Il Lemma di Nakayama nella teoria dei Moduli

Candidato:
Manuel Pusceddu

Relatore:
Prof. Andrea Loi

Università degli Studi di Cagliari

21 Settembre 2018

Teorema (Lemma di Nakayama)

Sia A un anello unitario commutativo, M un A-modulo finitamente generato e I un ideale di A t.c. $I \subseteq \mathfrak{R}$. Allora $IM = M \implies M = 0$.

Definizione

$(M, +, \cdot)$ si dice un A-modulo se $(A, \oplus, \otimes, 1)$ è un *anello unitario commutativo*, $(M, +)$ *un gruppo abeliano* e $\cdot : A \times M \to M$ un'applicazione t.c. $\forall a, b \in A, \forall x, y \in M$:

- $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
- $(a \oplus b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
- $(a \otimes b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Definizione

$(M, +, \cdot)$ si dice un A-modulo se $(A, \oplus, \otimes, 1)$ è un *anello unitario commutativo*, $(M, +)$ *un gruppo abeliano* e $\cdot : A \times M \to M$ un'applicazione t.c. $\forall a, b \in A, \forall x, y \in M$:

- $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
- $(a \oplus b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
- $(a \otimes b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Definizione

$(M, +, \cdot)$ si dice un A-modulo se $(A, \oplus, \otimes, 1)$ è un *anello unitario commutativo*, $(M, +)$ *un gruppo abeliano* e $\cdot : A \times M \to M$ un'applicazione t.c. $\forall a, b \in A, \forall x, y \in M$:

- $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
- $(a \oplus b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
- $(a \otimes b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

Definizione

$(M, +, \cdot)$ si dice un A-modulo se $(A, \oplus, \otimes, 1)$ è un *anello unitario commutativo*, $(M, +)$ *un gruppo abeliano* e $\cdot : A \times M \to M$ un'applicazione t.c. $\forall a, b \in A, \forall x, y \in M$:

- $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
- $(a \oplus b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
- $(a \otimes b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
- $1 \cdot x = x$

I Moduli

Esempi di A-Moduli

1. Un ideale di A è un A-modulo, in particolare A è un A-modulo.
2. Se A è un campo, un A-modulo è un A-spazio vettoriale
3. Ogni gruppo abeliano $(G, +)$ possiede una struttura di $\mathbb{Z}$-modulo definita nel modo seguente:

$$h \cdot a = \begin{cases} \underbrace{a + \ldots + a}_{h \text{ volte}} & h > 0 \\ 0 & h = 0 \qquad \forall\, a \in G \\ -\underbrace{(a + \ldots + a)}_{-h \text{ volte}} & h < 0 \end{cases}$$

I Moduli

Esempi di A-Moduli

1. Un ideale di A è un A-modulo, in particolare A è un A-modulo.
2. Se A è un campo, un A-modulo è un A-spazio vettoriale
3. Ogni gruppo abeliano $(G, +)$ possiede una struttura di $\mathbb{Z}$-modulo definita nel modo seguente:

$$h \cdot a = \begin{cases} \underbrace{a + \ldots + a}_{h \text{ volte}} & h > 0 \\ 0 & h = 0 \qquad \forall\, a \in G \\ -\underbrace{(a + \ldots + a)}_{-h \text{ volte}} & h < 0 \end{cases}$$

Esempi di A-Moduli

1. Un ideale di A è un A-modulo, in particolare A è un A-modulo.
2. Se A è un campo, un A-modulo è un A-spazio vettoriale
3. Ogni gruppo abeliano $(G, +)$ possiede una struttura di $\mathbb{Z}$-modulo definita nel modo seguente:

$$h \cdot a = \begin{cases} \underbrace{a + \dots + a}_{h \text{ volte}} & h > 0 \\ 0 & h = 0 \\ -\underbrace{(a + \dots + a)}_{-h \text{ volte}} & h < 0 \end{cases} \qquad \forall\ a \in G$$

I Moduli

Alcune proprietà

1. $a \cdot 0_M = 0_M$
2. $0_A \cdot x = 0_M$
3. $-(a \cdot x) = a \cdot (-x) = (-a) \cdot x$

$$\forall a \in A, \forall x \in M$$

Sottomoduli e Quozienti

Definizione

$M' \leq M$ è un sottomodulo di M se $a \cdot x \in M' \quad \forall x \in M', \forall a \in A$

Il gruppo quoziente M/M' eredita la struttura di A-modulo, con l'operazione definita da: $a \cdot (x + M') = a \cdot x + M'$, $\forall a \in A$, $\forall x + M' \in M/M'$.
L'A-modulo M/M' si dice modulo quoziente.

Sottomoduli e Quozienti

Definizione

$M' \leq M$ è un sottomodulo di M se $a \cdot x \in M' \quad \forall x \in M', \forall a \in A$

Il gruppo quoziente M/M' eredita la struttura di A-modulo, con l'operazione definita da: $a \cdot (x + M') = a \cdot x + M'$, $\forall a \in A$, $\forall$ $x + M' \in M/M'$.
L'A-modulo M/M' si dice modulo quoziente.

Sottomoduli

Esempi di sottomoduli

1. $\{0_M\}$ e M sono i *sottomoduli banali* di M
2. Se A è un campo i sottomoduli di M sono i suoi *sottospazi vettoriali*
3. I sottomoduli dell'A-modulo A sono gli ideali di A

Sottomoduli

Esempi di sottomoduli

1. $\{0_M\}$ e M sono i *sottomoduli banali* di M
2. Se A è un campo i sottomoduli di M sono i suoi *sottospazi vettoriali*
3. I sottomoduli dell'A-modulo A sono gli ideali di A

Sottomoduli

Esempi di sottomoduli

1. $\{0_M\}$ e M sono i *sottomoduli banali* di M
2. Se A è un campo i sottomoduli di M sono i suoi *sottospazi vettoriali*
3. I sottomoduli dell'A-modulo A sono gli ideali di A

Somma di sottomoduli

Definizione

Sia M un A-modulo, e $(M_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottomoduli di M. La loro *somma* $\sum M_i$ è l'insieme di tutte le somme finite $\sum x_i$, dove $x_i \in M_i$ $\forall i$ e $x_i = 0$ per quasi tutti gli x_i (tutti tranne un numero finito)

Sottomoduli di un A-modulo

Proposizione

Sia M un A-modulo, $(M_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottomoduli di M, I un ideale di A.

$\sum M_i$ e $\bigcap M_i$ sono sottomoduli di M.

$IM = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i : a_i \in I, x_i \in M, n \in \mathbb{N}_+\}$ è un sottomodulo di M.

Sia $x \in M$.
$Ax = \{a \cdot x : a \in A\}$ è un sottomodulo di M e si chiama il sottomodulo generato da x.

Sottomoduli di un A-modulo

Proposizione

Sia M un A-modulo, $(M_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottomoduli di M, I un ideale di A.

$\sum M_i$ e $\bigcap M_i$ sono sottomoduli di M.

$IM = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i : a_i \in I, x_i \in M, n \in \mathbb{N}_+\}$ è un sottomodulo di M.

Sia $x \in M$.
$Ax = \{a \cdot x : a \in A\}$ è un sottomodulo di M e si chiama il sottomodulo generato da x.

Sottomoduli di un A-modulo

Proposizione

Sia M un A-modulo, $(M_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottomoduli di M, I un ideale di A.

$\sum M_i$ e $\bigcap M_i$ sono sottomoduli di M.

$IM = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i : a_i \in I, x_i \in M, n \in \mathbb{N}_+\}$ è un sottomodulo di M.

Sia $x \in M$.
$Ax = \{a \cdot x : a \in A\}$ è un sottomodulo di M e si chiama il sottomodulo generato da x.

Sottomoduli di un A-modulo

Proposizione

Sia M un A-modulo, $(M_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottomoduli di M, I un ideale di A.

$\sum M_i$ *e* $\bigcap M_i$ *sono sottomoduli di* M.

$IM = \{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot x_i : a_i \in I, x_i \in M, n \in \mathbb{N}_+\}$ *è un sottomodulo di* M.

Sia $x \in M$.
$Ax = \{a \cdot x : a \in A\}$ *è un sottomodulo di* M *e si chiama il sottomodulo generato da* x.

Moduli finitamente generati

Definizione

Se $M = \sum Ax_i$, $\{x_i\}_{i\in I}$ si dice un insieme di *generatori* di M e se tale insieme è finito allora M si dice finitamente generato

Definizione

Siano $x_1, ..., x_n$ elementi di un A-modulo M. Si dice combinazione A-lineare di $x_1, ..., x_n$ ogni espressione del tipo $a_1x_1 + ... + a_nx_n$, $a_i \in A \ \forall\ i = 1, ..., n$.

Osservazione

Se M è un A-modulo finitamente generato e $\{x_1, ..., x_n\}$ un suo insieme di generatori, allora $\forall\ m \in M$, $\exists\ \alpha_1, ..., \alpha_n \in A$ t.c. $m = \alpha_1x_1 + ... + \alpha_nx_n$.

Moduli finitamente generati

Il Lemma di Nakayama

Manuel Pusceddu

Introduzione alla teoria dei Moduli

Il Radicale di Jacobson

Il Lemma di Nakayama

Definizione

Se $M = \sum Ax_i, \{x_i\}_{i \in I}$ si dice un insieme di *generatori* di M e se tale insieme è finito allora M si dice finitamente generato

Definizione

Siano $x_1, ..., x_n$ elementi di un A-modulo M. Si dice combinazione A-lineare di $x_1, ..., x_n$ ogni espressione del tipo $a_1 x_1 + ... + a_n x_n, \;\; a_i \in A \;\; \forall\, i = 1, ..., n$.

Osservazione

Se M è un A-modulo finitamente generato e $\{x_1, ..., x_n\}$ un suo insieme di generatori, allora $\forall\, m \in M$, $\exists\, \alpha_1, ..., \alpha_n \in A$ t.c. $m = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$.

Moduli finitamente generati

Definizione

Se $M = \sum Ax_i$, $\{x_i\}_{i \in I}$ si dice un insieme di *generatori* di M e se tale insieme è finito allora M si dice finitamente generato

Definizione

Siano $x_1, ..., x_n$ elementi di un A-modulo M. Si dice combinazione A-lineare di $x_1, ..., x_n$ ogni espressione del tipo $a_1 x_1 + ... + a_n x_n$, $a_i \in A \ \forall\ i = 1, ..., n$.

Osservazione

Se M è un A-modulo finitamente generato e $\{x_1, ..., x_n\}$ un suo insieme di generatori, allora $\forall\ m \in M$, $\exists\ \alpha_1, ..., \alpha_n \in A$ t.c. $m = \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n$.

Moduli finitamente generati

Definizione

Sia M un A-modulo finitamente generato.
Un insieme di generatori $G = \{u_1, ..., u_n\}$ di M si dice minimale se ogni sottoinsieme proprio di G non genera M.

Proposizione

Se M è un A-modulo finitamente generato, allora ammette un insieme minimale di generatori.

Moduli finitamente generati

Definizione

Sia M un A-modulo finitamente generato.
Un insieme di generatori $G = \{u_1, \ldots, u_n\}$ di M si dice minimale se ogni sottoinsieme proprio di G non genera M.

Proposizione

Se M è un A-modulo finitamente generato, allora ammette un insieme minimale di generatori.

Moduli finitamente generati

Esempi

1. Consideriamo A come A-modulo. Allora 1_A genera A
2. Consideriamo $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}$-modulo. Allora $\{2,3\}$ è un insieme di generatori minimale di $\mathbb{Z}$.

Moduli finitamente generati

Esempi

1. Consideriamo A come A-modulo. Allora 1_A genera A
2. Consideriamo $\mathbb{Z}$ come $\mathbb{Z}$-modulo. Allora $\{2, 3\}$ è un insieme di generatori minimale di $\mathbb{Z}$.

Il Radicale di Jacobson

Teorema (Lemma di Krull)

Sia A un anello commutativo unitario e sia I un ideale proprio di A. Allora esiste un ideale massimale M di A t.c. $I \subseteq M$.

Definizione

Sia A un *anello commutativo unitario*. Il Radicale di Jacobson $\mathfrak{R}$ è l'intersezione di tutti gli ideali massimali di A.

Teorema (Lemma di Krull)

Sia A un anello commutativo unitario e sia I un ideale proprio di A. Allora esiste un ideale massimale M di A t.c. $I \subseteq M$.

Definizione

Sia A un *anello commutativo unitario*. Il Radicale di Jacobson $\mathfrak{R}$ è l'intersezione di tutti gli ideali massimali di A.

Lemma

Sia A un anello commutativo unitario, $x \in A$.

$x \in \mathfrak{R} \iff 1 - xy \in U(A) \ \forall y \in A.$

Teorema (Lemma di Nakayama)

Sia A un anello unitario commutativo, M un A-modulo finitamente generato e I un ideale di A t.c. $I \subseteq \mathfrak{R}$.
Allora $IM = M \implies M = 0$.

Il Lemma di Nakayama

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo $M \neq 0$ e sia $\{u_1, \dots, u_n\}$ un insieme minimale di generatori di M, $u_i \neq 0 \; \forall i$, $n \in \mathbb{N}_+$.

$u_n \in M = IM \implies \exists\, x_1, \dots, x_m \in M$, $\exists\, a_1, \dots, a_m \in I$ t.c. $u_n = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$.

$x_1, \dots, x_m \in M$, $\forall x_i \implies \exists\, b_{i1}, \dots, b_{in} \in A$ t.c. $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j$

$\implies u_n = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_i b_{ij}) u_j$ dove $\sum_{i=1}^{m} a_i b_{ij} \in I$ in quanto I ideale di A.

$\implies \exists\, c_1, \dots, c_n \in I$ t.c. $u_n = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo $M \neq 0$ e sia $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un insieme minimale di generatori di M, $u_i \neq 0\ \forall i$, $n \in \mathbb{N}_+$.

$u_n \in M = IM \implies \exists\ x_1, \ldots, x_m \in M,\ \exists\ a_1, \ldots, a_m \in I$ t.c. $u_n = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$.

$x_1, \ldots, x_m \in M,\ \forall x_i \implies \exists\ b_{i1}, \ldots, b_{in} \in A$ t.c. $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j$

$\implies u_n = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_i b_{ij}) u_j$ dove $\sum_{i=1}^{m} a_i b_{ij} \in I$ in quanto I ideale di A.

$\implies \exists\ c_1, \ldots, c_n \in I$ t.c. $u_n = c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo $M \neq 0$ e sia $\{u_1, ..., u_n\}$ un insieme minimale di generatori di M, $u_i \neq 0$ $\forall i$, $n \in \mathbb{N}_+$.

$u_n \in M = IM \implies \exists\ x_1, ..., x_m \in M$, $\exists\ a_1, ..., a_m \in I$ t.c. $u_n = \sum_{i=1}^m a_i x_i$.

$x_1, ..., x_m \in M$, $\forall x_i \implies \exists\ b_{i1}, ..., b_{in} \in A$ t.c. $x_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j$

$\implies u_n = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m a_i b_{ij}) u_j$ dove $\sum_{i=1}^m a_i b_{ij} \in I$ in quanto I ideale di A.

$\implies \exists\ c_1, ..., c_n \in I$ t.c. $u_n = c_1 u_1 + ... + c_n u_n$.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo $M \neq 0$ e sia $\{u_1, \dots, u_n\}$ un insieme minimale di generatori di M, $u_i \neq 0\ \forall i$, $n \in \mathbb{N}_+$.

$u_n \in M = IM \implies \exists\ x_1, \dots, x_m \in M$, $\exists\ a_1, \dots, a_m \in I$ t.c. $u_n = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$.

$x_1, \dots, x_m \in M$, $\forall x_i \implies \exists\ b_{i1}, \dots, b_{in} \in A$ t.c. $x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j$

$\implies u_n = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} a_i b_{ij}) u_j$ dove $\sum_{i=1}^{m} a_i b_{ij} \in I$ in quanto I ideale di A.

$\implies \exists\ c_1, \dots, c_n \in I$ t.c. $u_n = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$.

Dimostrazione.

Supponiamo per assurdo $M \neq 0$ e sia $\{u_1, \ldots, u_n\}$ un insieme minimale di generatori di M, $u_i \neq 0 \ \forall i$, $n \in \mathbb{N}_+$.

$u_n \in M = IM \implies \exists \ x_1, \ldots, x_m \in M$, $\exists \ a_1, \ldots, a_m \in I$ t.c. $u_n = \sum_{i=1}^m a_i x_i$.

$x_1, \ldots, x_m \in M$, $\forall x_i \implies \exists \ b_{i1}, \ldots, b_{in} \in A$ t.c. $x_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} u_j$

$\implies u_n = \sum_{j=1}^n (\sum_{i=1}^m a_i b_{ij}) u_j$ dove $\sum_{i=1}^m a_i b_{ij} \in I$ in quanto I ideale di A.

$\implies \exists \ c_1, \ldots, c_n \in I$ t.c. $u_n = c_1 u_1 + \ldots + c_n u_n$.

Il Lemma di Nakayama

Dimostrazione.

$$\implies (1 - c_n)u_n = c_1 u_1 + \ldots + c_{n-1} u_{n-1}$$

$$c_n \in I \subseteq \Re \implies 1 - c_n \in U(A)$$

$$\implies u_n = (1 - c_n)^{-1}(c_1 u_1 + \ldots + c_{n-1} u_{n-1})$$

$\implies M$ è generato da $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, assurdo. $\square$

Dimostrazione.

$$\implies (1 - c_n)u_n = c_1 u_1 + \dots + c_{n-1} u_{n-1}$$

$$c_n \in I \subseteq \Re \implies 1 - c_n \in U(A)$$

$$\implies u_n = (1 - c_n)^{-1}(c_1 u_1 + \dots + c_{n-1} u_{n-1})$$

$\implies$ M è generato da $\{u_1, \dots, u_{n-1}\}$, assurdo. $\square$

Dimostrazione.

$$\implies (1 - c_n)u_n = c_1 u_1 + \ldots + c_{n-1} u_{n-1}$$

$$c_n \in I \subseteq \mathfrak{R} \implies 1 - c_n \in U(A)$$

$$\implies u_n = (1 - c_n)^{-1}(c_1 u_1 + \ldots + c_{n-1} u_{n-1})$$

$\implies M$ è generato da $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, assurdo. $\square$

Dimostrazione.

$$\implies (1 - c_n)u_n = c_1 u_1 + \ldots + c_{n-1} u_{n-1}$$

$$c_n \in I \subseteq \Re \implies 1 - c_n \in U(A)$$

$$\implies u_n = (1 - c_n)^{-1}(c_1 u_1 + \ldots + c_{n-1} u_{n-1})$$

$\implies$ M è generato da $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, assurdo. $\square$

Corollario

Sia A un anello commutativo unitario, M un A-modulo finitamente generato, N un sottomodulo di M, $I \subseteq \mathfrak{R}$ un ideale di A. Allora $M = IM + N \implies M = N$.

Dimostrazione.

Consideriamo il modulo quoziente M/N.

$$
\begin{aligned}
I(M/N) &= \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + N) \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M\ \forall i\} \\
&= \{(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) + N \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M\ \forall i\} \\
&= \pi(IM) = (IM + N)/N = M/N
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ (Per il Lemma di Nakayama applicato a M/N)

$$M/N = 0$$

i.e. $M = N$ □

Dimostrazione.

Consideriamo il modulo quoziente M/N.

$$I(M/N) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + N) | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \{(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) + N | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \pi(IM) = (IM + N)/N = M/N$$

$\Longrightarrow$ (Per il Lemma di Nakayama applicato a M/N)

$$M/N = 0$$

i.e. $M = N$ □

Il Lemma di Nakayama
Un Corollario

Dimostrazione.

Consideriamo il modulo quoziente M/N.

$$I(M/N) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + N) | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \{(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) + N | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \pi(IM) = (IM + N)/N = M/N$$

$\Longrightarrow$ (Per il Lemma di Nakayama applicato a M/N)

$$M/N = 0$$

i.e. $M = N$ □

Il Lemma di Nakayama
Un Corollario

Dimostrazione.

Consideriamo il modulo quoziente M/N.

$$I(M/N) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + N) | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \{(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) + N | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \pi(IM) = (IM + N)/N = M/N$$

$\Longrightarrow$ (Per il Lemma di Nakayama applicato a M/N)

$$M/N = 0$$

i.e. $M = N$ $\square$

Dimostrazione.

Consideriamo il modulo quoziente M/N.

$$I(M/N) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + N) | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \{(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) + N | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \pi(IM) = (IM + N)/N = M/N$$

$\implies$ (Per il Lemma di Nakayama applicato a M/N)

$$M/N = 0$$

i.e. $M = N$ □

Dimostrazione.

Consideriamo il modulo quoziente M/N.

$$I(M/N) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + N) | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \{(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) + N | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \pi(IM) = (IM + N)/N = M/N$$

$\Longrightarrow$ (Per il Lemma di Nakayama applicato a M/N)

$$M/N = 0$$

i.e. $M = N$ $\square$

Dimostrazione.

Consideriamo il modulo quoziente M/N.

$$I(M/N) = \{\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + N) | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \{(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) + N | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \pi(IM) = (IM + N)/N = M/N$$

$\Longrightarrow$ (Per il Lemma di Nakayama applicato a M/N)

$$M/N = 0$$

i.e. $M = N$

Dimostrazione.

Consideriamo il modulo quoziente M/N.

$$I(M/N) = \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i(x_i + N) | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \{(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) + N | n \in \mathbb{N}, a_i \in I, x_i \in M \ \forall i\}$$

$$= \pi(IM) = (IM + N)/N = M/N$$

$\Longrightarrow$ (Per il Lemma di Nakayama applicato a M/N)

$$M/N = 0$$

i.e. $M = N$ $\square$