UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

PROPRIETÀ DI SEPARAZIONE PER SPAZI TOPOLOGICI

Relatore

Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di

Margherita Cabras

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

Indice

Introduzione

La tesi è suddivisa in tre capitoli e un'appendice, articolati nel seguente modo:

nel primo capitolo vengono richiamate alcune nozioni di base della topologia, fra cui le definizioni di spazio topologico, di spazio metrico, di varietà topologica e le proprietà di separazione; nel secondo capitolo vengono trattate più nel dettaglio le proprietà di separazione, con particolare attenzione alle implicazioni che le legano, viene inoltre riportata la dimostrazione del Lemma di Urysohn, fondamentale per il problema della metrizzazione; infine nel terzo capitolo viene trattato il legame fra la metrizzabilità e la proprietà T_4 e fra la metrizzabilità e le varietà topologiche, con particolare attenzione al caso delle varietà topologiche compatte; nell'appendice, infine, vengono riportate alcune definizioni di algebra utili alla comprensione di alcuni esempi riportati nella tesi.

Capitolo 1

Richiami

1.1 Spazi Metrici e Spazi Topologici

Sia X un insieme non vuoto e $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$ un sottoinsieme dell'insieme delle parti di X tale che

- $\mathcal{T}1.$ $\emptyset, \mathrm{X} \in \mathcal{T}$;
- $\mathcal{T}2.$ $\bigcup_{i\in I} X_i \in \mathcal{T}$, dove $X_i \in \mathcal{T}\ \ \forall i$;
- $\mathcal{T}3.$ $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \in \mathcal{T}$, dove $X_i \in \mathcal{T}\ \ \forall i$;

allora $\mathcal{T}$ è una *topologia* su X, i suoi elementi si chiamano *aperti* della topologia e la coppia (X,$\mathcal{T}$) è detta *spazio topologico.*

Generalmente indicheremo lo spazio topologico solo con il suo supporto X, a meno che non ci siano ambiguità.

Dato uno spazio topologico $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$, risulta definita una topologia anche sui sottoinsiemi non vuoti di X; tale topologia prende il nome di *topologia indotta.*

Preso S sottoinsieme non vuoto di X, se X è dotato della topologia $\mathcal{T}$, indicheremo la topologia indotta da $\mathcal{T}$ su S con $\mathcal{T}_{\mathrm{S}}$ e gli aperti di $\mathcal{T}_{\mathrm{S}}$ saranno i sottoinsiemi di S della forma $\mathrm{S} \cap \mathrm{A}$, al variare di A fra gli aperti di $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$.

La struttura di spazio topologico è generale; esiste tuttavia un caso particolare e importante di spazi topologici, gli *spazi metrici*, che generalizzano le proprietà degli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$.

Ricordiamo che si definisce *metrica* su un insieme X non vuoto un'applicazione $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

- $d1.$ $d(x, y) \geq 0 \; \forall x, y \in X$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $d2.$ $d(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in X$;
- $d3.$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Definiremo quindi *spazio metrico* un insieme non vuoto X insieme a una metrica

$$d: X \times X \to \mathbb{R}.$$

In questo caso, diremo che un insieme $U \subset X$ è *aperto* se può essere scritto come unione di insiemi (*dischi*) della forma $D_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$ dove $x \in X$ e r è un reale positivo.

Indicheremo la topologia che ha come aperti gli aperti della metrica con $\mathcal{T}_d$ e la chiameremo *topologia metrica.* Viceversa, diremo che uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è *metrizzabile* se esiste una metrica d su X tale che $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$.

Osserviamo che in generale non è semplice dire se uno spazio topologico è metrizzabile o meno. Nel corso della tesi vedremo diversi risultati che hanno contribuito alla soluzione di questo problema.

D'altra parte, è molto semplice fornire un esempio di spazio metrico: possiamo infatti considerare lo spazio $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea definita come $d_{eucl}(x, y) = \| x - y \|$ e la topologia metrica indotta. Nel caso dello spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d_{eucl})$, la topologia metrica si chiamerà *topologia euclidea* e per semplicità la indicheremo con $\mathcal{E}$.

È utile anche osservare che è possibile definire una relazione d'ordine parziale sull'insieme delle topologie su un dato insieme X.

Definizione 1 *(Relazione di Finezza)* Date due topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ su uno stesso insieme X non vuoto. Diremo che $\mathcal{T}'$ è meno fine di $\mathcal{T}$ se qualunque aperto U della topologia $\mathcal{T}'$ è anche un aperto di $\mathcal{T}$.

Un utile strumento nello studio degli spazi topologici sono le *basi* e le *basi locali*. Vediamo le definizioni.

Definizione 2 *(Base)* Sia X uno spazio topologico. Una *base* di X è una famiglia $\mathcal{B}$ di aperti della topologia tale che ogni aperto di X si possa scrivere come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Definizione 3 *(Base Locale)* Sia X uno spazio topologico. Una *base locale* di X nel punto x è una famiglia $\mathcal{B}_{\mathrm{x}}$ di aperti tale che per qualunque insieme A contenente x esista $\mathrm{B_x} \in \mathcal{B}_{\mathrm{x}}$ tale che $\mathrm{x} \in \mathrm{B_x} \subset \mathrm{A}$.

Notiamo che data una topologia $\mathcal{T}$, la base non è univocamente determinata. Data una base, invece, risulterà univocamente determinata una topologia. Si dimostra infatti che se $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}^*$ sono due topologie sull'insieme X e $\mathcal{B}$ è una base sia per $\mathcal{T}$ che $\mathcal{T}^*$ allora si deve avere $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

Si dimostra inoltre il seguente importante risultato[1].

Lemma 1. Sia X un insieme non vuoto e $\mathcal{B}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che:

- $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = \mathrm{X}$;
- dati comunque A, B $\in \mathcal{B}$, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$;

allora esiste una topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ su X di cui $\mathcal{B}$ è una base e inoltre $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \bigcap_{\mathcal{B}\subset\mathcal{T}} \mathcal{T}$; cioè $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ è l'intersezione di tutte le topologie su X che contengono $\mathcal{B}$.

[1] Per la dimostrazione si veda [4], pag. 55

1.2 Applicazioni Continue

Diamo ora una definizione fondamentale nello studio della topologia, quella di *applicazione continua*.

Definizione 4 *(Applicazione Continua)* Siano X e Y spazi topologici e $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un'applicazione. Diremo che f è continua nel punto $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ se per ogni aperto A di Y contenente $f(\mathrm{x})$ esiste $\mathrm{U_x}$ aperto di X tale che $\mathrm{U_x} \subset f^{-1}(\mathrm{V}_{f(\mathrm{x})})$. Diremo che f è *continua* se è continua in ogni punto.

Una classe molto importante di applicazioni continue fra spazi topologici è data dagli *omeomorfismi*.

Definizione 5 *(Omeomorfismo)* Un'applicazione $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ fra due spazi topologici è un *omeomorfismo* se è continua, biunivoca e la sua inversa $f^{-1} : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ è continua.

Diremo quindi che due spazi topologici X e Y sono *omeomorfi* se è possibile definire un omeomorfismo dall'uno all'altro.

L'omeomorfismo rappresenta una relazione di equivalenza tra spazi topologici; una proprietà che se posseduta da uno spazio topologico X è posseduta anche da tutti gli spazi ad esso omeomorfi è detta *proprietà topologica*.
Sfruttando la definizione di omeomorfismo, inoltre, è possibile definire una nuova categoria di spazi topologici, gli spazi *localmente euclidei*.

Definizione 6 *(Spazio localmente euclideo)* Uno spazio topologico X è localmente euclideo di dimensione n se per ogni $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ esiste un aperto contenente x omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

Un'altra categoria di applicazioni molto importanti fra spazi topologici è data dagli *embedding topologici*; queste funzioni hanno proprietà meno forti di quelle degli omeomorfismi, ma nonostante questo risultano fondamentali nello studio dei legami fra i diversi spazi topologici. Vediamo come sono definiti.

Definizione 7 *(Embedding Topologico)* Un'applicazione $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ fra due spazi topologici prende il nome di *embedding topologico* se l'applicazione $f' : \mathrm{X} \to f(\mathrm{X})$ indotta da f è un omeomorfismo.

Un'ultima classe di applicazioni importanti fra spazi topologici è quella delle applicazioni *aperte* (risp. *chiuse*).

Dati due spazi topologici X e Y, diremo che $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ è *aperta* (risp. *chiusa*) se per ogni sottoinsieme A aperto (risp. chiuso) di X si ha che $f(\mathrm{A})$ è aperto (risp. chiuso) in Y.

A conclusione del paragrafo, ricordiamo due importanti proprietà topologiche.

Definizione 8 *(Spazio Connesso)* Uno spazio topologico X si dice connesso se non esiste una sua separazione, cioè se non esiste una coppia $\{\mathrm{U}, \mathrm{V}\}$ di aperti disgiunti tali che $\mathrm{U} \cup \mathrm{V} = \mathrm{X}$.

Definizione 9 *(Spazio Compatto)* Uno spazio topologico X si dice compatto se ogni suo ricoprimento aperto (famiglia di aperti la cui unione è X) possiede un sottoricoprimento finito.

1.3 Numerabilità e Proprietà di Separazione

Le proprietà che studieremo in questo paragrafo riguardano per certi versi il numero degli aperti della topologia.

Negli assiomi di numerabilità, ad esempio, si richiede che la topologia in questione non abbia molti aperti, in particolare si impongono delle condizioni sulle basi della topologia.

Spazi $\mathbf{N_1}$ Diremo che uno spazio topologico $(\mathrm{X},\mathcal{T})$ è N_1 se soddisfa il *primo assioma di numerabilità*: per ogni $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ esiste una base locale numerabile per $\mathcal{T}$.

Spazi N_2 Uno spazio topologico $(X,\mathcal{T})$ si dice invece N_2 se soddisfa il *secondo assioma di numerabilità*: per ogni $x \in X$ esiste una base numerabile per la topologia $\mathcal{T}$.

Spazi N_3 Diremo infine che uno spazio topologico $(X,\mathcal{T})$ è N_3 se soddisfa il *terzo assioma di numerabilità*: esiste un sottoinsieme $S \subset X$ denso in X e numerabile.

Facciamo alcune osservazioni sulle implicazioni che le legano.

Uno spazio topologico N_2 è anche N_1 e N_3.

Osserviamo anche che ogni spazio metrico è N_1, infatti è sufficiente scegliere come base locale quella formata dai dischi con centro in x al variare di $x \in X$.

Nel caso delle proprietà di separazione, invece, si richiede che le topologie abbiano un gran numero di aperti, per poter "separare" i punti e i chiusi fra loro.

Vediamo più nel dettaglio queste proprietà, che saranno il centro di tutta la tesi.

Spazi T_1 Diremo che uno spazio topologico $(X,\mathcal{T})$ è T_1 se ogni punto $x \in X$ è un sottoinsieme chiuso di X o se, equivalentemente, dati due punti $x, y \in X$ esistono due aperti U e V tali che $x \in U$, $y \notin U$ e $y \in V$, $x \notin V$.

Spazi T_2 Uno spazio topologico $(X,\mathcal{T})$ è T_2 o di Hausdorff se dati due punti $x, y \in X$ con $x \neq y$ esistono due aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$ e $y \in V$.

Spazi T_3 Uno spazio topologico si dice T_3 o regolare se è T_1 e se verifica la seguente proprietà:
(*reg*): dati un chiuso $C \subset X$ e un punto $x \in X \setminus C$ esistono due aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$ e $C \subset V$.

Spazi T_4 Infine definiamo T_4 o normale uno spazio che sia T_1 e che verifichi la seguente proprietà:

(*norm*) dati due insiemi chiusi e disgiunti C_1 e C_2 contenuti in X esistono due aperti disgiunti U e V tali che $C_1 \subset U$ e $C_2 \subset V$.

Possiamo ora definire un oggetto importantissimo nello studio della topologia generale:

Definizione 10 *(Varietà Topologica)*: Si definisce *varietà topologica* di dimensione n uno spazio topologico M che rispetta le condizioni seguenti:

1. M è localmente euclideo di dimensione n;

2. M è di Hausdorff;

3. M è N_2.

A conclusione del paragrafo riportiamo alcuni risultati sulle proprietà di numerabilità e di separazione:

Lemma 2. Se uno spazio topologico N_3 X contiene un sottoinsieme chiuso discreto non numerabile S, X non è normale.

Dimostrazione. Poichè X è N_3, sappiamo che esiste un suo sottoinsieme numerabile e denso $D \subset X$. Supponiamo ora per assurdo che X sia normale. Poichè S è discreto e chiuso in X, ogni sottoinsieme di S è chiuso in X. Quindi per ogni sottoinsieme $A \subsetneq S$ esistono due aperti disgiunti U_A e $U_{S\setminus A}$ in X tali che $A \subset U_A$ e $S \setminus A \subset U_{S\setminus A}$.

Poichè D è denso, si ha che $U_A \cap D \neq \emptyset$ per ogni sottoinsieme non vuoto $A \subsetneq S$.

Inoltre se $A, B \subsetneq S$ sono due sottoinsiemi non vuoti di S con $A \neq B$, si ha $U_A \cap D \neq U_B \cap D$.

Infatti se $A \setminus B \neq \emptyset$, si ha

$$U_B \cap U_{S\setminus B} \cap D = \emptyset$$

mentre

$$U_A \cap U_{S\setminus B} \cap D \neq \emptyset$$

perchè $\mathrm{U_A} \cap \mathrm{U_{S \setminus B}}$ è un intorno aperto di $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ e in particolare non è vuoto; ne consegue che $\mathrm{U_A} \cap \mathrm{D}$ e $\mathrm{U_B} \cap \mathrm{D}$ sono distinti.
Per $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A} \neq \emptyset$ il ragionamento è analogo.
Consideriamo ora l'applicazione

$$f : \mathcal{P}(\mathrm{S}) \to \mathcal{P}(\mathrm{D})$$

definita da

$$\mathrm{A} \mapsto \mathrm{U_A} \cap \mathrm{D}, \text{ se } \mathrm{A} \subsetneqq \mathrm{S} \text{ e } \mathrm{A} \neq \emptyset,$$
$$\mathrm{S} \mapsto \mathrm{D}$$
$$\emptyset \mapsto \emptyset$$

Tale applicazione è iniettiva, ma ciò è assurdo, visto che per ipotesi la cardinalità di $\mathcal{P}(\mathrm{S})$ è maggiore di quella di $\mathcal{P}(\mathrm{D})$.

■

Lemma 3. Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{U}$ due topologie sull'insieme X tali che $\mathcal{T} < \mathcal{U}$, cioè $\mathcal{T}$ è meno fine di $\mathcal{U}$. Allora se $\mathcal{T}$ è $\mathrm{T_1}$ (risp. $\mathrm{T_2}$) lo è anche $\mathcal{U}$.
Dimostrazione. Dimostriamo il caso in cui $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ è $\mathrm{T_2}$.
Supponiamo quindi che $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ sia $\mathrm{T_2}$, allora presi due punti $\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{X}$ esisteranno due aperti disgiunti U e V in $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ tali che $\mathrm{x} \in \mathrm{U}$ e $\mathrm{y} \in \mathrm{V}$. Ma U e V sono aperti di $\mathcal{T}$ e poichè $\mathcal{T}$ è meno fine di $\mathcal{U}$ essi saranno anche aperti di $\mathcal{U}$. Da qui segue che anche $(\mathrm{X}, \mathcal{U})$ è $\mathrm{T_2}$.
La dimostrazione del caso con $(X, \mathcal{T})$ $\mathrm{T_1}$ è analoga.

■

Lemma 4. Ogni spazio metrizzabile X è di Hausdorff.
Dimostrazione. Siano $u \neq v$ punti di X spazio metrizzabile. Poniamo $d(u, v) = \mathrm{r}$ con $\mathrm{r} > 0$, allora gli aperti $\mathrm{U} = \mathrm{D}_{\frac{\mathrm{r}}{3}}(u)$ e $\mathrm{V}_{\frac{\mathrm{r}}{3}}(v)$ soddisfano le condizioni $u \in \mathrm{U}$ e $v \in \mathrm{V}$; inoltre $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$. Infatti se per assurdo esistesse $w \in \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$, si avrebbe

$$\mathrm{r} = d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) < \frac{\mathrm{r}}{3} + \frac{\mathrm{r}}{3} = \frac{2\mathrm{r}}{3}$$

che è l'assurdo cercato.

■

Lemma 5. (*dell'Applicazione Chiusa*) Sia $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un'applicazione continua da uno spazio topologico X compatto a uno spazio di Hausdorff Y. Valgono i seguenti fatti:

1. f è un'applicazione chiusa;

2. se f è una bigezione allora è un omeomorfismo;

3. se f è iniettiva allora è un embedding.

Dimostrazione. Per provare che f è chiusa, consideriamo C, un sottoinsieme chiuso di X, allora esso è anche compatto. Poichè le funzioni continue conservano la compattezza, $f(\mathrm{C})$ è un sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff e quindi è chiuso [2].

Per provare il punto 2 basta osservare che una funzione f chiusa e bigettiva ha un inversa continua e visto che era essa stessa continua per ipotesi possiamo concludere che è un omeomorfismo.

Se infine supponiamo che f sia iniettiva, avremo che $f : \mathrm{X} \to f(\mathrm{X})$ è bigettiva e quindi per il punto 2 è un omeomorfismo; quindi $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ è un embedding topologico e risulta così provato anche il punto 3.

■

1.4 Spazi Prodotto

In questo paragrafo definiamo un nuovo tipo di topologia che si costruisce sul prodotto cartesiano di spazi topologici noti; per questo essa prende il nome di *topologia prodotto*.

[2] Per le dimostrazioni di tali risultati si veda [4], pag. 130 e 131

Consideriamo n spazi topologici $\mathrm{X_1, \dots, X_n}$ e il loro prodotto cartesiano $X = \mathrm{X_1 \times \cdots \times X_n}$; consideriamo inoltre la seguente famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{U_1 \times \cdots \times U_n} \mid \mathrm{U_i} \text{ è aperto in } \mathrm{X_i},\ \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{n}\}$$

e notiamo che $\mathcal{B}$ soddisfa le condizioni del Lemma 1. Ciò significa che esisterà una topologia $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ che ha $\mathcal{B}$ come base: tale topologia è chiamata *topologia prodotto*.

Richiamiamo inoltre due importanti proprietà che legano la topologia prodotto alle proprietà di numerabilità e di separazione. Presi $\mathrm{X_1, \dots, X_n}$ spazi topologici, si avrà che

- se ogni $\mathrm{X_i}$ è $\mathrm{T_1}$ (risp. $\mathrm{T_2}$, $\mathrm{T_3}$) allora lo è anche $X = \mathrm{X_1 \times \cdots \times X_n}$ con la topologia prodotto;
- se ogni $\mathrm{X_i}$ è $\mathrm{N_1}$ (risp. $\mathrm{N_2}$, $\mathrm{N_3}$) allora lo è anche $X = \mathrm{X_1 \times \cdots \times X_n}$ con la topologia prodotto.

Riportiamo anche un importantissimo risultato riguardante il prodotto di spazi compatti.

Teorema 1. (*di Tychonoff*)[3] Il prodotto cartesiano di una collezione di spazi topologici compatti è compatto con la topologia prodotto.

1.5 Spazi Quoziente

Le definizioni riportate di seguito riguardano dei particolari spazi topologici, gli *spazi quoziente*, e la loro costruzione. Questi oggetti risulteranno fondamentali nel terzo e ultimo capitolo della tesi.

Definizione 11 *(Topologia Quoziente)* Sia $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un'applicazione suriettiva, con X spazio topologico e Y un insieme qualunque. Defininiamo

[3] [3], pag. 143

la *Topologia Quoziente* $\mathcal{T}_f$ su Y come quella composta dagli insiemi $\mathrm{U} \subset \mathrm{Y}$ tali che $f^{-1}(\mathrm{U}) \subset \mathrm{X}$ è aperto in X.

Definizione 12 *(Identificazione)* Sia $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$, con X e Y spazi topologici, un'applicazione suriettiva. f è un'*identificazione* se Y ha la topologia quoziente $\mathcal{T}_f$.

Definizione 13 *(Spazio Quoziente)* Sia X uno spazio topologico e $\sim$ una relazione di equivalenza su X. Allora la proiezione $\pi : \mathrm{X} \to \mathrm{X}/\sim$ che a $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ associa $[\mathrm{x}]_\sim$ è un'identificazione se su Y poniamo la topologia quoziente e $\mathrm{X}/\sim$ si chiamerà *Spazio Quoziente*.

Osserviamo che le proprietà di compattezza e connessione *passano al quoziente*, cioè si ha che se lo spazio di partenza X è compatto (risp. connesso) lo sarà anche lo spazio quoziente $\mathrm{X}/\sim$; mentre le proprietà di numerabilità e separazione avranno generalmente bisogno di condizioni molto forti per essere trasmesse allo spazio quoziente.

In particolare, si hanno i seguenti risultati:

- lo spazio quoziente di uno spazio N_3 è N_3;
- se la proiezione naturale di uno spazio X N_2 sul suo insieme quoziente $\mathrm{X}/\sim$ è un'applicazione aperta (diremo in tal caso che la relazione di equivalenza $\sim$ è aperta), allora anche lo spazio quoziente sarà N_2.

Per quanto riguarda la proprietà T_2, invece, si ha il seguente

Teorema 2. Sia $\sim$ una relazione di equivalenza aperta su uno spazio topologico X qualunque. Allora lo spazio quoziente $\mathrm{X}/\sim$ è di Hausdorff se e solo se il sottoinsieme

$$\mathrm{R} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} \mid \mathrm{x} \sim \mathrm{y}\}$$

di $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ è chiuso nella topologia prodotto.[4]

[4]Per la dimostrazione si veda [4], pag. 154

Capitolo 2

Proprietà di Separazione

Come è stato già accennato nel capitolo precedente, le proprietà di separazione sono utili a classificare gli spazi topologici in base a quanto possiamo separare i punti e i chiusi usando gli aperti.

Nel corso del capitolo osserveremo come sono legate reciprocamente le proprietà di separazione e quali vantaggi portano allo studio degli spazi stessi.

2.1 T_1 e T_2

La proprietà T_1 è la più debole delle principali proprietà di separazione.
Vediamo innanzitutto un esempio di spazio topologico non T_1:
consideriamo un insieme X con almeno due punti e con la topologia banale $\mathcal{T}_{\text{ban}}$ (gli unici aperti sono X stesso e il vuoto), in questo caso per verificare che tale spazio non gode della proprietà T_1 basta osservare che scelti due punti dello spazio è impossibile trovare due aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$, $y \notin U$ e $y \in V$, $x \notin V$, visto che gli unici aperti che abbiamo a disposizione sono X e $\emptyset$.
Come abbiamo già visto nel capitolo precedente, è possibile dare due definizioni equivalenti di questa proprietà.

Se assumiamo come definizione di spazio T_1 quella che afferma che X è T_1 se ogni suo punto è chiuso, dati x e y punti di X, si possono definire gli aperti disgiunti tali che $x \in U$, $y \notin U$ e $y \in V$, $x \notin V$: basterà infatti definire $V = X \setminus \{x\}$ e $U = X \setminus \{y\}$.

Viceversa, se assumiamo come definizione di spazio T_1 quella che afferma che X è T_1 se presi $x, y \in X$ esistono U e V aperti tali che $x \in U$, $y \notin U$ e $y \in V$, $x \notin V$, per provare che ogni punto di X è chiuso basterà considerare $y \in X \setminus \{x\}$, quindi per definizione esisterà un aperto V tale che $y \in V$, $x \notin V$; quindi $y \in V \subset X \setminus \{x\}$ da cui segue che $X \setminus \{x\}$ è aperto e quindi x è chiuso.

In questo modo risulta provata l'equivalenza fra le due definizioni.

Cerchiamo di capire ora quale sia il legame tra le proprietà T_1 e T_2. Osserviamo innanzituto che esistono spazi T_1 che non sono T_2. Consideriamo l'esempio seguente.

- Prendiamo lo spazio topologico $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ dove X è un insieme di cardinalità infinita, e $\mathcal{T}_{\text{cof}}$ è la *topologia cofinita*, definita nel seguente modo:

$$\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{U \subset X \mid X \setminus U \text{ è finito}\} \cup X \cup \emptyset.$$

  Per provare che $(X, \mathcal{T}_{\text{cof}})$ è T_1 sfruttiamo la definizione che afferma che uno spazio è T_1 se ogni punto è chiuso: dalla definizione di topologia cofinita, abbiamo che sono aperti tutti gli insiemi il cui complementare è finito, quindi gli insiemi con un numero finito di elementi sono chiusi (il loro complementare è aperto) e in particolare saranno chiusi anche gli insiemi contenenti un solo punto.
  Proviamo dunque che non è T_2.
  Scegliamo $x, y \in X$ con $x \neq y$ e supponiamo per assurdo che esistano U e V aperti disgiunti di $\mathcal{T}_{\text{cof}}$ tali che $x \in U$ e $y \in V$. Poichè U e V sono disgiunti, si avrà che $U \subset X \setminus V$ e $V \subset X \setminus U$, cioè sono sottoinsiemi di insiemi finiti e quindi essi stessi finiti, e che possiamo scrivere

$X = U \cup V \cup X \setminus (U \cup V)$, cioè X è unione di insiemi finiti, cioè X è finito, contro le nostre ipotesi.

Risulta quindi provato che la proprietà T_1 non implica la proprietà T_2.
Vale invece l'implicazione contraria, come vediamo nella seguente

Proposizione 1: Sia X uno spazio di Hausdorff, allora X è T_1.

Dimostrazione. Per provare che X è T_1, proveremo che ogni suo punto è un sottoinsieme chiuso.
Sia $u \in X$. Per ogni $v \in X$, $u \neq v$, esistono aperti disgiunti U, V tali che $u \in U$, $v \in V$; in particolare $v \in V \subset X \setminus \{u\}$. Dunque $X \setminus \{u\}$ è un intorno di v (sottoinsieme di X che contiene un aperto conenente v), e quindi è aperto, cioè u è chiuso.

■

2.2 T_2 e T_3

Quando nel Capitolo 1 abbiamo definito gli spazi T_3 o *regolari* abbiamo detto che essi, oltre a verificare la proprietà (*reg*), devono essere T_1.
A questo punto è legittimo chiedersi se la condizione che lo spazio sia T_1 non sia ridondante.
In effetti non lo è: esistono infatti spazi topologici che verificano la (*reg*) pur non essendo T_1. Vediamone un esempio: consideriamo $X = \{a, b, c\}$ con la topologia $\mathcal{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. Osserviamo che tale spazio topologico non è T_1, visto che il punto $\{b\}$ non è chiuso. Esso tuttavia verifica la condizione (*reg*). Infatti se consideriamo $\{a\}$ e $\{b, c\}$, entrambi chiusi, posso separarli usando loro stessi, visto che sono anche aperti e disgiunti; se invece considero il punto $\{b\}$ e il chiuso $\{a\}$, posso separarli usando $\{b, c\}$ e $\{a\}$ stesso.
Verifichiamo ora che le condizioni T_2 e T_3 non siano equivalenti.
Consideriamo innanzitutto un esempio di spazio T_2 che non sia T_3.

- Sia $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ e $S = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$.

Sia $\mathcal{T}$ la topologia meno fine contenente ogni sottoinsieme aperto di $\mathrm{X} \setminus \{0\}$ nella topologia indotta dalla topologia euclidea $\mathcal{E}$ su $\mathbb{R}$, e contenente inoltre ogni insieme $\mathrm{B_r}$, $0 < \mathrm{r} \leq 1$, definito da

$$\mathrm{B_r} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} \mid \mathrm{x} < \mathrm{r},\, \mathrm{x} \notin \mathrm{S}\}\,.$$

Bisogna prima di tutto dimostrare che $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ è di Hausdorff. Siano u, $v \in \mathrm{X}$ distinti e supponiamo $u < v$: se $0 \neq u$, sia $\varepsilon = v - u$, allora $\mathrm{U} = \left(0,\, u + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ e $\mathrm{V} = \left(u + \frac{\varepsilon}{2},\, 1\right)$ sono due aperti di X tali che $u \in \mathrm{U}$, $v \in \mathrm{U}$, $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$; se invece $u = 0$, sia $0 < \mathrm{r} < v$, e prendiamo $\mathrm{U} = \mathrm{B_r}$, $\mathrm{V} = (v - \mathrm{r},\, 1]$. U e V sono aperti in X; inoltre $u \in \mathrm{U}$, $v \in \mathrm{U}$, $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$. Quindi possiamo concludere che X è uno spazio di Hausdorff.

Per provare che X non è regolare bisogna provare che non soddisfa la proprietà (*reg*), visto che il fatto che sia di Hausdorff implica che sia T_1. Procediamo quindi dimostrando che la (*reg*) non è soddisfatta: osserviamo che S è un sottoinsieme chiuso di X perchè $\mathrm{S} = \mathrm{X} \setminus \mathrm{B}_1$, $0 \notin \mathrm{S}$; proviamo ora che non esistono U e V aperti di X tali che $0 \in \mathrm{U}$, $\mathrm{S} \subset \mathrm{V}$, $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$.

Ogni aperto U contenente 0 deve contenere $\mathrm{B_r}$ per qualche $0 < \mathrm{r} \leq 1$; d'altra parte ogni aperto V contenente S ma non 0 è un aperto di $\mathrm{X} \setminus \{0\}$ nella topologia euclidea; ma un aperto V così definito interseca ogni $\mathrm{B_r}$, con $0 < \mathrm{r} \leq 1$, quindi la condizione $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$ non può essere verificata.

Quindi la condizione (*reg*) non è verificata e X non è regolare.

Anche in questo caso, però, vale l'implicazione contraria.

Proposizione 2: Ogni spazio regolare è di Hausdorff.

Dimostrazione. Sia X uno spazio regolare e $u, v \in \mathrm{X}$ due punti distinti. Poichè X è uno spazio $\mathcal{T}_1$, $\{v\}$è un insieme chiuso. Prendendo $\mathrm{F} = \{v\}$, $x = u$, la proprietà *(reg)* assicura l'esistenza di aperti disgiunti U, V tali che $u \in \mathrm{U}$,

$v \in$ V. Quindi X è di Hausdorff.

■

2.3 T_3 e T_4

In questo paragrafo analizzeremo il legame fra gli spazi normali e gli spazi regolari.
Osserviamo prima di tutto che anche nel caso degli spazi normali la condizione che lo spazio X sia T_1 non è ridondante, cioè esistono spazi che verificano la proprietà (*norm*) pur non essendo T_1; la costruzione dell'esempio è analoga a quella riportata nel paragrafo precedente per gli spazi regolari.
Anche in questo paragrafo dimostreremo l'implicazione valida, proveremo quindi che ogni spazio normale è regolare, e forniremo un controesempio per il viceversa.
Vediamo quindi la dimostrazione della seguente

Proposizione 3: Ogni spazio normale è regolare.
Dimostrazione. Sia X uno spazio normale. Per provare che X è regolare basterà verificare la condizione (*reg*), visto che la proprietà T_1 è verificata per definizione.
Consideriamo un chiuso $C \subset X$ e un punto $x \in X \setminus C$. Poichè X è T_1, il punto $\{x\}$ è un chiuso tale che $\{x\} \cap C = \emptyset$.
Quindi poichè X è T_4 possiamo concludere che esistono due aperti disgiunti $U \supset C$ e $V \supset \{x\}$ e che quindi dati un chiuso C e un punto x che non gli appartiene esistono due aperti disgiunti U e V tali che $C \subset U$ e $x \in V$, cioè X è T_3.

■

Adesso vorremmo trovare un controesempio per l'implicazione contraria: costruiremo quindi uno spazio non T_3 ma non T_4.

Consideriamo quindi uno spazio costruito nel seguente modo:

- sia S una retta di $\mathbb{R}^2$ e X uno dei due semipiani chiusi individuati da S. Sia $\mathcal{D}$ la famiglia dei dischi aperti di $\mathbb{R}^2$ contenuti in X e $\mathcal{H}$ la famiglia così definita:

$$\mathcal{H} = \{\mathrm{D} \cup \mathrm{P} \mid \mathrm{P} \in \mathrm{S},\ \mathrm{D} \in \mathcal{D},\ \mathrm{D\ tangente\ a\ S\ in\ P}\}.$$

È immediato verificare che la famiglia $\mathcal{D} \cup \mathcal{H}$ è una base per la topologia $\mathcal{T}$ su X (Lemma 1, paragrafo 1.1). Notiamo inoltre che S è chiuso in $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ e la topologia indotta da $\mathcal{T}$ su $\mathrm{X} \setminus \mathrm{S}$ è la topologia euclidea, mentre quella indotta su S è la topologia discreta. Inoltre $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ è N_3 perchè $\mathbb{Q}^2 \cap \mathrm{X}$ è un sottoinsieme denso. Quindi per il Lemma 2 del Paragrafo 1.3 X non è normale; proviamo ora che è regolare.
Per il Lemma 3 del Paragrafo 1.3 sappiamo che X è uno spazio T_1, visto che la topologia $\mathcal{T}$ è più fine della topologia euclidea. Inoltre siano F un sottoinsieme chiuso di X e $\mathrm{p} \in \mathrm{X} \setminus \mathrm{F}$. Se $\mathrm{p} \notin \mathrm{S}$, sia $\mathrm{r} > 0$ tale che $\mathrm{D_r}(\mathrm{p})$ non intersechi nè S nè il chiuso $(\mathrm{X} \setminus \mathrm{S}) \cap \mathrm{F}$ di $(\mathrm{X} \setminus \mathrm{S})$. Allora $\mathrm{D_r}(\mathrm{p}) \cap \mathrm{F} = \emptyset$ e quindi

$$\mathrm{A} = \mathrm{D}_{\frac{\mathrm{r}}{2}}(\mathrm{p}) \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{B} = \mathrm{X} \setminus \overline{\mathrm{D}_{\frac{\mathrm{r}}{2}}(\mathrm{p})}$$

sono aperti disgiunti tali che $\mathrm{p} \in \mathrm{A}$, $\mathrm{F} \subset \mathrm{B}$.
Supponiamo invece $\mathrm{p} \in \mathrm{S}$. Poichè F è chiuso esiste un aperto $\mathrm{D} \cup \mathrm{P}$ in $\mathcal{H}$ tale che $(\mathrm{D} \cup \mathrm{P}) \cap \mathrm{F} = \emptyset$. Si scelga allora $\mathrm{D}_1 \cup \mathrm{P} \in \mathcal{H}$ con $\mathrm{D}_1 \subsetneqq \mathrm{D}$. Si ha subito che

$$\mathrm{A} = \mathrm{D}_1 \cup \mathrm{P} \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{B} = \mathrm{X} \setminus \overline{\mathrm{D}_1 \cup \mathrm{P}}$$

sono due aperti disgiunti tali che $\mathrm{p} \in \mathrm{A}$ e $\mathrm{F} \subset \mathrm{B}$, quindi X è regolare.

2.4 Proprietà di Separazione nei Sottospazi

Una volta analizzate nel dettaglio le proprietà di separazione per gli spazi topologici, saremmo interessati a vedere se queste proprietà si trasmettono ai sottospazi o se è necessario imporre qualche condizione supplementare.
Cominciamo con l'analizzare i casi delle proprietà T_1, T_2 e T_3: dato uno spazio topologico X che sia T_i $(\mathrm{i} = 1, 2, 3)$, la proprietà T_i si trasmette automaticamente a un qualunque suo sottospazio, senza bisogno di imporre altre condizioni.
Per dimostrare questa affermazione consideriamo i tre diversi casi separatamente.

- Proviamo prima di tutto che ogni sottospazio Y di uno spazio X T_1 è T_1.
  Consideriamo due punti x e y appartenenti a Y. Nella topologia di X, essi saranno chiusi perchè X è T_1. Quindi i loro complementari $\mathrm{X} \setminus \{\mathrm{x}\}$ e $\mathrm{X} \setminus \{\mathrm{y}\}$ saranno aperti. Quindi nella topologia indotta su Y, $\mathrm{Y} \cap (\mathrm{X} \setminus \{\mathrm{x}\})$ e $\mathrm{Y} \cap (\mathrm{X} \setminus \{\mathrm{y}\})$ saranno aperti per definizione. Notiamo però che questi due insiemi sono proprio i complementari di $\{\mathrm{x}\}$ e $\{\mathrm{y}\}$ nella topologia indotta. Quindi x e y sono chiusi anche in Y e Y è T_1.

- Consideriamo ora il caso degli spazi T_2 e proviamo che ogni sottospazio Y di uno spazio di Hausdorff X è di Hausdorff.
  Per dimostrarlo consideriamo u,v punti distinti di Y; sappiamo per ipotesi che esistono due aperti U, V di X disgiunti tali che $u \in \mathrm{U}$ e $v \in \mathrm{V}$. Allora $\mathrm{U}' = \mathrm{U} \cap \mathrm{Y}$, $\mathrm{V}' = \mathrm{V} \cap \mathrm{Y}$ sono aperti disgiunti di Y tali che $u \in \mathrm{U}'$, $v \in \mathrm{V}'$.

- Vediamo ora il caso degli spazi regolari.
  Per provare che ogni sottospazio Y di uno spazio X regolare è regolare, proveremo semplicemente che se X verifica la condizione (*reg*) la verifica anche Y, visto che abbiamo già provato che la proprietà T_1 si

trasmette ai sottospazi. Consideriamo quindi F sottoinsieme chiuso di Y e sia $y \in \mathrm{Y} \setminus \mathrm{F}$; sia F' un chiuso di X tale che $\mathrm{F} = \mathrm{F}' \cap \mathrm{Y}$. Poichè X è regolare e $\mathrm{y} \notin \mathrm{F}'$ esistono due aperti disgiunti U', V' in X tali che $\mathrm{y} \in \mathrm{U}'$, $\mathrm{F}' \subset \mathrm{V}'$. Allora $\mathrm{U} = \mathrm{U}' \cap \mathrm{Y}$ e $\mathrm{V} = \mathrm{V}' \cap \mathrm{Y}$ sono aperti di Y e $\mathrm{y} \in \mathrm{U}$, $\mathrm{F} \subset \mathrm{V}$, $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = \emptyset$. Quindi Y soddisfa la condizione (*reg*) e possiamo concludere che è regolare.

Il caso degli spazi normali risulta leggermente diverso: la proprietà T_4, infatti, non si trasmette a tutti i sottospazi, ma solo a quelli chiusi. Ciò vuol dire che esistono sottospazi non chiusi di spazi T_4 che non sono T_4.
L'esempio che vedremo si basa su un particolare spazio topologico, chiamato *Asse di Tychonoff*, costituito da coppie di numeri ordinali definite in modo opportuno.

Per le informazioni sui numeri ordinali necessarie alla comprensione di questo esempio si rimanda all'Appendice, mentre per una trattazione più specifica si rimanda alle voci [6] e [3] della Bibliografia.
Diamo per prima cosa la definizione dello spazio in questione.

Definizione. Sia Ω il primo ordinale non numerabile e ω il primo ordinale infinito. L'*Asse di Tychonoff* T è definito come

$$\mathrm{T} = [0, \Omega] \times [0, \omega]$$

dove sia $[0, \Omega]$ che $[0.\omega]$ sono spazi topologici con la topologia d'ordine[1], mentre su T poniamo la topologia prodotto.

Il sottospazio non chiuso che considereremo in questo esempio è definito nel modo seguente:
chiameremo *Asse Cancellato di Tychonoff* T_∞ contenuto in T l'insieme

$$\mathrm{T}_\infty = \mathrm{T} \setminus \{(\Omega, \omega)\}$$

[1]v. Appendice

Perchè l'esempio che riportiamo sia efficace bisognerà provare tre fatti: T è normale, T_∞ è un sottoinsieme non chiuso di T, T_∞ non è T_4.

- Dimostriamo prima di tutto che T è normale.
  Gli intervalli di ordinali della forma $[0, \Gamma]$ con la topologia d'ordine sono compatti e T_2, quindi, per le proprietà del prodotto di spazi topologici, anche T sarà compatto e T_2. Sappiamo però che ogni spazio compatto e T_2 è normale [2], quindi possiamo concludere che T è normale.
  Ricordiamo che la proprietà T_4 non è preservata dal prodotto, quindi non bastava affermare che fossero T_4 i due intervalli per concludere che lo fosse l'asse T.

- Che T_∞ non sia chiuso discende dalla sua definizione come sottospazio di T. Osserviamo infatti che il suo complementare non è un aperto della topologia prodotto su T.

- Proviamo ora che l'asse cancellato T_∞ non è normale.
  Consideriamo A e B, sottoinsiemi chiusi di T_∞, definiti nel modo seguente

  $$\mathrm{A} = \{(\Omega, \mathrm{n}) \mid 0 \leq \mathrm{n} \leq \omega\} \quad \text{e} \quad \mathrm{B} = \{(\alpha, \omega \mid 0 \leq \alpha \leq \Omega)\}$$

  e supponiamo che $\mathrm{U} \subset T_\infty$ sia un intorno di A.
  Per ogni punto $(\Omega, \mathrm{n}) \in \mathrm{A}$, esiste un ordinale $\alpha_\mathrm{n} < \Omega$ tale che

  $$\{(\alpha, \mathrm{n}) \mid \alpha_n < \alpha \leq \Omega\} \subset \mathrm{U}$$

  . Sia ora $\overline{\alpha}$ un maggiorante per gli α_n, allora $\overline{\alpha} < \Omega$, visto che Ω ha un'infinità non numerabile di predecessori e $\overline{\alpha}$ ne ha invece un'infinità numerabile. Allora si ha che l'insieme $(\overline{\alpha}, \Omega] \times [0, \omega) \subset \mathrm{U}$, quindi che ogni intorno di $(\overline{\alpha} + 1, \omega) \in \mathrm{B}$ deve intersecare U. In conclusione si avrà che ogni intorno V di B intersecherà U e quindi che T_∞ non è T_4.

[2]Per la dimostrazione si veda [3], pag. 141

Abbiamo così provato che se il sottospazio considerato non è chiuso non si può concludere che sia T_4 come lo spazio di partenza. A conclusione del paragrafo dimostriamo invece che se il sottospazio è chiuso, allora è normale, provando la seguente

Proposizione 4: Ogni sottospazio chiuso Y di uno spazio X normale è normale.

Dimostrazione. Siano C_1 e C_2 chiusi disgiunti di Y; poichè Y è chiuso, essi saranno anche chiusi disgiunti di X. Esisteranno quindi due aperti U e V di X tali che $C_1 \subset U$, $C_2 \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. Allora $U \cap Y$ e $V \cap Y$ sono i due aperti che soddisfano le condizioni richieste affinchè Y sia normale.

■

2.5 Lemma di Urysohn

Il lemma di Urysohn esprime una proprietà fondamentale degli spazi normali; in particolare, ci assicura l'esistenza di applicazioni continue con proprietà molto forti che hanno come codominimo l'intervallo $[0, 1]$ contenuto in $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

Il fatto di poter mettere in relazione uno spazio topologico normale senza altre particolari proprietà con un chiuso di $\mathbb{R}$ attraverso una funzione continua ha presentato un incredibile passo in avanti nella risoluzione del problema della metrizzabilità: osserviamo infatti che un modo per provare che uno spazio è metrizzabile sarebbe provare che esso è omeomorfo a uno spazio metrizzabile.

Il passo successivo compiuto da Urysohn, infatti, sarà proprio in questo verso, grazie alla formulazione e alla dimostrazione del suo noto *Teorema sulla Metrizzazione* [3].

[3]Per l'enunciato e la dimostrazione si veda [3], pag.125

Teorema 3. (*Lemma di Urysohn*) Siano A_0 e A_1 due sottoinsiemi chiusi non vuoti e disgiunti di uno spazio normale X. Esiste un'applicazione continua $f\colon X \to [0,1]$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{per ogni } x \in A_0 \\ 1 & \textit{per ogni } x \in A_1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Denotiamo con D l'insieme dei numeri razionali diadici non negativi, cioè l'insieme dei numeri razionali della forma $\frac{a}{2^q}$ dove a e q sono interi non negativi. Costruiamo innanzitutto una famiglia

$$\mathcal{F} = \{U_t \mid t \in D\}$$

di insiemi aperti di X tale che per ogni s, $t \in D$, con $s < t$, si abbia $\overline{U}_s \subset U_t$. Per provarlo, prendiamo $U_t = X$ per ogni $t > 1$, $t \in D$, $U_1 = X \setminus A_1$.
Poichè X è normale, esistono due aperti M e N tali che $A_0 \subset M$, $A_1 \subset N$, $M \cap N = \emptyset$. Prendiamo $U_0 = M$. Si ha

$$\overline{U}_0 \subset X \setminus N \subset X \setminus A_1 = U_1.$$

Sia ora $t \in D$ tale che $0 < t < 1$. Possiamo scrivere in modo unico $t = \frac{(2m+1)}{2^n}$ per qualche m, $n > 0$. Costruiremo U_t per induzione su n. Poniamo

$$\alpha = \frac{2m}{2^n} = \frac{m}{2^{n-1}} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{(2m+2)}{2^n} = \frac{(m+1)}{2^{n-1}}.$$

Se $n = 1$, allora $\alpha = 0$, $\beta = 1$ e $U_\alpha = U_0$, $U_\beta = U_1$ sono già stati costruiti in modo che $\overline{U}_\alpha \subset U_\beta$.
Se $n \geq 2$, allora $\alpha < t < \beta$, e per l'ipotesi induttiva possiamo supporre di aver costruito insiemi aperti U_α e U_β tali che $\overline{U}_\alpha \subset U_\beta$.
Allora $\overline{U}_\alpha$ e $X \setminus U_\beta$ sono chiusi e disgiunti; poichè X è T_4 esistono due sottoinsiemi aperti V e W tali che $\overline{U}_\alpha \subset V$, $X \setminus U_\beta \subset W$, $W \cap V = \emptyset$.

Prendiamo $\mathrm{U_t} = \mathrm{V}$. Si ha

$$\overline{\mathrm{U}}_\alpha \subset \mathrm{U_t},\ \overline{\mathrm{U}}_\mathrm{t} \subset \mathrm{X} \setminus \mathrm{W} \subset \mathrm{U}_\beta.$$

É chiaro che se $\mathrm{t}' = \frac{(2\mathrm{h}+1)}{2^\mathrm{n}}$, $\mathrm{t} < \mathrm{t}'$, allora $\mathrm{U_t}$ e $\mathrm{U_{t'}}$ costruiti in questo modo soddisfano $\overline{\mathrm{U}}_\mathrm{t} \subset \mathrm{U_{t'}}$, perchè si ha $\mathrm{m} < \mathrm{h}$ e quindi

$$\overline{\mathrm{U}}_\alpha \subset \mathrm{U_t} \subset \overline{\mathrm{U}}_\mathrm{t} \subset \mathrm{U}_\beta \subset \overline{\mathrm{U}}_\beta \subset \overline{\mathrm{U}}_\gamma \subset \mathrm{U_{t'}} \subset \overline{\mathrm{U}}_\mathrm{t'} \subset \mathrm{U}_\delta,$$

dove $\gamma = \frac{\mathrm{h}}{2^{\mathrm{n}-1}}$ e $\delta = \frac{(\mathrm{h}+1)}{2^{\mathrm{n}-1}}$. Da ciò segue che la famiglia $\mathcal{F}$ costruita induttivamente ha le proprietà volute.
Definiamo ora l'applicazione $f \colon \mathrm{X} \to [0,1]$ ponendo

$$f(\mathrm{x}) = \inf\{\mathrm{t} \in \mathrm{D} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{U_t}\} \quad \text{per ogni } \mathrm{x} \in \mathrm{X}\,.$$

Si noti che la famiglia $\mathcal{F}$ ricopre X; quindi per ogni $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ l'insieme $\{\mathrm{t} \in \mathrm{D} \mid \mathrm{x} \in \mathrm{U_t}\}$ non è vuoto e il suo estremo inferiore è ben definito.
Inoltre da come è stata costruita la famiglia $\mathcal{F}$ segue subito che $f(\mathrm{x}) \in [0,1]$per ogni $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ e che

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathrm{x} \in A_0 \\ 1 & \text{se } \mathrm{x} \in A_1. \end{cases}$$

Ci resta da verificare che f è continua. A questo scopo sarà sufficiente verificare che per ogni numero reale a tale che $0 < a < 1$ gli insiemi $f^{-1}([0,a))$ e $f^{-1}((a,1])$ sono aperti in X visto che gli intervalli della forma $[0,a)$ e $(a,1]$ formano una sottobase della topologia di $[0,1]$ (ricordiamo che una *sottobase* di uno spazio topologico $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ è una famiglia di aperti $\mathcal{B}$ che genera $\mathcal{T}$, nel senso che $\mathcal{T}$ è la più piccola topologia che contiene $\mathcal{B}$).
Consideriamo l'insieme

$$f^{-1}([0,a)) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} \mid f(\mathrm{x}) < a\}\,.$$

Per definizione di estremo inferiore quest'insieme consiste degli $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ tali che

$\mathrm{x} \in \mathrm{U_t}$ per qualche $\mathrm{t} < a$. Quindi

$$f^{-1}([0,a)) = \bigcup_{\mathrm{t}<a} \mathrm{U_t}$$

è un insieme aperto.
Per dimostrare che l'insieme

$$f^{-1}((a,1]) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} \mid f(\mathrm{x}) > a\}$$

è aperto, sarà sufficiente mostrare che l'insieme

$$\mathrm{X} \setminus f^{-1}((a,1]) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} \mid f(\mathrm{x}) > a\}$$

è un insieme chiuso.
Perchè si abbia $f(\mathrm{x}) \leq a$ deve essere $\mathrm{x} \in \mathrm{U_t}$ per ogni $\mathrm{t} > a$, $\mathrm{t} \in \mathrm{D}$. Quindi

$$f^{-1}([0,a]) = \bigcap_{\mathrm{t}>a} \mathrm{U_t}.$$

Faremo vedere che quest'insieme è chiuso mostrando che

$$\bigcap_{\mathrm{t}>a} \mathrm{U_t} = \bigcap_{\mathrm{t}>a} \overline{\mathrm{U}}_\mathrm{t}.$$

Ovviamente si ha

$$\bigcap_{\mathrm{t}>a} \mathrm{U_t} \subset \bigcap_{\mathrm{t}>a} \overline{\mathrm{U}}_\mathrm{t}.$$

D'altra parte per ogni $\mathrm{t} > a$, $\mathrm{t} \in \mathrm{D}$, esiste $\mathrm{s} \in \mathrm{D}$ tale che $a < \mathrm{s} < \mathrm{t}$, perchè D è denso in $\mathbb{R}^+$; quindi $\overline{\mathrm{U}}_\mathrm{s} \subset \mathrm{U_t}$. Ne segue che

$$\bigcap_{\mathrm{s}>a} \overline{\mathrm{U}}_\mathrm{s} \subset \bigcap_{\mathrm{t}>a} \mathrm{U_t}.$$

■

Capitolo 3

Metrizzabilità

Già nel capitolo precedente, enunciando e dimostrando il *Lemma di Urysohn*, avevamo iniziato a evidenziare i legami esistenti fra la proprietà T_4 e la metrizzabilità.
In questo Capitolo vedremo con più attenzione qual'è il legame preciso con la proprietà T_4 e cercheremo di dedurre sotto quali condizioni possiamo affermare che uno spazio topologico è metrizzabile.

3.1 Spazi Normali e Metrizzabilità

In questo paragrafo forniremo un esempio di spazio normale non metrizzabile e dimostreremo che invece ogni spazio metrizzabile è normale.

Osserviamo che in generale per provare che uno spazio è normale bisogna provare che è T_1 e che verifica la condizione (*norm*). Sfruttando il Lemma 4 del Capitolo 1, invece, basterà verificare la (*norm*).
Possiamo ora enunciare e dimostrare la seguente

Proposizione 5: Ogni spazio metrizzabile X è normale.
Dimostrazione. Consideriamo uno spazio metrizzabile X e sia d: $X \times X \to \mathbb{R}$ la metrica che induce la topologia di X.

Come abbiamo dimostrato nel Lemma 4, ogni spazio metrizzabile X è T_2 e, per la Proposizione 1 del paragrafo 2.1, è anche T_1.
Rimane solo da provare che X verifica la (*norm*).
Per ogni sottoinsieme non vuoto $F \subset X$ e per ogni punto $x \in X$, definiamo la *distanza di un punto da F* attraverso la funzione $d_F : X \to \mathbb{R}$ ponendo

$$d_F(x) = \inf_{y \in F} \{d(x, y)\}.$$

Per verificare la proprietà (*norm*) consideriamo due sottoinsiemi chiusi e disgiunti F_1 e F_2 di X, che possiamo supporre entrambi non vuoti (la condizione (*norm*) infatti è banalmente verificata se almeno uno dei due insiemi F_1 e F_2 è vuoto).
Consideriamo i sottoinsiemi:

$$U_1 = \{x \in X \mid d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) < 0\},$$

$$U_2 = \{x \in X \mid d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) > 0\}.$$

Chiaramente $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
Rimane da provare che $F_1 \subset U_1$, che $F_2 \subset U_2$ e che U_1 e U_2 sono aperti.
Proviamo che $F_1 \subset U_1$.
Sia $x \in F_1$. Allora $d_{F_1}(x) = 0$. D'altra parte $x \notin F_2$ e quindi, poichè F_2 è chiuso, esiste $r > 0$ tale che $d(x, y) > r$ per ogni $y \in F_2$; ne segue che $d_{F_2}(x) > 0$, e quindi che

$$d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) = -d_{F_2}(x) < 0,$$

cioè $x \in U_1$. Quindi $F_1 \subset U_1$.
Analogamente si dimostra che $F_2 \subset U_2$.

Ora mostriamo che U_1 è aperto. Sia $\mathrm{x}_1 \in \mathrm{U}_1$ e poniamo

$$r = d_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{x}_1) - d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}_1).$$

Si ha $r > 0$; faremo vedere che $\mathrm{D}_{\frac{r}{3}}(\mathrm{x}_1) \subset \mathrm{U}_1$, e questo proverà che U_1 è aperto. Sia dunque $\mathrm{x} \in \mathrm{D}_{\frac{r}{3}}(\mathrm{x}_1)$; dobbiamo far vedere che

$$d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}) - d_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{x}) < 0.$$

Si ha

$$d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}) - d_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{x}) =$$

$$= [d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}) - d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}_1)] + [d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}_1) - d_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{x}_1)] + [d_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{x}_1) - d_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{x})] =$$

$$= [d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}) - d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}_1)] - r + [\mathrm{d}_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{x}_1) - \mathrm{d}_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{x})].$$

Inoltre per ogni $\mathrm{y} \in \mathrm{F}_1$ si ha

$$d(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leq d(\mathrm{x}, \mathrm{x}_1) + d(\mathrm{x}_1, \mathrm{y}) < \frac{r}{3} + d(\mathrm{x}_1, \mathrm{y})$$

e quindi

$$d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}) = \inf_{\mathrm{y} \in \mathrm{F}_1} \{d(\mathrm{x}, \mathrm{y})\} \leq \frac{r}{3} + \inf_{\mathrm{y} \in \mathrm{F}_2} \{d(\mathrm{x}_1, \mathrm{y})\} = \frac{r}{3} + d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}_1)$$

cioè

$$d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}) - d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}_1) \leq \frac{r}{3}.$$

Da qui ricaviamo che

$$d_{\mathrm{F}_1}(\mathrm{x}) - d_{\mathrm{F}_2}(\mathrm{x}) \leq \frac{r}{3} + \frac{r}{3} < 0.$$

La proprietà (*norm*) è quindi verificata e possiamo concludere che X è T_4.

■

Il viceversa, invece, non vale. Per provarlo basterà un controesempio, che ci viene fornito ancora una volta dall'Asse di Tychonoff.
Avevamo già dimostrato, nel paragrafo 2.4, che l'Asse di Tychonoff T era normale. Rimane quindi da provare che non è metrizzabile.

- Ricordiamo che l'asse T era definito come

$$\mathrm{T} = [0, \Omega] \times [0, \omega]$$

  dove sia $[0, \Omega]$ che $[0.\omega]$ sono spazi topologici con la topologia d'ordine e T ha la topologia prodotto.
  Per provare che l'*Asse* non è metrizzabile, proveremo che non è N_1 (ricordiamo infatti che qualunque spazio metrico è banalmente N_1).
  Osserviamo quindi che l'insieme chiuso $\{(\Omega, \omega)\}$ è l'intersezione di tutti gli aperti che lo contengono. Da qui discende che T non può essere N_1 e quindi non può essere metrizzabile.

3.2 Varietà Topologiche e Metrizzabilità

In questo paragrafo analizzeremo il legame fra le varietà topologiche e la metrizzabilità; si può dimostrare che ogni varietà topologica è metrizzabile, ma per farlo sarebbe necessario sfruttare strumenti più avanzati di quelli che abbiamo a disposizione. Ci limiteremo quindi a dimostrare un risultato meno generale, cioè che ogni varietà topologica compatta è metrizzabile.
Per farlo, avremo bisogno del concetto di *compattificazione* di uno spazio topologico.

Definizione 14 (*Compattificazione*) Siano X e Y due spazi topologici e $c: \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ un'applicazione. Diremo che una coppia (Y, c) è una *compattificazione* di X se: (*i*) Y è compatto; (*ii*) c è un embedding topologico; (*iii*) $c(\mathrm{X})$ è denso in Y.

Un caso particolare delle compattificazioni è quello delle *compattificazioni a un punto*, cioè quelle ottenute aggiungendo un unico punto, generalmente indicato con ∞, allo spazio di partenza.

3.2.1 Compattificazioni a un punto

Dato uno spazio topologico $(\mathrm{X}, \mathcal{T})$ non compatto definiamo $\mathrm{X}^\infty = \mathrm{X} \cup \{\infty\}$, dove ∞ è un punto non appartenente a X. Definiamo inoltre $\mathcal{T}^\infty$ come la famiglia di insiemi costituita dagli $\mathrm{U} \in \mathcal{T}$ e dagli insiemi della forma $\mathrm{V} \cup \{\infty\}$ dove $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ e $\mathrm{X} \setminus \mathrm{V}$ è compatto e chiuso in X.
Prima di tutto proviamo che $\mathcal{T}^\infty$ è una topologia su X^∞. Per farlo bisogna dimostrare che essa verifica le tre proprietà $\mathcal{T}1$, $\mathcal{T}2$, e $\mathcal{T}3$ della definzione di topologia data nel Paragrafo 1.1.

- $\mathcal{T}1$. $\emptyset \in \mathcal{T}^\infty$ perchè è della forma $\mathrm{U} \in \mathcal{T}^\infty$;
  $\mathrm{X}^\infty \in \mathcal{T}^\infty$ perchè è della forma $\mathrm{V} \cup \{\infty\}$ dove $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ e $\mathrm{X} \setminus \mathrm{V}$ è compatto e chiuso in X.

- $\mathcal{T}2$. Consideriamo $\bigcup_{j \in J} \mathrm{U}_j$, unione di un numero arbitrario di elementi di $\mathcal{T}^\infty$, e proviamo che è ancora un elemento di $\mathcal{T}^\infty$.
  Potranno presentarsi due casi: che $\infty \notin \bigcup_{j \in J} \mathrm{U}_j$ o che $\infty \in \bigcup_{j \in J} \mathrm{U}_j$. Analizziamoli separatamente: se $\infty \notin \bigcup_{j \in J} \mathrm{U}_j$, gli U_j sono tutti della forma $\mathrm{U} \in \mathcal{T}$, quindi per le proprietà di $\mathcal{T}$ la loro unione è ancora della stessa forma e quindi è ancora un elemento di $\mathcal{T}^\infty$; se invece $\infty \in \bigcup_{j \in J} \mathrm{U}_j$, esso in particolare apparterrà a qualche $\mathrm{U} = \mathrm{V} \cup \{\infty\}$ della famiglia e il complementare dell'unione sarà un sottoinsieme di

$X \setminus U$ e sarà quindi a sua volta chiuso e compatto, quindi $\bigcup_{j \in J} U_j$ è ancora della forma $V \cup \{\infty\}$ ed è cioè un elemento di $\mathcal{T}^\infty$.

- $\mathcal{T}3$. Consideriamo ora $U_1 \cap U_2$, intersezione di due elementi di $\mathcal{T}^\infty$, e proviamo che è ancora un elemento di $\mathcal{T}^\infty$.
  Anche qui distinguiamo i due casi: se $\infty \notin U_1 \cap U_2$, si ha che i due insiemi devono essere del tipo $U \in \mathcal{T}$, quindi per le proprietà di $\mathcal{T}$ la loro intersezione è ancora un elemento della stessa forma ed è perciò ancora un elemento di $\mathcal{T}^\infty$; se invece $\infty \in U_1 \cap U_2$, il complementare dell'intersezione sarà dato dall'unione di due insiemi della forma $X \setminus U$ entrambi chiusi e compatti e sarà a sua volta chiuso e compatto, possiamo quindi concludere che in questo caso $U_1 \cap U_2$ è della forma $V \cup \{\infty\}$ con $X \setminus V$ compatto e chiuso ed è quindi ancora un elemento di $\mathcal{T}^\infty$.

Ora vogliamo provare che la coppia (X^∞, c), dove c è l'inclusione di X in X^∞, è una compattificazione di X, cioè dobbiamo provare che essa verifica le tre proprietà della Definizione 14.
Per provare che X^∞ è compatto, consideriamo un suo ricoprimento aperto $\mathcal{U}$. Perchè $\mathcal{U}$ ricopra X^∞, almeno uno degli aperti della famiglia deve essere della forma $V \cup \{\infty\}$, con $X \setminus V$ chiuso e compatto. Per X^∞ quindi esisterà un sottoricoprimento finito costituito dal sottoricomprimento finito di $X \setminus V$ insieme a $V \cup \{\infty\}$.
L'inclusione c di X nel suo spazio ambiente X^∞ è un embedding per definizione.
Proviamo infine che $c(X)$ è denso in X^∞. Ricordiamo che un insieme $S \subset X$ è denso in X se $\overline{S} = X$, il che è equivalente a dire che S interseca ogni aperto non vuoto di X [1].
Serviamoci di questa seconda definizione.
Osserviamo innanzitutto che ogni aperto di $\mathcal{T}^\infty$ della forma $U \in \mathcal{T}$ interseca $c(X)$ per definizione. Per quanto riguarda invece gli aperti della forma $U = V \cup \{\infty\}$ con $X \setminus V$ chiuso e compatto, osserviamo che l'unico insieme

[1]Per la dimostrazione si veda [4], pag. 43

tale che $c\,(\mathrm{X}) \cap \mathrm{U} = \emptyset$ è per definizione $\{\infty\}$, ma esso non è un aperto di $\mathcal{T}^{\infty}$, in quanto $\mathrm{X} \setminus \emptyset = \mathrm{X}$ non è compatto.

Definiamo una particolare relazione di equivalenza su uno spazio topologico: sia X uno spazio topologico e $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$; denotiamo con X/A lo spazio quoziente $\mathrm{X}/\sim$ dove $\mathrm{x} \sim \mathrm{y}$ se e solo se $\mathrm{x} = \mathrm{y}$ o sia x che y appartengono ad A. Enunciamo ora il seguente

Lemma 6. Sia X uno spazio compatto e di Hausdorff e U un sottoinsieme aperto di X. Allora

$$(\mathrm{U}^{\infty},\ c) \simeq \mathrm{X}/\left(\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}\right)$$

dove c è l'inclusione di U in U^{∞}.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che $\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}$ è chiuso e, di conseguenza, compatto. $\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}$ è anche di Hausorff, come dimostrato nel Paragrafo 2.4.

Definiamo

$$f:\ \mathrm{U}^{\infty} \rightarrow \mathrm{X}/\left(\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}\right)$$

dove $f\,(\mathrm{u}) = \pi\,(\mathrm{u})$ se $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$ e $f\,(\infty) = \pi\,(\mathrm{X} \setminus \mathrm{U})$, dove π è la proiezione naturale sul quoziente.

Per provare che è un omeomorfismo proveremo che è bigettiva, continua e chiusa.

Per come è definita $\sim$, si ha che per ogni $\mathrm{u} \in \mathrm{U}$, la classe di equivalenza $[\mathrm{u}]_{\sim}$ contiene solo u, quindi si ha che se $\mathrm{u} \neq \mathrm{v}$ anche $\pi\,(\mathrm{u}) \neq \pi\,(\mathrm{v})$ e entrambi sono diversi da $\pi\,(\mathrm{X} \setminus \mathrm{U})$; da qui discende l'iniettività di f: infatti per le proprietà di $\sim$ e π si ha che presi comunque due punti u e v in U^{∞}, se $\mathrm{u} \neq \mathrm{v}$ anche $f\,(\mathrm{u}) \neq f\,(\mathrm{v})$. Possiamo invece concludere che f è suriettiva perchè è definita tramite π che è suriettiva per definizione. Quindi f è bigettiva.

Proviamo ora che f è continua. Osserviamo innanzitutto che la topologia quoziente su $\mathrm{X}/\left(\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}\right)$ sarà proprio quella che rende continua la proiezione naturale $\pi:\ \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{X}/\left(\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}\right)$, quindi in $\mathrm{X}/\left(\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}\right)$ saranno chiusi tutti gli

insiemi che tramite π hanno per controimmagine un chiuso: poichè X è di Hausdorff, esso è anche T_1, cioè ogni suo punto è chiuso, quindi nello spazio quoziente i chiusi saranno proprio le classi di equivalenza. Inoltre anche (U^{∞}, c) è T_1, visto che lo è U [2], per cui anche f risulta continua per definizione.
Infine possiamo affermare che f è anche chiusa: infatti per le osservazioni fatte finora si ha che l'immagine di un punto chiuso di U^{∞} tramite f è un chiuso di $\mathrm{X}/\left(\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}\right)$ con la topologia quoziente.
Si può quindi concludere che U^{∞} e $\mathrm{X}/\left(\mathrm{X} \setminus \mathrm{U}\right)$ sono omeomorfi.

$\blacksquare$

Da tale lemma, vorremmo dedurre il seguente fatto:

Teorema 4. $\mathrm{D}^{\mathrm{n}}/\mathrm{S}^{\mathrm{n}-1} \simeq \mathrm{S}^{\mathrm{n}}$
dove D^{n} è il disco chiuso della topologia euclidea, $\mathrm{S}^{\mathrm{n}-1}$ è la sua frontiera e S^{n} è la n-sfera, varietà topologica di dimensione $\mathrm{n}-1$. [3]
Dimostrazione. Cerchiamo di ricondurci a un caso analogo a quello del Lemma 6.
Denotiamo con B^{n} la n-palla euclidea aperta, allora possiamo scrivere

$$\mathrm{D}^{\mathrm{n}} = \mathrm{B}^{\mathrm{n}} \cup \mathrm{S}^{\mathrm{n}-1}$$

. Da qui, deduciamo che lo spazio quoziente $\mathrm{D}^{\mathrm{n}}/\mathrm{S}^{\mathrm{n}-1}$ può essere riscritto come

$$\mathrm{D}^{\mathrm{n}}/\left(\mathrm{D}^{\mathrm{n}} \setminus \mathrm{B}^{\mathrm{n}}\right)$$

e assume così una forma molto simile a quella dello spazio quoziente analizzato nel Lemma 6.
Osserviamo inoltre che anche le proprietà degli insiemi considerati coincidono: si ha infatti che D^{n} è uno sottoinsieme compatto e T_2 di $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, mentre B^{n} è un sottoinsieme aperto.

---

[2]Per la dimostrazione vedere [2], pag. 63
[3]Per la dimostrazione di questo fatto vedere [4], pag. 96

Consideriamo ora S^n. Tramite la *proiezione stereografica*[4], la n-sfera S^n privata di un punto risulta essere omeomorfa a $\mathbb{R}^n$, che a sua volta è omeomorfo a una n-palla aperta B^n[5].
A questo punto, consideriamo S^n senza privarla di alcun punto e le compattificazioni $\mathbb{R}^{n\infty}$ e $B^{n\infty}$, si avranno i seguenti omeomorfismi:

$$S^n \simeq \mathbb{R}^{n\infty} \simeq B^{n\infty}.$$

Possiamo quindi riscrivere la nostra tesi come

$$D^n / (D^n \setminus B^n) \simeq B^{n\infty}$$

riconducendoci alle ipotesi del Lemma 6.
La tesi risulta quindi dimostrata per il Lemma 6.

■

3.2.2 Varietà Topologiche Compatte

Lemma 7. Sia M una varietà topologica compatta, allora esiste un numero naturale N e un embedding topologico

$$f : M \to \mathbb{R}^N$$

Dimostrazione. Poichè M è compatta e localmente euclidea, essa può essere ricoperta da un numero finito di palle euclidee $B_1, \dots, B_m$.
Come abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente, esistono i seguenti omeomorfismi:

$$M / (M \setminus B_i) \simeq (B_i^\infty, \mathcal{T}_i^\infty) \simeq (\mathbb{R}^{n\infty}, \mathcal{T}^\infty) \simeq S^n$$

[4]Per la definizione e le proprietà della *proiezione stereografica* si veda [5]
[5]Per la definizione esplicita di tale omeomorfismo si veda [1], pag. 47

e quindi esistono anche delle funzioni continue

$$f_{\mathrm{i}}:\ \mathrm{M}\to \mathrm{S}^{\mathrm{n}}=\mathrm{M}/\left(\mathrm{M}\setminus \mathrm{B}_{\mathrm{i}}\right)$$

ottenute componendo la proiezione naturale sul quoziente fra M e $\mathrm{M}/\left(\mathrm{M}\setminus \mathrm{B}_{\mathrm{i}}\right)$ (continua per definizione) e l'omeomorfismo fra S^{n} e $\mathrm{M}/\left(\mathrm{M}\setminus \mathrm{B}_{\mathrm{i}}\right)$.
Definiamo ora

$$f:\ \mathrm{M}\to \overbrace{S^{n}\times\cdots\times S^{n}}^{\mathrm{m}}\subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}=\mathbb{R}^{\mathrm{n+1}}\times\cdots\times\mathbb{R}^{\mathrm{n+1}}$$

come $f\left(\mathrm{x}\right)=\left(f_{1}\left(\mathrm{x}\right),\ldots,f_{\mathrm{m}}\left(\mathrm{x}\right)\right)$ e proviamo che è un embedding topologico.
Sappiamo che il dominio M è compatto, il codominio $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ è di Hausdorff e f è continua[6], allora per il Lemma dell'applicazione chiusa (Lemma 5 del paragrafo 1.3) basterà provare che f è iniettiva.
Vorremmo quindi provare che dati $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{M}$, $\mathrm{x}\neq\mathrm{y}$, anche $f\left(\mathrm{x}\right)\neq f\left(\mathrm{y}\right)$. Perchè ciò avvenga, è necessario che per qualche i si abbia $f_{i}\left(\mathrm{x}\right)\neq f_{i}\left(\mathrm{y}\right)$.
Fissato i, si potranno avere i seguenti casi: $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{B}_{i}$, quindi $f_{i}\left(\mathrm{x}\right)\neq f_{i}\left(\mathrm{y}\right)$ per definizione di f_{i}; $\mathrm{x}\in\mathrm{B}_{i}$, $\mathrm{y}\in\mathrm{M}\setminus\mathrm{B}_{i}$ e anche in questo caso $f_{i}\left(\mathrm{x}\right)\neq f_{i}\left(\mathrm{y}\right)$ per definizione di f_{i}; infine si può avere che $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{M}\setminus\mathrm{B}_{i}$ e in questo caso si avrebbe $f_{i}\left(\mathrm{x}\right)=f_{i}\left(\mathrm{y}\right)$.
Questo però non può verificarsi per ogni i, in quanto questo implicherebbe $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\mathrm{M}\setminus\mathrm{B}_{1}\cup\cdots\cup\mathrm{M}\setminus\mathrm{B}_{\mathrm{m}}$ che, poichè $\{\mathrm{B}_{1},\ldots,\mathrm{B}_{\mathrm{m}}\}$ è un ricoprimento, significa $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\emptyset$, che è assurdo. Quindi per qualche i si avrà $f_{i}\left(\mathrm{x}\right)\neq f_{i}\left(\mathrm{y}\right)$ e quindi $f\left(\mathrm{x}\right)\neq f\left(\mathrm{y}\right)$, cioè f è iniettiva.
Per il Lemma dell'applicazione chiusa, infine, essa è anche un embedding.

■

Teorema 5. Ogni varietà topologica compatta M è metrizzabile.
Dimostrazione. Nel lemma precedente, abbiamo dimostrato che per ogni

[6][3], pag. 91

varietà topologica compatta è possibile definire un embedding $f:\ \mathrm{M} \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.
Da questo risultato si ricava che M è omeomorfa a $f(\mathrm{M})$, ma $f(\mathrm{M})$ possiamo considerarlo con la topologia metrica indotta da quella euclidea di $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.
In particolare possiamo definire una metrica $\mathrm{d}_{\mathrm{M}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \mathrm{d}_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}(f(\mathrm{x}), f(\mathrm{y}))$ su M.
Si può quindi affermare che ogni varietà topologica compatta è metrizzabile.

■

Appendice A

Numeri Ordinali

Per rendere più comprensibile la struttura dell'*Asse di Tychonoff*, vediamo nel dettaglio cosa sono i numeri ordinali e quali sono le loro proprietà.
Partiamo dalla seguente:

Definizione *(Ordine)* Una *relazione d'ordine*, o semplicemente *ordine*, in un insieme A è una relazione binaria R definita in A che sia riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Chiameremo dunque *insieme ordinato* o, nuovamente, *ordine* la coppia $(\mathrm{A}, \leq)$, dove $\leq$ è la relazione d'ordine definita su A, mentre definiremo *ordine lineare* una coppia $(\mathrm{A}, \leq)$ tale che per ogni coppia x, y $\in$ A si abbia x $\leq$ y o y $\leq$ x.

Un esempio di ordine lineare è l'insieme dei naturali $\mathbb{N}$ con l'usuale relazione di minore o uguale.

Vediamo ora quali sono le proprietà che devono avere le funzioni fra insiemi per conservare le relazioni d'ordine. Diremo che una funzione f fra due ordini $(\mathrm{A}, \leq)$ e $(\mathrm{B}, \preceq)$ è una *funzione compatibile* con gli ordini se si ha che x $\leq$ y implica $f(\mathrm{x}) \preceq f(\mathrm{y})$.
Possiamo ora dare la definizione di *isomorfismo d'ordine*: diremo che un'applicazione f tra due ordini $(\mathrm{A}, \leq)$ e $(\mathrm{B}, \preceq)$ è un isomorfismo d'ordine se è

bigettiva, compatibile con gli ordini e anche la sua inversa f^{-1} è compatibile con gli ordini.
Dopo che un insieme viene dotato di un ordine, è possibile che alcuni suoi elementi acquisiscano delle proprietà particolari legate proprio all'ordine che abbiamo definito.
Ad esempio è possibile definire il *massimale* o il *massimo* di un insieme, così come i loro concetti duali di *minimale* e *minimo*. Vediamo in particolare la definizione di *minimo*, che ci servirà per definire una struttura molto importante.

Definizione *(Minimo)* Un elemento m di un ordine A si definisce *minimo* se per qualunque x $\in$ A si ha $m \leq$ x.

Ora abbiamo tutti gli ingredienti per dare la definizione di *insieme bene ordinato*, che è alla base della teoria dei numeri ordinali.

Definizione *(Insieme Bene Ordinato)* Un ordine $(\mathrm{A}, \leq)$ si dice *buon ordine* o *insieme bene ordinato* se ogni sottoinsieme non vuoto di A possiede minimo.

Osserviamo a questo punto che la relazione di isomorfismo fra insiemi bene ordinati è una relazione di equivalenza, cioè è riflessiva, simmetrica e transitiva. Questo, una volta definito un opportuno insieme di insiemi bene ordinati che non porti a delle contraddizioni, ci consente di passare al quoziente rispetto a questa relazione. Le classi di equivalenza risultanti da questo passaggio al quoziente sono proprio i *numeri ordinali*.
Per darne una definizione più rigorosa, però, dobbiamo richiamare anche l'*Assioma dell'infinito*; tale assioma, che fa parte della teoria di Zermelo-Fraenkel, postula l'esistenza di un particolare insieme che tornerà utile nella definizione di numero ordinale.

Assioma dell'Infinito. Esiste un insieme z che contiene l'insieme vuoto $\emptyset$ e che, insieme con un suo elemento x contiene anche il singoletto di x : $\{x\}$.

Esiste cioè l'insieme

$$z = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots\}.$$

Vediamo finalmente la definizione di numero ordinale:

Definizione *(Numero Ordinale)* Consideriamo un insieme $\mathcal{U}$ di insiemi bene ordinati che non contenga se stesso ma tale che

- contenga l'insieme postulato nell'Assioma dell'Infinito;
- contenga l'insieme delle parti di qualunque suo elemento;
- contenga le unioni e le intersezioni (finite e infinite) dei suoi elementi.

Consideriamo inoltre la relazione $\sim$ di isomorfismo fra insiemi bene ordinati. L'insieme quoziente $\frac{\mathcal{U}}{\sim}$ viene detto *insieme dei numeri ordinali* e ogni sua classe di equivalenza si dice *numero ordinale* di ciascuno dei suoi elementi.

Denoteremo l'ordinale del buon ordine $(\mathrm{A}, \leq)$ come $ord\,(\mathrm{A}, \leq)$ o semplicemente $ord\,(\mathrm{A})$.
Risulta legittimo chiedersi se esista una relazione d'ordine che renda l'insieme dei numeri ordinali un buon ordine. La risposta a questa domanda è affermativa, e la relazione d'ordine in questione è definita come segue:
dati due ordinali $a_1 = ord\,(\mathrm{A}, \leq_1)$ e $a_2 = ord\,(\mathrm{A}, \leq_2)$ diremo che a_1 è minore o uguale ad a_2, $a_1 \leq a_2$, se esiste una funzione iniettiva $\Phi : (\mathrm{A}, \leq_1) \to (\mathrm{A}, \leq_2)$ compatibile con gli ordini $\leq_1$ e $\leq_2$.
Riportiamo ora un altro risultato della teoria degli ordinali, che porta conseguenze incredibilmente importanti.

Proposizione. L'ordinale dell'insieme $\{x \mid x < a\}$ degli ordinali x minori dell'ordinale a, ordinato con la relazione $\leq$, è esattamente a.

Da questa proposizione, infatti, discende il fatto che ogni insieme bene ordinato è isomorfo a un insieme di ordinali. Inoltre, si prova facilmente

che ogni insieme bene ordinato contenente n oggetti ha lo stesso ordinale dell'insieme $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ considerato con l'ordine naturale $\leq$.
Come conseguenza di questo risultato, nel caso degli insiemi finiti, l'ordinale si indicherà con lo stesso simbolo del cardinale dell'insieme; così ad esempio il simbolo *3* indicherà sia il cardinale che l'ordinale di qualunque insieme della forma $\{a, b, c\}$ dove $a < b < c$.
Nel caso degli insiemi infiniti, però, la situazione si complica. Consideriamo i seguenti esempi:

- $0 < 1 < \cdots < n < \cdots$, definiremo ω l'ordinale di questo insieme;
- $1 < 2 < 3 < \cdots < 0$, il cui ordinale si indicherà con $\omega + 1$;
- $2 < 3 < 4 < \cdots < 0 < 1$, il cui ordinale si indicherà con $\omega + 2$;

$\vdots$

- $n < n+1 < \cdots < 0 < 1 < \cdots < n-1$, con ordinale $\omega + n$;

$\vdots$

- $0 < 2 < 4 < \cdots < 2n < \cdots < 1 < 3 < 5 < \cdots < 2n+1 < \cdots$, con ordinale $\omega + \omega = \omega \cdot 2$;

$\vdots$

- $0 < p < 2p < \cdots < 1 < p+1 < \cdots < k < p+k < \cdots < p-1 < 2p-1 < \cdots$, con ordinale $\omega \cdot p$;

È possibile definire delle operazioni di somma e prodotto sui numeri ordinali; per farlo però bisogna distinguere il caso degli ordinali finiti da quello degli ordinali *infiniti* di cui ω è il primo.
Nel caso degli ordinali finiti, infatti, somma e prodotto sono commutative, mentre nel caso di addendi o fattori infiniti tale proprietà non è più valida.
Ma vediamo le definizioni di tali operazioni e facciamone degli esempi.

Definizione. (*Somma di Ordinali*) Consideriamo $a = ord\,(\mathrm{A}, \leq_{\mathrm{A}})$ e $b = ord\,(\mathrm{B}, \leq_{\mathrm{B}})$, dove A e B sono insiemi disgiunti e bene ordinati dalle relazioni $\leq_{\mathrm{A}}$ e $\leq_{\mathrm{B}}$ rispettivamente. Allora definiamo

$$a + b := ord\,(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}, \preceq)$$

dove $x \preceq y$ se e solo se $x, y \in \mathrm{A}$ e $x \leq_{\mathrm{A}} y$, o $x, y \in \mathrm{B}$ e $x \leq_{\mathrm{B}} y$ o $x \in \mathrm{A}$ e $y \in \mathrm{B}$.

Applicando questa definizione risulta banale provare che nel caso di ordinali finiti la somma è commutativa.
Per quanto riguarda il caso degli ordinali infiniti, invece, consideriamo i seguenti esempi: $\omega + 1$ e $1 + \omega$.
Negli esempi riportati sopra è presente anche quello di un insieme con ordinale $\omega + 1$, diverso da ω; si trova invece che $1 + \omega$ è esattamente ω.

Per quanto riguarda il prodotto di ordinali, invece, abbiamo la seguente

Definizione. (*Prodotto di Ordinali*) Consideriamo $a = ord\,(\mathrm{A}, \leq_{\mathrm{A}})$ e $b = ord\,(\mathrm{B}, \leq_{\mathrm{B}})$, insiemi disgiunti e bene ordinati, allora definiamo

$$a \cdot b := ord\,(\mathrm{B} \times \mathrm{A}, \leq')$$

dove $(b_1, a_1) \leq' (b_2, a_2)$ se e solo se $b_1 \leq_{\mathrm{B}} b_2$ o $b_1 = b_2$ e $a_1 \leq_{\mathrm{A}} a_2$.

Anche nella moltiplicazione degli ordinali, quindi, notiamo che applicando la definizione si ha $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$ e che in particolare $2 \cdot \omega = \omega$, mentre $\omega \cdot 2 = \omega + \omega$, come abbiamo osservato negli esempi riportati in precedenza.
Per quanto riguarda la proprietà associativa, invece, essa è valita sia per la somma che per il prodotto, a prescindere dal fatto che gli addendi o i fattori siano finiti o meno.
Come ultima osservazione sull'aritmetica degli ordinali notiamo che la moltiplicazione è distributiva rispetto alla somma solo a sinistra.
Osserviamo inoltre che mentre esiste un unico cardinale per gli insiemi con

un'infinità numerabile di elementi, esiste un'infinità numerabile di ordinali numerabili, cioè

$$\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+\omega = \omega\cdot 2, \omega\cdot 2+1, \ldots, \omega^2, \ldots, \omega^3, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \varepsilon_0, \ldots$$

Possiamo ora definire il primo ordinale non numerabile, Ω, come l'ordinale dell'insieme degli ordinali numerabili.

Per concludere questa breve trattazione definiamo la *Topologia d'Ordine*. Questa particolare topologia, che può essere definita solo sugli ordini lineari, è la naturale generalizzazione della topologia euclidea di $\mathbb{R}$ a tutti gli insiemi linearmente ordinati.
Consideriamo quindi un qualunque insieme linearmente ordinato $(\mathrm{X}, <)$, allora la topologia d'ordine $<$ su x sarà costituita dagli intervalli del tipo

$$\{x \in \mathrm{X} \mid y < x < z\}$$

per ogni coppia $y, z \in \mathrm{X}$ dove $y < z$.[1]

[1] Per una trattazione più approfondita delle proprietà della Topologia d'Ordine si veda [2] e [3].

Bibliografia

[1] E. Sernesi, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri.

[2] L. A. Steen, *Counterexamples in Topology*, Springer-Verlag.

[3] J. L. Kelley, *General Topology*, Springer-Verlag.

[4] A. Loi, *Appunti di Topologia Generale*, 2008/2009

[5] R. Caddeo, *Lezioni di Geometria Differenziale su Curve e Superfici*, CUEC.

[6] L. Cerlienco, *Rudimenti di Algebra Astratta,* 2008/2009