Autovalori del Laplaciano di un grafo

Candidata: Maria Cristina Spiga **Relatore:** Prof. Andrea Loi

Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea in Matematica

A. A. 2019/2020

Indice dei contenuti

- Definizione di grafo e nozioni di base

Indice dei contenuti

- Definizione di grafo e nozioni di base
- Laplaciano e autovalori

Indice dei contenuti

- Definizione di grafo e nozioni di base
- Laplaciano e autovalori
- Tipi di grafo e legami con gli autovalori

Indice dei contenuti

- Definizione di grafo e nozioni di base
- Laplaciano e autovalori
- Tipi di grafo e legami con gli autovalori
- Problema isoperimetrico e costante di Cheeger

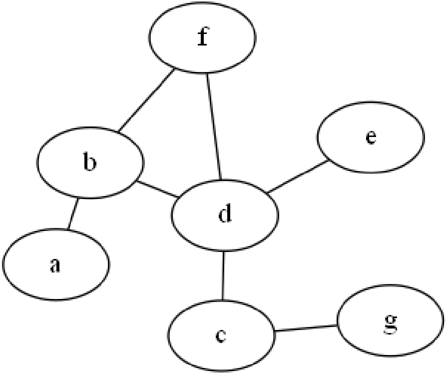
Indice dei contenuti

- Definizione di grafo e nozioni di base
- Laplaciano e autovalori
- Tipi di grafo e legami con gli autovalori
- Problema isoperimetrico e costante di Cheeger
- Dimostrazione della disuguaglianza di Cheeger

Che cos'è un grafo?

Grafo

Si definisce *grafo G* la coppia (V, E) dove V è l'*insieme dei vertici* v ed E è l'*insieme degli archi* $e = \{u, v\}$.



Nozioni di base

Vertici adiacenti

Due vertici $u, v \in V$ si dicono *adiacenti* se $\exists \{u, v\} \in E$.

Nozioni di base

Vertici adiacenti

Due vertici $u, v \in V$ si dicono *adiacenti* se $\exists \{u, v\} \in E$.

Grado di un vertice

Si definisce *grado di un vertice* v il numero di vertici ad esso adiacenti e si indica con d_v.

Nozioni di base

Vertici adiacenti

Due vertici $u, v \in V$ si dicono *adiacenti* se $\exists\{u, v\} \in E$.

Grado di un vertice

Si definisce *grado di un vertice* v il numero di vertici ad esso adiacenti e si indica con d_v.

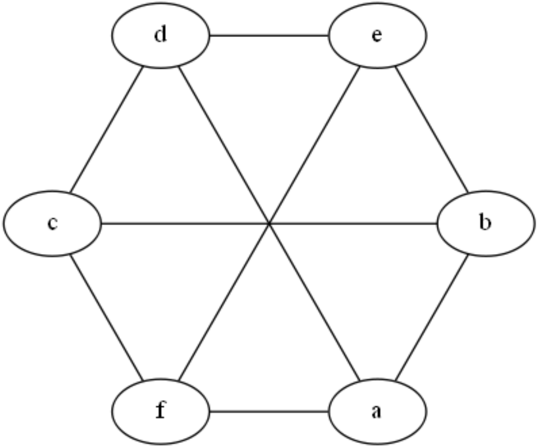
Vertice isolato

Un vertice v di dice *isolato* se $d_v = 0$.

Nozioni di base

Grafo k-regolare

Un grafo è *k-regolare* quando tutti i suoi vertici sono di grado k.



Esempio di grafo 3-regolare

Nozioni di base

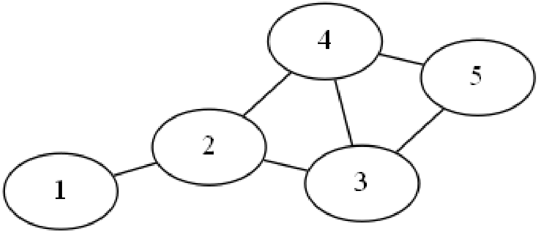
Matrice T

La *matrice* T è una matrice diagonale con $T(v, v) = d_v$.

Nozioni di base

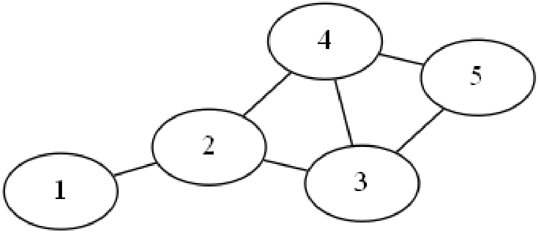
Matrice T

La *matrice* T è una matrice diagonale con $T(v, v) = d_v$.



Matrice T

La *matrice* T è una matrice diagonale con $T(v,v) = d_v$.



$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nozioni di base

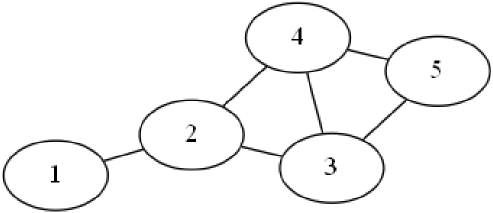
Matrice L

$$L(u,v) = \begin{cases} d_v & \text{se } u = v, \\ -1 & \text{se } u \text{ e } v \text{ sono adiacenti}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nozioni di base

Matrice L

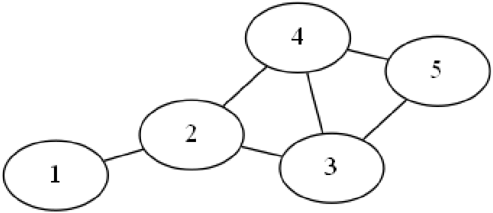
$$L(u,v) = \begin{cases} d_v & \text{se } u = v, \\ -1 & \text{se } u \text{ e } v \text{ sono adiacenti,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



Nozioni di base

Matrice L

$$L(u,v) = \begin{cases} d_v & \text{se } u = v, \\ -1 & \text{se } u \text{ e } v \text{ sono adiacenti}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nozioni di base

Matrice di adiacenza

Si definisce *matrice di adiacenza* la matrice A tale che

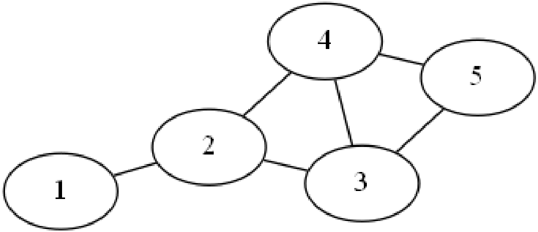
$$A(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ è adiacente a } v, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Nozioni di base

Matrice di adiacenza

Si definisce *matrice di adiacenza* la matrice A tale che

$$A(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ è adiacente a } v, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

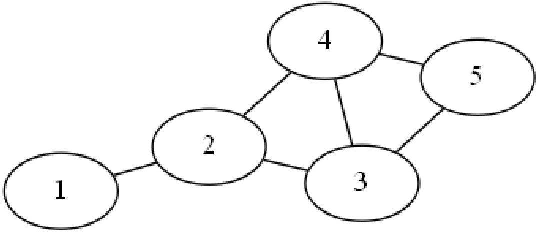


Nozioni di base

Matrice di adiacenza

Si definisce *matrice di adiacenza* la matrice A tale che

$$A(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } u \text{ è adiacente a } v, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Laplaciano

Laplaciano di G

Il *Laplaciano* di un grafo G è la matrice così definita:

$$\mathcal{L}(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{se } u = v \text{ e } d_v \neq 0, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{d_u d_v}} & \text{se } u \text{ e } v \text{ sono adiacenti}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

Si tratta di una matrice simmetrica che si può esprimere anche come

$$\mathcal{L} = T^{-1/2} L T^{-1/2},$$

con la convenzione che $T^{-1}(v,v) = 0$ per $d_v = 0$.

Laplaciano

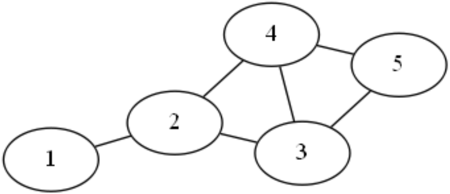
Per un grafo k-regolare

$$\mathcal{L} = I - \frac{1}{k}A,$$

mentre per un grafo generico si ha

$$\mathcal{L} = T^{-1/2}LT^{-1/2} = I - T^{-1/2}AT^{-1/2}.$$

Laplaciano



$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 1 \end{pmatrix}$$

Quoziente di Rayleigh di $\mathcal{L}$

Data $g : V \to \mathbb{R}$ arbitraria, il ***quoziente di Rayleigh di*** $\mathcal{L}$ è

$$
\begin{aligned}
\frac{\langle g, \mathcal{L}g \rangle}{\langle g, g \rangle} &= \frac{\langle g, T^{-1/2} L T^{-1/2} g \rangle}{\langle g, g \rangle} \\
&= \frac{\langle f, Lf \rangle}{\langle T^{1/2} f, T^{1/2} f \rangle} \\
&= \frac{\displaystyle\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\displaystyle\sum_{v} f(v)^2 d_v}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

con $g = T^{1/2} f$.

Spettro di $\mathcal{L}$

Spettro di $\mathcal{L}$

L'insieme di tutti gli autovalori λ_i (per $i = 0, \dots, n-1$) di $\mathcal{L}$ è detto *spettro di* $\mathcal{L}$ e si indica con

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}.$$

L'autovalore $\lambda_0 = 0$ è relativo all'autofunzione $T^{1/2}\mathbf{1}$.

L'autovalore λ_1

L'autovalore relativo all'autofunzione $g = T^{1/2}f$ è

$$\lambda_G = \lambda_1 = \inf_{f \perp T\mathbf{1}} \frac{\sum_{u \sim v}(f(u) - f(v))^2}{\sum_{v} f(v)^2 d_v} \tag{3}$$

dove la funzione non banale f è detta ***autofunzione armonica*** di $\mathcal{L}$.

L'autovalore λ_{n-1}

$$\lambda_{n-1} = \sup_f \frac{\displaystyle\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\displaystyle\sum_v f^2(v) d_v}. \tag{4}$$

L'autovalore λ_k

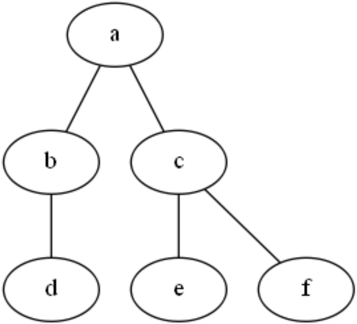
$$\lambda_k = \inf_f \sup_{g \in P_{k-1}} \frac{\displaystyle\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\displaystyle\sum_v (f(v) - g(v))^2 d_v}$$
$$= \inf_{f \perp P_{k-1}} \frac{\displaystyle\sum_{u \sim v} (f(u) - f(v))^2}{\displaystyle\sum_v f(v)^2 d_v} \tag{5}$$

dove P_i è il sottospazio generato dall'autofunzione ϕ_i corrispondente all'autovalore λ_i, per $i \leq k-1$.

Particolari tipi di grafo

Grafo connesso

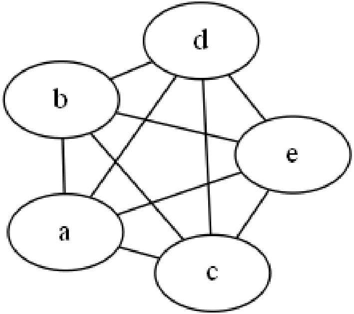
Un grafo G si dice *connesso* se $\forall u, v \in V$ esiste un cammino che li collega.



Particolari tipi di grafo

Grafo completo

Dato un grafo G con n vertici, si dice che G è *completo* se ciascun vertice è adiacente agli altri $n-1$.

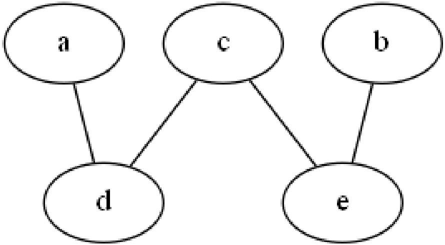


Particolari tipi di grafo

Grafo bipartito

Un grafo G è *bipartito* se $\exists V_1, V_2 \subset V$, con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tali che

$$E = \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1 \wedge v_2 \in V_2\}.$$



Limitazioni per gli autovalori di $\mathcal{L}$

Lemma: Per un grafo G con n vertici si ha:

i)

$$\sum_i \lambda_i \leq n$$

e vale l'uguaglianza se e solo se G non ha vertici isolati.

Limitazioni per gli autovalori di $\mathcal{L}$

Lemma: Per un grafo G con n vertici si ha:

i)

$$\sum_i \lambda_i \leq n$$

e vale l'uguaglianza se e solo se G non ha vertici isolati.

ii) Per $n \geq 2$,

$$\lambda_1 \leq \frac{n}{n-1}$$

e vale l'uguale se e solo se il grafo è completo su n vertici. Per un grafo senza vertici isolati vale

$$\lambda_{n-1} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Limitazioni per gli autovalori di $\mathcal{L}$

iii) Per un grafo non completo, $\lambda_1 \leq 1$.

Limitazioni per gli autovalori di $\mathcal{L}$

iii) Per un grafo non completo, $\lambda_1 \leq 1$.

iv) Se G è connesso, allora $\lambda_1 > 0$. Se $\lambda_i = 0$ e $\lambda_{i+1} \neq 0$, allora G ha esattamente $i + 1$ componenti connesse.

Limitazioni per gli autovalori di $\mathcal{L}$

iii) Per un grafo non completo, $\lambda_1 \leq 1$.

iv) Se G è connesso, allora $\lambda_1 > 0$. Se $\lambda_i = 0$ e $\lambda_{i+1} \neq 0$, allora G ha esattamente $i+1$ componenti connesse.

v) Per ogni $i \leq n-1$,

$$\lambda_i \leq 2,$$

con $\lambda_{n-1} = 2$ se e solo se una componente connessa di G è bipartita e non banale.

Limitazioni per gli autovalori di $\mathcal{L}$

iii) Per un grafo non completo, $\lambda_1 \leq 1$.

iv) Se G è connesso, allora $\lambda_1 > 0$. Se $\lambda_i = 0$ e $\lambda_{i+1} \neq 0$, allora G ha esattamente $i + 1$ componenti connesse.

v) Per ogni $i \leq n - 1$,

$$\lambda_i \leq 2,$$

con $\lambda_{n-1} = 2$ se e solo se una componente connessa di G è bipartita e non banale.

vi) Lo spettro di un grafo è l'unione degli spettri delle sue componenti connesse.

□

Problema isoperimetrico per i grafi

In geometria

Trovare fra tutte le curve di una data lunghezza quella che racchiude l'area massima.

Problema isoperimetrico per i grafi

In geometria

Trovare fra tutte le curve di una data lunghezza quella che racchiude l'area massima.

In teoria dei grafi

Rimuovere meno archi possibile per disconnettere il grafo in due parti di dimensione fissata.

Volume di S e taglio

Volume di S

Preso $S \subseteq V$, si dice *volume* di S

$$vol\ S = \sum_{u \in S} d_u.$$

Volume di S e taglio

Volume di S

Preso $S \subseteq V$, si dice *volume* di S

$$vol\ S = \sum_{u \in S} d_u.$$

Taglio o edge-cut

Si definisce *taglio o edge-cut* l'insieme

$$E(S, \bar{S}) = \{\{u, v\} \in E \mid u \in S \ \wedge \ v \in \bar{S}\}.$$

La costante di Cheeger

Costante di Cheeger h_G

Dato $S \subset V$, si definisce

$$h_G(S) = \frac{|E(S, \bar{S})|}{\min(vol\, S, vol\, \bar{S})}.$$

La *costante di Cheeger* h_G di un grafo G è definita come

$$h_G = \min_S h_G(S).$$

Risulta che G è connesso se e solo se $h_G > 0$.

Problema isoperimetrico e costante di Cheeger

Dato che

$$|E(S, \bar{S})| \geq h_G \, vol \, S,$$

il problema di determinare la costante di Cheeger h_G è equivalente al seguente

Problema

Fissato un numero m, trovare il sottoinsieme S con $m \leq vol\, S \leq vol\, \bar{S}$ tale che $E(S, \bar{S})$ contenga meno archi possibile.

Disuguaglianza di Cheeger

Teorema

Per un grafo connesso G, si ha

$$\frac{h_G^2}{2} < \lambda_1 \leq 2h_G.$$

Limite superiore: $\lambda_1 \leq 2h_G$

Dimostrazione:
Scegliamo f in base ad un opportuno taglio C che definisce h_G e separa il grafo G in due parti, A e B:

$$f(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{vol\ A} & \text{se } v \in A, \\ -\dfrac{1}{vol\ B} & \text{se } v \in B. \end{cases}$$

Limite superiore: $\lambda_1 \leq 2h_G$

Sostituendo f nella definizione (3) di λ_1 si ottiene:

$$\lambda_1 \leq |C|\left(\frac{1}{vol\ A} + \frac{1}{vol\ B}\right) \leq \frac{2|C|}{\min(vol\ A, vol\ B)} = 2h_G.$$

Limite inferiore: $\dfrac{h_G^2}{2} < \lambda_1$

Consideriamo l'autofunzione armonica f di $\mathcal{L}$ relativa all'autovalore λ_1. Riordiniamo i vertici di G in base a f, ovvero in modo tale che

$$f(v_i) \leq f(v_{i+1}) \text{ per } 1 \leq i \leq n-1.$$

Si può assumere, senza perdere di generalità, che

$$\sum_{f(v)<0} d_v \geq \sum_{f(u)\geq 0} d_u.$$

Limite inferiore: $\frac{h_G^2}{2} < \lambda_1$

Per ogni i, $1 \leq i \leq n$, consideriamo il taglio

$$C_i = \{\{v_j, v_k\} \in E \mid 1 \leq j \leq i < k \leq n\}$$

e definiamo

$$\alpha = \min_{1 \leq i \leq n} \frac{|C_i|}{\min(\sum_{j \leq i} d_j, \sum_{j > i} d_j)}.$$

Chiaramente risulta $\alpha \geq h_G$.

Limite inferiore: $\frac{h_G^2}{2} < \lambda_1$

Consideriamo gli insiemi

$$V_+ = \{v \in V \mid f(v) \geq 0\}$$

e

$$E_+ = \{\{u, v\} \in E \mid u \in V_+ \ \vee \ v \in V_+\}$$

e definiamo la funzione

$$g(u) = \begin{cases} f(u) & \text{se } u \in V_+, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Limite inferiore: $\frac{h_G^2}{2} < \lambda_1$

Abbiamo che

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{v \in V_+} f(v) \sum_{\{u,v\} \in E_+} (f(v) - f(u))}{\sum_{v \in V_+} f^2(v) d_v} > \frac{\sum_{\{u,v\} \in E_+} (g(u) - g(v))^2}{\sum_{v \in V} g^2(v) d_v}$$

Limite inferiore: $\frac{h_G^2}{2} < \lambda_1$

$$= \frac{\sum_{\{u,v\}\in E_+} (g(u) - g(v))^2 \sum_{\{u,v\}\in E_+} (g(u) + g(v))^2}{\sum_{v\in V} g^2(v) d_v \sum_{\{u,v\}\in E_+} (g(u) + g(v))^2}$$

$$\geq \frac{(\sum_{u\sim v} |g^2(u) - g^2(v)|)^2}{2(\sum_{v} g^2(v) d_v)^2}$$

Limite inferiore: $\frac{h_G^2}{2} < \lambda_1$

$$\geq \frac{(\sum_i |g^2(v_i) - g^2(v_{i+1})||C_i|)^2}{2(\sum_v g^2(v) d_v)^2} \geq \frac{(\sum_i (g^2(v_i) - g^2(v_{i+1}))\alpha \sum_{j \leq i} d_j)^2}{2(\sum_v g^2(v) d_v)^2}$$

$$\geq \frac{\alpha^2}{2} \geq \frac{h_G^2}{2}$$

e la dimostrazione è conclusa. $\square$