# Il teorema degli zeri di Hilbert

## (Hilbert's Nullstellensatz)


Relatore:
Andrea Loi

Candidato:
Michele Gaviano


21 settembre 2018

# Obiettivo della presentazione

**Teorema (Nullstellensatz)**

*Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$*
*Allora $I(V(J)) = Rad(J)$*

# Ideali radicali e anelli Noetheriani

### Definizione

Sia $J$ un ideale di un anello commutativo unitario $R$.

Il radicale di $J$ è $Rad(J) := \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in J\}$

Si dimostra che $Rad(J)$ è un ideale di $R$ contenente $J$.

$J$ si dice radicale se $J = Rad(J)$

### Definizione

Un anello commutativo unitario $R$ si dice Noetheriano se ogni suo ideale è generato da un numero finito di elementi.

### Teorema (teorema della base di Hilbert)

*Sia $R$ un anello Noetheriano. Allora $R[X_1, \ldots, X_n]$ è un anello Noetheriano.*

# Ideali radicali e anelli Noetheriani

## Definizione

Sia $J$ un ideale di un anello commutativo unitario $R$.

Il radicale di $J$ è $Rad(J) := \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in J\}$

Si dimostra che $Rad(J)$ è un ideale di $R$ contenente $J$.

$J$ si dice radicale se $J = Rad(J)$

## Definizione

Un anello commutativo unitario $R$ si dice Noetheriano se ogni suo ideale è generato da un numero finito di elementi.

## Teorema (teorema della base di Hilbert)

*Sia $R$ un anello Noetheriano. Allora $R[X_1, \dots, X_n]$ è un anello Noetheriano.*

### Definizione

Sia $J$ un ideale di un anello commutativo unitario $R$.

Il radicale di $J$ è $Rad(J) := \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in J\}$

Si dimostra che $Rad(J)$ è un ideale di $R$ contenente $J$.

$J$ si dice radicale se $J = Rad(J)$

### Definizione

Un anello commutativo unitario $R$ si dice Noetheriano se ogni suo ideale è generato da un numero finito di elementi.

### Teorema (teorema della base di Hilbert)

*Sia $R$ un anello Noetheriano. Allora $R[X_1, ..., X_n]$ è un anello Noetheriano.*

# Ideali radicali e anelli Noetheriani

### Definizione

Sia $J$ un ideale di un anello commutativo unitario $R$.

Il radicale di $J$ è $Rad(J) := \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in J\}$

Si dimostra che $Rad(J)$ è un ideale di $R$ contenente $J$.

$J$ si dice radicale se $J = Rad(J)$

### Definizione

Un anello commutativo unitario $R$ si dice Noetheriano se ogni suo ideale è generato da un numero finito di elementi.

### Teorema (teorema della base di Hilbert)

*Sia $R$ un anello Noetheriano. Allora $R[X_1, ..., X_n]$ è un anello Noetheriano.*

# Ideali radicali e anelli Noetheriani

### Definizione

Sia $J$ un ideale di un anello commutativo unitario $R$.

Il radicale di $J$ è $Rad(J) := \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in J\}$

Si dimostra che $Rad(J)$ è un ideale di $R$ contenente $J$.

$J$ si dice radicale se $J = Rad(J)$

### Definizione

Un anello commutativo unitario $R$ si dice Noetheriano se ogni suo ideale è generato da un numero finito di elementi.

### Teorema (teorema della base di Hilbert)

*Sia $R$ un anello Noetheriano. Allora $R[X_1, ..., X_n]$ è un anello Noetheriano.*

# Spazi affini, ipersuperfici e l'ideale di un insieme di punti

**Definizione**

Sia $K$ un campo e $n \in \mathbb{N}^+$. $\mathbb{A}^n(K) := K^n$ si dice *n-spazio affine* su $K$.

**Definizione**

Sia $F \in K[X_1, ..., X_n]$.

$$V(F) := \{P \in \mathbb{A}^n(K) \mid F(P) = 0\} \text{ si dice ipersuperficie.}$$

In generale, se $S \subseteq K[X_1, ..., X_n]$

$$V(S) := \{P \in \mathbb{A}^n(K) : \forall F \in S \quad F(P) = 0\}$$

Se $J$ è l'ideale generato da $S$, allora $V(S) = V(J)$.

**Definizione**

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(K)$.

$I(X) := \{F \in K[X_1, ..., X_n] : \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K) \quad F(a_1, ..., a_n) = 0\}$

è un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$ e si dice *ideale di $X$*

### Definizione

Sia $K$ un campo e $n \in \mathbb{N}^+$. $\mathbb{A}^n(K) := K^n$ si dice *n-spazio affine* su $K$.

### Definizione

Sia $F \in K[X_1, ..., X_n]$.

$$V(F) := \{P \in \mathbb{A}^n(K) \mid F(P) = 0\}$$ si dice ipersuperficie.

In generale, se $S \subseteq K[X_1, ..., X_n]$

$$V(S) := \{P \in \mathbb{A}^n(K) : \forall F \in S \quad F(P) = 0\}$$

Se $J$ è l'ideale generato da $S$, allora $V(S) = V(J)$

### Definizione

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(K)$.

$$I(X) := \{F \in K[X_1, ..., X_n] : \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K) \quad F(a_1, ..., a_n) = 0\}$$

è un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$ e si dice ideale di $X$

# Spazi affini, ipersuperfici e l'ideale di un insieme di punti

### Definizione

Sia $K$ un campo e $n \in \mathbb{N}^+$. $\mathbb{A}^n(K) := K^n$ si dice *n*-spazio affine su $K$.

### Definizione

Sia $F \in K[X_1, ..., X_n]$.

$$V(F) := \{P \in \mathbb{A}^n(K) \mid F(P) = 0\} \text{ si dice ipersuperficie.}$$

In generale, se $S \subseteq K[X_1, ..., X_n]$

$$V(S) := \{P \in \mathbb{A}^n(K) : \forall F \in S \quad F(P) = 0\}$$

Se $J$ è l'ideale generato da $S$, allora $V(S) = V(J)$

### Definizione

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(K)$.

$I(X) := \{F \in K[X_1, ..., X_n] : \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K) \quad F(a_1, ..., a_n) = 0\}$

è un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$ e si dice ideale di $X$

## Spazi affini, ipersuperfici e l'ideale di un insieme di punti

### Definizione

Sia $K$ un campo e $n \in \mathbb{N}^+$. $\mathbb{A}^n(K) := K^n$ si dice *n*-spazio affine su $K$.

### Definizione

Sia $F \in K[X_1, ..., X_n]$.

$$V(F) := \{P \in \mathbb{A}^n(K) \mid F(P) = 0\}$$ si dice ipersuperficie.

In generale, se $S \subseteq K[X_1, ..., X_n]$

$$V(S) := \{P \in \mathbb{A}^n(K) : \forall F \in S \quad F(P) = 0\}$$

Se $J$ è l'ideale generato da $S$, allora $V(S) = V(J)$

### Definizione

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(K)$.

$I(X) := \{F \in K[X_1, ..., X_n] : \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K) \quad F(a_1, ..., a_n) = 0\}$

è un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$ e si dice ideale di $X$

# Spazi affini, ipersuperfici e l'ideale di un insieme di punti

### Definizione

Sia $K$ un campo e $n \in \mathbb{N}^+$. $\mathbb{A}^n(K) := K^n$ si dice $n$-spazio affine su $K$.

### Definizione

Sia $F \in K[X_1, ..., X_n]$.

$$V(F) := \{P \in \mathbb{A}^n(K) \mid F(P) = 0\} \text{ si dice ipersuperficie.}$$

In generale, se $S \subseteq K[X_1, ..., X_n]$

$$V(S) := \{P \in \mathbb{A}^n(K) : \forall F \in S \quad F(P) = 0\}$$

Se $J$ è l'ideale generato da $S$, allora $V(S) = V(J)$

### Definizione

Sia $X \subseteq \mathbb{A}^n(K)$.

$I(X) := \{F \in K[X_1, ..., X_n] : \forall (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{A}^n(K) \quad F(a_1, ..., a_n) = 0\}$

è un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$ e si dice ideale di $X$

# Il teorema degli zeri di Hilbert

**Teorema (Nullstellensatz)**

*Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$*
*Allora $I(V(J)) = Rad(J)$*

### Passo 1 (weak Nullstellensatz).

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, \ldots, X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

### Dimostrazione.

$J \subseteq M$ per qualche ideale massimale $M$. Quindi $V(J) \supseteq V(M)$

Ci basta verificare la tesi per gli ideali massimali

**Passo 1 (weak Nullstellensatz).**

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

**Dimostrazione.**

$J \subseteq M$ per qualche ideale massimale $M$. Quindi $V(J) \supseteq V(M)$

Ci basta verificare la tesi per gli ideali massimali

$L = K[X_1, ..., X_n]/M$ è un estensione finita di campi di $K$,

identificando ogni $a \in K$ con la classe $a + M$

Un campo algebricamente chiuso ha, come estensione finita, solo se stesso.

Allora $K = L$

Passo 1 (weak Nullstellensatz).

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

Dimostrazione.

$J \subseteq M$ per qualche ideale massimale $M$. Quindi $V(J) \supseteq V(M)$

Ci basta verificare la tesi per gli ideali massimali

$L = K[X_1, ..., X_n]/M$ è un estensione finita di campi di $K$,

identificando ogni $a \in K$ con la classe $a + M$

Un campo algebricamente chiuso ha, come estensione finita, solo se stesso.

Allora $K = L$

**Passo 1 (weak Nullstellensatz).**

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

**Dimostrazione.**

$J \subseteq M$ per qualche ideale massimale $M$. Quindi $V(J) \supseteq V(M)$

Ci basta verificare la tesi per gli ideali massimali

$L = K[X_1, ..., X_n]/M$ è un estensione finita di campi di $K$,

identificando ogni $a \in K$ con la classe $a + M$

Un campo algebricamente chiuso ha, come estensione finita, solo se stesso.

Allora $K = L$

**Passo 1 (weak Nullstellensatz).**

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

**Dimostrazione.**

$J \subseteq M$ per qualche ideale massimale $M$. Quindi $V(J) \supseteq V(M)$

Ci basta verificare la tesi per gli ideali massimali

$L = K[X_1, ..., X_n]/M$ è un estensione finita di campi di $K$,

identificando ogni $a \in K$ con la classe $a + M$

Un campo algebricamente chiuso ha, come estensione finita, solo se stesso.

Allora $K = L$

**Passo 1 (weak Nullstellensatz).**

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

**Dimostrazione (continua).**

Allora $K = L$

$\forall i = 1, ..., n \quad \exists a_i \in K : \quad X_i + M = a_i = a_i + M$

$\forall i \quad X_i - a_i \in M$ e quindi $M \supseteq (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

Si dimostra che $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ è massimale

$M = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

$V(M) = \{(a_1, ..., a_n)\} \neq \emptyset$

### Passo 1 (weak Nullstellensatz).

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

### Dimostrazione (continua).

Allora $K = L$

$\forall i = 1, ..., n \quad \exists a_i \in K : \quad X_i + M = a_i = a_i + M$

$\forall i \quad X_i - a_i \in M$ e quindi $M \supseteq (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

Si dimostra che $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ è massimale

$M = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

$V(M) = \{(a_1, ..., a_n)\} \neq \emptyset$

**Passo 1 (weak Nullstellensatz).**

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

**Dimostrazione (continua).**

Allora $K = L$

$\forall i = 1, ..., n \quad \exists a_i \in K : \quad X_i + M = a_i = a_i + M$

$\forall i \quad X_i - a_i \in M$ e quindi $M \supseteq (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

Si dimostra che $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ è massimale

$M = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

$V(M) = \{(a_1, ..., a_n)\} \neq \emptyset$

**Passo 1 (weak Nullstellensatz).**

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

**Dimostrazione (continua).**

Allora $K = L$

$\forall i = 1, ..., n \quad \exists a_i \in K : \quad X_i + M = a_i = a_i + M$

$\forall i \quad X_i - a_i \in M \quad$ e quindi $M \supseteq (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

Si dimostra che $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ è massimale

$M = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

$V(M) = \{(a_1, ..., a_n)\} \neq \emptyset$

**Passo 1 (weak Nullstellensatz).**

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

**Dimostrazione (continua).**

Allora $K = L$

$\forall i = 1, ..., n \quad \exists a_i \in K : \quad X_i + M = a_i = a_i + M$

$\forall i \quad X_i - a_i \in M$ e quindi $M \supseteq (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

Si dimostra che $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ è massimale

$M = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

$V(M) = \{(a_1, ..., a_n)\} \neq \emptyset$

**Passo 1 (weak Nullstellensatz).**

Se $K$ è un campo algebricamente chiuso e $J$ è un ideale proprio di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$

**Dimostrazione (continua).**

Allora $K = L$

$\forall i = 1, ..., n \quad \exists a_i \in K : \quad X_i + M = a_i = a_i + M$

$\forall i \quad X_i - a_i \in M$ e quindi $M \supseteq (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

Si dimostra che $(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ è massimale

$M = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$

$V(M) = \{(a_1, ..., a_n)\} \neq \emptyset$

**Passo 2.**

Sia $J$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $Rad(J) \subseteq I(V(J))$

**Dimostrazione.**

Sia $F \in Rad(J)$. Allora $\exists N \in \mathbb{N} : F^N \in J$

$\forall P \in V(J) \quad F^N(P) = 0 \quad$ e quindi $F(P) = 0$

$F \in I(V(J))$

Passo 2.

Sia $J$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $Rad(J) \subseteq I(V(J))$

Dimostrazione.

Sia $F \in Rad(J)$. Allora $\exists N \in \mathbb{N} : F^N \in J$

$\forall P \in V(J) \quad F^N(P) = 0 \quad$ e quindi $F(P) = 0$

$F \in I(V(J))$

**Passo 2.**

Sia $J$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $Rad(J) \subseteq I(V(J))$

**Dimostrazione.**

Sia $F \in Rad(J)$. Allora $\exists N \in \mathbb{N} : F^N \in J$

$\forall P \in V(J) \quad F^N(P) = 0 \quad$ e quindi $F(P) = 0$

$F \in I(V(J))$

**Passo 2.**

Sia $J$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$, allora $Rad(J) \subseteq I(V(J))$

**Dimostrazione.**

Sia $F \in Rad(J)$. Allora $\exists N \in \mathbb{N} : F^N \in J$

$\forall P \in V(J) \quad F^N(P) = 0 \quad$ e quindi $F(P) = 0$

$F \in I(V(J))$

**Passo 3.**

Sia $J$ ideale di $K[X_1, ..., X_n]$.
Allora $J$ è generato da un numero finito di polinomi $F_1, ..., F_r$

**Dimostrazione.**

$K$ è un campo, quindi un anello Noetheriano

Per il teorema della base di Hilbert, $K[X_1, ..., X_n]$ è un anello Noetheriano

$J = (F_1, ..., F_r)$ per qualche $F_1, ..., F_r \in K[X_1, ..., X_n]$

**Passo 3.**

Sia $J$ ideale di $K[X_1, ..., X_n]$.
Allora $J$ è generato da un numero finito di polinomi $F_1, ..., F_r$

**Dimostrazione.**

$K$ è un campo, quindi un anello Noetheriano

Per il teorema della base di Hilbert, $K[X_1, ..., X_n]$ è un anello Noetheriano

$J = (F_1, ..., F_r)$ per qualche $F_1, ..., F_r \in K[X_1, ..., X_n]$

**Passo 3.**

Sia $J$ ideale di $K[X_1, ..., X_n]$.
Allora $J$ è generato da un numero finito di polinomi $F_1, ..., F_r$

**Dimostrazione.**

$K$ è un campo, quindi un anello Noetheriano

Per il teorema della base di Hilbert, $K[X_1, ..., X_n]$ è un anello Noetheriano

$J = (F_1, ..., F_r)$ per qualche $F_1, ..., F_r \in K[X_1, ..., X_n]$

**Passo 3.**

Sia $J$ ideale di $K[X_1, ..., X_n]$.
Allora $J$ è generato da un numero finito di polinomi $F_1, ..., F_r$

**Dimostrazione.**

$K$ è un campo, quindi un anello Noetheriano

Per il teorema della base di Hilbert, $K[X_1, ..., X_n]$ è un anello Noetheriano

$J = (F_1, ..., F_r)$ per qualche $F_1, ..., F_r \in K[X_1, ..., X_n]$

**Passo 4.**

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$
un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

**Dimostrazione.**

Sia $G \in I(V(J)) \setminus \{0\}$

Sia $H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1) \subseteq K[X_1, ..., X_{n+1}]$

Mostriamo che $V(H) = \emptyset$

- Supponiamo che $P$ sia zero di tutti gli $F_i$
- $P \in V(J)$, perché $J = (F_1, ..., F_r)$
- $G(P) = 0$
- $P$ non è uno zero di $X_{n+1}G - 1$

Per il Passo 1, $H$ non può essere un ideale proprio

## Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$

Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

## Dimostrazione.

Sia $G \in I(V(J)) \setminus \{0\}$

Sia $H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1) \subseteq K[X_1, ..., X_{n+1}]$

Mostriamo che $V(H) = \emptyset$

- Supponiamo che $P$ sia zero di tutti gli $F_i$
- $P \in V(J)$, perché $J = (F_1, ..., F_r)$
- $G(P) = 0$
- $P$ non è uno zero di $X_{n+1}G - 1$

Per il Passo 1, $H$ non può essere un ideale proprio

Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

Dimostrazione.

Sia $G \in I(V(J)) \setminus \{0\}$

Sia $H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1) \subseteq K[X_1, ..., X_{n+1}]$

Mostriamo che $V(H) = \emptyset$

Supponiamo che $P$ sia zero di tutti gli $F_i$

$P \in V(J)$, perché $J = (F_1, ..., F_r)$

$G(P) = 0$

$P$ non è uno zero di $X_{n+1}G - 1$

Per il Passo 1, $H$ non può essere un ideale proprio

Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$
un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

Dimostrazione.

Sia $G \in I(V(J)) \setminus \{0\}$

Sia $H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1) \subseteq K[X_1, ..., X_{n+1}]$

Mostriamo che $V(H) = \emptyset$

Supponiamo che $P$ sia zero di tutti gli $F_i$

$P \in V(J)$, perché $J = (F_1, ..., F_r)$

$G(P) = 0$

$P$ non è uno zero di $X_{n+1}G - 1$

Per il Passo 1, $H$ non può essere un ideale proprio

Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

Dimostrazione.

Sia $G \in I(V(J)) \setminus \{0\}$

Sia $H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1) \subseteq K[X_1, ..., X_{n+1}]$

Mostriamo che $V(H) = \emptyset$

Supponiamo che $P$ sia zero di tutti gli $F_i$

$P \in V(J)$, perché $J = (F_1, ..., F_r)$

$G(P) = 0$

$P$ non è uno zero di $X_{n+1}G - 1$

Per il Passo 1, $H$ non può essere un ideale proprio

## Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$
un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

## Dimostrazione.

Sia $G \in I(V(J)) \setminus \{0\}$

Sia $H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1) \subseteq K[X_1, ..., X_{n+1}]$

Mostriamo che $V(H) = \emptyset$

- Supponiamo che $P$ sia zero di tutti gli $F_i$
- $P \in V(J)$, perché $J = (F_1, ..., F_r)$
- $G(P) = 0$
- $P$ non è uno zero di $X_{n+1}G - 1$

Per il Passo 1, $H$ non può essere un ideale proprio

Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$
un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

Dimostrazione.

Sia $G \in I(V(J)) \setminus \{0\}$

Sia $H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1) \subseteq K[X_1, ..., X_{n+1}]$

Mostriamo che $V(H) = \emptyset$

Supponiamo che $P$ sia zero di tutti gli $F_i$

$P \in V(J)$, perché $J = (F_1, ..., F_r)$

$G(P) = 0$

$P$ non è uno zero di $X_{n+1}G - 1$

Per il Passo 1, $H$ non può essere un ideale proprio

### Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$
un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

### Dimostrazione.

Sia $G \in I(V(J)) \setminus \{0\}$

Sia $H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1) \subseteq K[X_1, ..., X_{n+1}]$

Mostriamo che $V(H) = \emptyset$

Supponiamo che $P$ sia zero di tutti gli $F_i$

$P \in V(J)$, perché $J = (F_1, ..., F_r)$

$G(P) = 0$

$P$ non è uno zero di $X_{n+1}G - 1$

Per il Passo 1, $H$ non può essere un ideale proprio

Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$
un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

Dimostrazione.

Sia $G \in I(V(J)) \setminus \{0\}$

Sia $H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1) \subseteq K[X_1, ..., X_{n+1}]$

Mostriamo che $V(H) = \emptyset$

Supponiamo che $P$ sia zero di tutti gli $F_i$

$P \in V(J)$, perché $J = (F_1, ..., F_r)$

$G(P) = 0$

$P$ non è uno zero di $X_{n+1}G - 1$

Per il Passo 1, $H$ non può essere un ideale proprio

### Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$
un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

### Dimostrazione (continua).

$H = \mathbb{A}^{n+1}(K)$ e quindi $1 \in H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1)$

Esistono $A_1, ..., A_r, B \in K[X_1, ..., X_{n+1}]$ tali che
$$1 = \sum_i A_i(X_1, ..., X_{n+1})F_i + B(X_1, ..., X_{n+1})(X_{n+1}G - 1)$$

Quest'uguaglianza vale anche in $K(X_1, ..., X_n)[X_{n+1}]$

Valutiamo primo e secondo membro in $\frac{1}{G} \in K(X_1, ..., X_n)$

Scegliamo un $N$ sufficientemente grande in modo che, moltiplicando primo e secondo membro per $G^N$, si semplifichino tutti i denominatori

$G^N = \sum_i C_i(X_1, ..., X_n)F_i \in J$, che implica $G \in Rad(J)$

**Passo 4.**

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$
un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

**Dimostrazione (continua).**

$H = \mathbb{A}^{n+1}(K)$ e quindi $1 \in H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1)$
Esistono $A_1, ..., A_r, B \in K[X_1, ..., X_{n+1}]$ tali che

$$1 = \sum_i A_i(X_1, ..., X_{n+1})F_i + B(X_1, ..., X_{n+1})(X_{n+1}G - 1)$$

Quest'uguaglianza vale anche in $K(X_1, ..., X_n)[X_{n+1}]$
Valutiamo primo e secondo membro in $\frac{1}{G} \in K(X_1, ..., X_n)$
Scegliamo un $N$ sufficientemente grande in modo che, moltiplicando primo e secondo membro per $G^N$, si semplifichino tutti i denominatori
$G^N = \sum_i C_i(X_1, ..., X_n)F_i \in J$, che implica $G \in Rad(J)$

Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

Dimostrazione (continua).

$H = \mathbb{A}^{n+1}(K)$ e quindi $1 \in H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1)$

Esistono $A_1, ..., A_r, B \in K[X_1, ..., X_{n+1}]$ tali che

$$1 = \sum_i A_i(X_1, ..., X_{n+1})F_i + B(X_1, ..., X_{n+1})(X_{n+1}G - 1)$$

Quest'uguaglianza vale anche in $K(X_1, ..., X_n)[X_{n+1}]$

Valutiamo primo e secondo membro in $\frac{1}{G} \in K(X_1, ..., X_n)$

Scegliamo un $N$ sufficientemente grande in modo che, moltiplicando primo e secondo membro per $G^N$, si semplifichino tutti i denominatori

$G^N = \sum_i C_i(X_1, ..., X_n)F_i \in J$, che implica $G \in Rad(J)$

Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$
un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

Dimostrazione (continua).

$H = \mathbb{A}^{n+1}(K)$ e quindi $1 \in H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1)$

Esistono $A_1, ..., A_r, B \in K[X_1, ..., X_{n+1}]$ tali che

$$1 = \sum_i A_i(X_1, ..., X_{n+1})F_i + B(X_1, ..., X_{n+1})(X_{n+1}G - 1)$$

Quest'uguaglianza vale anche in $K(X_1, ..., X_n)[X_{n+1}]$

Valutiamo primo e secondo membro in $\frac{1}{G} \in K(X_1, ..., X_n)$

Scegliamo un $N$ sufficientemente grande in modo che, moltiplicando primo e secondo membro per $G^N$, si semplifichino tutti i denominatori

$G^N = \sum_i C_i(X_1, ..., X_n)F_i \in J$, che implica $G \in Rad(J)$

Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$
un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

Dimostrazione (continua).

$H = \mathbb{A}^{n+1}(K)$ e quindi $1 \in H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1)$

Esistono $A_1, ..., A_r, B \in K[X_1, ..., X_{n+1}]$ tali che

$$1 = \sum_i A_i(X_1, ..., X_{n+1})F_i + B(X_1, ..., X_{n+1})(X_{n+1}G - 1)$$

Quest'uguaglianza vale anche in $K(X_1, ..., X_n)[X_{n+1}]$

Valutiamo primo e secondo membro in $\frac{1}{G} \in K(X_1, ..., X_n)$

Scegliamo un $N$ sufficientemente grande in modo che, moltiplicando primo e secondo membro per $G^N$, si semplifichino tutti i denominatori

$G^N = \sum_i C_i(X_1, ..., X_n)F_i \in J$, che implica $G \in Rad(J)$

## Passo 4.

Sia $K$ un campo algebricamente chiuso e $J = (F_1, ..., F_r)$ un ideale di $K[X_1, ..., X_n]$
Allora $I(V(J)) \subseteq Rad(J)$

## Dimostrazione (continua).

$H = \mathbb{A}^{n+1}(K)$ e quindi $1 \in H = (F_1, ..., F_r, X_{n+1}G - 1)$

Esistono $A_1, ..., A_r, B \in K[X_1, ..., X_{n+1}]$ tali che

$$1 = \sum_i A_i(X_1, ..., X_{n+1})F_i + B(X_1, ..., X_{n+1})(X_{n+1}G - 1)$$

Quest'uguaglianza vale anche in $K(X_1, ..., X_n)[X_{n+1}]$

Valutiamo primo e secondo membro in $\frac{1}{G} \in K(X_1, ..., X_n)$

Scegliamo un $N$ sufficientemente grande in modo che, moltiplicando primo e secondo membro per $G^N$, si semplifichino tutti i denominatori

$G^N = \sum_i C_i(X_1, ..., X_n)F_i \in J$, che implica $G \in Rad(J)$