Università degli Studi di Cagliari

Dipartimento di Matematica e Informatica

Tesi di Laurea Magistrale in Matematica

Il Teorema di Calabi-Yau

Relatore:
Prof. Andrea Loi

Candidato:
Nicolò Leuzzi

Anno Accademico 2021/2022

Indice

Introduzione

Questa tesi si incentra sull'importante *Teorema di Calabi-Yau*, enunciato, sotto forma di congettura, da Eugenio Calabi negli anni '50 del secolo scorso e dimostrato da Shing-Tung Yau vent'anni dopo. Questo teorema, nel contesto delle varietà di Kähler compatte, assicura l'esistenza di una metrica di Kähler la cui forma di Ricci è data da una fissata $(1,1)$-forma. Un caso particolare si ha quando la prima classe di Chern della varietà è nulla. In questo caso il teorema assicura la possibilità di dotare la varietà di una metrica di Kähler Ricci-piatta.

Il corpo della tesi consiste nell'esposizione dei concetti necessari per la comprensione del teorema, il quale viene discusso nell'ultimo capitolo. Nel primo capitolo vengono richiamati alcuni concetti preliminari. Nei capitoli 2 e 3 vengono introdotti gli strumenti che permettono di passare dal contesto reale delle varietà differenziabili, a quello complesso. Nel quarto capitolo vengono introdotti i fibrati Hermitiani, fondamentali per definire la connessione (complessa) di Chern. Nel quinto capitolo vengono introdotte le varietà di Kähler e vengono esposti degli importanti risultati che valgono su tali varietà. Nel sesto capitolo viene introdotto l'operatore di Hodge nel contesto delle varietà complesse e vengono definiti i gruppi di coomologia di De Rham. Tramite le classi di coomologia, nel settimo capitolo, viene introdotto il concetto di prima classe di Chern e vengono esposte le sue proprietà. Infine, nell'ottavo capitolo, viene enunciato il teorema di Calabi-Yau e viene dato uno schema della sua dimostrazione.

Capitolo 1

Richiami

1.1 Fibrati Vettoriali e Connessioni

Definizione 1.1.1 (Fibrato Vettoriale)**.** *Siano E e M due varietà differenziabili e $\pi : E \to M$ un'applicazione differenziabile suriettiva. La terna (E, M, π) è detta* ***fibrato vettoriale reale di rango k*** *se:*

a) per ogni $x \in M$, $E_x := \pi^{-1}(x)$ è dotato di una struttura di spazio vettoriale (reale) di dimensione k;

b) per ogni $x \in M$ esiste un aperto U che contiene x e un diffeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$, detto ***trivializzazione locale****, tale che $pr \circ \psi = \pi$, in cui pr è la proiezione sul primo fattore;*

c) per ogni $x \in M$, la restrizione $\psi_{|_{E_x}} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^k$ definisce un isomorfismo di spazi vettoriali.

E è detto ***spazio totale****, M* ***spazio di base*** *e $\pi : E \longrightarrow M$* ***proiezione****.*

Talvolta i fibrati vettoriali (E, M, π) vengono indicati con $\pi : E \to M$ oppure, qualora la proiezione e lo spazio di base siano ovvi dal contesto, semplicemente con E.

Definizione 1.1.2 (Sezione)**.** *Una* ***sezione (liscia)*** *di un fibrato vettoriale $\pi : E \to M$ è un'applicazione differenziabile $\sigma : M \to E$ tale che $\pi \circ \sigma = id_M$. L'insieme delle sezioni lisce di un fibrato vettoriale E si indica con $\Gamma(E)$.*

Dei primi esempi di fibrati vettoriali sono:

- il fibrato tangente $TM := \bigsqcup_{x\in M} T_xM$, le cui sezioni sono i campi vettoriali differenziabili ($\mathcal{X}(M) := \Gamma(TM)$);
- il fibrato dei (k,l)-tensori su M

$$\mathcal{T}^{(k,l)}M := \bigsqcup_{x\in M} \mathcal{T}^{(k,l)}(T_xM)$$

  le cui sezioni sono i campi tensoriali di tipo (k,l);
- il fibrato delle k-forme su M

$$\Lambda^k M := \bigsqcup_{x\in M} \Lambda^k(T_xM)$$

  le cui sezioni sono le k-forme differenziali ($\Omega^k M := \Gamma(\Lambda^k M)$).

Definizione 1.1.3 (Connessione)**.** *Una **connessione** ∇ sul fibrato vettoriale $\pi : E \to M$ è un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $\nabla : \mathcal{X}(M)\times\Gamma(E) \to \Gamma(E)$, tale che $(X,\sigma) \mapsto \nabla_X\sigma$, che soddisfa le seguenti proprietà $\forall X \in \mathcal{X}(M)$,$\forall f \in C^\infty(M)$ e $\forall\sigma \in \Gamma(E)$:*

- $C^\infty(M)$**-linearità :** $\nabla_{fX}\sigma = f\nabla_X\sigma$*;*

- regola di Leibniz : $\nabla_X(f\sigma) = f\nabla_X\sigma + (\partial_X f)\sigma$*.*

*$\nabla_X\sigma$ è detta **derivata covariante** di σ rispetto a X.*

Teorema 1.1.4. *Sia ∇ una connessione lineare su una varietà differenziabile M (ovvero una connessione sul fibrato vettoriale TM). Allora su ogni fibrato tensoriale $\mathcal{T}^{(k,l)}M$ esiste un'unica connessione, indicata sempre con ∇, tale che:*

i) su $\mathcal{T}^{(0,1)}M = TM$ coincide con la connessione lineare;

ii) su $\mathcal{T}^{(0,0)}M$ si ha $\nabla_X f = df(X)$;

iii) per ogni (k,l)-tensore F, per ogni (p,q)-tensore G e per ogni $X \in \mathcal{X}(M)$

$$\nabla_X(F\otimes G) = (\nabla_X F)\otimes G + F\otimes(\nabla_X G);$$

iv) ∇ commuta con le contrazioni dei tensori.

Inoltre una tale connessione soddisfa le seguenti proprietà:

a) per ogni $\omega \in \Omega^1 M$ *e per ogni* $Y \in \mathcal{X}(M)$

$$\nabla_X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y);$$

b) per ogni $F \in \Gamma(\mathcal{T}^{l,k})$, *per ogni* $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^1 M$ *e per ogni* $Y_1, \ldots, Y_l \in \mathcal{X}(M)$

$$\begin{aligned}(\nabla_X F)(\omega_1, \ldots, \omega_k, Y_1, \ldots, Y_l) =& \partial_X(F(\omega_1, \ldots, \omega_k, Y_1, \ldots, Y_l)) + \\ & - \sum_{j=1}^{k} F(\omega_1, \ldots, \nabla_X \omega_j, \ldots, \omega_k, Y_1, \ldots, Y_l) + \\ & - \sum_{j=1}^{l} F(\omega_1, \ldots, \omega_k, Y_1, \ldots, \nabla_X Y_j, \ldots, Y_l).\end{aligned}$$

Capitolo 2

Strutture Complesse

2.1 Funzioni Olomorfe e Varietà Complesse

Definizione 2.1.1. *Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e $F : U \to \mathbb{C}$ un'applicazione tale che $F(x+iy) = f(x+iy) + ig(x+iy)$, in cui $f, g : U \to \mathbb{R}$. F è detta **olomorfa** se soddisfa le seguenti condizioni (dette equazioni di Cauchy-Riemann):*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x} \tag{2.1}$$

Poichè $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, la moltiplicazione per i in $\mathbb{C}$ ha un corrispettivo in $\mathbb{R}^2$, dato dall'endomorfismo $j : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rappresentato dalla matrice

$$j \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nella base canonica di $\mathbb{R}^2$. In questo modo, data un'applicazione $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liscia, posso esprimere le condizioni (2.1) per F come:

$$j \circ (F_*)_p = (F_*)_p \circ j \quad \forall p \in U \tag{2.2}$$

Ovvero:

Proposizione 2.1.2. *Un'applicazione liscia $F : U \to \mathbb{R}^2$, definita su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, è olomorfa se e solo se vale la condizione (2.2).*

È possibile identificare $\mathbb{C}^m$ e $\mathbb{R}^{2m}$ tramite:

$$(x_1 + iy_1, \ldots, x_m + iy_m) \longmapsto (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m)$$

Analogamente al caso $m = 1$, la moltiplicazione per i in $\mathbb{C}^m$ ha un corrispettivo in $\mathbb{R}^{2m}$ dato dall'applicazione $j_m : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ che, nella base canonica di $\mathbb{R}^{2m}$, è rappresentata dalla matrice:

$$j_m \coloneqq \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$$

Definizione 2.1.3 (Funzione Olomorfa)**.** *Un'applicazione liscia $F : U \to \mathbb{R}^{2m}$, definita su un aperto U di $\mathbb{R}^{2n}$, è **olomorfa**[1] se:*

$$j_m \circ F_{*_p} = F_{*_p} \circ j_n \quad \forall p \in U$$

Definizione 2.1.4 (Varietà Complessa)**.** *Una **varietà complessa** m-dimensionale è una varietà topologica $(M^m, \mathcal{U})$ tale che le carte locali dell'atlante soddisfano la seguente condizione di compatibilità:*

> *$\forall (U, \varphi_U), (V, \varphi_V) \in \mathcal{U}$ tali che $U \cap V \neq \emptyset$, l'applicazione del cambio di coordinate $\varphi_{UV} \coloneqq \varphi_U \circ \varphi_V^{-1} : \varphi_U(U \cap V) \to \varphi_V(U \cap V)$, in quanto ad applicazione tra aperti di $\mathbb{C}^m$, è olomorfa.*

*In tal caso ogni carta (U, φ_U) è detta **olomorfa** e l'atlante $\mathcal{U}$ è detto **struttura olomorfa**. Un'applicazione $F : M \to \mathbb{C}$ è **olomorfa** se per ogni $x \in M$ esiste una carta olomorfa (U, φ_U) tale che $F \circ \varphi_U$ è olomorfa.*

Osservazione 2.1.5. Ogni m-varietà complessa M è una $2m$-varietà differenziabile indicata con $M_{\mathbb{R}}$, infatti la condizione di compatibilità per varità complesse implica la condizione di C^∞-compatibilità per varietà differenziabili. Su $M_{\mathbb{R}}$ è possibile definire un $(1,1)$-tensore $J : \Gamma(TM_{\mathbb{R}}) \to \Gamma(TM_{\mathbb{R}})$ che permette di identificare il fibrato vettoriale complesso TM con il fibrato vettoriale reale $TM_{\mathbb{R}}$. Tale tensore può essere definito localmente, dato $X \in T_x M_{\mathbb{R}}$ e data (U, φ_U) carta locale attorno a x, tramite:

$$J_U(X) \coloneqq (\varphi_U)_*^{-1} \circ j_m \circ (\varphi_U)_* (X)$$

La definizione è ben posta, infatti: se sia (U, φ_U) che (V, φ_V) sono carte attorno a x, allora, in $U \cap V$, si ha $\varphi_V = \varphi_{VU} \circ \varphi_U$. Perciò, preso $X \in T_x M_{\mathbb{R}}$, si avrà

$$\begin{aligned} J_V(X) &= (\varphi_V)_*^{-1} \circ j_m \circ (\varphi_V)_* (X) = \\ &= (\varphi_U)_*^{-1} \circ (\varphi_{VU})_*^{-1} \circ j_m \circ (\varphi_{VU})_* \circ (\varphi_U)_* (X) = \\ &= (\varphi_U)_*^{-1} \circ (\varphi_{VU})_*^{-1} \circ (\varphi_{VU})_* \circ j_m \circ (\varphi_U)_* (X) = \\ &= J_U(X), \end{aligned}$$

[1] vista come funzione tra un aperto di $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{C}^m$.

Definizione 2.1.6 (Struttura Quasi Complessa)**.** *Un* $(1,1)$*-tensore* J *su una varietà differenziabile* M *è detto* ***struttura quasi complessa*** *se* $J^2 = -Id$. *La coppia* (M, J) *prenderà il nome di* ***varietà quasi complessa****.*

Osservazione 2.1.7. Se M ammette una struttura quasi complessa J allora M è di dimensione pari. Infatti J in ogni punto $p \in M$ definisce un endomorfismo di T_pM che può essere rappresentato da una matrice J_p. Poichè $J^2 = -Id$, allora $(\det J_p)^2 = \det(-I_n) = (-1)^n$ in cui $n = \dim(M)$. Perciò, affinchè $(\det J_p)^2$ sia un numero reale si deve richiedere che n sia pari.

2.2 Il Fibrato Tangente Complessificato

Sia (M, J) una varità quasi complessa e sia $TM^{\mathbb{C}} := TM \otimes \mathbb{C}$, ovvero il fibrato tangente complessificato. Fatta l'identificazione $iX = X \otimes i$ per ogni $X \in TM$, posso esprimere il complessificato come

$$TM^{\mathbb{C}} = \{X + iY \mid X, Y \in TM\}$$

Inoltre, posso estendere il tensore J per $\mathbb{C}$-linearità e definire $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ come gli auto-fibrati relativi agli autovalori i e $-i$ di J rispettivamente. Ovvero:

$$T^{1,0}M := \{X + iY \in TM^{\mathbb{C}} \mid J(X + iY) = i(X + iY)\}$$
$$T^{0,1}M := \{X + iY \in TM^{\mathbb{C}} \mid J(X + iY) = -i(X + iY)\}$$

Proposizione 2.2.1. *In una varietà quasi complessa* (M, J) *si hanno:*

i) $T^{1,0}M = \{X - iJX \mid X \in TM\}$;

ii) $T^{0,1}M = \{X + iJX \mid X \in TM\}$;

iii) $TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$.

Dimostrazione. Siano X e Y dei campi vettoriali aventi espressioni locali

$$X = \sum_{j=1}^{m} \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad \text{e} \quad Y = \sum_{j=1}^{m} \left(c_j \frac{\partial}{\partial x_j} + d_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

i)

$$J(X+iY) = \sum_{j=1}^{m} \left(-(b_j + id_j)\frac{\partial}{\partial x_j} + (a_j + ic_j)\frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$
$$i(X+iY) = \sum_{j=1}^{m} \left(-(c_j - ia_j)\frac{\partial}{\partial x_j} + (-d_j + ib_j)\frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

Perciò si deve avere $b_j = c_j$ e $d_j = -a_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$, ovvero $Y = -JX$.

iii) $T^{1,0}M \cap T^{0,1}M = \emptyset$, infatti: se $X - iJX = Y + iY$ allora avrei $-JX = JY = JX$ e quindi $X = 0 = Y$.

Infine, dato $X \in TM$, posso scomporlo come

$$X = \frac{1}{2}\Big((X - iJX) + (X + iJX) \Big)$$

$\square$

Osservazione 2.2.2. Dal lemma si ottiene direttamente che $Z \in T^{0,1}M$ se e solo se $Z - iJZ = 0$ e $Z \in T^{1,0}M$ se e solo se $Z + iJZ = 0$, infatti:

$\Rightarrow$: se $Z = X + iJX$, allora $Z - iJZ = X + iJX - iJX - X = 0$;

$\Leftarrow$: se $Z = X + iY$, supponendo $Z - iJZ = 0$, ottengo:

$$0 = X + iY - iJX + JY = (X + JY) + i(Y - JX)$$

quindi $Y = JX$.

Per quanto visto nell'Osservazione 2.1.5, ogni varietà complessa è anche una varietà quasi complessa. Il seguente teorema da una condizione necessaria e sufficiente affinchè valga anche il viceversa.

Teorema 2.2.3 (di Newlander–Nirenberg)**.** *Sia (M, J) una varietà quasi complessa. J proviene da una struttura olomorfa se e solo se la distribuzione $T^{0,1}M$ è integrabile*[2]*.*

[2] Una **distribuzione** D su una varietà differenziabile M è un sottofibrato di TM. $X \in \mathcal{X}(M)$ è **parallelo** a D se per ogni $x \in M$ si ha $X_x \in D_x$. La distribuzione D è detta **integrabile** se per ogni X e Y campi vettoriali paralleli a D anche $[X, Y]$ è parallelo a D.

Dimostrazione.

$\Rightarrow$: Supponiamo che J provenga da una struttura olomorfa $\mathcal{U}$ su M. Sia $(U, \varphi_U) \in \mathcal{U}$ e siano $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ le coordinate olomorfe su U. Se $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^{2m}$, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = (\phi_U)_*^{-1}(e_\alpha) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = (\phi_U)_*^{-1}(e_{m+\alpha}) \quad \forall \alpha \in \{1, \ldots, m\}.$$

Poichè $j_m(e_\alpha) = e_{m+\alpha}$, si ottiene dalla definizione di J che:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}.$$

Pongo

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right).$$

Allora, dalla proposizione 2.2.1, ricavo che $\{\partial/\partial z_\alpha\}$ e $\{\partial/\partial \bar{z}_\alpha\}$ sono basi locali per $T^{1,0}M$ e $T^{0,1}M$ rispettivamente. Perciò date due sezioni locali $Z = \sum_{\alpha=1}^m Z_\alpha\,(\partial/\partial \bar{z}_\alpha)$ e $W = \sum_{\alpha=1}^m W_\alpha\,(\partial/\partial \bar{z}_\alpha)$ si ha che

$$[Z, W] = \sum_{\alpha,\beta=1}^m Z_\alpha \frac{\partial W_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta} - \sum_{\alpha,\beta=1}^m W_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}$$

ovvero $[Z, W]$ è ancora una sezione di $T^{0,1}M$.

$\square$

Definizione 2.2.4 (Struttura Complessa)**.** *Se una struttura quasi complessa J che proviene da una struttura olomorfa è detta* ***struttura complessa****.*

Definizione 2.2.5. *Un'applicazione $f : (M, J_1) \to (N, J_2)$ tra due varietà complesse è detta* ***olomorfa*** *se $f_* \circ J_1 = J_2 \circ f_*$*

2.3 Il Fibrato Esterno Complessificato

Sia (M, J) una varità quasi complessa e sia

$$\Lambda^* M \coloneqq \bigoplus_{k=1}^{\infty} \Lambda^k M$$

il fibrato esterno. Sia $\Lambda^*_{\mathbb{C}} M \coloneqq \Lambda^* M \otimes \mathbb{C}$ il fibrato esterno complessificato. Fatta l'identificazione $i\omega = \omega \otimes i$ per ogni $\omega \in \Lambda^* M$, posso esprimere il complessificato come

$$\Lambda^*_{\mathbb{C}} M = \{\omega + i\eta \mid \omega, \eta \in \Lambda^* M\}.$$

Definisco quindi i sottofibrati di $\Lambda^*_{\mathbb{C}} M$

$$\Lambda^{1,0} M \coloneqq \{\xi \in \Lambda^1_{\mathbb{C}} \mid \xi(Z) = 0,\ \forall Z \in T^{0,1} M\}$$
$$\Lambda^{0,1} M \coloneqq \{\xi \in \Lambda^1_{\mathbb{C}} \mid \xi(Z) = 0,\ \forall Z \in T^{1,0} M\}$$

Le sezioni di questi due fibrati vengono chiamate $(1,0)$-forme e $(0,1)$-forme rispettivamente.

Lemma 2.3.1. *In una varietà quasi complessa (M, J) si hanno:*

i) $\Lambda^{1,0} M = \{\omega - i\omega \circ J \mid \omega \in \Lambda^1 M\}$;

ii) $\Lambda^{0,1} M = \{\omega + i\omega \circ J \mid \omega \in \Lambda^1 M\}$;

iii) $\Lambda^1_{\mathbb{C}} M = \Lambda^{1,0} M \oplus \Lambda^{0,1} M$.

Dimostrazione.

i) Siano $\xi = \omega + i\tau \in \Lambda^{1,0}$ e $Z = X + iJX \in T^{0,1} M$. Allora $\forall X \in TM$:

$$\begin{aligned} 0 &= \xi(Z) = \\ &= (\omega + i\tau)(X + iJX) = \\ &= (\omega - \tau \circ J)(X) + i(\omega \circ J + \tau)(X). \end{aligned}$$

Perciò $\omega = \tau \circ J$ e $-\omega \circ J = \tau$, ovvero $\xi = \omega - i\omega \circ J$.

iii) Ogni $\omega \in \Lambda^1 M$ può essere scomposta come:

$$\omega = \frac{1}{2}\left((\omega - i\omega \circ J) + (\omega + i\omega \circ J)\right).$$

$\square$

Posso quindi definire

$$\Lambda^{k,0} := \bigwedge_{i=1}^{k} \Lambda^{1,0} \quad \text{e} \quad \Lambda^{0,k} := \bigwedge_{i=1}^{k} \Lambda^{0,1}$$

e infine $\Lambda^{p,q}M := \Lambda^{p,0}M \otimes \Lambda^{0,q}M$. Essendo $\Lambda^k(E \oplus F) \cong \bigoplus_{i=0}^{k} \Lambda^i E \otimes \Lambda^{k-i}F$, posso esprimere $\Lambda^k_{\mathbb{C}}$ come:

$$\Lambda^k_{\mathbb{C}} \cong \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^{p,q}M.$$

Le sezioni di $\Lambda^{p,q}M$ vengono chiamate (p,q)-forme e si indica $\Omega^{p,q}M := \Gamma(\Lambda^{p,q}M)$.

Osservazione 2.3.2. Una k-forma complessa ω appartiene a $\Omega^{k,0}M$ (risp. $\Omega^{0,k}M$) se e solo se $Z \lrcorner \omega = 0 \quad \forall Z \in T^{0,1}M$ (risp. $\forall Z \in T^{1,0}M$). Quindi una k-forma complessa appartiene a $\Omega^{p,q}M$ se e solo se si annulla se applicata a $p+1$ vettori di $T^{0,1}M$ o a $q+1$ vettori di $T^{1,0}M$.

Data una varietà quasi complessa (M,J) e considerate le coordinate locali x_α e y_α, posso definire le 1-forme

$$dz_\alpha := dx_\alpha + i dy_\alpha \quad \text{e} \quad d\bar{z}_\alpha := dx_\alpha - i dy_\alpha$$

che formano una base locale rispettivamente per $\Omega^{1,0}M$ e $\Omega^{0,1}M$. Perciò una base locale per $\Omega^{p,q}M$ sarà data da:

$$\left\{ dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q} \mid i_1 < \cdots < i_p, \quad j_1 < \cdots < j_q \right\}$$

Proposizione 2.3.3. *Sia J una struttura quasi complessa su una $2m$-varietà differenziabile M. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) J è una struttura complessa;

2) $T^{0,1}M$ è integrabile;

3) $d(\Omega^{1,0}M) \subseteq \Omega^{2,0}M \oplus \Omega^{1,1}M$;

4) $d(\Omega^{p,q}M) \subseteq \Omega^{p+1,q}M \oplus \Omega^{p,q+1}M, \quad \forall 0 \leq p,q \leq m$;

5) il $(2,1)$*-tensore* N^J*, detto* ***tensore di Nijenhuis associato a*** J*, definito da:*

$$N^J(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY], \quad \forall X,Y \in \mathcal{X}(M)$$

è identicamente nullo.

Dimostrazione.

$1 \Leftrightarrow 2$: è assicurata dal Teorema 2.2.3.

$2 \Leftrightarrow 3$: sia $\omega \in \Omega^{1,0}M$. Esteso per $\mathbb{C}$-linearità l'operatore d di derivata esterna, per l'Osservazione 2.3.2, ho che la componente $(0,2)$ di $d\omega \in \Lambda^2_{\mathbb{C}}M$ è nulla se e solo se $d\omega(Z,W) = 0 \quad \forall Z,W \in T^{0,1}M$.

Siano ora $Z,W \in \Gamma(T^{0,1}M)$, allora, essendo $\omega \in \Omega^{1,0}M$, si ha che:

$$d\omega(Z,W) = \partial_Z\omega(W) - \partial_W\omega(Z) - \omega(Z,W) = -\omega([Z,W]).$$

Da cui

$$\begin{aligned} d\omega(Z,W) = 0, &\quad \forall Z,W \in T^{0,1}M, \quad \forall \omega \in \Omega^{1,0}M \\ &\Leftrightarrow \quad \omega([Z,W]) = 0, \quad \forall Z,W \in T^{0,1}M, \quad \forall \omega \in \Omega^{1,0}M \\ &\Leftrightarrow \quad [Z,W] \in \Gamma(T^{1,0}M), \quad \forall Z,W \in T^{0,1}M \end{aligned}$$

$4 \Rightarrow 3$: ovvia;

$3 \Rightarrow 4$: per definizione $d\bar{z}_\alpha = dx_\alpha - i dy_\alpha$, ovvero, nel fibrato esterno complessificato, dz_α e $d\bar{z}_\alpha$ sono uno il coniugato dell'altro. Essendo d esteso per $\mathbb{C}$-linearità e supponendo che valga la (3), si ottiene anche:

$$d\left(\Omega^{0,1}M\right) \subseteq \Omega^{0,2}M \oplus \Omega^{1,1}M.$$

Poichè ogni elemento di $\Omega^{p,q}M$ è somma di elementi della forma $\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_p \wedge \bar{\tau}_1 \wedge \cdots \wedge \bar{\tau}_q$, in cui $\omega_i \in \Omega^{1,0}M$ e $\bar{\tau}_i \in \Omega^{0,1}M$, applicando la regola di Leibniz si ottiene che $d\omega \in \Omega^{p+1,q}M \oplus \Omega^{p,q+1}M$ per ogni $\omega \in \Omega^{p,q}M$.

$2 \Leftrightarrow 5$: siano $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ e sia $Z = [X + iJX, Y + iJY]$. Allora:

$$\begin{aligned} Z - iJZ &= [X,Y] + i[X,JY] + i[JX,Y] - [JX,JY] + \\ &\quad - i(J[X,Y] + iJ[X,JY] + iJ[JX,Y] - J[JX,JY]) = \\ &= N^J(X,Y) - iJN^J(X,Y). \end{aligned}$$

Per l'Osservazione 2.2.2, $Z \in T^{0,1}M$ se e solo se $Z - iJZ = 0$. Allora $[X + iJX, Y + iJY] \in T^{0,1}M$ se e solo se $N^J(X, Y) = 0$ e quindi $T^{0,1}M$ è integrabile se e solo se N^J è identicamente nullo.

$\square$

Capitolo 3

Oggetti Olomorfi

3.1 Operatori di Dolbeault e $i\partial\bar{\partial}$-Lemma

In questa e nella prossima sezione (M, J) è varietà complessa m-dimensionale.

Dalla Proposizione 2.3.3 sappiamo che $d\left(\Omega^{p,q}M\right) \subseteq \Omega^{p+1,q}M \oplus \Omega^{p,q+1}M$, $\forall 0 \leq p, q \leq m$. Ciò giustifica la seguente definizione.

Definizione 3.1.1 (Operatori di Dolbeault)**.** *Definisco gli **operatori di Dolbeault** come la famiglia di operatori*

$$\partial : \Omega^{p,q}M \to \Omega^{p+1,q}M \quad e \quad \bar{\partial} : \Omega^{p,q}M \to \Omega^{p,q+1}M$$

tali che $d = \partial + \bar{\partial}$.

Lemma 3.1.2. *I precedenti operatori godono delle seguenti proprietà:*

i) $\partial^2 = 0$;

ii) $\bar{\partial}^2 = 0$;

iii) $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$.

Dimostrazione. Essendo

$$0 = d^2 = \left(\partial + \bar{\partial}\right)^2 = \partial^2 + \bar{\partial}^2 + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial),$$

applicando d^2 ad una (p, q)-forma si ottiene la somma di una $(p + 2, q)$-forma, una $(p, q + 2)$-forma e una $(p + 1, q + 1)$-forma corrispondenti ai 3 operatori della somma. Avendo $\Omega^{p+2,q}$, $\Omega^{p,q+2}$ e $\Omega^{p+1,q+1}$ in comune solo la $(p + q + 2)$-forma nulla, si deduce che $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$. $\square$

Osservazione 3.1.3. Per ogni applicazione liscia $f : M \to \mathbb{C}$ si ha:

$$\partial f = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \quad \text{e} \quad \bar{\partial} f = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} d\bar{z}_\alpha.$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
df &= \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} dy_\alpha \right) = \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} dy_\alpha \pm \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} i dy_\alpha \pm \frac{1}{2} i \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} dx_\alpha \right) = \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \left[\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - i \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \right) dx_\alpha + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} - i \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \right) i dy_\alpha \right] + \right. \\
&\qquad \left. + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + i \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \right) dx_\alpha - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} + i \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} \right) i dy_\alpha \right] \right] = \\
&= \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial z_\alpha} dz_\alpha + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha} d\bar{z}_\alpha \right)
\end{aligned}$$

Lemma 3.1.4 (di Dolbeault)**.** *Una* $(0,1)$*-forma* $\bar{\partial}$*-chiusa* ω *(i.e.* $\bar{\partial}\omega = 0$*) è localmente* $\bar{\partial}$*-esatta (i.e. esiste* η *tale che* $\omega = \bar{\partial}\eta$*).*

Lemma 3.1.5 ($i\partial\bar{\partial}$-Lemma Locale)**.** *Sia* $\omega \in \Lambda^{1,1}M \cap \Lambda^2 M$ *una 2-forma reale del tipo* $(1,1)$ *su una varietà complessa* M*.* ω *è chiusa se e solo se per ogni* $x \in M$ *esiste un aperto* U *di* M *che contiene* x *e una applicazione liscia* $u : U \to \mathbb{R}$ *tale che* $\omega_{|U} = i\partial\bar{\partial}u$*.*

Dimostrazione.

$\Leftarrow$: una forma $i\partial\bar{\partial}$-esatta e anche chiusa, infatti:

$$d(i\partial\bar{\partial}) = i(\partial + \bar{\partial})\partial\bar{\partial} = i(\partial^2\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}^2) = 0$$

$\Rightarrow$: ω, in quanto a $(1,1)$-forma chiusa, per il *Lemma di Poincarè*[1], è localmente esatta. Sia quindi τ una 1-forma reale definita in un aperto semplicemente connesso tale che $d\tau = \omega$. Poichè, in particolare,

[1]Una p-forma definita su un aperto semplicemente connesso è chiusa se e solo se è esatta

$\tau \in \Lambda^1_{\mathbb{C}} \cong \Lambda^{1.0}M \oplus \Lambda^{0,1}M$, posso scomporla come $\tau = \tau^{1,0} + \tau^{0,1}$, in cui $\tau^{1,0} = \overline{\tau^{0,1}}$.[2] Inoltre

$$\bar{\partial}\tau^{1,0} + \left(\partial\tau^{1,0} + \bar{\partial}\tau^{0,1}\right) + \partial\tau^{0,1} = d\tau = \omega \in \Lambda^{1,1}M.$$

Non essendo i termini tra parentesi di tipo $(1,1)$, allora $\omega = \bar{\partial}\tau^{1,0} + \partial\tau^{0,1}$ e $\bar{\partial}\tau^{0,1} = 0$. Allora per il lemma di Dolbeault esiste una funzione locale f tale che $\tau^{0,1} = \bar{\partial} f$ e si ha

$$\tau^{1,0} = \overline{\tau^{0,1}} = \overline{\bar{\partial} f} = {}^3\partial\bar{f}.$$

Perciò

$$\begin{aligned}\omega = \left(\partial\tau^{0,1} + \bar{\partial}\tau^{1,0}\right) = \partial\bar{\partial} f + \bar{\partial}\partial\bar{f} = \partial\bar{\partial} f - \partial\bar{\partial}\bar{f} = \\ = \partial\bar{\partial}(f - \bar{f}) = i\partial\bar{\partial}(2\,\mathrm{Im}(f))\end{aligned}$$

□

3.2 Campi Vettoriali e Forme Olomorfe

Lemma 3.2.1. *Sia $f : M \to \mathbb{C}$ liscia, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) f è olomorfa;

2) $\partial_Z f = 0, \quad \forall Z \in T^{0,1}M$;

3) df è una forma di tipo $(1,0)$.

Dimostrazione.

[2]suppongo che $\tau^{1,0} = \eta_1 - i\eta_1 \circ J$ e $\tau^{0,1} = \eta_2 + i\eta_2 \circ J$. Essendo τ reale, allora:

$$(\eta_1 + \eta_2) + i(\eta_2 - \eta_1) \circ J = \tau^{1,0} + \tau^{0,1} = \overline{\tau^{1,0}} + \overline{\tau^{0,1}} = (\eta_1 + \eta_2) + i(\eta_1 - \eta_2) \circ J$$

da cui ricavo $\eta_1 = \eta_2$ e quindi $\tau^{1,0} = \overline{\tau^{0,1}}$.

[3]Per l'Osservazione 3.1.3 si ha che

$$\overline{\bar{\partial} f} = \sum_{\alpha=1}^{m} \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\alpha}}\,\overline{d\bar{z}_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z_\alpha} dz_\alpha = \partial\bar{f}$$

$2 \Leftrightarrow 3$: $df \in \Omega^{1,0}M \iff df(Z) = 0 \quad \forall Z \in T^{0,1}M \iff \partial_Z f = 0 \quad \forall Z \in T^{0,1}M.$

$1 \Leftrightarrow 3$: f è olomorfa $\iff f \circ \varphi_U^{-1}$ è olomorfa $\iff f_* \circ (\varphi_U)_*^{-1} \circ j_m = j_1 \circ f_* \circ (\varphi_U)_*^{-1}$
$\iff f_* \circ J = i f_* \iff i df(X + iJX) = 0, \forall X \in TM \iff df \in \Omega^{1,0}M.$

□

Osservazione 3.2.2. Un campo vettoriale complesso Z è del tipo $(0,1)$ se e solo se per ogni f funzione olomorfa localmente definita si ha $\partial_Z f = 0$. Infatti dal lemma precedente ho che vale la prima implicazione. Al contrario, se $0 = \partial_Z f = df(Z)$ per ogni f olomorfa localmente definita, allora, se $Z = X + iY$, dalla dimostrazione del lemma precedente ottengo che $df(X) = -i df(Y) = -df(JY)$. Poichè ciò vale per ogni f olomorfa localmente definita, allora $Y = JX$ e quindi Z è del tipo $(0,1)$.

Osservazione 3.2.3. Se $f : M \to \mathbb{C}$ è un'applicazione liscia, ho che f è olomorfa se e solo se $\bar{\partial} f = 0$, infatti:

$$f \text{ è olomorfa } \Leftrightarrow df \text{ è una } (1,0)\text{-forma } \Leftrightarrow df = \partial f \Leftrightarrow \bar{\partial} f = 0$$

Definizione 3.2.4 (Campo Vettoriale Olomorfo)**.** *Un campo vettoriale $Z \in \Gamma(T^{1,0}M)$ è detto **olomorfo** se $\partial_Z f$ è olomorfo per ogni funzione olomorfa f definita localmente.*

Definizione 3.2.5 (Campo Vettoriale Olomorfo Reale)**.** *$X \in \mathcal{X}(M)$ è detto **campo vettoriale olomorfo reale** se la sua componente $(1,0)$ $X - iJX \in \Gamma(T^{1,0}M)$ è un campo vettoriale olomorfo.*

Definizione 3.2.6 (p-Forma Olomorfa)**.** *$\omega \in \Omega^{p,0}M$ è detta **olomorfa** se $\bar{\partial}\omega = 0$.*

Lemma 3.2.7. *Sia X un campo vettoriale reale su una varietà complessa (M, J). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1) X è olomorfo reale;

2) $\mathcal{L}_X J$[4] $= 0$.

Dimostrazione.

[4] $\mathcal{L}_X J$ indica la derivata di Lie del (1,1)-tensore J che può essere espressa come $\mathcal{L}_X J = \mathcal{L}_X(JY) - J(\mathcal{L}_X Y)$, in cui, se $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $\mathcal{L}_X Y := [X, Y]$.

$1 \Leftrightarrow 2:$ dall'Osservazione 3.2.2 ottengo che per ogni $X \in \mathcal{X}(M)$ si ha che $\partial_{X+iJX} f = 0$ con f olomorfa localmente definita. Poichè $2X = (X + iJX) + (X - iJX)$, ottengo $\partial_{X-iJX} f = 2\partial_X f$ e quindi, per la definizione di campo reale olomorfo, si deve avere che anche $\partial_X f$ è olomorfa, da cui ricavo che per ogni $Y \in \mathcal{X}(M)$ si deve avere $\partial_{Y+iJY} f = 0 = \partial_{Y+iJY}(\partial_X f)$. Allora per ogni f olomorfa localmente definita si ha $\partial_{[Y+iJY,X]} f = 0$, ovvero $[Y + iJY, X]$ è un campo del tipo $(0, 1)$, e quindi $[JY, X] = J[Y, X]$. Infine posso ora calcolare la derivata di Lie

$$(\mathcal{L}_X J)(Y) = \mathcal{L}_X(JY) - J(\mathcal{L}_X Y) = [X, JY] - J[X, Y] = 0.$$

Poichè ciò vale per ogni Y, ho verificato la (2).

$2 \Leftrightarrow 1:$ ripercorrendo i passaggi precedenti in senso opposto si ottiene che $\partial_X f$ è olomorfa e quindi anche $\partial_{X-iJX} f$ lo è.

$\square$

3.3 Fibrati Vettoriali Olomorfi

Definizione 3.3.1 (Fibrato Vettoriale Olomorfo)**.** *Sia M una varietà complessa e $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale complesso*[5]*. E è detto **fibrato vettoriale olomorfo** se esiste un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ di M tale che per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste una trivializzazione locale $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$ tale che:*

- *$pr_U \circ \psi_U = \pi$, in cui $pr_U : U \times \mathbb{C}^k \to U$ è la proiezione sul primo fattore;*
- *per ogni $U, V \in \mathcal{U}$ tali che $U \cap V \neq \emptyset$, $\psi_U \circ \psi_V^{-1}(x, v) = (x, g_{UV}(x)v)$, in cui $g_{UV} : U \cap V \to \mathrm{Gl}_k(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C}^{k^2}$ sono funzioni olomorfe.*

Se E è un fibrato vettoriale olomorfo, posso definire il fibrato delle (p, q)-forme su M a valori in E come $\Lambda^{p,q}(E) := \Lambda^{p,q} M \otimes E$. Indicate le sezioni di questo fibrato come $\Omega^{p,q}(E)$, definisco l'operatore $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$ nel seguente modo: se una sezione σ di $\Lambda^{p,q}(E)$, che in una trivializzazione locale

[5] La definizione di fibrato vettoriale complesso è del tutto analoga al caso reale, con le uniche differenze che le fibre sono spazi vettoriali complessi e le trivializzazioni locali $\psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{C}^k$, punto per punto, sono isomorfismi di spazi vettoriali complessi.

può essere espressa come $\sigma = (\omega_1, \dots, \omega_k)$[6], in cui le ω_i sono (p, q)-forme su M, definisco $\bar{\partial}\sigma := (\bar{\partial}\omega_1, \dots, \bar{\partial}\omega_k)$.

La definizione è ben posta, nel senso che non dipende dalla trivializzazione locale, infatti:

> considero le due trivializzazioni ψ_U e ψ_V e siano $\sigma_i(x) = \psi_U^{-1}(x, e_i)$ e $\tilde{\sigma}_i(x) = \psi_V^{-1}(x, e_i)$. Allora esisteranno delle funzioni olomorfe g_{ij} per cui $\tilde{\sigma}_i = \sum_j g_{ji}\sigma_j$. Supposto di avere espressioni locali $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ e $(\tau_1, \dots, \tau_k)$ per σ nelle trivializzazioni ψ_U e ψ_V rispettivamente, ovvero
>
> $$\sigma = \sum_i \omega_i \otimes \sigma_i = \sum_i \tau_i \otimes \tilde{\sigma}_i$$
>
> in $U \cap V$, ricavo che
>
> $$\omega_j = \sum_i g_{ji}\tau_i.$$
>
> Quindi
>
> $$\sum_j \bar{\partial}\omega_j \otimes \sigma_j = \sum_j \left(\sum_i g_{ji}\bar{\partial}\tau_i \right) \otimes \sigma_j = \sum_i \bar{\partial}\tau_i \otimes \left(\sum_j g_{ji}\sigma_j \right) = \sum_i \bar{\partial}\tau_i \otimes \tilde{\sigma}_i.$$

Inoltre, poichè valgono per le espressioni nelle trivializzazioni locali, è soddisfatta $\bar{\partial}^2 = 0$ e la regola di Leibniz:

$$\bar{\partial}(\omega \wedge \sigma) = (\bar{\partial}\omega) \wedge \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge (\bar{\partial}\sigma), \quad \forall \omega \in \Omega^{p,q}M, \quad \forall \sigma \in \Omega^{r,s}(E).$$

Osservazione 3.3.2. Se (M, J) è una varietà quasi complessa, possiamo dotare TM della struttura di fibrato complesso definendo il prodotto per scalari:

$$(a + ib)X := aX + bJX, \quad \forall X \in TM, \forall a + ib \in \mathbb{C}.$$

Se inoltre (M, J) è un varietà complessa, è possibile indurre una struttura di fibrato olomorfo su $T^{1,0}M$. Infatti, se (U, z) e (V, z') sono due sistemi di coordinate olomorfe su M, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial z'_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z'_j}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial z_k},$$

[6] Se $\{\sigma_i\}$ base per le sezioni di E relativa alla trivializzazione, si intende che $\sigma = \sum_i \omega_i \otimes \sigma_i$.

quindi le mappe di transizione $g_{jk} = \frac{\partial z'_j}{\partial z_k}$ sono olomorfe. Infine è possibile indurre anche su TM una struttura di fibrato olomorfo, tramite l'isomorfismo di fibrati complessi $F : TM \to T^{1,0}M$ definito da

$$F(X) = \frac{1}{2}(X - iJX).$$

In questo modo, tramite la costruzione precedente, posso definire $\bar{\partial}$ sulle sezioni di $T^{1,0}M$ (e di conseguenza anche su quelle di TM).

Quindi, se $(U, z_1, \ldots, z_n)$ è una carta locale olomorfa di M, la relativa trivializzazione locale su $T^{1,0}M$ è data da

$$\begin{array}{cccc} \psi_U : & T^{1,0}U & \longrightarrow & U \times \mathbb{C}^k \\ & \sum_{j=1}^n \alpha_j(p) \frac{\partial}{\partial z_j}\Big|_p & \longmapsto & (p, \alpha_1(p), \ldots, \alpha_n(p)). \end{array}$$

Perciò, se $Z = \sum_{j=1}^m \alpha_j \frac{\partial}{\partial z_j}$, allora per definizione

$$\bar{\partial} Z = \sum_{j=1}^m \bar{\partial}\alpha_j \frac{\partial}{\partial z_j}.$$

Quindi Z sarà olomorfo in quanto a sezione locale di $T^{1,0}M$ (i.e. $\bar{\partial}Z = 0$) se e solo se le sue componenti a_j sono funzioni olomorfe (i.e. $\bar{\partial}a_j = 0$). Poichè

$$\sum_j \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \xmapsto{F} \sum_j (a_j + ib_j) \frac{\partial}{\partial z_j}$$

e poichè la struttura olomorfa sul fibrato complesso TM è indotta tramite F, ho che

$$\bar{\partial} \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right) = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}(a_j + ib_j) = 0 \Leftrightarrow \bar{\partial}a_j = \bar{\partial}b_j = 0.$$

Quindi un campo vettoriale è olomorfo, in quanto a sezione del fibrato olomorfo TM, se e solo se le sue componenti sono delle funzioni olomorfe.

Infine, se X ha espressione locale $\sum_j \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$, si ottiene che X è reale olomorfo se e solo se per ogni f fuzione olomorfa localmente definita si ha

$$\begin{aligned} 0 = \bar{\partial}(\partial_{X-iJX} f) &= \bar{\partial} \left(\sum_j a_j \frac{\partial f}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) = \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \bar{\partial} a_j + \frac{\partial f}{\partial y_j} \bar{\partial} b_j \right) \end{aligned}$$

(in cui nell'ultima uguaglianza è stato usato il fatto che, se f è olomorfa, anche le sue derivate parziali lo sono). Quindi in conclusione $X \in TM$ è olomorfo reale se e solo se è olomorfo come sezione del fibrato olomorfo TM.

3.3.1 Strutture Olomorfe

Definizione 3.3.3 (Struttura Pseudo-Olomorfa)**.** *Una* ***struttura pseudo-olomorfa*** *su un fibrato vettoriale complesso E è un operatore* $\bar{\partial} : \Omega^{p,q}(E) \to \Omega^{p,q+1}(E)$ *che soddisfa la regola di Leibniz. Una sezione σ di un fibrato pseudo-olomorfo $(E, \bar{\partial})$ è detta olomorfa se $\bar{\partial}\sigma = 0$. Se inoltre $\bar{\partial}$ soddisfa $\bar{\partial}^2 = 0$, $\bar{\partial}$ è detta* ***struttura olomorfa****.*

Lemma 3.3.4. *Sia $(E, \bar{\partial})$ un fibrato vettoriale pseudo-olomorfo di rango k. Supponiamo che per ogni $x \in M$ esista un aperto U che contiene x e delle sezioni olomorfe $\sigma_1, \dots, \sigma_k : U \to E$ tali che $\{\sigma_i(x)\}$ forma una base sulla fibra E_x. Allora E è un fibrato olomorfo.*

Dimostrazione. Se $\{\sigma_i\}$ e $\{\tilde{\sigma}_i\}$ sono due basi locali per le sezioni olomorfe relative alle trivializzazioni olomorfe ψ_U e ψ_V rispettivamente. Allora in $U \cap V$ esistono delle applicazioni lisce tali che $\sigma_i = \sum_{j=1}^{k} g_{ij}\tilde{\sigma}_j$. Allora:

$$0 = \bar{\partial}\sigma_i = \sum_{j=1}^{k} \left((\bar{\partial}g_{ij}) \otimes \tilde{\sigma}_j + g_{ij}(\bar{\partial}\tilde{\sigma}_j)\right) = \sum_{j=1}^{k} (\bar{\partial}g_{ij}) \otimes \tilde{\sigma}_j$$

perciò $\bar{\partial}g_{ij} = 0$, ovvero funzioni g_{ij} sono olomorfe. Di conseguenza anche la funzione di passaggio $g_{UV} = (g_{ij}) : U \cap V \to \mathrm{Gl}_k(\mathbb{C})$ è olomorfa. □

Teorema 3.3.5. *Un fibrato vettoriale complesso E è olomorfo se e solo è possibile definire una struttura olomorfa $\bar{\partial}$ su E.*

Infatti, se E è olomorfo è possibile definire $\bar{\partial}$ come illustrato in precedenza. Per l'implicazione opposta, si dimostra che, a partire da una base locale per le sezioni di E, è possibile costruirne un'altra le cui sezioni sono olomorfe. Basterà sfruttare il Lemma precedente per ottenere la tesi. Per maggiori dettagli si faccia riferimento al Teorema 9.2 di [1].

3.3.2 Fibrato Canonico di $\mathbb{C}P^m$

Definizione 3.3.6 (Fibrato Canonico)**.** *Sia* (M, J) *una varietà complessa di dimensione complessa* m*. Il* ***fibrato canonico*** *di* M *è il fibrato in rette*[7] $K_M \coloneqq \Lambda^{m,0}M$*.*

Il **fibrato tautologico in rette** (olomorfo) su $\mathbb{C}P^m$ è il fibrato in rette complesso $\pi : L \to \mathbb{C}P^m$ in cui la fibra $L_{[z]}$, nel punto $[z] \in \mathbb{C}P^m$, è data da $< z > \subseteq \mathbb{C}^{m+1}$. Se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è una carta olomorfa canonica di $\mathbb{C}P^m$, ovvero $U_\alpha = \{[(z_0, \dots, z_m)] \in \mathbb{C}P^m \mid z_\alpha \neq 0\}$, la relativa trivializzazione locale $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ è definita da

$$\psi_\alpha([z], w) = ([z], w_\alpha)$$

in cui $w \in \mathbb{C}^{m+1}$ è un rappresentante della classe $[z]$. Poichè

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}([z], \lambda) = \psi_\alpha\left([z], \frac{\lambda}{z_\beta} z\right) = \left([z], \lambda \frac{z_\alpha}{z_\beta}\right)$$

si deduce che le funzioni di transizione $g_{\alpha\beta}([z]) = \frac{z_\alpha}{z_\beta}$ sono olomorfe e quindi L è effettivamente un fibrato olomorfo.

Proposizione 3.3.7. $K_{\mathbb{C}P^m} \cong L^{m+1}$*.*

Per una dimostrazione di questa Proposizione, si faccia riferimento alla Proposizione 9.4 di [1].

[7] Ovvero un fibrato di rango 1.

Capitolo 4

Fibrati Hermitiani

4.1 Operatore di Curvatura di una Connessione

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n e $E \to M$ un fibrato vettoriale di rango k su M. Introducendo l'insieme $\Omega^p(E)$ delle sezioni del fibrato $\Lambda^p M \otimes E$ è possibile riformulare la Definizione 1.1.3 nel seguente modo.

Definizione 4.1.1 (Connessione)**.** *Una **connessione** ∇ su E è un operatore $\mathbb{C}$-lineare $\nabla : \Gamma(E) \to \Omega^1(E)$ che soddisfa la regola di Leibniz:*

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma.$$

Questa definizione può essere estesa anche per le p-forme a valori in E, ottenendo $\nabla : \Omega^p(E) \to \Omega^{p+1}(E)$ ponendo:

$$\nabla(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^p \omega \wedge \nabla\sigma \tag{4.1}$$

in cui, se $\{e_i\}$ è una base locale di TM e $\{e_i^*\}$ la sua duale di $\Lambda^1 M$, il prodotto $\omega \wedge \nabla\sigma$ è da interpretare come $\omega \wedge \nabla\sigma = \sum_{i=1}^n \omega \wedge e_i^* \otimes \nabla_{e_i}\sigma$ [1].

Definizione 4.1.2 (Operatore di Curvatura)**.** *L'**operatore di curvatura** della connessione è la 2-forma a valori in* $\mathrm{End}(E)$ R^∇ *definita da:*

$$R^\nabla(\sigma) = \nabla(\nabla\sigma), \quad \forall \sigma \in \Gamma(E).$$

[1] Con $\nabla_{e_i}\sigma$ si intende $\nabla_{e_i}\sigma = (\nabla\sigma)(e_i)$, in cui data una generica 1-forma a valori in E $\tilde{\omega} \otimes \tilde{\sigma}$, si definisce $(\tilde{\omega} \otimes \tilde{\sigma})(e_i) \coloneqq \tilde{\omega}(e_i)\tilde{\sigma}$.

Osservazione 4.1.3.

- R^∇ definisce una sezione di $\Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(E)$, infatti: dati $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, R^∇ associa a (X, Y) l'endomorfismo $R^\nabla_{X,Y} : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ definito da

$$R^\nabla_{X,Y}(\sigma) = (\nabla(\nabla\sigma))(X, Y), \quad \forall \sigma \in \Gamma(E).$$

- R^∇ ha carattere tensoriale, infatti: usando la regola di Leibniz

$$\nabla^2(f\sigma) = \nabla(df \otimes \sigma + f\nabla\sigma) = d^2 f \otimes \sigma - df \wedge \nabla\sigma + df \wedge \nabla\sigma + f\nabla^2\sigma = f\nabla^2\sigma.$$

Siano ora $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ delle sezioni locali di E che formano una base su ogni fibra su un aperto U. Posso quindi descrivere ∇ e R^∇ in termini di questa base, ottenendo le seguenti definizioni.

Definizione 4.1.4 (Forme di Connessione Locali)**.** *Definisco le* ***forme di connessione locali*** $\omega_{ij} \in \Omega^1 U$ *(relative alla base* $\{\sigma_i\}$*) come le* 1*-forme su* M *definite dalla relazione:*

$$\nabla\sigma_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} \otimes \sigma_j.$$

Definizione 4.1.5 (Forme di Curvatura Locali)**.** *Definisco le* ***2-forme di curvatura locali*** $R^\nabla_{ij} \in \Omega^2 U$ *(relative alla base* $\{\sigma_i\}$*) come le* 2*-forme su* M *definite dalla relazione:*

$$R^\nabla(\sigma_i) = \sum_{j=1}^{k} R^\nabla_{ij} \otimes \sigma_j,$$

Osservazione 4.1.6. È possibile esprimere le 2-forme di curvatura locali in termini delle 1-forme di connessione locali infatti: usando la notazione degli indici ripetuti

$$R^\nabla_{ij} \otimes \sigma_j = R^\nabla(\sigma_i) = \nabla(\omega_{ij} \otimes \sigma_j) = (d\omega_{ij}) \otimes \sigma_j - \omega_{il} \wedge \omega_{lj} \otimes \sigma_j,$$

da cui ottengo

$$R^\nabla_{ij} = d\omega_{ij} - \omega_{il} \wedge \omega_{lj}. \tag{4.2}$$

4.2 Strutture Hermitiane

Definizione 4.2.1 (Struttura Hermitiana)**.** *Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale complesso di rango k sulla varietà differenziabile M. Una* ***struttura Hermitiana*** *H su E è un campo liscio di prodotti Hermitiani definiti sulle fibre di E, ovvero per ogni $x \in M$, l'applicazione $H : E_x \times E_x \to \mathbb{C}$ soddisfa:*

- *$H(u, v)$ è $\mathbb{C}$-lineare nel primo argomento;*
- *$H(u, v) = \overline{H(v, u)}$, $\forall u, v \in E_x$;*
- *$H(u, u) > 0$, $\forall u \in E_x \setminus \{0\}$;*
- *l'applicazione $H(\sigma, \tau) : M \to \mathbb{C}$ è liscia $\forall \sigma, \tau \in \Gamma(E)$.*

Un fibrato vettoriale complesso dotato di una struttura Hermitiana è detto ***fibrato vettoriale Hermitiano****.*

Osservazione 4.2.2.

- Una struttura Hermitiana H è $\mathbb{C}$-antilineare nel secondo argomento, infatti:

$$H(u, \lambda v + \mu w) = \overline{\lambda H(v, u)} + \overline{\mu H(w, u)} = \bar{\lambda} H(u, v) + \bar{\mu} H(u, w).$$

- H, pensata come applicazione $H : E \to E^*$ definita da $\sigma \mapsto H(\sigma)$, in cui $H(\sigma)(\tau) \coloneqq H(\tau, \sigma)$, è un isomorfismo $\mathbb{C}$-antilineare. Infatti: presa una base locale per le sezioni di E, poichè $H(\sigma, \sigma) > 0$ per ogni sezione non nulla, è possibile applicare il metodo di ortogonalizzazione (rispetto ad H) di Gram-Schmidt ottenendo una nuova base locale $\{\sigma_i\}$. Allora $\{H(\sigma_i)\}$ è una base locale per le sezioni di E^*. Infatti, data φ sezione di E^*

$$\varphi = \sum_j \varphi(\sigma_j) H(\sigma_j)$$

essendo

$$\left(\sum_j \varphi(\sigma_j) H(\sigma_j) \right) (\sigma_i) = \varphi(\sigma_i).$$

- Ogni fibrato vettoriale complesso E ammette una struttura Hermitiana, infatti: considerato un ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ di E, su cui sono definite le trivializzazioni locali ψ_i, considerata la partizione dell'unità $\{f_i\}$ subordinata al ricoprimento $\mathcal{U}$, per ogni $x \in U_i$ posso definire la struttura Hermitiana su ogni U_i come

$$(H_i)_x(u, v) \coloneqq (H_{\mathbb{C}^k})(\psi_{i|_{E_x}}(u), \psi_{i|_{E_x}}(v))$$

e quindi globalmente $H \coloneqq \sum_i f_i H_i$.

4.3 La Connessione di Chern

Sia M una varietà complessa e siano $\pi^{1,0}$ e $\pi^{0,1}$ le proiezioni

$$\pi^{1,0} : \Lambda^1(E) \to \Lambda^{1,0}(E) \quad \text{e} \quad \pi^{0,1} : \Lambda^1(E) \to \Lambda^{0,1}(E).$$

Se ∇ è una connessione su E, posso definire le sue componenti $(1, 0)$ e $(0, 1)$ come $\nabla^{1,0} \coloneqq \pi^{1,0} \circ \nabla$ e $\nabla^{0,1} \coloneqq \pi^{0,1} \circ \nabla$. Inoltre, dalla regola di Leibniz (4.1) e dalla *(4)* della Proposizione 2.3.3, ottengo che posso estendere gli operatori in modo da ottenere

$$\nabla^{1,0} : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p+1,q} \quad \text{e} \quad \nabla^{0,1} : \Omega^{p,q} \to \Omega^{p,q+1}.$$

Tali operatori soddisfano le seguenti regole di Leibniz:

$$\nabla^{1,0}(\omega \otimes \sigma) = \partial\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge \nabla^{1,0}\sigma$$

$$\nabla^{0,1}(\omega \otimes \sigma) = \bar{\partial}\omega \otimes \sigma + (-1)^{p+q}\omega \wedge \nabla^{0,1}\sigma.$$

In particolare $\nabla^{0,1}$ definisce una struttura pseudo-olomorfa su E per ogni connessione ∇.

Definizione 4.3.1 (Connessione Hermitiana)**.** *Una connessione ∇ su un fibrato Hermitiano (E, H) è detta H-**connessione**, oppure **connessione Hermitiana**, se H è ∇-parallela, nel senso che $(\nabla_X H)(\sigma, \tau) = 0$ $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ e $\forall \sigma, \tau \in \Gamma(E)$, in cui:*

$$(\nabla_X H)(\sigma, \tau) \coloneqq \partial_X(H(\sigma, \tau)) - H(\nabla_X\sigma, \tau) - H(\sigma, \nabla_X\tau).$$

Osservazione 4.3.2. Se E un fibrato vettoriale su cui è stata definita una connessione ∇, sul duale E^* è possibile indurre la connessione ∇^* definita da:

$$(\nabla^*_X \sigma^*)(\tau) \coloneqq \partial_X(\sigma^*(\tau)) - \sigma^*(\nabla_X \tau).$$

∇^* è effettivamente una connessione, infatti è $\mathbb{C}$-lineare e soddisfa la regola di Leibniz:

$$\begin{aligned}(\nabla^*_X(f\sigma^*))(\tau) &= \partial_X((f\sigma^*)(\tau)) - (f\sigma^*)(\nabla_X\tau) = \\ &= (\partial_X f)\sigma^*(\tau) + f(\partial_X(\sigma^*(\tau))) - f(\sigma^*(\nabla_X\tau)) = \\ &= df(X)\sigma^*(\tau) + f((\nabla^*_X\sigma^*)(\tau))\end{aligned}$$

ovvero $\nabla^*(f\sigma^*) = df \otimes \sigma^* + f\nabla^*\sigma^*$. Inoltre, se E è olomorfo con struttura olomorfa $\bar\partial$, su E^* è possibile definire la struttura olomorfa $\bar\partial^*$ ponendo per le sezioni di E^*:

$$(\bar\partial^*\sigma^*)(X,\sigma) \coloneqq \big(\bar\partial(\sigma^*(\sigma))\big)(X) - \sigma^*\big(\bar\partial\sigma(X)\big)$$

per ogni $\sigma^* \in \Gamma(E^*)$, $\sigma \in \Gamma(E)$, $X \in \mathcal{X}(M)$. In questo modo ottengo che per ogni $Z \in T^{0,1}M$, per ogni sezione olomorfa σ di E e per ogni σ^* sezione di E^*, se $\nabla^{0,1} = \bar\partial$ allora $(\nabla^*)^{0,1} = \bar\partial^*$, infatti

$$\begin{aligned}\big((\nabla^*)^{0,1}\sigma^*\big)(Z,\sigma) &= \big(\nabla^*\sigma^*\big)(Z,\sigma) = \\ &= (\partial+\bar\partial)(\sigma^*(\sigma))(Z) - \sigma^*((\nabla^{1,0}+\nabla^{0,1})(\sigma)(Z)) = \\ &= \bar\partial(\sigma^*(\sigma))(Z) - \sigma^*(\bar\partial\sigma(Z)) = \\ &= (\bar\partial^*\sigma^*)(Z,\sigma).\end{aligned}$$

Teorema 4.3.3. *Su ogni fibrato olomorfo $(E,\bar\partial)$ e per ogni struttura Hermitiana H esiste un'unica H-connessione ∇ tale che $\nabla^{0,1} = \bar\partial$. Tale connessione è detta* ***connessione di Chern****.*

Dimostrazione. Dall'Osservazione 4.3.2, sul fibrato duale E^* è possibile introdurre ∇^*. Pensando la struttura Hermitiana come $H : E \to E^*$, ottengo che:

$$\begin{aligned}(\nabla_X H)(\sigma)(\tau) &= (\nabla_X H)(\tau,\sigma) = \\ &= \partial_X(H(\tau,\sigma)) - H(\nabla_X\tau,\sigma) - H(\tau,\nabla_X\sigma) = \\ &= \Big(\partial_X(H(\sigma)(\tau)) - H(\sigma)(\nabla_X\tau)\Big) - H(\nabla_X\sigma)(\tau) = \\ &= \Big((\nabla^*_X(H(\sigma)) - H(\nabla_X\sigma)\Big)(\tau).\end{aligned}$$

Se quindi ∇ è una H-connessione su E, per ogni $X \in \mathcal{X}(M)$ e per ogni $\sigma \in \Gamma(E)$, ottengo

$$\nabla^*_X(H(\sigma)) = (\nabla_X H)(\sigma) + H(\nabla_X \sigma) = H(\nabla_X \sigma).$$

Inoltre $\nabla^*_Z(H(\sigma)) = H(\nabla_{\bar{Z}}\sigma)$ per ogni $Z \in TM^{\mathbb{C}}$, infatti:

$$\begin{aligned}\nabla^*_{X+iY}(H(\sigma)) &= \nabla^*_X(H(\sigma)) + i\nabla^*_Y(H(\sigma)) = \\ &= H(\nabla_X\sigma) + iH(\nabla_Y\sigma) = H(\nabla_X\sigma - i\nabla_Y\sigma) = \\ &= H(\nabla_{X-iY}\sigma).\end{aligned}$$

Inoltre, supponendo che $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$, se σ è una sezione olomorfa di E, allora

$$\nabla\sigma = (\nabla^{1,0} + \nabla^{0,1})(\sigma) = \nabla^{1,0}\sigma + \bar{\partial}\sigma = \nabla^{1,0}\sigma$$

ovvero $\nabla\sigma \in \Omega^{1,0}M$. Perciò se $Z \in T^{1,0}M$ e $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$ ottengo[2]

$$\begin{aligned}H(\nabla^{1,0}_Z\sigma) &= H(\nabla_Z\sigma) = \nabla^*_{\bar{Z}}(H(\sigma)) = \\ &= \Big(\big((\nabla^*)^{1,0} + (\nabla^*)^{0,1}\big)(H(\sigma))\Big)(\bar{Z}) = \\ &= (\nabla^*)^{0,1}_{\bar{Z}}(H(\sigma))\end{aligned}$$

ovvero $\nabla^{1,0}\sigma = H^{-1}\big((\nabla^*)^{0,1}(H(\sigma))\big)$. Infine dall'Osservazione 4.3.2 ottengo $\nabla^{1,0} = H^{-1} \circ \bar{\partial}^* \circ H$. Perciò l'unica connessione di Chern sarà quella definita da $\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1} = H^{-1} \circ \bar{\partial}^* \circ H + \bar{\partial}$. $\square$

Corollario 4.3.4. *Sia E un fibrato complesso. Allora E è olomorfo se e solo se esiste una connessione ∇ per cui $(R^{\nabla})^{0,2} = 0$.*

Dimostrazione. Notiamo che per ogni sezione σ di E, data una connessione ∇, si ha

$$\begin{aligned}R^{\nabla}(\sigma) &= \nabla^2\sigma = (\nabla^{1,0} + \nabla^{0,1})^2(\sigma) = \\ &= (\nabla^{1,0})^2(\sigma) + (\nabla^{1,0}\nabla^{0,1} + \nabla^{0,1}\nabla^{1,0})(\sigma) + (\nabla^{0,1})^2(\sigma)\end{aligned} \tag{4.3}$$

quindi $(R^{\nabla})^{0,2} = (\nabla^{0,1})^2$.

[2]Nella terza uguaglianza viene usato il fatto che, essendo $(\nabla^*)^{1,0}\sigma^*$ una $(1,0)$-forma, $(\nabla^*)^{1,0}_{\bar{Z}}\sigma^* = 0$ per ogni $\bar{Z} \in T^{0,1}M$.

$\Leftarrow$: se $(R^\nabla)^{0,2} = 0$ per qualche connessione ∇, la struttura pseudo-olomorfa definita da $\nabla^{0,1}$ è in realtà una struttura olomorfa quindi, per il Teorema 3.3.5, E è olomorfo;

$\Rightarrow$: scelta una qualsiasi struttura Hermitiana su E, per il teorema precedente, esisterà la connessione di Chern ∇ su E che soddisfa $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$ e quindi $0 = \bar{\partial}^2 = (\nabla^{0,1})^2 = (R^\nabla)^{0,2}$.

$\square$

Osservazione 4.3.5. Sia la componente $(0,2)$, che quella $(2,0)$ di R^∇, in cui ∇ è la connessione di Chern associata ad un fibrato olomorfo Hermitiano E, sono identicamente nulle. Infatti dall'equazione (4.3)

$$\begin{aligned}(R^\nabla)^{2,0} &= \nabla^{1,0}\nabla^{1,0}(\sigma) = H^{-1} \circ \bar{\partial}^* \circ H \circ H^{-1} \circ \bar{\partial}^* \circ H(\sigma) = \\ &= H^{-1} \circ (\bar{\partial}^*)^2 \circ H(\sigma) = 0.\end{aligned}$$

Capitolo 5

Varietà di Kähler

5.1 Metriche Hermitiane

Definizione 5.1.1 (Metrica Hermitiana). *Una **metrica Hermitiana** su una varietà quasi complessa (M, J) è una metrica Riemanniana h, tale che*

$$h(JX, JY) = h(X, Y), \quad \forall X, Y \in TM.$$

*La 2-forma $\Omega(X, Y) \coloneqq h(JX, Y)$ è detta **forma fondamentale** della metrica Hermitiana h.*

Osservazione 5.1.2.

- Ω è effettivamente una 2-forma, infatti:

$$\Omega(Y, X) = h(JY, -J^2X) = -h(Y, JX) = -h(JX, Y) = -\Omega(X, Y).$$

- Estesa per $\mathbb{C}$-linearità a $TM^{\mathbb{C}}$, la metrica Hermitiana soddisfa le seguenti proprietà:

  i) $h(\overline{Z}, \overline{W}) = \overline{h(Z, W)}, \quad \forall Z, W \in TM^{\mathbb{C}}$;

  ii) $h(Z, \overline{Z}) > 0, \quad \forall Z \in TM^{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$;

  iii) $h(Z, W) = 0, \quad \forall Z, W \in T^{1,0}M$ oppure $\forall Z, W \in T^{0,1}M$.

  Infatti:

i) se $Z = Z_1 + iZ_2$ e $W = W_1 + iW_2$ allora

$$h(\overline{Z}, \overline{W}) = h(Z_1, W_1) - h(Z_2, W_2) - i(h(Z_1, W_2) + h(Z_2, W_1)) = \\ = \overline{h(Z, W)};$$

ii) $h(Z_1 + iZ_2, Z_1 - iZ_2) = h(Z_1, Z_1) + h(Z_2, Z_2) > 0$;

iii) $h(X + iJX, Y + iJY) = h(X, Y) + ih(X, JY) + ih(JX, Y) - h(JX, JY) = 0$.

- Viceversa, se h è un tensore simmetrico su $TM^{\mathbb{C}}$ che soddisfa le proprietà precedenti, allora, ristretta a TM, definisce una metrica Hermitiana, infatti:
  - per ogni $X \in TM \setminus \{0\}$, $h(X, X) = h(X, \bar{X}) > 0$;
  - $0 = h(X + iJX, (JY) + iJ(JY)) = h(X, JY) + ih(JX, JY) - ih(X, Y) - h(JX, Y)$ quindi, in particolare, $h(X, Y) = h(JX, JY)$ per ogni $X, Y \in TM$.
- Se h è una metrica Hermitiana su M allora

  $$H(X, Y) \coloneqq h(X, Y) - ih(JX, Y) = (h - i\Omega)(X, Y)$$

  definisce una struttura Hermitiana sul fibrato vettoriale complesso (TM, J). Viceversa se H è una struttura Hermitiana sul fibrato vettoriale complesso TM, allora $h \coloneqq \mathfrak{Re}(H)$ definisce una metrica Hermitiana su M.
- Ogni varietà Riemanniana quasi complessa ammette una metrica Hermitiana $h(X, Y) \coloneqq g(X, Y) + g(JX, JY)$.

Lemma 5.1.3. *Sia (M^{2m}, h, J) una varietà Hermitiana complessa e siano z_α le coordinate olomorfe locali. Allora*

$$\Omega = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} h_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta$$

in cui $h_{\alpha\bar{\beta}} \coloneqq h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right)$.

Dimostrazione. Dalla *(iii)* dell'Osservazione 5.1.2 si ottiene che

$$\Omega\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right) = h\left(J\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right) \overset{[1]}{=} h\left(i\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right) = ih_{\alpha\alpha} = 0.$$

[1] $J\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = \frac{1}{2}\left(J\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - iJ\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = i\frac{\partial}{\partial z_\alpha}$.

Analogamente $\Omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = 0$ e $\Omega\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = ih_{\alpha\bar{\beta}}$. Infine, poichè $TM^{\mathbb{C}} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$, con basi locali $\left\{\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right\}$ e $\left\{\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right\}$ e rispettive duali $\left\{dz_\alpha\right\}$ e $\left\{d\bar{z}_\beta\right\}$, si ottiene la tesi. □

5.2 Metriche di Kähler

Se la forma fondamentale Ω di una varietà Hermitiana complessa è chiusa, per il $i\partial\bar{\partial}$-lemma, localmente esiste una applicazione reale u tale che $\Omega = i\partial\bar{\partial}u$. Perciò in coordinate locali, per l'Osservazione 3.1.3, si ottiene

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}.$$

Definizione 5.2.1 (Metrica di Kähler)**.** *Una metrica Hermitiana h su una varietà quasi complessa (M, J) è detta **metrica di Kähler** se J è una struttura complessa e se la forma fondamentale Ω è chiusa, ovvero:*

$$h \text{ è di Kähler} \iff \begin{cases} N^J = 0 \\ d\Omega = 0. \end{cases}$$

*Un'applicazione reale locale u, tale che $\Omega = i\partial\bar{\partial}u$, è detta **potenziale locale di Kähler** della metrica h.*

Lemma 5.2.2. *Sia h una metrica Hermitiana su una varietà quasi complessa (M, J) e ∇ la connessione di Levi-Civita di (M, h). Allora J è integrabile*[2] *se e solo se*

$$(\nabla_{JX} J)Y = J(\nabla_X J)Y, \quad \forall X, Y \in TM \tag{5.1}$$

Dimostrazione. Siano $X, Y \in TM$ e li estendo a campi paralleli su M che indico ancora con X e Y. Poichè ∇ è di Levi-Civita, allora $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ e quindi $[X, Y] = 0$. Inoltre, poichè $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X J)$, ho che

$$[X, JY] = \nabla_X(JY) - \nabla_{JY} X = \nabla_X(JY).$$

Quindi

$$\begin{aligned} N^J(X, Y) &= [X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY] = \\ &= J\left(\nabla_X J\right)Y - J\left(\nabla_Y J\right)X - \left(\nabla_{JX} J\right)Y + \left(\nabla_{JY} J\right)X \\ &= \left(J\left(\nabla_X J\right)Y - \left(\nabla_{JX} J\right)Y\right) - \left(J\left(\nabla_Y J\right)X - \left(\nabla_{JY} J\right)X\right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

[2]Nel senso che il suo tensore di Nijenhuis N^J è identicamente nullo.

$\Leftarrow$: se vale la (5.1), per la (5.2), ottengo $N^J(X,Y) = 0$;

$\Rightarrow$: definisco $A(X,Y,Z) = h\left(J\left(\nabla_X J\right)Y - \left(\nabla_{JX} J\right)Y, Z\right)$. Supponendo $N^J = 0$, allora

$$\left(J\left(\nabla_X J\right)Y - \left(\nabla_{JX} J\right)Y\right) = \left(J\left(\nabla_Y J\right)X - \left(\nabla_{JY} J\right)X\right).$$

Quindi A è simmetrico nei primi due argomenti. Inoltre J e $\nabla_X J$ anti-commutano[3] e h è anti-simmetrico rispetto ad essi[4], perciò A è anti-simmetrico anche negli ultimi due argomenti. Allora permutando ciclicamente gli argomenti ottengo

$$A(X,Y,Z) = -A(Y,Z,X) = A(Z,X,Y) = -A(X,Y,Z)$$

che implica la (5.1).

$\square$

Osservazione 5.2.3. Se ∇ è di Levi-Civita, allora

$$d\omega(X_0,\ldots,X_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\nabla_{X_i}\omega)(X_0,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,X_p)$$

[3] $J(\nabla_X J)Y = J\nabla_X(JY) - J^2\nabla_X Y = -(\nabla_X J)(JY)$.

[4] essendo ∇ di Levi-Civita abbiamo $\nabla h = 0$, ovvero

$$\partial_X h(Y,Z) = \nabla_X(h(Y,Z)) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z), \quad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$$

Perciò, sfruttando $h(JY,Z) = -h(Y,JZ)$, ottengo:

$$\begin{aligned} h(\nabla_X JY, Z) + h(JY, \nabla_X Z) &= \nabla_X(h(JY,Z)) = \\ &= -\nabla_X(h(Y,JZ)) = -(h(\nabla_X Y, JZ) + h(Y, \nabla_X JZ)) \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} h((\nabla_X J)Y, Z) + {} & h(J(\nabla_X Y), Z) + h(JY, \nabla_X Z) = \\ &= -h(Y, (\nabla_X J)Z) - h(\nabla_X Y, JZ) - h(Y, J(\nabla_X Z)) \end{aligned}$$

in cui i secondi e terzi addendi si semplificano rispettivamente e quindi:

$$h((\nabla_X J)Y, Z) = -h(Y, (\nabla_X J)Z).$$

per ogni $X_0, \dots, X_p \in \mathcal{X}(M)$ e $\omega \in \Omega^p M$. Infatti: dalla definizione di d si ricava che

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_p) = & \sum_{i=0}^{p} (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_p)) + \\ & + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega\left([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_p\right). \end{aligned}$$

Essendo

$$\begin{aligned} (\nabla_{X_i}\omega)(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_p) = & X_i(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_p)) + \\ & - \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j \omega(\nabla_{X_i} X_j, X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_p) + \\ & + \sum_{j=i+1}^{k} (-1)^j \omega(\nabla_{X_i} X_j, X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_p) \end{aligned}$$

e $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ ottengo la tesi.

Teorema 5.2.4. *Una metrica Hermitiana h su una varietà quasi complessa è di Kähler se e solo se J è parallelo rispetto alla connessione di Levi-Civita.*

Dimostrazione. Notiamo che poichè $(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J(\nabla_X Y)$, ed essendo ∇ di Levi-Civita, allora:

$$\begin{aligned} \nabla\Omega(X, Y, Z) &= \partial_X(h(JY, Z)) - h(\nabla_X(JY) - (\nabla_X J)Y, Z) - h(JY, \nabla_X Z) = \\ &= (\nabla h)(X, JY, Z) + h((\nabla_X J)Y, Z) = \\ &= h((\nabla_X J)Y, Z). \end{aligned}$$

- $\Leftarrow$: dalla (5.2), se J è parallelo, allora $N^J = 0$ ed inoltre, per l'osservazione appena fatta, $\nabla\Omega = 0$. Quindi dall'Osservazione 5.2.3 si ottiene che anche $d\Omega = 0$.

- $\Rightarrow$: definisco $B(X, Y, Z) := h\left(\left(\nabla_X J\right) Y, Z\right)$. Poichè J e $\nabla_X J$ anti-commutano, allora $B(X, Y, JZ) = B(X, JY, Z)$, infatti:

  $$B(X, Y, JZ) = -h\left(J\left(\nabla_X J\right) Y, Z\right) = h\left(\left(\nabla_X J\right) JY, Z\right) = B(X, JY, Z).$$

  Inoltre, poichè $N^J = 0$, vale la (5.1) e quindi

  $$B(JX, Y, Z) + B(X, Y, JZ) = 0$$

da cui anche
$$B(JX, Y, Z) + B(X, JY, Z) = 0.$$
Sfruttando l'Osservazione 5.2.3 ottengo

$$\begin{aligned}
0 = d\Omega(X, Y, JZ) = \\
&= (\nabla_X \Omega)(Y, JZ) + (\nabla_Y \Omega)(JZ, X) + (\nabla_{JZ} \Omega)(X, Y) = \\
&= B(X, Y, JZ) + B(Y, JZ, X) + B(JZ, X, Y)
\end{aligned}$$

e analogamente

$$B(X, JY, Z) + B(JY, Z, X) + B(Z, X, JY) = 0.$$

Allora

$$\begin{aligned}
0 = & \big(B(X, Y, JZ) + B(Y, JZ, X) + B(JZ, X, Y)\big) + \\
&+ \big(B(X, JY, Z) + B(JY, Z, X) + B(Z, X, JY)\big) = \\
&= 2B(X, Y, JZ).
\end{aligned}$$

Poichè ciò vale per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, allora, in particolare, $(\nabla_X J)Y = 0$ e quindi J è ∇-parallelo.

□

5.3 Confronto tra la Connessione di Levi-Civita e di Chern

Lemma 5.3.1. *Per ogni sezione Y del fibrato vettoriale complesso (TM, J), $\bar{\partial}Y$, visto come $(0,1)$-forma a valori su TM, è uguale a*

$$\bar{\partial}^{\nabla} Y(X) = \frac{1}{2}\left(\nabla_X Y - J\nabla_{JX} Y - J(\nabla_Y J)X\right) \tag{5.3}$$

in cui ∇ è la connessione di Levi-Civita di una qualsiasi metrica Hermitiana h su M.

Dimostrazione. Notiamo che $\left(\bar{\partial} f\right)(X) = \frac{1}{2}\partial_{X+iJX} f$. Infatti, sfruttando $2X = (X + iJX) + (X - iJX)$, si ottiene

$$2\left(\bar{\partial} f\right)(X) = \left(\bar{\partial} f\right)(X + iJX) = df(X + iJX) - \partial f(X + iJX) = df(X + iJX).$$

Allora, sfruttando $(a+ib)X = a + bJX$ per ogni $X \in TM$, si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{\partial}^{\nabla}(fY)(X) =& \frac{1}{2} f\left(\nabla_X Y - J\nabla_{JX}Y - J(\nabla_Y J)X\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left((\partial_X f)Y + (\partial_{JX} f)JY\right) = \\ &= f\bar{\partial}^{\nabla}Y(X) + \bar{\partial}f(X)Y\end{aligned}$$

ovvero $\bar{\partial}^{\nabla}$ soddisfa la regola di Leibniz. Inoltre, per l'Osservazione 3.3.2 un campo vettoriale è una sezione olomorfa del fibrato olomorfo TM se e solo se è olomorfo reale. Per il Lemma 3.2.7, un campo vettoriale è olomorfo reale se e solo se $\mathcal{L}_X J = 0$. Quindi per ogni $X \in \mathcal{X}(M)$

$$\begin{aligned}0 &= (\mathcal{L}_Y J)\, X = \mathcal{L}_Y(JX) - J\mathcal{L}_Y X = [Y, JX] - J[Y, X] = \\ &= \nabla_Y JX - \nabla_{JX} Y - J\nabla_Y X + J\nabla_X Y = \\ &= (\nabla_Y J)\, X - \nabla_{JX} Y + J\nabla_X Y = \\ &= J\left(\nabla_X Y + J\nabla_{JX} Y - J\left(\nabla_Y J\right) X\right) = \\ &= 2J\left(\bar{\partial}^{\nabla} Y\right)(X).\end{aligned}$$

Perciò $\bar{\partial}^{\nabla}$ è un operatore che soddisfa la regola di Leibniz e si annulla su ogni sezione olomorfa di TM, quindi $\bar{\partial}^{\nabla} = \bar{\partial}$. Infatti, essendo TM olomorfo, esisterà per ogni punto di M una base locale $\{\sigma_j\}$ per le sezioni olomorfe di TM, da cui, se una generica sezione Y si esprime localmente come $Y = \sum_j Y_j \sigma_j$, allora

$$\bar{\partial}^{\nabla} Y = \sum_j \left(f\bar{\partial}^{\nabla}\sigma_j + \bar{\partial}Y_j \otimes \sigma_j\right) = \sum_j \left(\bar{\partial}Y_j \otimes \sigma_j\right) = \bar{\partial}Y.$$

□

Proposizione 5.3.2. *Su una varietà Hermitiana (M, h, J), la connessione di Chern $\bar{\nabla}$ coincide con la connessione di Levi-Civita ∇ se e solo se (M, h, J) è di Kähler.*

Dimostrazione. Sia $H \coloneqq h - i\Omega$ la struttura Hermitiana TM.Tenendo conto della struttura complessa su TM e della $\mathbb{C}$-linearità di $\bar{\nabla}$ si ottiene

$$(\bar{\nabla}J)(X, Y) = \bar{\nabla}_X(JY) - J\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X(iY) - i\bar{\nabla}_X Y = 0$$

quindi $\bar{\nabla}J = 0$.

$\Rightarrow$: se $\nabla = \bar{\nabla}$ allora J è anche ∇-parallelo e quindi, per il Teorema 5.2.4, h è di Kähler.

$\Leftarrow$: se h è di Kähler, allora $\nabla J = 0$ e $\nabla_X(JY) = J(\nabla_X Y)$. Quindi, poichè J proviene da una struttura olomorfa, ∇ è una connessione $\mathbb{C}$-lineare su TM, inoltre essendo $\nabla h = 0$

$$\nabla H(X,Y,Z) = \nabla h(X,Y,Z) - i\nabla h(X,JY,Z) - ih((\nabla_X J)Y,Z) = 0.$$

ovvero ∇ è una H-connessione. Infine essendo $X = \frac{1}{2}((X+iJX) + (X-iJX))$, ed essendo $\nabla^{0,1}_Z = 0$ per ogni $Z \in T^{1,0}M$ e $\nabla^{1,0}_W = 0$ per ogni $W \in T^{0,1}M$, allora

$$\nabla^{0,1}_X = \frac{1}{2}\left(\nabla^{0,1}_{X+iJX}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla_{X+iJX} - \nabla^{1,0}_{X+iJX}\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla_X + J\nabla_{JX}\right).$$

Poichè J è ∇-parallelo, dalla (5.3) si ottiene $\nabla^{0,1} = \bar{\partial}$ e quindi $\nabla = \bar{\nabla}$.

$\square$

5.4 Tensore di Curvatura Kähleriano

Sia (M^{2m}, h, J) una varietà di Kähler dotata della connessione di Levi-Civita ∇. Su M è possibile definire il $(3,1)$-tensore di curvatura di ∇

$$R^{\nabla}(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z, \quad \forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$$

il $(4,0)$-tensore di curvatura Riemanniana di ∇

$$R(X,Y,Z,W) = h(R^{\nabla}(X,Y)Z,W), \quad \forall X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M)$$

e il $(2,0)$-tensore di Ricci

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = \mathrm{Tr}\big(V \mapsto R^{\nabla}(V,X)Y\big) = \sum_{i=1}^{2m} R(e_i,X,Y,e_i) \quad \forall X,Y \in \mathcal{X}(M)$$

in cui $\{e_i\}$ è una base ortonormale locale di TM.

Dal Teorema 5.2.4, ho che $\nabla_X(JZ) = J\nabla_X Z$ e quindi

$$R^{\nabla}(X,Y)JZ = JR^{\nabla}(X,Y)Z$$

per ogni $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Sfruttando le identità del tensore di curvatura Riemanniano, ottengo anche

$$R(X, Y, JZ, JW) = R(X, Y, Z, W) = R(JX, JY, Z, W).$$

Data $\{e_i\}$ è una base ortonormale locale di TM, allora

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(JX, JY) &= \sum_{i=1}^{2m} R(e_i, JX, JY, e_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{2m} R(Je_i, J^2X, J^2Y, Je_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{2m} R(Je_i, X, Y, Je_i) = \\
&= \mathrm{Ric}(X, Y).
\end{aligned}$$

Infatti $\{Je_i\}$ è ancora una base ortonormale locale di TM.

Quindi $\mathrm{Ric}(JX, Y) = -\mathrm{Ric}(X, JY) = -\mathrm{Ric}(JY, X)$ e ciò giustifica la seguente definizione.

Definizione 5.4.1 (Forma di Ricci)**.** *Definisco la* ***forma di Ricci*** *di una varietà di Kähler come la 2-forma definita da*

$$\rho(X, Y) \coloneqq \mathrm{Ric}(JX, Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

Proposizione 5.4.2. *1)* $\mathrm{Ric}(X, Y) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\big(R^\nabla(X, JY) \circ J\big)$*;*

2) la forma di Ricci è chiusa, ovvero $d\rho = 0$*.*

Dimostrazione.

1) Se $\{e_i\}$ è una base locale di TM, allora, sfruttando la *prima identità di Bianchi*[5] e le simmetrie di R, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(X, Y) &= \sum_{i=1}^{2m} R(e_i, X, Y, e_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{2m} R(e_i, X, JY, Je_i) = \\
&= \sum_{i=1}^{2m} \left(-R(X, JY, e_i, Je_i) - R(JY, e_i, X, Je_i)\right) =
\end{aligned}$$

[5] $R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0$.

$$= \sum_{i=1}^{2m} \left(R(X, JY, Je_i, e_i,) + R(Y, Je_i, X, Je_i) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{2m} h(R^\nabla(X, JY)Je_i, e_i) - \mathrm{Ric}(X, Y)$$

da cui la tesi.

2) dalla (1), $2\rho(X, Y) = \mathrm{Tr}\big(R^\nabla(X, Y) \circ J\big)$. Sfruttando che la traccia commuta con le derivate covarianti e il fatto che J è ∇-parallelo, allora

$$2d\rho(X, Y, Z) = 2\Big[(\nabla_X \rho)(Y, Z) - (\nabla_Y \rho)(X, Z) + (\nabla_Z \rho)(X, Y)\Big] =$$

$$= \mathrm{Tr}\Bigg(\Big[(\nabla_X R^\nabla)(Y, Z) + (\nabla_Y R^\nabla)(Z, X) + (\nabla_Z R^\nabla)(X, Y)\Big] \circ J\Bigg) = 0$$

in cui nell'ultima uguaglianza è stata usata la *seconda identità di Bianchi*.[6]

□

[6] $(\nabla_X R^\nabla)(Y, Z) + (\nabla_Y R^\nabla)(Z, X) + (\nabla_Z R^\nabla)(X, Y) = 0.$

Capitolo 6

Operatore di Hodge e Coomologia di De Rham

6.1 L'Operatore di Hodge per Varietà Riemanniane

Sia (M^n, g) una varietà Riemanniana orientata, dotata della connessione di Levi-Civita, con forma di volume dv. Sia ora $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormale locale, parallela in un punto p di M. Tramite l'isomorfismo tra TM e T^*M posso estendere g alle 1-forme ponendo

$$g(\omega, \eta) = g(\omega^\sharp, \eta^\sharp).$$

Quindi se localmente $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i e_i^\flat$ e $\eta = \sum_{i=1}^m \eta_i e_i^\flat$ allora

$$g(\omega, \eta) = \sum_{i=1}^m \omega_i \eta_i.$$

È possibile estendere ulteriormente g alle k-forme ponendo, se $\omega_1, \ldots, \omega_n, \eta_1, \ldots$ $\ldots, \eta_n \in \Lambda^1 M$,

$$g(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_n, \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_n) = \det((g(\omega_i, \eta_j))_{ij}).$$

Tramite queste definizioni $\{e_{i_1}^\flat \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^\flat \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m\}$ forma una base ortonormale locale rispetto a g per $\Lambda^k M$. g_x definisce quindi un prodotto scalare su ogni $\Lambda^1_x M$ per ogni $x \in M$. Per definire un prodotto scalare su $\Omega^k M$, supponendo che M sia compatta, possiamo porre

$$(\omega, \eta) \coloneqq \int_M g(\omega, \eta) dv, \quad \forall \omega, \eta \in \Omega^k M.$$

Dalle definizioni precedenti ricavo che il prodotto esterno e interno di forme differenziali sono uno l'*operatore aggiunto* dell'altro, nel senso che:

$$g(X \lrcorner\, \omega, \tau) = g(\omega, X^\flat \wedge \tau), \quad \forall X \in TM, \omega \in \Lambda^k M, \tau \in \Lambda^{k-1} M. \tag{6.1}$$

Posso quindi definire l'operatore di Hodge come $* : \Omega^k M \to \Omega^{n-k} M$ tale che

$$\omega \wedge *\tau = g(\omega, \tau) dv, \quad \forall \omega, \tau \in \Omega^k M$$

o equivalentemente

$$(\omega, \tau) = \int_M \omega \wedge *\tau.$$

Dall'Osservazione 5.2.3, identificando i campi vettoriali e le 1-forme, ricavo che l'operatore di derivata esterna $d : \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M$ localmente è dato da

$$d = \sum_{i=1}^n e_i \wedge \nabla_{e_i}.$$

Posso definire quindi l'operatore $\delta : \Omega^{k+1} \to \Omega^k M$ come l'*aggiunto formale* di d, ovvero come l'operatore tale che:

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta), \quad \forall \alpha \in \Omega^k M, \beta \in \Omega^{k+1} M.$$

Allora, dalla (6.1), si ricava che

$$\delta = -\sum_{i=1}^n e_i \lrcorner\, \nabla_{e_i}$$

inoltre si ha anche

$$\delta = -(-1)^{nk} * d * .$$

Posso quindi definire l'operatore *Laplaciano* come $\Delta : \Omega^k M \to \Omega^k M$ tale che $\Delta \coloneqq d\delta + \delta d$. Il Laplaciano è un operatore *autoaggiunto*, nel senso che

$$(\Delta\omega, \tau) = (\omega, \Delta\tau), \quad \forall \omega, \tau \in \Omega^k M.$$

6.2 Il Laplaciano nelle Varietà di Kähler

Sia (M^{2m}, h, J) una varietà quasi Hermitiana con forma fondamentale Ω e sia $\{e_1, \ldots, e_{2m}\}$ una base ortonormale locale di di TM. Identificato TM con il suo duale T^*M, posso esprimere localmente la forma fondamentale come

$$\Omega = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m} e_i \wedge Je_i.$$

Infatti, dalla definizione degli isomorfismi musicali,

$$\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m} e_j \wedge Je_j\right)(e_h, e_k) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m} \begin{vmatrix} e_j(e_h) & Je_j(e_h) \\ e_j(e_k) & Je_j(e_k) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m}[\delta_{jh}\Omega(e_j, e_k) - \delta_{jk}\Omega(e_j, e_h)] = \Omega(e_h, e_k).$$

Definisco quindi gli operatori $L : \Lambda^k M \to \Lambda^{k+2}M$ e $\Lambda : \Lambda^{k+2}M \to \Lambda^k M$ come

$$L(\omega) \coloneqq \Omega \wedge \omega = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m} e_i \wedge Je_i \wedge \omega$$

$$\Lambda(\omega) \coloneqq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m} Je_i \lrcorner\, e_i \lrcorner\, \omega$$

Dalla (6.1) ricavo che L e Λ sono uno l'operatore aggiunto dell'altro, nel senso che

$$h(L(\omega), \tau) = h(\omega, \Lambda(\tau)), \quad \forall \omega \in \Lambda^k M, \tau \in \Lambda^{k+2}M$$

L e Λ possono essere estesi per $\mathbb{C}$-linearità al fibrato esterno complessificato.

L'estensione alle k-forme fatta per una metrica Riemanniana, può essere ulteriormente estesa al fibrato esterno complessificato, richiedendo che puntualmente definisca un prodotto interno Hermitiano. Supponendo di indicare tale estensione con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e di estendere per $\mathbb{C}$-linearità h, allora

$$\langle \omega, \tau \rangle = h(\omega, \bar{\tau}).$$

infatti:

$$\begin{aligned}\overline{\langle\tau,\omega\rangle} &= \overline{h\left(\tau_1+i\tau_2,\overline{\omega_1+i\omega_2}\right)} =\\ &= \overline{h(\tau_1,\omega_1)+ih(\tau_2,\omega_1)-ih(\tau_1,\omega_2)+h(\tau_2,\omega_2)} =\\ &= h(\omega_1,\tau_1-i\tau_2)+ih(\omega_2,\tau_1-i\tau_2) = \langle\omega,\tau\rangle.\end{aligned}$$

Esteso per $\mathbb{C}$-linearità, l'operatore di Hodge soddisfa la proprietà

$$\omega\wedge *\overline{\tau} = \langle\omega,\tau\rangle dv. \tag{6.2}$$

In questo modo, il prodotto scalare di k-forme, diventa

$$(\omega,\tau) = \int_M \langle\omega,\tau\rangle dv = \int_M \omega\wedge *\overline{\tau}.$$

Lemma 6.2.1. *Valgono le seguenti affermazioni:*

1) l'operatore di Hodge associa a (p,q)-forme $(m-q,m-p)$-forme;

2) $[X\lrcorner,\Lambda]=0$;

3) $[X\lrcorner,L]=JX\wedge$.[1]

Dimostrazione.

1) indicati con $dz_J = dz_1\wedge\cdots\wedge dz_j$, $d\bar{z}_J = d\bar{z}_1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}_j$, $dx_J = dx_1\wedge\cdots\wedge dx_j$ e $dy_J = dy_1\wedge\cdots\wedge dy_j$, voglio dimostrare per induzione che

$$dz_M\wedge d\bar{z}_M = (-2i)^m dx_M\wedge dy_M.$$

$j=1$) $dz\wedge d\bar{z} = -idx\wedge dy + idy\wedge dx = -2idx\wedge dy$;

$j\Rightarrow j+1$)

$$\begin{aligned} z_{J+1}\wedge d\bar{z}_{J+1} &= (-1)^j dz_J\wedge d\bar{z}_J\wedge dz_{j+1}\wedge d\bar{z}_{j+1} =\\ &= (-1)^j(-2i)^j dx_J\wedge dy_J\wedge((-2i)dx_{j+1}\wedge dy_{j+1}) =\\ &= (-2i)^{j+1}dx_{J+1}\wedge dy_{J+1}\end{aligned}$$

[1]Se P e Q sono due operatori che agiscono sulle sezioni di uno stesso fibrato vettoriale, si definisce $[P,Q] \coloneqq P\circ Q - Q\circ P$.

Allora

$$\begin{aligned} dv &= \sqrt{|h|} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_m = \\ &= \sqrt{|h|}\left(\frac{i}{2}\right)^m dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_m \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_1 \wedge d\bar{z}_m \end{aligned}$$

Per semplicità dimostriamo l'enunciato per la (p,q)-forma $dz_P \wedge d\bar{z}_Q$. Indicati con P^c e Q^c gli indici complementari di P e Q, allora

$$(dz_P \wedge d\bar{z}_Q) \wedge \overline{(d\bar{z}_{P^c} \wedge dz_{Q^c})} = (dz_P \wedge d\bar{z}_Q) \wedge (dz_{P^c} \wedge d\bar{z}_{Q^c}) = \lambda dv$$

con $\lambda = (2i)^m(-1)^{(m-p)q}/\sqrt{|h|}$. Dalla (6.2) deduco che, a meno di una moltiplicazione per una funzione liscia,

$$*(dz_P \wedge d\bar{z}_Q) = dz_{Q^c} \wedge d\bar{z}_{P^c}$$

e quindi $*(dz_P \wedge d\bar{z}_Q)$ è una $(m-q, m-p)$-forma.

2) $[X\lrcorner, \Lambda] = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{2m} \omega(e_j, Je_j, X, \_) - \sum_{j=1}^{2m} \omega(X, e_j, Je_j, \_)\right) = 0.$

3) $[X\lrcorner, L]\omega = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m}\Big[(e_j \wedge Je_j \wedge \omega)(X, \_) - e_j \wedge Je_j \wedge (\omega(X, \_))\Big]$. Poichè $\lrcorner$ gode della proprietà

$$X \lrcorner (\omega \wedge \tau) = (X \lrcorner \omega) \wedge \tau + (-1)^p \omega \wedge (X \lrcorner \tau)$$

per ogni $\omega \in \Omega^p M$ e per ogni $\tau \in \Omega^q M$, allora

$$\begin{aligned} [X\lrcorner, L]\omega &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m}(X \lrcorner (e_j \wedge Je_j)) \wedge \omega = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m} X_j Je_j \wedge \omega - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m}(Je_j)(X) e_J \wedge \omega. \end{aligned}$$

Inoltre

$$Je_j(X) = \sum_{k=1}^{2m} h(Je_j, X_k e_k) = -\sum_{k=1}^{2m} h(e_j, X_k Je_k) = -(JX)_j$$

quindi

$$[X\lrcorner, L]\omega = \frac{1}{2}(JX \wedge \omega - (-JX) \wedge \omega) = JX \wedge \omega.$$

$\square$

Definisco l'operatore $d^c : \Omega^k M \to \Omega^{k+1} M$ come

$$d^c \omega := \sum_{j=1}^{2m} J e_j \wedge \nabla_{e_j} \omega$$

e sia $\delta^c : \Omega^{k+1} M \to \Omega^k M$ il suo operatore aggiunto. Allora in modo analogo al codifferenziale

$$\delta^c = - * d^c * = - \sum_{j=1}^{2m} J e_j \lrcorner \nabla_{e_j}$$

Lemma 6.2.2. *Su una varietà di Kähler valgono le seguenti identità, dette identità di Kähler.*

1. $[L, \delta] = d^c$;
2. $[L, d] = 0$;
3. $[\Lambda, d] = -\delta^c$;
4. $[\Lambda, \delta] = 0$.

Dimostrazione.

1.

$$\begin{aligned}
[L, \delta] &= - \sum_{j=1}^{2m} [L, e_j \lrcorner \nabla_{e_j}] = \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^{2m} \left[e_h \wedge J e_h \wedge (e_j \lrcorner \nabla_{e_j} _) - e_j \lrcorner \nabla_{e_j} (e_h \wedge J e_h \wedge _) \right]
\end{aligned}$$

Essendo gli e_j paralleli e sfruttando il Lemma 6.2.1

$$\begin{aligned}
[L, \delta] &= -\frac{1}{2} \sum_{j,h=1}^{2m} \left[e_h \wedge J e_h \wedge (e_j \lrcorner \nabla_{e_j} _) - e_j \lrcorner e_h \wedge J e_h \wedge \nabla_{e_j} _) \right] = \\
&= - \sum_{j=1}^{2m} [L, e_j \lrcorner] \nabla_{e_j} = \sum_{j=1}^{2m} J e_j \wedge \nabla_{e_j} = d^c
\end{aligned}$$

2. $[L,d] = \Omega \wedge d\_ - d(\Omega \wedge \_) = \Omega \wedge d\_ - d\Omega \wedge \_ - \Omega \wedge d\_ = 0$

3.

$$\begin{aligned} -\delta^c = *d^c* = *[L,\delta]* &= *(\Omega \wedge \delta * \_) - *\delta(\Omega \wedge *\_) = \\ &= (-1)^{k+1}(*(\Omega \wedge *))d\_ - (-1)^k d(*(\Omega \wedge *\_)) = \\ &= ((-1)^{k+1} * L*)d\_ - d((-1)^k * L * \_) = [\Lambda, d] \end{aligned}$$

infatti, se $\alpha \in \Omega^k M$ e $\beta \in \Omega^{k+2}M$:

$$\begin{aligned} h(L\alpha,\beta)dv &= \Omega \wedge \alpha \wedge *\beta = \alpha \wedge \Omega \wedge *\beta = \\ &= (-1)^k \alpha \wedge *(*\Omega \wedge *\beta) = h(\alpha, (-1)^k * L * \beta) \end{aligned}$$

ovvero $\Lambda : \Lambda^{k+2}M \to \Lambda^k M$ è tale che $\Lambda = (-1)^k * L*$.

4. $[\Lambda,\delta] = (-1)^{k+1} * L * \delta - (-1)^k \delta * L* = - * L d * + * d L * = - * [L,d] * = 0.$

$\square$

Siano ora $\partial^* : \Omega^{p,q}M \to \Omega^{p-1,q}M$ e $\bar{\partial}^* : \Omega^{p,q}M \to \Omega^{p,q-1}M$ gli aggiunti formali di ∂ e $\bar{\partial}$ rispetto a $(\cdot,\cdot)$ rispettivamente. Allora $\delta = \partial^* + \bar{\partial}^*$ ed inoltre

$$\partial^* = - * \bar{\partial} * \quad \text{e} \quad \bar{\partial}^* = - * \partial * .$$

Infatti se $\alpha \in \Omega^{p,q}M$ e $\beta \in \Omega^{p,q+1}M$

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}\alpha,\beta) &= \int_M \bar{\partial}\alpha \wedge *\bar{\beta} = \int_M \bar{\partial}(\alpha \wedge *\bar{\beta}) - (-1)^{p+q}\int_M \alpha \wedge \bar{\partial} * \bar{\beta} = \\ &= \int_{\partial M} \alpha \wedge *\bar{\beta} - (-1)^{p+q}\int_M \alpha \wedge *(\overline{*^{-1}\partial * \beta}) = \\ &= -\int_M \alpha \wedge *(\overline{*\partial * \beta}) = (\alpha, - * \partial * \beta). \end{aligned}$$

Il caso ∂ è analogo.

Posso definire quindi gli operatori di Laplace

$$\Delta^{\partial} \coloneqq \partial\partial^* + \partial^*\partial \quad \text{e} \quad \Delta^{\bar{\partial}} \coloneqq \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$

Osservazione 6.2.3. Posso estendendo l'identificazione di TM con T^*M per $\mathbb{C}$-linearità tramite gli isomorfismi musicali definiti da

$$Z^\flat(W) = h(Z,W) \quad \text{e} \quad h(\omega^\sharp, Z) = \omega(Z) \quad \forall Z, W \in TM^{\mathbb{C}}, \forall \omega \in \Lambda^1_{\mathbb{C}}M$$

in cui h è l'estensione per $\mathbb{C}$-linearità della metrica di Hermitiana. Allora

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right)^\flat \left(\frac{\partial}{\partial z_\beta}\right) = h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\beta}\right) = 0$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right)^\flat \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = h\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}\right) = h_{\alpha\bar{\beta}}$$

quindi

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right)^\flat = \sum_{\beta=1}^{m} h_{\alpha\bar{\beta}} d\bar{z}_\beta \in \Omega^{0,1}M.$$

Inoltre poichè

$$h\left((d\bar{z}_\alpha)^\sharp, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}\right) = (d\bar{z}_\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}\right) = 1 \neq 0$$

si deduce che $(d\bar{z}_\alpha)^\sharp \notin T^{0,1}M$. Quindi ottengo un isomorfismo tra $T^{1,0}M$ e $\Lambda^{0,1}M$.

Teorema 6.2.4. *Nelle varietà di Kähler vale l'uguaglianza*

$$\Delta = 2\Delta^{\bar{\partial}} = 2\Delta^{\partial}$$

Dimostrazione. Dall'Osservazione 6.2.3 ho che gli $(1,0)$-vettori vengono identificati con le $(0,1)$-forme, quindi posso esprimere

$$\partial = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m}(e_j + iJe_j) \wedge \nabla_{e_j} \quad \text{e} \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2m}(e_j - iJe_j) \wedge \nabla_{e_j}.$$

Allora $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$ e quindi

$$\delta^c = - * d^c * = -i(*\bar{\partial} * - * \partial *) = i(\partial^* - \bar{\partial}^*).$$

Dalle prime due uguaglianze del Lemma 6.2.2 si deducono quindi

$$[L, \partial^*] = i\bar{\partial}, \quad [L, \bar{\partial}^*] = -i\partial, \quad [L, \partial] = [L, \bar{\partial}] = 0$$

invece dalle ultime due

$$[\Lambda, \partial] = i\bar{\partial}^*, \quad [\Lambda, \bar{\partial}] = -i\partial^*, \quad [\Lambda, \partial^*] = [\Lambda, \bar{\partial}^*] = 0.$$

Allora
$$-i(\bar\partial\partial^* + \partial^*\bar\partial) = \bar\partial[\Lambda, \bar\partial] + [\Lambda, \bar\partial]\bar\partial = \bar\partial\Lambda\bar\partial - \bar\partial^2\Lambda + \Lambda\bar\partial^2 - \bar\partial\Lambda\bar\partial = 0,$$
ovvero $\bar\partial\partial^* + \partial^*\bar\partial = 0$ e analogamente anche $\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial = 0$. Quindi
$$\begin{aligned}\Delta &= (\partial + \bar\partial)(\partial^* + \bar\partial^*) + (\partial^* + \bar\partial^*)(\partial + \bar\partial) = \\ &= (\partial\partial^* + \partial^*\partial) + (\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial) + (\bar\partial\partial^* + \partial^*\bar\partial) + (\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial) = \\ &= \Delta^\partial + \Delta^{\bar\partial}\end{aligned}$$
Infine si ha anche che $\Delta^\partial = \Delta^{\bar\partial}$, infatti:
$$\begin{aligned}-i\Delta^\partial &= -i(\partial + \bar\partial)(\partial^* + \bar\partial^*) = \partial[\Lambda, \bar\partial] + [\Lambda, \bar\partial]\partial = \\ &= \partial\Lambda\bar\partial - \partial\bar\partial\Lambda + \Lambda\bar\partial\partial - \bar\partial\Lambda\partial = \\ &= [\partial, \Lambda] + \bar\partial[\partial, \Lambda] = -i\bar\partial^*\bar\partial - i\bar\partial\bar\partial^* = -i\Delta^{\bar\partial}.\end{aligned}$$
□

Osservazione 6.2.5. È possibile estendere J alle k-forme definendo $J : \Lambda^k M \to \Lambda^k M$ come
$$J(\omega) := \sum_{j=1}^{2m} Je_j \wedge (e_j \lrcorner\, \omega).$$
Questa definizione è concorde alla precedente identificazione fatta tra TM e T^*M, infatti
$$J(e_h^\flat) = \sum_{j=1}^{2m} (Je_j)^\flat \wedge (e_h^\flat(e_j)) = (Je_h)^\flat.$$
Vale la seguente proprietà per ogni $\alpha \in \Omega^p M$ e per ogni $\beta \in \Omega^k M$
$$J(\alpha \wedge \beta) = J(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge J(\beta)$$
infatti:
$$\begin{aligned}J(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{j=1}^{2m} Je_j \wedge (e_j \lrcorner\, (\alpha \wedge \beta)) = \\ &= \sum_{j=1}^{2m} Je_j \wedge (e_j \lrcorner\, \alpha) \wedge \beta + \sum_{j=1}^{2m} ((-1)^p Je_j \wedge \alpha) \wedge (e_j \lrcorner\, \beta) = \\ &= J(\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge J(\beta).\end{aligned}$$

6.3 Coomologia di De Rham

Sia (M^n, g) una varietà Riemanniana compatta e orientata e indichiamo con $\Omega^k_{\mathbb{C}}M \coloneqq \Gamma(\Lambda^k M \otimes \mathbb{C})$ le k-forme lisce su M a valori complessi. Posto

$$\mathcal{Z}^k_{\mathbb{C}}M \coloneqq \left\{\omega \in \Omega^k_{\mathbb{C}} \mid d\omega = 0\right\}$$

ho che $d\Omega^{k-1}_{\mathbb{C}}M \subseteq \mathcal{Z}^k_{\mathbb{C}}M$ e posso definire i **gruppi di coomologia di De Rham** come il quoziente

$$H^k_{DR}(M, \mathbb{C}) \coloneqq \frac{\mathcal{Z}^k_{\mathbb{C}}M}{d\Omega^{k-1}_{\mathbb{C}}M}.$$

Il Teorema di De Rham mette in relazione i gruppi di coomologia di De Rham con i gruppi di coomologia singolare su M a coefficienti complessi.

Teorema 6.3.1 (Teorema di De Rham)**.** *Indicato con $H^k(M, \mathbb{C})$ il gruppo di coomologia singolare su M, la seguente applicazione definisce un isomorfismo di gruppi*

$$\begin{aligned} I : H^k_{DR}(M, \mathbb{C}) &\longrightarrow H^k(M, \mathbb{C}) \\ [\omega] &\longmapsto [I(\omega)] \end{aligned}$$

in cui per ogni k-simplesso singolare $\sigma : \Delta^k \to M$, definito sul simplesso Δ^k,

$$I(\omega)(\sigma) \coloneqq \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega.$$

Capitolo 7

Classi di Chern

7.1 Teoria di Chern-Weil

Prendiamo come definizione la seguente proposizione di caratterizzazione della **prima classe di Chern**.

Proposizione 7.1.1. *Sia E un fibrato vettoriale complesso sulla varietà differenziabile M. La **prima classe di Chern** di E è $c_1(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ che soddisfa i seguenti assiomi:*

- ***Naturalità:*** *per ogni $f : M \to N$ liscia e per ogni fibrato vettoriale complesso E su N, si ha $f^*(c_1(E)) = c_1(f^*E)$ in cui $(f^*E)_x \coloneqq E_{f(x)}$ per ogni $x \in M$.*

- ***Somma di Whitney:*** *per ogni E, F fibrati complessi su M*

$$c_1(E \oplus F) = c_1(E) \oplus c_1(F)$$

*in cui $E \oplus F$ è la **somma di Whitney** definita da $E \oplus F \coloneqq i^*(E \times F)$ con $i : M \to M \times M$ inclusione canonica[1].*

- ***Normalizzazione :*** *la prima classe di Chern del fibrato tautologico di $\mathbb{C}P^1$ è -1 in $H^2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, o equivalentemente, se ω è un rappresentante della classe, allora*

$$\int_{\mathbb{C}P^1} \omega = -1.$$

[1] $(E \oplus F)_x = (E \times F)_{(x,x)} = E_x \times F_x \cong E_x \oplus F_x$.

Sia $E \to M$ un fibrato vettoriale complesso di rango k e sia ∇ una connessione su E. Scelta una base locale $\{\sigma_j\}$ per le sezioni di E, è possibile, come fatto nella Sezione 4.1, definire la 2-forma di curvatura locale e le 1-forme di connessione locali che soddisferanno le condizioni dell'Osservazione 4.1.6. Definita la traccia di R^∇ come la traccia della matrice $\left(R^\nabla_{ij}\right)$ (ovvero $\mathrm{Tr}\big(R^\nabla\big) := \sum_{i=1}^k R^\nabla_{ii}$ e posto $\omega := (\omega_{ij})$, poichè

$$\sum_{i,l=1}^{k} \omega_{il} \wedge \omega_{li} = -\sum_{i,l=1}^{k} \omega_{li} \wedge \omega_{il} = -\sum_{i,l=1}^{k} \omega_{il} \wedge \omega_{li}$$

ho che

$$\mathrm{Tr}\big(R^\nabla\big) = d\left(\sum_{i=1}^{k} \omega_{ii}\right) = d\left(\mathrm{Tr}(\omega)\right).$$

Quindi $\mathrm{Tr}\big(R^\nabla\big)$ è un 2-forma localmente esatta, perciò è chiusa ed ha senso considerare la sua classe di coomologia di De Rham.

Osservazione 7.1.2. Nonostante i coefficienti R^∇_{ij} e ω_{ij} dipendano dalla scelta della base $\{\sigma_j\}$, la traccia di R^∇ è indipendente da tale scelta. Infatti, se $\{\tilde{\sigma}_j\}$ è un'altra base, esisteranno delle funzioni lisce g_{ij} tali che $\tilde{\sigma}_i = \sum_j g_{ij}\sigma_j$. Allora

$$\sum_{j,h} g_{jh}\tilde{R}^\nabla_{ij} \otimes \sigma_h = \sum_j \tilde{R}^\nabla_{ij} \otimes \tilde{\sigma}_j = R^\nabla(\tilde{\sigma}_i) = \sum_j g_{ij} R^\nabla(\sigma_j) = \sum_{j,h} g_{ij} R^\nabla_{jh} \otimes \sigma_h,$$

ovvero ho la seguente uguaglianza matriciale

$$\left(\tilde{R}^\nabla\right)(g) = (g)\left(R^\nabla\right).$$

Quindi le due matrici $(\tilde{R}^\nabla)$ e (R^∇) sono simili e hanno la stessa traccia.

Lemma 7.1.3. *La classe di coomologia* $\left[\mathrm{Tr}\big(R^\nabla\big)\right] \in H^2(M, \mathbb{C})$ *non dipende da* ∇*.*

Dimostrazione. Siano ∇ e $\tilde{\nabla}$ due connessioni su E, allora $A := \tilde{\nabla} - \nabla$ gode della proprietà $A(\omega \otimes \sigma) = (-1)^k \omega \wedge A(\sigma)$, per ogni $\omega \in \Omega^k M$ e per ogni $\sigma \in \Gamma(E)$, infatti

$$A(\omega \otimes \sigma) = d\omega \otimes \sigma + (-1)^k \omega \wedge \bar{\nabla}\sigma - d\omega \otimes \sigma - (-1)^k \omega \wedge \nabla\sigma = (-1)^k \omega \wedge A(\sigma).$$

Inoltre si ottiene $\mathrm{Tr}\left(R^{\tilde{\nabla}}\right) = \mathrm{Tr}\big(R^\nabla\big) + d\,\mathrm{Tr}(A)$, infatti:

– $A^2(\sigma_i) = A\left(\sum_j A_{ij} \otimes \sigma_j\right) = -\sum_j A_{ij} \wedge A(\sigma_j) = -\sum_{j,l} A_{il} \wedge A_{lj} \otimes \sigma_j;$

– $(A\nabla)(\sigma_i) = -\sum_{j,l} \omega_{il} \wedge A_{lj} \otimes \sigma_j;$

– $(\nabla A)(\sigma_i) = \sum_j \left[dA_{ij} \otimes \sigma_j - \sum_l A_{il} \wedge \omega_{lj} \otimes \sigma_j\right];$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_j R_{ij}^{\tilde{\nabla}} \otimes \sigma_j = R^{\tilde{\nabla}}(\sigma_i) = \tilde{\nabla}^2(\sigma_i) = (\nabla + A)^2(\sigma_i) = \\ = R^{\nabla}(\sigma_i) + A^2(\sigma_i) + (\nabla A + A\nabla)(\sigma_i) = \\ = \sum_j \left[R_{ij}^{\nabla} + dA_{ij} - \sum_l (A_{il} \wedge A_{lj} + \omega_{il} \wedge A_{lj} + A_{il} \wedge \omega_{lj})\right] \otimes \sigma_j\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}\left(R^{\tilde{\nabla}}\right) = \sum_i R_{ii}^{\tilde{\nabla}} = \sum_i R_{ii}^{\nabla} + d\left(\sum_i A_{ii}\right) = \mathrm{Tr}\big(R^{\nabla}\big) + d(\mathrm{Tr}(A)).$$

□

Osservazione 7.1.4. $\left[\mathrm{Tr}\big(R^{\nabla}\big)\right]$ può essere rappresentata da una 2-forma puramente immaginaria. Infatti, scelte una struttura Hermitiana h su E, una connessione ∇ tale che $\nabla h = 0$ e una base $\{\sigma_i\}$ ortonormale rispetto ad h, si ha

$$0 = \nabla\delta_{ij} = \nabla\left(h(\sigma_i, \sigma_j)\right) = h(\nabla\sigma_i, \sigma_j) + h(\sigma_i, \nabla\sigma_j) = \omega_{ij} + \overline{\omega_{ji}}$$

allora

$$\overline{R_{ij}^{\nabla}} = d\overline{\omega_{ij}} - \sum_{j=1}^{k} \overline{\omega_{il}} \wedge \overline{\omega_{lj}} = -d\omega_{ji} - \sum_{j=1}^{k} \omega_{li} \wedge \omega_{jl} = -R_{ji}^{\nabla}$$

e quindi

$$\mathrm{Tr}\big(R^{\nabla}\big) = \sum_{i=1}^{k} R_{ii}^{\nabla} = -\sum_{i=1}^{k} \overline{R_{ii}^{\nabla}} = -\overline{\mathrm{Tr}(R^{\nabla})}.$$

Teorema 7.1.5. *Sia ∇ una connessione sul fibrato complesso E su M. La classe di coomologia $c_1(\nabla) := \left[\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}\big(R^{\nabla}\big)\right] \in H^2(M, \mathbb{R})$ è uguale all'immagine di $c_1(E)$ tramite $H^2(M, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(M, \mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che $c_1(\nabla)$ soddisfa le proprietà della Proposizione 7.1.1.

Naturalità : sia $f : M \to N$ liscia e sia $\pi : E \to N$ un fibrato di rango k, allora

$$f^*E = \{(x, v) \in M \times E \mid f(x) = \pi(v)\}$$

e se $\{\sigma_i\}$ base locale per le sezioni di E allora le $f^*\sigma_j : M \to f^*E$, tali che $x \mapsto (x, \sigma_i(f(x)))$, formano una base locale per le sezioni f^*E. Definisco quindi la connessione $f^*\nabla$ su f^*E tramite $(f^*\nabla)(f^*\sigma) \coloneqq f^*(\nabla\sigma)$. Rispetto alle basi $\{f^*\sigma_i\}$ e $\{\sigma_i\}$, allora

$$\sum_{j=1}^{k} R_{ij}^{f^*\nabla} \otimes f^*\sigma_i = R^{f^*\nabla}(f^*\sigma_i) = (f^*\nabla)^2(f^*\sigma_i) =$$
$$= f^*R^{\nabla}(\sigma_i) = f^*\left(\sum_{j=1}^{k} R_{ij}^{\nabla} \otimes \sigma_j\right)$$

ovvero $R_{ij}^{f^*\nabla} = f^*(R_{ij}^{\nabla})$. Perciò $\mathrm{Tr}\big(R^{f^*\nabla}\big) = f^*(\mathrm{Tr}\big(R^{\nabla}\big))$ e quindi $c_1(f^*\nabla) = f^*c_1(\nabla)$.

Somma di Whitney : siano E e F due fibrati complessi su M di rango k e h, con connessioni ∇ e $\tilde{\nabla}$ rispettivamente. Definisco la connessione $\nabla \oplus \tilde{\nabla}$ su $E \oplus F$ come

$$(\nabla \oplus \tilde{\nabla})_x(\sigma \oplus \tilde{\sigma}) \coloneqq \nabla_x\sigma \oplus \tilde{\nabla}_x\tilde{\sigma}.$$

Se $\{\sigma_i\}$ e $\{\tilde{\sigma}_i\}$ sono delle basi locali per le sezioni di E e F rispettivamente, allora $\{\sigma_i \oplus 0, 0 \oplus \tilde{\sigma}_i\}$ forma una base di $E \oplus F$. Rispetto alle precedenti basi allora

$$\mathrm{Tr}\Big(R^{\nabla\oplus\tilde{\nabla}}\Big) = \mathrm{Tr}\left(\begin{array}{c|c} (R_{ij}^{\nabla}) & 0_{k,h} \\ \hline 0_{h,k} & (R_{ij}^{\tilde{\nabla}}) \end{array}\right) = \mathrm{Tr}\big(R^{\nabla}\big) + \mathrm{Tr}\Big(R^{\tilde{\nabla}}\Big).$$

Quindi $c_1(\nabla \oplus \tilde{\nabla}) = c_1(\nabla) + c_1(\tilde{\nabla})$.

Normalizzazione : sia $\pi : L \to \mathbb{C}P^1$ il fibrato in rette tautologico di $\mathbb{C}P^1$. Siano $\sigma_i : U_i \subseteq \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}$, con $i = 1, 2$, le espressioni della sezione $\sigma : \mathbb{C}P^1 \to L$ nelle trivializzazioni ψ_i[2]. Il prodotto Hermitiano di $\mathbb{C}^2$ induce una struttura Hermitiana h su L e sia quindi ∇ la connessione

[2]Ovvero $\sigma_i \coloneqq pr \circ \psi_i \circ \sigma$ in cui $pr : U_i \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è la proiezione sul secondo fattore.

di Chern associata ad h. Se σ è una sezione olomorfa di L, indico con $u = h(\sigma, \sigma) > 0$ e con ω la forma di connesione di σ rispetto a ∇ (i.e. $\nabla\sigma = \omega \otimes \sigma$). Allora per ogni $X \in T\mathbb{C}P^1$, ho che

$$du(X) = \partial_X(h(\sigma, \sigma)) = h(\nabla_X \sigma, \sigma) + h(\sigma, \nabla_X \sigma) = \omega(X)u + \overline{\omega}(X)u$$

Quindi

$$(\omega + \bar{\omega})(X) = \frac{1}{u} du(X) = d(\log u)(X)$$

ed essendo

$$\omega \otimes \sigma = \nabla\sigma = \nabla^{1,0}\sigma + \bar{\partial}\sigma = \nabla^{1,0}\sigma$$

deduco che $\omega \in \Omega^{1,0}M$ e perciò $\omega = \partial(\log u)$. Allora

$$\mathrm{Tr}\big(R^\nabla\big) = d\omega = d(\partial \log u) = \bar{\partial}\partial \log u$$

e quindi dimostrare che $c_1(\nabla) = -1$ è equivalente a dimostrare

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}P^1} \bar{\partial}\partial \log u = -1.$$

Per dimostrarlo basta calcolare l'integrale su $U_0 = \mathbb{C}P^1 \setminus \{[(0,1)]\}$. Sia $z \coloneqq \varphi_0([(z_0, z_1)]) = \frac{z_1}{z_0}$ la coordinata olomorfa su U_0 e sia σ la sezione olomorfa su U_0 tale che $\sigma_0 \equiv 1$, ovvero $\sigma([(z_0, z_1)]) = (1, z)$. Allora $u = h(\sigma, \sigma) = |(1,z)|^2 = 1 + |z|^2$. Espressa z in coordinate polari, ovvero $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$, e scelta una applicazione $f = f(z) = f(r, \theta)$, ho che

$$\bar{\partial}\partial f = \frac{i}{2}\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) dr \wedge d\theta.$$

Scelta $f = \log(1 + r^2) = \log(u)$ allora

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}P^1} \bar{\partial}\partial \log u &= \frac{i}{2\pi} \int_{[0,+\infty)\times[0,2\pi]} \frac{i}{2}\left(r\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\right) dr \wedge d\theta = \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} d\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{r\to\infty} r\frac{\partial f}{\partial r} = \\
&= -\lim_{r\to\infty} \frac{r}{2}\frac{2r}{1+r^2} = -1
\end{aligned}$$

□

Definizione 7.1.6. *Sia (M, J) una varietà quasi complessa, la **prima classe di Chern** di M è definita come $c_1(M) \coloneqq c_1(TM)$, in cui TM è visto come fibrato vettoriale complesso su M.*

7.2 Proprietà della Prima Classe di Chern

Osservazione 7.2.1.

- La prima classe di Chern dei fibrati banali (ovvero i fibrati vettoriale in cui tutte le fibre sono date dallo stesso spazio vettoriale) è 0. Infatti se $E \to M$ è un fibrato banale complesso su M (i.e. $E = M \times V$ con V $\mathbb{C}$-spazio vettoriale) allora, data $P = \{p\}$ una varietà 0-dimensionale, $P \times V \xrightarrow{pr_1} P$ definisce un fibrato banale su P. Inoltre esiste un'unica applicazione $f : M \to P$ e si ha che $E_x = V = (P \times V)_{f(x)} = (f^*(P \times V))_x$. Essendo $H^2(P, \mathbb{Z}) = \{0\}$, allora per l'assioma di naturalità

$$c_1(E) = c_1(f^*(P \times V)) = f^*(c_1(P \times V)) = 0.$$

- Siano E un fibrato in rette e E^* il suo duale, allora $E \otimes E^* \cong \mathbb{C}$, in cui $\mathbb{C}$ è visto come fibrato banale. Infatti $E \otimes E^* \cong \mathrm{End}(E)$, inoltre ogni $\varphi \in \mathrm{End}(E)$ è determinata da $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\varphi(\sigma) = \lambda\sigma$ con $\{\sigma\}$ base delle sezioni di E.

Proposizione 7.2.2. *Sia M una varietà differenziabile e E, F due fibrati vettoriali complessi su M. Allora:*

i) $c_1(E) = c_1(\Lambda^k E)$, *in cui* $k = rk(E)$;

ii) $c_1(E \otimes F) = rk(F)c_1(E) + rk(E)c_1(F)$;

iii) $c_1(E^*) = -c_1(E)$, *in cui E^* è il fibrato duale di E.*

Dimostrazione.

i) Data ∇ connessione su E, posso indurre una connessione $\tilde{\nabla}$ su $\Lambda^k E$ definendo

$$\tilde{\nabla}(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k) \coloneqq \sum_{j=1}^{k} \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_{j-1} \wedge \nabla\sigma_j \wedge \sigma_{j+1} \wedge \cdots \wedge \sigma_k.$$

Se $\{\sigma_i\}$ è una base locale per le sezioni di E, allora $\sigma \coloneqq \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k$ è una sezione non nulla di $\Lambda^k E$ e quindi forma una base locale. Siano $\omega \coloneqq (\omega_{ij})$ e $\tilde{\omega}$ le forme di connessione relative alle basi $\{\sigma_i\}$ e $\{\sigma\}$ rispettivamente, ovvero

$$\nabla\sigma_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_{ij} \otimes \sigma_j \quad \text{e} \quad \tilde{\nabla}\sigma = \tilde{\omega} \otimes \sigma.$$

Allora

$$\tilde{\nabla}\sigma = \sum_{j=1}^{k} \sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_{j-1} \wedge \left(\sum_{h=1}^{k} \omega_{jh} \otimes \sigma_h \right) \wedge \sigma_{j+1} \wedge \cdots \wedge \sigma_k =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \omega_{jj} \otimes \sigma.$$

Quindi

$$\mathrm{Tr}\Big(R^{\tilde{\nabla}}\Big) = d\tilde{\omega} = d\left(\sum_{j=1}^{k} \omega_{jj}\right) = d\,\mathrm{Tr}(\omega) = \mathrm{Tr}\big(R^{\nabla}\big)$$

e di conseguenza $c_1(E) = c_1(\Lambda^k E)$.

ii) Nel caso particolare in cui $rk(E) = rk(F) = 1$, scelte due connessioni ∇^E e ∇^F sui rispettivi fibrati, posso indurre su $E \otimes F$ la connessione ∇ definita da

$$\nabla(\sigma^E \otimes \sigma^F) \coloneqq (\nabla^E \sigma^E) \otimes \sigma^F + \sigma^E \otimes (\nabla^F \sigma^F).$$

Allora le forme di connessione saranno legate dalla relazione $\omega = \omega^E + \omega^F$, infatti:

$$\begin{aligned} \omega \otimes (\sigma^E \otimes \sigma^F) &= \nabla(\sigma^E \otimes \sigma^F) = \\ &= (\omega^E \otimes \sigma^E) \otimes \sigma^F + \sigma^E \otimes (\omega^F \otimes \sigma^F) = \\ &= (\omega^E + \omega^F) \otimes \sigma^E \otimes \sigma^F. \end{aligned}$$

Quindi

$$\mathrm{Tr}\big(R^{\nabla}\big) = d\omega = d\omega^E + d\omega^F = \mathrm{Tr}\Big(R^{\nabla^E}\Big) + \mathrm{Tr}\Big(R^{\nabla^F}\Big).$$

Infine, se $rk(E) = e$ e $rk(F) = f$, poichè

$$\Lambda^{ef} E \otimes F \cong (\Lambda^e E)^{\otimes f} \otimes (\Lambda^f E)^{\otimes e},$$

sfruttando la *(i)* e sfruttando la discussione fatta nel caso con il rango uguale a 1, si ottiene

$$c_1(E \otimes F) = c_1(\Lambda^{ef} E \otimes F) = f c_1(\Lambda^e E) + e c_1(\Lambda^f F) = f c_1(E) + e c_1(F)$$

iii) Poichè $(\Lambda^k E)^* \cong \Lambda^k E^*$, per l'Osservazione 7.2.1 e per ciò appena dimostrato, allora

$$0 = c_1((\Lambda^k E)^* \otimes \Lambda^k E) = c_1(\Lambda^k E) + c_1(\Lambda^k E^*) = c_1(E) + c_1(E^*).$$

$\square$

Capitolo 8

Il Teorema di Calabi-Yau

8.1 La Forma di Ricci come Forma di Curvatura

Sia (M^{2m}, h, J) una varietà di Kähler con forma di Ricci ρ. Per l'Osservazione 3.3.2, TM è un fibrato olomorfo, inoltre, definendo $H \coloneqq h - i\Omega$, è anche un fibrato Hermitiano. Abbiamo definito, a partire da una connessione complessa (ad esempio come quella di Chern), la 2-forma di curvatura, e, a partire dalla connessione di Levi-Civita su una varietà Riemanniana, il tensore di curvatura. Il seguente Lemma dimostra che su una varietà di Kähler questi due concetti, come conseguenza dell'uguaglianza tra la connessione di Chern e di Levi-Civita, sono equivalenti.

Lemma 8.1.1. *L'operatore di curvatura $R^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2 M \otimes \mathrm{End}(TM))$ della connessione di Chern e il tensore di curvatura R della connessione di Levi-Civita sono legati dalla seguente relazione:*

$$R^\nabla_{X,Y}(\xi) = R(X,Y)\xi, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M), \forall \xi \in \Gamma(TM).$$

Dimostrazione. Sia $\{e_i\}$ una base locale per i campi vettoriali su M e $\{e_i^*\}$ la sua duale locale delle 1-forme su M. Allora (usando la notazione degli indici ripetuti)

$$R^\nabla \xi = \nabla^2 \xi = \nabla(e_i^* \otimes \nabla_{e_i}\xi) = de_i^* \otimes \nabla_{e_i}\xi - e_i^* \wedge e_j^* \otimes \nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi$$

Siano $X = X_i e_i = e_i^*(X) e_i$ e $Y = Y_i e_i = e_i^*(Y) e_i$ due campi vettoriali locali. Allora

$$\begin{aligned} de_i^*(X,Y) &= \partial_X(e_i^*(Y)) - \partial_Y(e_i^*(X)) - e_i^*([X,Y]) = \\ &= \partial_X(Y_i) - \partial_Y(X_i) - e_i^*([X,Y]) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{\nabla}_{X,Y}(\xi) &= de_i^*(X,Y)\nabla_{e_i}\xi - (e_i^* \wedge e_j^*)(X,Y)\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi = \\ &= (\partial_X Y_i - \partial_Y X_i - e_i^*([X,Y]))\,\nabla_{e_i}\xi - (X_i Y_j - X_j Y_i)\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}\xi = \\ &= -\nabla_{[X,Y]}\xi - (\partial_Y X_i + X_i \nabla_Y)\nabla_{e_i}\xi + (\partial_X Y_i + Y_i \nabla_X)\nabla_{e_i}\xi = \\ &= -\nabla_{[X,Y]}\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi + \nabla_X\nabla_Y\xi = \\ &= R(X,Y)\xi. \end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 8.1.2.

- Sia ∇ una connessione sul fibrato complesso E e ∇^* la connessione su E^* definita nell'Osservazione 4.3.2. Allora

  $$R^{\nabla^*}(X,Y) = -\left(R^{\nabla}(X,Y)\right)^*$$

  in cui se un operatore $A \in \mathrm{End}(E)$, il suo operatore aggiunto $A^* \in \mathrm{End}(E^*)$ è definito da $A^*(\sigma^*)(\sigma) \coloneqq \sigma^*(A(\sigma))$.

  Infatti

  $$\begin{aligned} (\nabla_Y^*\nabla_X^*\sigma^*)(\sigma) &= \partial_Y\Big(\big(\nabla_X^*\sigma^*\big)(\sigma)\Big) - \big(\nabla_X^*\sigma^*\big)(\nabla_Y\sigma) = \\ &= \partial_Y\Big(\partial_X\big(\sigma^*(\sigma)\big)\Big) - \partial_Y\Big(\sigma^*(\nabla_X\sigma)\Big) - \partial_X\Big(\sigma^*(\nabla_Y\sigma)\Big) + \sigma^*\Big(\nabla_X\nabla_Y\sigma\Big) \end{aligned}$$

  inoltre

  $$\Big(\nabla^*_{[X,Y]}\sigma^*\Big)(\sigma) = \partial_{[X,Y]}\Big(\sigma^*(\sigma)\Big) - \sigma^*\Big(\nabla_{[X,Y]}\sigma\Big)$$

  allora

  $$\begin{aligned} \Big(R^{\nabla^*}(X,Y)(\sigma^*)\Big)(\sigma) &= \Big(\nabla_X^*\nabla_Y^*\sigma^* - \nabla_Y^*\nabla_X^*\sigma^* - \nabla^*_{[X,Y]}\sigma^*\Big)(\sigma) = \\ &= \sigma^*(\nabla_X\nabla_Y\sigma - \nabla_Y\nabla_X\sigma - \nabla_{[X,Y]}\sigma) = \\ &= \sigma^*(R^{\nabla}(X,Y)(\sigma)) = \\ &= \Big(\big(R^{\nabla}(X,Y)\big)^*(\sigma^*)\Big)(\sigma). \end{aligned}$$

- Sia $K = \Lambda^{m,0}M$ il fibrato canonico di una varietà di Kähler M^{2m}, allora $K^* \cong \Lambda^{0,m}M$. Infatti, per l'Osservazione 6.2.3, si ha che

$$
\begin{aligned}
K^* = \left(\bigwedge_{i=1}^{m} \Lambda^{1,0}M\right)^* &\cong \left(\bigwedge_{i=1}^{m} (T^{1,0}M)^*\right)^* \cong \bigwedge_{i=1}^{m} T^{1,0}M \cong \\
&\cong \bigwedge_{i=1}^{m} \Lambda^{0,1}M = \Lambda^{0,m}M.
\end{aligned}
$$

Proposizione 8.1.3. *La curvatura della connessione di Chern del fibrato canonico di una varietà di Kähler è uguale a $i\rho$.*

Dimostrazione. Siano r e r^* le curvature della connessione di Chern del fibrato canonico $K = \Lambda^{m,0}M$ e di $K^* = \Lambda^{0,m}M$. Allora, per l'Osservazione precedente, $r = -r^*$. La struttura Hermitiana su TM induce una struttura Hermitiana su $\Lambda^m(TM)$ e la connessione indotta dalla connessione di Chern di (TM, H) è la connessione di Chern di $(\Lambda^m TM, H)$.

Inoltre $\Lambda^m TM \cong \Lambda^{0,m}M$, infatti

$$
\Lambda^m TM \cong \bigwedge_{i=1}^{m} TM \cong \bigwedge_{i=1}^{m} \Lambda^{0,1}M = \Lambda^{0,m}M.
$$

Allora dalla dimostrazione della (i) della Proposizione 7.2.2 e dalla Proposizione 5.3.2 ho che

$$
r^*(X,Y) = \mathrm{Tr}(r^*) = \mathrm{Tr}\big(R^{\nabla}_{X,Y}\big) = \mathrm{Tr}(R(X,Y)).
$$

Sfruttando la Proposizione allora 5.4.2

$$
\begin{aligned}
i\rho(X,Y) = i\mathrm{Ric}(JX,Y) &= \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{R}}(R(X,Y)\circ J) = \frac{i}{2}\,\big(2i\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{C}}(R(X,Y))\big) = \\
&= -\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{C}}(R(X,Y)) = -r^*(X,Y) = r(X,Y).
\end{aligned}
$$

In cui nella quarta uguaglianza è stato usato il fatto che che per ogni endomorfismo anti-Hermitiano si ha $\mathrm{Tr}^{\mathbb{R}}(A^{\mathbb{R}}\circ J) = 2i\,\mathrm{Tr}^{\mathbb{C}}(A)$.[1]

□

[1]Se $C = A + iB$ è un endomorfismo anti Hermitiano di $\mathbb{C}^m$ (in particolare $\mathrm{Tr}^{\mathbb{R}}(A) = 0$),

Osservazione 8.1.4. Dalla definizione di $c_1(M)$ e dalla Proposizione 7.2.2 ottengo che $c_1(M) = c_1(\Lambda^m TM) = c_1(K^*)$. Per il Teorema 7.1.5 allora in $H^2(M, \mathbb{R})$, $c_1(M) = c_1(\nabla)$ in cui ∇ è la connessione di Chern di K^*. Infine per la Proposizione 8.1.3 ottengo che

$$c_1(M) = \left[\frac{i}{2\pi} r^*\right] = \left[\frac{1}{2\pi}\rho\right].$$

---

allora, poiché gli endomorfismi $C^{\mathbb{R}}$ e J di $\mathbb{R}^{2m}$ sono rappresentati dalle matrici

$$C^{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad J = \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix},$$

si ottiene

$$2i \operatorname{Tr}^{\mathbb{C}}(C) = 2i(\operatorname{Tr}^{\mathbb{R}}(A) + i \operatorname{Tr}^{\mathbb{R}}(B)) = -2 \operatorname{Tr}^{\mathbb{R}}(B) = \operatorname{Tr}^{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} -B & -A \\ A & -B \end{pmatrix} = \operatorname{Tr}^{\mathbb{R}}(C^{\mathbb{R}} \circ J).$$

8.2 Il Teorema di Calabi-Yau

Teorema 8.2.1 (Teorema di Calabi-Yau)**.** *Sia M^m una varietà di Kähler compatta con forma di Kähler Ω e forma di Ricci ρ. Allora per ogni $(1,1)$-forma reale e chiusa $\rho_1 \in \Omega^{1,1}M$, nella stessa classe di coomologia di $2\pi c_1(M)$, esiste un'unica metrica di Kähler, con forma di Kähler Ω_1 nella stessa classe di coomologia di Ω, tale che la sua forma di Ricci sia ρ_1. In particolare, se la prima classe di Chern di una varietà di Kähler è nulla, M è dotata di una metrica di Kähler Ricci-piatta.*

Per dimostrare questo Teorema si cerca di ricondursi all' equazione di *Monge–Ampère*

$$e^f(\Omega^m + i\partial\bar{\partial}u)^m = \Omega^m \tag{8.1}$$

e di esprimere l'insieme delle metriche di Kähler, le cui forme fondamentali sono nella stessa classe di coomologia di Ω, in funzione delle funzioni u dell'equazione (8.1).

Dal *$i\partial\bar{\partial}$-Lemma Globale*[2] sappiamo che l'insieme

$$\mathcal{K} = \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(M) \quad \Big| \quad \Omega + i\partial\bar{\partial}u > 0, \quad \int_M u\Omega^m = 0 \right\}$$

è in biezione con l'insieme delle metriche di Kähler le cui forme fondamentali sono nella stessa classe di coomologia di Ω. Con la prima condizione si intende che una $(1,1)$-forma φ è positiva se $\varphi(\cdot, J\cdot)$ è un tensore positivo, la seconda condizione permette di determinare univocamente u che, altrimenti, sarebbe definita a meno di una costante. Infatti:

- se g_1 è un'altra metrica di Kähler la cui forma fondamentale Ω_1 è nella stessa classe di coomologia di Ω, allora, per l'$i\partial\bar{\partial}$-Lemma globale, $\Omega_1 = \Omega + i\partial\bar{\partial}u$, per una certa funzione u liscia reale, la quale è univocamente determinata dalla seconda condizione dell'insieme $\mathcal{K}$. Allora $g_1 \mapsto u \in \mathcal{K}$ è ben definita;

[2]

Lemma 8.2.2 ($i\partial\bar{\partial}$-Lemma Globale)**.** *Sia φ una $(1,1)$-forma reale esatta su una varietà di Kähler compatta. Allora esiste un'applicazione reale e liscia u tale che $\varphi = i\partial\bar{\partial}u$.*

- data $u \in \mathcal{K}$, definisco $\Omega_1 \coloneqq \Omega - i\partial\bar{\partial}u$ e $g_1(\cdot,\cdot) \coloneqq \Omega_1(J\cdot,\cdot)$. Allora g_1 è definita positiva e

  $$g_1(J\cdot, J\cdot) = -\Omega_1(\cdot, J\cdot) = \Omega(J\cdot,\cdot) = g_1(\cdot,\cdot)$$

  ovvero è una metrica Hermitiana. Inoltre

  $$d\Omega_1 = d\Omega + id\partial\bar{\partial}u = 0$$

  ovvero g_1 è una metrica di Kähler la cui forma di Kähler è nella stessa classe di coomologia di Ω;

- le due associazioni $g_1 \mapsto u$ e $u \mapsto g_1$ appena descritte sono una l'inversa dell'altra.

Siano ora g e g_1 due metriche di Kähler con rispettive forme di Kähler Ω e Ω_1 nella stessa classe di coomologia. Definisco quindi le forme di volume su M

$$dv \coloneqq \frac{1}{m!}\Omega^m \quad \text{e} \quad dv_1 \coloneqq \frac{1}{m!}\Omega_1^m$$

e definisco la fuzione liscia $f : M \to \mathbb{R}$ ponendo

$$e^f dv = dv_1.$$

Essendo $[\Omega] = [\Omega_1]$ in $H^2(M,\mathbb{C})$, allora $[\Omega^m] = [\Omega]^m = [\Omega_1]^m = [\Omega_1^m]$ in $H^{2m}(M,\mathbb{C})$. Quindi, per il *Teorema di Stokes*[3]

$$\int_M m!(e^f - 1)dv = \int_M (\Omega_1^m - \Omega^m) = \int_M d\eta = 0$$

ovvero

$$\int_M e^f dv = \int_M dv. \tag{8.2}$$

[3]

Teorema 8.2.3 (Teorema di Stokes)**.** *Sia M^n una varietà differenziabile con bordo, compatta e orientata. Sia ω una $(n-1)$-forma differenziale su M e sia $i : \partial M \to M$ l'inclusione canonica del bordo di M in M. Allora*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^*\omega.$$

Siano ora ρ e ρ_1 le forme di Ricci di g e g_1 rispettivamente, allora, per la Proposizione 8.1.3, $i\rho$ e $i\rho_1$ sono le curvature sul fibrato canonico K_M. Per quanto visto nella dimostrazione del Teorema 7.1.5, per ogni sezione olomorfa di ω di K_M, allora

$$i\rho = \bar{\partial}\partial \log g(\omega, \bar{\omega}) \quad \text{e} \quad i\rho_1 = \bar{\partial}\partial \log g_1(\omega, \bar{\omega}) \tag{8.3}$$

Inoltre, per la definizione dell'operatore $*$ di Hodge per forme complesse,

$$g(\omega, \bar{\omega})dv = \omega \wedge *\bar{\omega} = g_1(\omega, \bar{\omega})dv_1 = e^f g_1(\omega, \bar{\omega})dv$$

quindi

$$e^f g_1(\omega, \bar{\omega}) = g(\omega, \bar{\omega}). \tag{8.4}$$

Allora, sfruttando la (8.3), la (8.4) e il Lemma 3.1.2, ottengo

$$i\rho_1 - i\rho = \bar{\partial}\partial \left[\log(g_1(\omega, \bar{\omega})) - \log\big(e^f g_1(\omega, \bar{\omega})\big)\right] = \bar{\partial}\partial \log\big(e^{-f}\big) = \partial\bar{\partial} f.$$

Ottengo quindi che

$$\rho_1 = \rho - i\partial\bar{\partial} f \quad \text{in cui} \quad f = \log\left(\frac{(\Omega + i\partial\bar{\partial}u)^m}{\Omega^m}\right).^4 \tag{8.5}$$

Sia ora ρ_1 una generica $(1,1)$-forma reale e chiusa nella stessa classe di coomologia di $2\pi c_1(M)$. Allora, per l'*$i\partial\bar{\partial}$-Lemma Globale*, esiste una applicazione liscia reale f tale che $\rho_1 = \rho - i\partial\bar{\partial} f$. f è determinata univocamente imponendo la condizione (8.2). Pongo

$$\mathcal{K}' = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(M) \;\middle|\; \rho_1 = \rho - i\partial\bar{\partial} f, \quad \int_M e^f dv = \int_M dv \right\}.$$

Allora il Teorema di Calabi-Yau è equivalente al seguente Teorema.

Teorema 8.2.4. *L'applicazione $Cal : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ tale che*

$$u \mapsto \log\left(\frac{(\Omega + i\partial\bar{\partial}u)^m}{\Omega^m}\right)$$

è un diffeomorfismo.

[4] Con il quoziente di due $2m$-forme si intende la funzione liscia di cui differiscono essendo sezioni non nulle di un fibrato vettoriale di rango 1.

Pongo, fissata $u \in \mathcal{K}$, $\Omega_1 := \Omega + i\partial\bar{\partial}u$, in cui Ω è la forma di Kähler della metrica di Kähler di partenza g.
Iniettività. Sia $u \in \mathcal{K}$ tale che $Cal(u) = 0$, allora $\Omega_1^m = \Omega^m$, quindi

$$0 = \Omega_1^m - \Omega^m = (\Omega_1 - \Omega) \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1}.$$ [5]

Poichè $2i\partial\bar{\partial} = dd^c$ e $d\Omega = d\Omega_1 = 0$, allora

$$\begin{aligned} 0 &= 2iu\partial\bar{\partial}u \wedge \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1} = udd^cu \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1} = \\ &= d\left(udd^cu \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1}\right) - du \wedge d^cu \sum_{k=0}^{m-1} \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1} \end{aligned}$$

Per il Teorema di Stokes e per l'Osservazione 6.2.5 allora

$$0 = \sum_{k=0}^{m-1} \int_M du \wedge Jdu \wedge \Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1}. \tag{8.6}$$

Ω_1 induce un'altra metrica di Kähler g_1 su M, inoltre TM ha una base ortonormale (rispetto a g) locale $\{e_1, Je_1, \ldots, e_m, Je_m\}$ rispetto alla quale (fatta l'identificazione tra TM e T^*M)

$$\Omega = \sum_{j=1}^{m} e_j \wedge Je_j \quad \text{e} \quad \Omega_1 = \sum_{j=1}^{m} a_j e_j \wedge Je_j$$

in cui a_j sono delle funzioni locali lisce strettamente positive. Allora per ogni k

$$\Omega_1^k \wedge \Omega^{m-k-1} = * \left(\sum_{j=1}^{m} b_j^k e_j \wedge Je_j\right)$$

[5] In generale, su un anello commutativo $(R, +, \circ)$, per $n \geq 2$, allora

$$a^n - b^n = (a-b) \circ \sum_{j=1}^{n-1} a^{n-j-1} \circ b^j \quad \forall a, b \in R.$$

Poichè le 2-forme commutano, la medesima dimostrazione continua a valere anche per le 2-forme.

con b_j^k funzioni locali lisce strettamente positive. Allora le funzioni integrande in (8.6) sono strettamente positive a meno che $du = 0$. Quindi u è costante e poichè $u \in \mathcal{K}$, integrata su M si annulla, quindi necessariamente $u = 0$. Quindi Cal è iniettiva.
Diffeomorfismo Locale. Al più scegliendo un'opportuna metrica di Kähler su M, senza perdita di generalità, possiamo scegliere $u = 0$. Per dimostrare che Cal è un diffeomorfismo locale, per il *Teorema della Funzione Inversa*, è sufficiente dimostrare che il suo differenziale in 0 è identicamente nullo. Sia quindi $v \in T_0\mathcal{K} \cong \mathcal{K}$, allora, poichè le 2-forme commutano,

$$\begin{aligned} Cal_*(v) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Cal(tv) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \log\left(\frac{(\Omega + i\partial\bar{\partial}tv)^m}{\Omega^m}\right) = \\ &= \left[\left(\frac{\Omega^m}{(\Omega + i\partial\bar{\partial}tv)^m}\right) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{\binom{m}{k} t^{m-k}\Omega^k \wedge (i\partial\bar{\partial}v)^{m-k}}{\Omega^m}\right)\right]\Bigg|_{t=0} = \\ &= m\frac{i\partial\bar{\partial}v \wedge \Omega^{m-1}}{\Omega^m} = \Lambda(i\partial\bar{\partial}v) = -\bar{\partial}^*\bar{\partial}v = -\Delta^{\bar{\partial}}v = -\frac{1}{2}\Delta v. \end{aligned}$$

Poichè il Laplaciano definisce una biezione dell'insieme delle applicazioni ad integrale nullo su M, ottengo che Cal_* è biettiva.

Bibliografia

[1] Andrei Moroianu. *Lectures on Kähler geometry*. Cambridge University Press, 2013.

[2] John M. Lee. *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*. Springer, 1997.

[3] Gregory L. Naber. *Topology, geometry, and gauge fields interactions*. Springer, 2011.

[4] Shigeyuki Morita. *Geometry of differential forms*. American Mathematical Society, 2001.