exp_x |B_r(0)$ sia un diffeomorfismo e $\exp_{\tilde{x}} |\tilde{B}_r(0)$ sia non singolare. Sia $c : [0, a] \to \exp_x(B_r(0)) \subset M$ una curva differenziabile e definiamo una curva $\tilde{c} : [0, a] \to \exp_{\tilde{x}}(\tilde{B}_r(0)) \subset \tilde{M}$ mediante*

$$\tilde{c}(s) = \exp_{\tilde{x}} \circ i \circ \exp_x^{-1}(c(s)), \quad s \in [0, a].$$

Allora $l(c) \geq l(\tilde{c})$.

Capitolo 4

Teorema di Preissman

L'obiettivo di questa tesi è dimostrare il seguente teorema:

Teorema 24. *(Preissman) Se M è una varietà Riemanniana, compatta e con curvatura sezionale $K < 0$, allora ogni sottogruppo abeliano del gruppo fondamentale $\pi(M)$ diverso dall'identità, è infinitamente ciclico.*

Nella prima sezione di questo capitolo sono presentati gli strumenti necessari per la dimostrazione del suddetto teorema, la seconda è invece dedicata alla sua dimostrazione, e contiene perciò i lemmi sui quali essa si fonda.

4.1 Strumenti necessari per la dimostrazione del Teorema di Preissman

Proposizione 16. *Sia $(\tilde{M}, p)$ un rivestimento di una varietà Riemanniana (M, g). E' allora possibile dotare $\tilde{M}$ di una metrica Riemanniana $\tilde{g}$ tale che $p : \tilde{M} \to M$ sia un'isometria locale (la metrica $\tilde{g}$ è chiamata metrica del rivestimento).*

Dimostrazione: Abbiamo visto nella Sezione 2.7 come dotare $\tilde{M}$ della struttura di varietà differenziabile a partire da quella di M, dove gli aperti di M omeomorfi a $\mathbf{R}^n$ sono le controimmagini (tramite p) degli aperti banalizzanti in M. Sfruttando quindi il fatto che $p : \tilde{M} \to M$ è un diffeomorfismo locale, si può concludere che il differenziale di $p|\tilde{U}_j$ è un isomorfismo. Perciò $p|\tilde{U}_j \to U$ è un'immersione di $\tilde{U}_j$ in U. Posso perciò mettere su ogni $\tilde{U}_j$ la metrica indotta da U, e quindi da M, avendo così l'isometria locale.

Proposizione 17. *Sia $(\tilde{M}, p)$ un rivestimento di una varietà Riemanniana M. Poniamo su $\tilde{M}$ la struttura di varietà Riemanniana (come indicato nella proposizione precedente). Allora $\tilde{M}$ è completa se e solo se M è completa.*

Dimostrazione: Per la proposizione precedente, p, con la metrica del rivestimento su $\tilde{M}$, è un'isometria locale, e per l'Osservazione 8 del precedente capitolo, manda geodetiche di $\tilde{M}$ in geodetiche di M. Supponiamo prima che $\tilde{M}$ sia completa e per assurdo che M non lo sia. Sia $\tilde{\gamma}$ una geodetica su $\tilde{M}$ definita su tutto $\mathbf{R}$ e sia γ la sua proiezione su M tale che è definita per tutti gli $s < s_0$, ma non in s_0. Ma questo è assurdo perchè essendo un'isometria locale , in un intorno di $\tilde{\gamma}(s_0)$ p è un isomorfismo e manda quel pezzetto di geodetica in un pezzetto di geodetica, definita per s_0 e per valori successivi.

Il viceversa è analogo considerando come isometria locale p^{-1} ristretto in modo che p sia un diffeomorfismo locale.

D'ora in poi consideriamo M e $\tilde{M}$ varietà Riemanniane e complete, $\tilde{M}$ possiede la metrica del rivestimento, $(\tilde{M}, p)$ è il rivestimento universale di M (la cui esistenza è garantita dall'Osservazione 4) e continuiamo a indicare con $A(\tilde{M})$ il gruppo delle trasformazioni del rivestimento.

Sotto queste ipotesi vale la seguente proposizione:

Proposizione 18. *Se α é un elemento diverso dall'identitá, appartenente a $A(\tilde{M})$, allora*

i) α é un'isometria di $\tilde{M}$;

ii) α non ha punti fissi.

Dimostrazione:

i) Sia $((\tilde{M}, \tilde{g}), p)$ il rivestimento universale di (M, g), e sia $\tilde{x} \in \tilde{M}$ tale che $p(\tilde{x}) = x$, con $x \in M$. Si vuole verificare che per ogni $\tilde{v}$, $\tilde{w} \in T_{\tilde{x}}\tilde{M}$ si ha $\alpha^*\tilde{g} = \tilde{g}$, ovvero

$$\tilde{g}(\tilde{v}, \tilde{w})_{\tilde{x}} = \tilde{g}(\alpha_*(\tilde{v}), \alpha_*(\tilde{w}))_{\alpha(\tilde{x})}.$$

Poichè $\tilde{M}$ possiede la metrica del rivestimento e $p = p\alpha$ implica $p_* = p_*\alpha_*$, si ha

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{v}, \tilde{w})_{\tilde{x}} &= g(p_*(\tilde{v}), p_*(\tilde{w}))_{p(\tilde{x})}\\ &= g(p_*(\alpha_*(\tilde{v})), p_*(\alpha_*(\tilde{w})))_{p\alpha(\tilde{x})}\\ &= \tilde{g}(\alpha_*(\tilde{v}), \alpha_*(\tilde{w}))_{\alpha(\tilde{x})}.\end{aligned}$$

ii) Corollario 8.

Abbiamo visto nel Corollario 11 che $A(\tilde{M})$ è isomorfo a $\pi(M, x)$. Osserviamo ora come questo isomorfismo dipende dal punto $\tilde{x} \in \tilde{M}$, con $\pi(\tilde{x}) = x$ ed associa ad ogni $g \in \pi(M, x)$ un'isometria $\alpha_{\tilde{x}} \in A(\tilde{M})$ definita nel seguente modo:

Sia $\tilde{y} \in \tilde{M}$, si colleghi $\tilde{y}$ a $\tilde{x}$ mediante un cammino $\tilde{\sigma}$, si ponga $p(\tilde{\sigma}) = \sigma$ e sia $\beta = \sigma * g * \sigma^{-1}$, dove, con abuso di notazione, g denota un elemento della classe $[g] \in \pi(M, x)$. Quindi, se $\beta : [0, 1] \to M$ è un cammino in M, $\tilde{\beta}_{\tilde{y}}(1)$ è il punto finale del sollevamento su $\tilde{M}$ di β, che inizia in $\tilde{y}$. Definiamo

$$\alpha_{\tilde{x}}(\tilde{y}) = \tilde{\beta}_{\tilde{y}}(1).$$

Osservazione 10. Spesso d'ora in poi per indicare il gruppo fondamentale di M, si utilizzerà $\pi(M)$ trascurando il punto base, e questo è dovuto al fatto che stiamo considerando varietà connesse (e quindi connesse per archi) e perciò al variare del punto base i gruppi fondamentali sono isomorfi (Corollario 1).

Definizione 52. *Una* geodetica chiusa *è una curva chiusa che è geodetica in ogni suo punto. Un* laccio geodetico *è una curva chiusa, geodetica in tutti i suoi punti eccetto uno, in cui non è regolare.*

Lemma 20. *Sia $S \subset M$ un intorno strettamente convesso, e siano $\sigma_0, \sigma_1 : [0, 1] \to M$ due cammini interamente contenuti in S. Allora esiste un'omotopia tra essi. In particolare, se $\sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ e $\sigma_0(1) = \sigma_1(1)$, allora i due cammini sono omotopicamente equivalenti.*

Dimostrazione: Sia $t \in [0, 1]$ il parametro che definisce le curve e $s \in [0, 1]$ il parametro che determina la variazione omotopica. Per ogni $t_0 \in I$ esiste una geodetica $\gamma_{t_0}(s)$ che unisce $\sigma_0(t_0)$ e $\sigma_1(t_0)$, ovvero $\gamma_{t_0}(0) = \sigma_0(t_0)$ e $\gamma_{t_0}(1) = \sigma_1(t_0)$. Poichè questo discorso è valido per ogni $t_0 \in [0, 1]$, si può definire l'omotopia come la funzione $F(t, s) = \gamma_t(s)$, e si ha $F(t, 0) = \gamma_t(0) = \sigma_0(t)$ e $F(t, 1) = \gamma_t(1) = \sigma_1(t)$. Nel caso in cui $\sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ e $\sigma_0(1) = \sigma_1(1)$, allora $F(0, s) = \gamma_0(s) = \epsilon_0 = \sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ perchè la curva che percorre la minima distanza e che ha stesso punto inziale e finale, è il cammino costante in quel punto.

Teorema 25. *(Cartan) Se M è una varietà compatta e $\Lambda \in C_1(M)$ non è la classe costante, allora esiste una geodetica chiusa di M nella classe Λ.*

Dimostrazione: Sia d l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve differenziabili a tratti che appartengono a Λ. Poichè Λ non è banale, $d > 0$. Sia $\{\gamma_j\}$ una successione di curve differenziabili a tratti appartenenti a Λ tali che $l(\gamma_j) \to d$. Possiamo supporre che γ_j sia una geodetica spezzata definita nell'intervallo $[0, 1]$ e parametrizzata proporzionalmente all'ascissa curvilinea. Sia $L = \sup l(\gamma_j)$. Allora

$$d(\gamma_j(t_1), \gamma_j(t_2)) \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}_j(t)\| dt \leq L(t_2 - t_1)$$

per ogni $t_1 \leq t_2 \in [0,1]$. Quindi l'insieme $\{\gamma_j\}$ è equicontinuo. Inoltre, essendo M compatto, esiste una sottosuccessione, indicata ancora con γ_j, che converge uniformemente a una curva chiusa continua $\gamma_0 : [0,1] \to M$. Sia $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ una partizione di $[0,1]$ tale che $\gamma_0|_{[t_{i-1},t_i]} = \gamma_0^i$, $i = 1, \ldots, k$ sia contenuto in un intorno totalmente normale. Sia quindi $\gamma : [0,1] \to M$ una curva differenziabile a tratti tale che $\gamma^i = \gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ sia l'unico segmento geodetico che collega i punti $\gamma_0(t_{i-1})$ e $\gamma_0(t_i)$. Allora $\gamma \in \Lambda$. Infatti per la Proposizione 10 posso prendere l'intorno totalmente normale in modo che sia strettamente convesso e, usando il Lemma 20, costruire così l'omotopia tra γ^i e γ_0^i. Concatenando i pezzetti di cammini ottengo l'omotopia tra γ e γ_0 (Lemma 4), e quindi $\gamma \in \Lambda$. Per questo motivo $l(\gamma) \geq d$. Dimostreremo ora che $l(\gamma) = d$, ovvero è la curva chiusa di lunghezza minima in Λ.

Supponiamo che $l(\gamma) > d$ e sia $\epsilon = \frac{l(\gamma)-d}{2k+1}$. Allora esiste un intero j tale che

$$l(\gamma_j) - d < \epsilon \quad \text{e} \quad d(\gamma_j(t), \gamma_0(t)) < \epsilon, \quad \text{per ogni} \quad t \in [0,1].$$

Indicando con $\gamma_j^i = \gamma_j|_{[t_{i-1},t_i]}$, abbiamo

$$\sum_{i=1}^{k} (l(\gamma_j^i) + 2\epsilon) = l(\gamma_j) + 2k\epsilon < d + (2k+1)\epsilon = l(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} l(\gamma^i).$$

Quindi, esiste un intero i , $1 \leq i \leq k$, tale che

$$l(\gamma_j^i) + 2\epsilon < l(\gamma^i),$$

contraddicendo il fatto che γ^i è il segmento di geodetica che minimizza la lunghezza tra i due punti, perciò $l(\gamma) = d$.

Parametrizziamo ora γ con ascissa curvilinea. Allora $\gamma : [0,d] \to M$ è una geodetica spezzata che ha lunghezza minima e sta nella classe Λ. Dimostreremo ora che γ è regolare nei punti $x_i = \gamma(t_i)$, per ogni $i = 0, \ldots, k$.

Supponiamo il contrario, e consideriamo una bolla convessa B centrata in x_i. Si scelgano due punti y_1 e y_2 in $\gamma \cap B$ in modo che il triangolo geodetico $x_i y_1 y_2$ sia omotopo a un punto. Chiamiamo σ_1 l'arco di γ che collega y_1 e y_2 e che contiene x_i, e chiamiamo σ_2 l'altro pezzo di γ. Allora la curva chiusa costituita dalla geodetica σ_3 che minimizza la distanza tra y_1 e y_2 e dall'arco σ_2, appartiene alla classe Λ. Infatti per il Lemma 20, σ_1 e σ_3 sono omotope, e quindi $\gamma = \sigma_1 * \sigma_2 \sim \sigma_3 * \sigma_2$. Abbiamo però l'assurdo, perchè questa nuova curva avrebbe lunghezza minore di γ.

Osservazione 11. L'ipotesi di compattezza di M è fondamentale per la validità del teorema. Consideriamo infatti una superficie di rotazione generata da una curva asintotica al suo asse di rotazione. Considerata una qualunque classe di omotopia libera che non sia banale, essa non contiene curve di lunghezza minima, si veda per esempio la classe di omotopia contenente i paralleli.

Osservazione 12. Se M oltre che compatta è semplicemente connessa, è più complicato determinare l'esistenza di geodetiche chiuse (altrimenti vero).

Definizione 53. *Un'isometria $f : \tilde{M} \to \tilde{M}$ senza punti fissi è chiamata* traslazione *di $\tilde{M}$ se esiste qualche geodetica $\tilde{\gamma}$ di $\tilde{M}$ che viene lasciata invariata da f, ovvero se $f(c) = c$, dove $c = \tilde{\gamma}((-\infty, \infty))$. In questo caso diciamo che f è una traslazione lungo $\tilde{\gamma}$.*

Proposizione 19. *Sia M una varietà Riemanniana compatta e α una trasformazione del rivestimento di $\tilde{M}$, considerata con la metrica del rivestimento. Allora α è una traslazione di $\tilde{M}$.*

Dimostrazione: Sia $\tilde{x} \in \tilde{M}$ e sia $g \in \pi(M, x)$, con $x = p(\tilde{x})$, l'elemento che corrisponde a α mediante l'isomorfismo visto precedentemente. Assumiamo $\alpha \neq Id$. Per il teorema di Cartan esiste una geodetica chiusa γ di M nella classe di omotopia libera determinata da g. Si scelga un punto $y \in \gamma$. Allora γ è omotopo al cammino chiuso $\sigma^{-1} * g * \sigma$, dove σ è un cammino che collega x a y. Infatti, essendo g e γ nella stessa classe di omotopia libera, sono omotope, inoltre $\sigma^{-1} \sim \epsilon_y$ e $\sigma \sim \epsilon_x$, perciò $\gamma \sim \sigma^{-1} * g \sim \sigma^{-1} * g * \epsilon_x \sim \sigma^{-1} * g * \sigma$.

Sia $\tilde{y} = \tilde{\sigma}_{\tilde{x}}(1)$, ovvero $\tilde{y}$ è il punto finale del sollevamento di σ che inizia in $\tilde{x}$. Indicando con $\tilde{\beta}$ il sollevamento di $\sigma^{-1} g \sigma$, si ha $\alpha(\tilde{y}) = \tilde{\beta}_{\tilde{y}}(1)$, ovvero il punto finale del sollevamento di $\sigma^{-1} g \sigma$ che inizia in $\tilde{y}$.

Sia $\tilde{\gamma}$ il sollevamento di γ che inizia in $\tilde{y}$, dimostreremo che α lascia $\tilde{\gamma}$ invariata.

Sia $\alpha_{\tilde{y}} \in A(\tilde{M})$ l'isometria che corrisponde alla classe $[\gamma] \in \pi(M, y)$ dove il punto $\tilde{y}$ è quello dell'isometria precedente. In dettaglio: sia $\tilde{s} \in \tilde{M}$, $\tilde{\delta} : I \to \tilde{M}$ tale che $\tilde{\delta}(0) = \tilde{s}$ e $\tilde{\delta}(1) = \tilde{y}$ e sia $p(\tilde{\delta}) = \delta$; allora, posto $\beta_0 = \delta\gamma\delta^{-1}$, $\tilde{\beta}_0$ è il sollevamento di β_0 e si ha $\tilde{\alpha}_{\tilde{y}}(\tilde{s}) = \tilde{\beta}_{0\tilde{s}}(1)$. Se $\tilde{s} = \tilde{y}$, posso prendere $\tilde{\delta} = \epsilon_{\tilde{y}}$ e allora $p(\tilde{\delta}) = \delta = \epsilon_y$ perchè $p(\tilde{y}) = y$. Ma allora $\beta_0 = \epsilon_y * \gamma * \epsilon_y^{-1}$, perciò $\tilde{\beta}_0 = \tilde{\gamma}$ e quindi $\alpha_{\tilde{y}}(\tilde{y}) = \tilde{\beta}_{0\tilde{y}}(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Poichè γ e $\sigma^{-1} g \sigma$ sono omotope e i loro sollevamenti iniziano in $\tilde{y}$, esse hanno lo stesso punto finale (teorema di monodromia, Corollario 7), perciò $\alpha(\tilde{y}) = \tilde{\beta}_{\tilde{y}}(1) = \tilde{\gamma}(1) = \alpha_{\tilde{y}}(\tilde{y})$. Da questo deduciamo che $\tilde{y}$ è un punto fisso per $\alpha\alpha_{\tilde{y}}^{-1}$; ma $\alpha\alpha_{\tilde{y}}^{-1} \in A(\tilde{M})$, che non ha punti fissi (Proposizione 18, (ii)), quindi $\alpha\alpha_{\tilde{y}}^{-1} = Id$, ovvero $\alpha = \alpha_{\tilde{y}}$.

Segue quindi che se $\tilde{\gamma}(s)$ è un punto del sollevamento di γ che inizia in $\tilde{y}$, per l'unicità del sollevamento $\alpha(\tilde{\gamma}(s)) = \alpha_{\tilde{y}}(\tilde{\gamma}(s)) = \tilde{\gamma}(s)$. Si conclude quindi che $\tilde{\gamma}$ è invariante per α.

4.2 Dimostrazione del Teorema di Preissman

Come precedentemente accennato, prima di procedere con la dimostrazione del Teorema di Preissman è necessario analizzare alcuni lemmi.

Lemma 21. *Sia $\tilde{M}$ una varietà Riemanniana, completa e semplicemente connessa, con curvatura $K \leq 0$. Siano a, b, c tre punti di $\tilde{M}$. Tali punti determinano un unico triangolo geodetico T in $\tilde{M}$ con vertici a, b, c. Siano α, β e γ gli angoli dei vertici a, b, c rispettivamente, e siano A, B, C le lunghezze dei lati opposti ai vertici a, b, c rispettivamente. Allora*

i) $A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma \leq C^2$ *($< C^2, se K < 0$)*

ii) $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$ *($< \pi, se K < 0$).*

Dimostrazione: Siano γ_A, γ_B, γ_C le geodetiche di lunghezza $l(\gamma_A) = A$, $l(\gamma_B) = B$ e $l(\gamma_C) = C$ che formano i lati del triangolo T. Siano $\Gamma_A = \exp_c^{-1}(\gamma_A)$, $\Gamma_B = \exp_c^{-1}(\gamma_B)$ e $\Gamma_C = \exp_c^{-1}(\gamma_C)$ curve in $T_c(\tilde{M})$. Poichè γ_A e γ_B sono geodetiche radiali che escono da c, si ha, per l'Osservazione 7, e per la completezza di $\tilde{M}$ (che non pone limiti alla lunghezza del vettore), che

$$A = l(\gamma_A) = l(\Gamma_A), \quad B = l(\gamma_B) = l(\Gamma_B).$$

Se si indica inoltre con Γ_0 il segmento di retta in $T_c(\tilde{M})$ che congiunge gli estremi di Γ_C, si ha $l(\Gamma_0) \leq l(\Gamma_C)$ e

$$l(\Gamma_0)^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma.$$

Poichè $K \leq 0$ e $T_c(\tilde{M})$ ha curvatura nulla, si può applicare la Proposizione 15 e si ottiene che

$$l(\Gamma_C) \leq l(\gamma_C)) \quad (<, se K < 0).$$

Segue che

$$A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma \leq l(\Gamma_C)^2 \leq l(\gamma_C)^2 = C^2 \quad (<, \text{se} K < 0)$$

e questo prova la (i).

Per dimostrare (ii), si osservi che $C = d(a, b)$, $B = d(a, c)$, $A = d(b, c)$ e quindi ogni lunghezza A, B o C è limitata dalla somma delle altre due. Si consideri nello spazio euclideo $T_c(\tilde{M})$ un triangolo i cui lati misurano A, B e

C e siano α', β' e γ' gli angoli opposti a tali lati. Dalla (i) si ottiene $\alpha \leq \alpha'$, $\beta \leq \beta'$ e $\gamma \leq \gamma'$ $(<, seK < 0)$. Poichè $\alpha'+\beta'+\gamma' = \pi$ la (ii) segue banalmente.

Da ora in poi considereremo M con curvatura $K < 0$.

Lemma 22. *Se $K < 0$ e $f : \tilde{M} \to \tilde{M}$ è una traslazione lungo la geodetica $\tilde{\gamma}$, $f \neq Id$, allora $\tilde{\gamma}$ è l'unica geodetica che viene lasciata invariante da f.*

Dimostrazione: Supponiamo che per assurdo f lasci invarianti due geodetiche $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$. Poichè f non ha punti fissi, $\tilde{\gamma}_1 \cap \tilde{\gamma}_2 = \emptyset$; se così non fosse, $\tilde{\gamma}_1 \cap \tilde{\gamma}_2$ avrebbe almeno due punti e questo andrebbe contro l'ipotesi di connessione semplice di $\tilde{M}$. Siano infatti x e y due punti in cui si intersecano consecutivamente le due geodetiche, v_1 il vettore tangente a $\tilde{\gamma}_1$ in x tale che $\exp_x(v_1) = y$, e v_2 il vettore tangente alla geodetica $\tilde{\gamma}_2$ in x tale che $\exp_x(v_2) = y$. Per il teorema di Hadamard l'applicazione $\exp_x$ è un diffeomorfismo, ma applicata ai due vettori diversi v_1 e v_2 si ottiene la stessa immagine, ottenendo cos una contraddizione. Perciò le due geodetiche o coincidono oppure non hanno alcun punto in comune. Siano $\tilde{x_1} \in \tilde{\gamma}_1$, $\tilde{x_2} \in \tilde{\gamma}_2$ e $\tilde{\gamma}_3$ la geodetica da $\tilde{x}_1$ a $\tilde{x}_2$ che ne minimizza la distanza. Si consideri il quadrilatero geodetico $\tilde{x}_1, f(\tilde{x_1}), \tilde{x_2}, f(\tilde{x_2})$ in $\tilde{M}$ e si denotino i suoi angoli interni con $\alpha, \pi - \alpha'$ (adiacente al lato $\tilde{\gamma}_1$), $\beta, \pi - \beta'$ (adiacente al lato $\tilde{\gamma}_2$). Poichè f è un'isometria, f conserva gli angoli e quindi $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Perciò la somma degli angoli interni del quadrilatero è 2π. Se però si divide tale quadrilatero in due triangoli, in ognuno dei due vertici in cui i triangoli si intersecano, la misura dei corrispondenti angoli del quadrilero risulta minore o uguale alla somma dei due angoli che si incontrano in quel vertice. Di conseguenza la somma degli angoli interni dei due triangoli è maggiore o uguale di 2π. Segue che la somma degli angoli interni di almeno uno dei due triangoli è maggiore o uguale di π, che contraddice il Lemma 21 (ii).

Lemma 23. *Se $K < 0$ e $g : \tilde{M} \to \tilde{M}$ è un'isometria senza punti fissi che commuta con una traslazione f lungo $\tilde{\gamma}$, con $f \neq Id$, allora g è una traslazione lungo $\tilde{\gamma}$.*

Dimostrazione: E' sufficiente osservare che

$$f \circ g(\tilde{\gamma}) = g \circ f(\tilde{\gamma}) = g(\tilde{\gamma})$$

Poichè per la Proposizione 9 $g(\tilde{\gamma})$ è una geodetica, dall'unicità del precedente lemma segue che $g(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}$.

Lemma 24. *Se tutti gli elementi di un sottogruppo non banale $H \subset \pi(M)$, considerato come le isometrie di $\tilde{M}$, lasciano invariata una geodetica fissata $\tilde{\gamma}$, allora H è infinitamente ciclico.*

Dimostrazione: Fissiamo un punto $\tilde{x} \in \tilde{\gamma}$ come origine e si consideri l'applicazione $\theta : H \to \mathbf{R}$ data da $\theta(h) = \pm d(\tilde{x}, h(\tilde{x}))$, dove il segno + o - è usato in accordo con il fatto che $h(\tilde{x})$ sia dopo o prima $\tilde{x}$, rispettivamente, nell'orientazione di $\tilde{\gamma}$. Poichè gli elementi di H sono isometrie che lasciano $\tilde{\gamma}$ invariata, θ è un omomorfismo di H in $(\mathbf{R}, +)$, ovvero $d(\tilde{x}, h \circ k(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, h(\tilde{x})) + d(\tilde{x}, k(\tilde{x}))$. Infatti se $y \in \tilde{\gamma}$ è un qualunque punto in $\tilde{\gamma}$, allora $d(\tilde{x}, h(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, \tilde{y}) + d(\tilde{y}, h(\tilde{x})) = d(\tilde{y}, h(\tilde{x})) + d(h(\tilde{x}), h(\tilde{y})) = d(\tilde{y}, h(\tilde{y}))$, perciò $d(\tilde{x}, h \circ k(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, k(\tilde{x})) + d(k(\tilde{x}), h \circ k(\tilde{x})) = d(\tilde{x}, k(\tilde{x})) + d((\tilde{x}), h(\tilde{x}))$. Inoltre θ è un omomorfismo iniettivo, infatti se così non fosse e si avesse $h_1(\tilde{x}) = h_2(\tilde{x})$ con $h_1 \neq h_2$, allora $\tilde{x}$ sarebbe un punto fisso di $h_1 h_2^{-1}$, e questo è assurdo. Perciò H è un sottogruppo addittivo di $\mathbf{R}$. Ma ogni sottogruppo di $\mathbf{R}$ o è inifinitamente ciclico o è denso in $\mathbf{R}$. Dal momento che le isometrie agiscono in modo propriamente discontinuo, H non è denso, e quindi è infinitamente ciclico.

Dimostrazione del Teorema di Preissman: Sia $H \subset \pi(M)$ un sottogruppo abeliano con $H \neq \{e\}$. Dalla Proposizione 19, qualunque isometria $\alpha \in H$ è una traslazione di $\tilde{M}$. Fissiamo una traslazione α lungo la geodetica $\tilde{\gamma}$, con $\alpha \neq Id$, allora per il Lemma 22 $\tilde{\gamma}$ è l'unica geodetica lasciata invariante da α. Essendo H abeliano, se $\beta \in H$ allora $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, e quindi dal Lemma 23 anche β è una traslazione lungo $\tilde{\gamma}$. Perciò $\tilde{\gamma}$ è invariante per tutti gli elementi di H. Per il Lemma 24 concludiamo che H è infinitamente ciclico.

Esempio 10. Sia N una superficie di genere due e M la varietà prodotto $M = N \times S^1$. Allora M non può avere una metrica con curvatura negativa. Infatti, se $C \subset \pi(N)$ è un sottogruppo ciclico (Corollario 6), allora $C \oplus \mathbf{Z} \subset \pi(M)$ è un sottogruppo abeliano non ciclico.

Esempio 11. *L'm-toro $S^1 \times \ldots \times S^1 = T^m, m \geq 2$, non ammette una metrica con curvatura negativa perchè il suo gruppo fondamentale è $\boldsymbol{Z} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{Z}$. Consideriamo $\boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}$, un suo sottogruppo abeliano generico è $h\boldsymbol{Z} \oplus k\boldsymbol{Z}$. Se fosse ciclico, il generatore sarebbe (h, k), ma non è vero che per ogni elemento $(a, b) \in h\boldsymbol{Z} \oplus k\boldsymbol{Z})$ si ottiene come potenza di (h, k).*

Concludiamo la tesi con un teorema, anch'esso dovuto a Preissman, per la cui dimostrazione è necessario il seguente lemma:

Lemma 25. *Se M è completa, $K \leq 0$ ed esiste una geodetica invariante per gli elementi di $A(\tilde{M})$, allora M non è compatta.*

Dimostrazione: Sia $\tilde{\gamma}$ la geodetica invariante per gli elementi di $A(\tilde{M})$. Fissiamo un punto $\tilde{x} \in \tilde{\gamma}$, un numero reale $t > 0$, e consideriamo la geodetica parametrizzata con ascissa curvilinea $\tilde{\beta} : [0, t] \to \tilde{M}$, $\tilde{\beta}(0) = \tilde{x}$, perpendicolare a $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{x}$. Sia $\beta = p \circ \tilde{\beta}$, $\gamma = p \circ \tilde{\gamma}$, $x = p(\tilde{x})$ e α_t la geodetica in M che collega $\beta(t)$ a x e che ha lunghezza minima. Vogliamo dimostrare che $l(\alpha_t) = t$.

Sia $\tilde{\alpha}_t$ il sollevamento di α_t che inizia in $\tilde{\beta}(t)$. Vogliamo verificare che, essendo $\tilde{\gamma}$ invariante, $\tilde{\alpha}_t(1)$ appartiene a $\tilde{\gamma}$. Affermiamo che esiste un'isometria $\alpha \in A(\tilde{M})$ tale che $\alpha(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}_t(1)$, e, dimostrato questo, possiamo concludere che $\tilde{\alpha}_t(1) \in \tilde{\gamma}$ perchè $\tilde{\gamma}$ è invariante per tutti gli elementi di $A(\tilde{M})$. La validità di questa affermazione segue dalla definizione di azione di monodromia, ovvero la transitività dell'azione di $\pi(M, x)$ sulla fibra $p^{-1}(x)$ e dal Corollario 11 sull'isomorfismo esistente tra $A(\tilde{M})$ e $\pi(M, x)$; si possono collegare quindi due punti della fibra di x (in questo caso $\tilde{x}$ e $\tilde{\alpha}_t(1)$) mediante un'isometria.

Poichè $K \leq 0$, dal Lemma 21 si ha $(l(\tilde{\gamma}))^2 + (l(\tilde{\beta}))^2 \leq (l(\tilde{\alpha}_t))^2$ e quindi $l(\tilde{\beta}) \leq l(\tilde{\alpha}_t)$. D'altra parte

$$l(\tilde{\alpha}_t) = l(\alpha_t) \leq l(\beta) = l(\tilde{\beta}) = t,$$

perciò $l(\alpha_t) = t$ come affermato.

Osserviamo che $l(\tilde{\alpha}_t) = l(\alpha_t)$ per l'Osservazione 8, in quanto $p : \tilde{M} \to M$ è un'isometria locale con la metrica del rivestimento.

Poichè t è arbitrario, M non è limitata, ed essendo M completa, M non è compatta.

Teorema 26. *Se M è compatta e $K < 0$, allora $\pi(M)$ non è abeliano.*

Dimostrazione: Infatti, se $\pi(M)$ fosse abeliano, allora, ripetendo il ragionamento fatto per il Teorema di Preissman, possiamo affermare che esiste una geodetica invariante per tutti gli elementi di $\pi(M)$. Ma se esiste la geodetica invariante e si identificano $\pi(M)$ e $A(\tilde{M})$, siamo nelle ipotesi del Lemma 25, e M non dovrebbe essere compatta. Perciò per evitare l'assurdo dobbiamo escludere l'abelianità di $\pi(M)$.

Bibliografia

[1] Kosniowski Czes. *Introduzione alla topologia algebrica*. Zanichelli.

[2] Manfredo Perdigão Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser.

[3] William M. Boothby. *An Introduction to Differenziable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, Inc.

[4] W.S. Massey. *Algebraic Topology: An Introduction*. Springer-Verlag

[5] Marco Abate. *Elementi di Geometria Differenziale: Geometria Riemanniana*. http://www.dm.unipi.it/ abate/matdid/dispense/dispense.html

[6] Marco Manetti. *Topologia*. Springer