UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Il teorema dei numeri primi

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di laurea di
Luigi Pistis

ANNO ACCADEMICO 2009–2010

Indice

Introduzione 2

1 Fondamenti **4**
- 1.1 I numeri primi 4
- 1.2 Funzioni aritmetiche 4
- 1.3 Formula della somma di Abel 6
- 1.4 Stime integrali 9
- 1.5 Formula della somma di Eulero 10
- 1.6 Funzione li di Gauss e funzione θ di Chebyshev 11
- 1.7 Funzione Λ di von Mangoldt e funzione ψ di Chebyshev . . . 16

2 Analisi complessa e ζ di Riemann **18**
- 2.1 Serie di Dirichlet e funzione zeta di Riemann 18
- 2.2 Differenziabilità 20
- 2.3 Prodotto di Eulero 21
- 2.4 Funzione di Möbius 22
- 2.5 $\ln \zeta(s)$ e $\zeta'(s)/\zeta(s)$ 24
- 2.6 Estensione della funzione zeta a $\operatorname{Re} s > 0$ 26
  - 2.6.1 Serie di potenze 27
  - 2.6.2 Stime 28
- 2.7 Alcuni integrali complessi 32

3 Il teorema dei numeri primi **36**
- 3.1 Lemma fondamentale 36
- 3.2 Dimostrazione del teorema dei numeri primi 39

Bibliografia **41**

Introduzione

> La via più breve fra due verità sulla retta dei numeri reali passa attraverso il piano complesso.
>
> Hadamard

Lo scopo di questa tesi è presentare una dimostrazione del teorema dei numeri primi. I numeri primi sono di centrale importanza in matematica, e la prima domanda che ci si pone è quanti siano. É ben noto da Euclide che sono infiniti, e quindi viene naturale chiedersi come siano distribuiti. Come per molti interrogativi sui numeri primi la domanda è facile e comprensibile anche ai profani, mentre la risposta richiede uno sforzo e una buona preparazione matematica (o talvolta la risposta ancora non è stata trovata, per esempio si pensi alla congettura dei numeri primi gemelli). La distribuzione dei numeri primi sulla retta reale sembra del tutto casuale, e si possono trovare intervalli grandi a piacere in cui non se ne trovano. Il teorema che dimostreremo, risponde alla domanda: fissato n, quanti numeri primi ci sono da uno a n? La risposta non è semplice, ne tantomeno è esatta, infatti il teorema dei numeri primi fornisce una formula che approssima la risposta per ogni n. Molti dei grandi matematici del passato si sono occupati di questo problema, in questa tesi infatti verranno utilizzati risultati di Gauss, Abel, Eulero, Chebyshev, Riemann, ma la prima dimostrazione fu trovata nel 1896, indipendentemente, da Jaques Hadamard e da Charles-Jean de la Vallée Poussin. Tale dimostrazione si basa sull'analisi complessa (in particolare sulla zeta di Riemann). In seguito sono state trovate delle varianti e, nel 1949, è stata trovata da Erdös una dimostrazione elementare, ossia che non fa uso dell'analisi complessa.
Enunciamo ora il teorema e diamo l'idea della dimostrazione che presenteremo.

Teorema dei numeri primi Sia $\pi(x)$ la funzione che conta il numero di numeri primi minori di x. Allora si ha che, per $x \to \infty$,

$$\pi(x) \sim li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt \sim \frac{x}{\ln x} \sim \frac{x}{\ln x - 1}.$$

Per dimostrarlo si utilizzano le seguenti funzioni di Chebyshev:

$$\theta(x) = \sum_{p \in P[x]} \ln p \qquad \text{e} \qquad \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n),$$

dove Λ è detta funzione di Mangoldt ed è definita da

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{se } n = p^m \text{ per qualche primo } p \text{ e qualche intero } n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}.$$

Possiamo suddividere la dimostrazione nei passi seguenti:

(i) $\psi(x)/x \to 1$ per $x \to \infty$,

(ii) se $\psi(x)/x \to 1$ per $x \to \infty$, allora anche $\theta(x)/x \to 1$ per $x \to \infty$,

(iii) se $\theta(x)/x \to 1$ per $x \to \infty$ allora si ha che

$$(1 - \varepsilon) li(x) \leq \pi(x) \leq (1 + \varepsilon) li(x), \qquad (\text{cioè } \pi(x) \sim li(x))$$

(iv) $li(x) \sim x/\ln x \sim x/(\ln x - 1)$.

Il punto (iv) si può dimostrare subito dopo aver introdotto la funzione $li(x)$, e i punti (ii) e (iii) possono essere dimostrati con tecniche base di analisi reale. Mentre per dimostrare il primo punto, (i), è necessaria l'analisi complessa. Infatti si utilizza la funzione zeta di Riemann, altre funzioni ad essa collegate, alcune sue stime e gli integrali complessi.
Questa tesi è suddivisa in tre capitoli. Nel primo si trovano i risultati fondamentali scoperti prima dell'introduzione della zeta di Riemann. Nel secondo capitolo si trova la parte relativa all'analisi complessa. Nel terzo capitolo si dimostra il lemma fondamentale e il teorema dei numeri primi.
Si è cercato di mantenere la tesi autocontenuta e, a parte una base di analisi reale e alcune dimostrazioni di analisi complessa che sono rimandate alla bibliografia, si trova tutto ciò che è necessario per arrivare alla dimostrazione finale.

Capitolo 1

Fondamenti

1.1 I numeri primi

Definizione 1.1.1. Un intero positivo è detto primo se non ha divisori (positivi) tranne 1 e il numero stesso.

Osservazione 1.1.2. In questa tesi il numero 1 non è considerato primo.

Teorema 1.1.3. *(Teorema fondamentale dell'algebra) Ogni intero positivo è esprimibile come prodotto di primi. Tale espressione è unica se poniamo i fattori primi in ordine crescente.*

Teorema 1.1.4. *Esistono infiniti numeri primi.*

Osservazione 1.1.5. La dimostrazione del teorema precedente è un classico, si può trovare negli Elementi di Euclide, libro IX, Proposizione 20.

1.2 Funzioni aritmetiche

Definizione 1.2.1. Una funzione aritmetica è una successione $a(n)$ (a valori complessi o reali), cioè una funzione sull'insieme $\mathbb{N}^+$.

Osservazione 1.2.2. Si preferisce usare il termine funzione aritmetica al posto di successione se $a(n)$ è definita usando qualche proprietà della teoria dei numeri.

Esempio 1.2.3.

1. La funzione unitaria $u(n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

2. $$e_j(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = j \\ 0 & \text{se } n \neq j \end{cases}$$

3. Sia $E \subseteq \mathbb{N}$ un insieme, la funzione caratteristica $u_E : \mathbb{N} \to \{0,1\}$, è definita come
$$u_E(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \in E \\ 0 & \text{se } n \notin E \end{cases}$$

4. (a) $\tau(n)$: il numero di divisori (positivi) di n, inclusi 1 e n;
   (b) $\omega(n)$ il numero di divisori primi di n;
   (c) $\Omega(n)$ il numero di fattori primi di n, contati con ripetizione.

Teorema 1.2.4. *Sia $n > 1$ e sia $n = \sum_{j=1}^{m} p_j^{k_j}$ la sua fattorizzazione. Allora*

- $\tau(n) = \prod_{j=1}^{m}(k_j + 1)$
- $\omega(n) = m$
- $\Omega(n) = \sum_{j=1}^{m} k^j$

Dimostrazione. Per ω e Ω segue dalla definizione. Per τ osserviamo che i divisori di n sono della forma $\sum_{j=1}^{m} p_j^{r_j}$ dove per ogni j i possibili valori di r_j sono $0, 1, 2, \ldots, k_j$. Quindi segue la formula $\tau(n) = \prod_{j=1}^{m}(k_j + 1)$.

$\square$

Definizione 1.2.5. Sia $a(n)$ una funzione aritmetica a valori in $\mathbb{C}$, la sua somma parziale su $[1, \infty)$, è la funzione $A : [1, +\infty) \to \mathbb{C}$ definita da
$$A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

Notazione 1.2.6.

1. P è l'insieme dei numeri primi.
2. $P[x]$ è l'insieme dei numeri primi minori di x.
3. $[x]$ è la parte intera di x, cioè il più grande intero non maggiore di x.
4. Il simbolo $j \mid n$ significa che j divide n (divisione intera).

Teorema 1.2.7. *Siano $S_\tau(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n)$ e $S_\omega = \sum_{n \leq x} \omega(n)$ le somme parziali delle funzioni aritmetiche definite nel punto (4) dell'Esempio (1.2.3). Allora*
$$S_\tau(x) = \sum_{j \leq x} \left[\frac{x}{j}\right] \qquad e \qquad S_\omega(x) = \sum_{p \in P[x]} \left[\frac{x}{p}\right]$$

Dimostrazione. Possiamo considerare S_τ come l'insieme delle coppie ordinate (j, n) tali che $j \mid n$ e $n \leq x$. Se fissiamo j (al posto di n), il numero di tali coppie è dato dal numero di multipli di j non maggiori di x. Tale numero è dato da $\left[\frac{x}{j}\right]$. Per S_ω il ragionamento è simile, ma si contano le coppie (p, q) con p primo.

$\square$

Definizione 1.2.8. Sia (m, n) il massimo comun divisore M.C.D. di m e n. Una funzione aritmetica è detta:

- moltiplicativa se $a(m, n) = a(m)a(n)$ quando $(m, n) = 1$;
- completamente moltiplicativa se $a(m, n) = a(m)a(n)$ per ogni m, n.

Osservazione 1.2.9.

- Se $a(n)$ è moltiplicativa e non è identicamente nulla allora $a(1) = 1$, inoltre è completamente determinata dai valori $a(p^k)$ con p primo.
- Se $a(n)$ è completamente moltiplicativa è determinata completamente dai valori $a(p)$, al variare di p tra tutti i numero primi.

Esempio 1.2.10.

1. Sia $a(n) = n^s$, per ogni s è completamente moltiplicativa,
2. Ricordando l'Esempio 1.2.3,
   (a) $e_1(x)$ è completamente moltiplicativa,
   (b) e_j non è moltiplicativa in quanto $e_j(1) = 0$,
   (c) u_P non è moltiplicativa in quanto $u_P(1) = 0$.
   (d) τ è moltiplicativa (segue dal Teorema 1.2.4 e dal fatto che se $(n, m) = 1$ hanno differenti divisori primi). Ma non è moltiplicativa, infatti $\tau(2) = 2$ e $\tau(4) = 3 \neq \tau(2)\tau(2)$.

1.3 Formula della somma di Abel

La formula della somma di Abel è uno strumento base che useremo in seguito. Fornisce un modo per esprimere una somma di prodotti $\sum a(r)f(r)$ in termini di somme parziali degli $a(r)$ e differenza degli $f(r)$. É un procedimento simile all'integrazione per parti ed è talvolta chiamato somma per parti o somma parziale.

Teorema 1.3.1. *Siano $a(r)$ e $f(r)$ funzioni aritmetiche, per interi $n > m \geq 0$ si ha*

$$\sum_{r=m+1}^{n} a(r)f(r) = \sum_{r=m}^{n-1} A(r)[f(r) - f(r+1)] + A(n)f(n) - A(m)f(m).$$

In particolare

$$\sum_{r=1}^{n} a(r)f(r) = \sum_{r=0}^{n-1} A(r)[f(r) - f(r+1)] + A(n)f(n).$$

Dimostrazione. Per non appesantire la dimostrazione scriviamo A_r e f_r al posto di $A(r)$ e $f(r)$ rispettivamente. Per ogni $r \geq 1$ si ha $a_r = A_r - A_{r-1}$, quindi

$$\begin{aligned}
\sum_{r=m+1}^{n} a_r f_r = & \underbrace{(A_{m+1} - A_m)}_{a_{m+1}} f_{m+1} + \underbrace{(A_{m+2} - A_{m+1})}_{a_{m+2}} f_{m+2} + \cdots \\
& \cdots + \underbrace{(A_n - A_{n-1})}_{a_n} f_n = \\
& = -A_m f_{m+1} + \sum_{r=m+1}^{n-1} A_r(f_r - f_{r+1}) + A_n f_n = \\
& = -A_m f_{m+1} + \sum_{r=m}^{n-1} A_r(f_r - f_{r+1}) - A_m(f_m - f_{m+1}) + A_n f_n = \\
& = \sum_{r=m}^{n-1} A_r(f_r - f_{r+1}) + A_n f_n - A_m f_m
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.2. *Sia $a(r)$ una funzione aritmetica, $f(x)$ una funzione a valori complessi o reali con derivata continua in $[y, x]$ (mentre $f(n)$ è la funzione aritmetica ottenuta restringendo f a $\mathbb{N}^+$) e $A(x)$ la somma parziale associata ad $a(x)$.*

$$\sum_{y<r\leq x} a(r)f(r) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\, dt$$

Dimostrazione. Per n, m interi tali che $n \leq x \leq n+1$ e $m \leq y \leq m+1$, si ha

$$\sum_{y\leq r\leq x} a(r)f(r) = \sum_{r=m+1}^{n} a(r)f(r).$$

Poiché $A(t) = A(r)$ per $r \leq t \leq r+1$, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{r=m+1}^{n-1} A(r)[f(r) - f(r+1)] &= -\sum_{r=m+1}^{n-1} A(r) \int_r^{r+1} f'(t)\,dt = \\ &= -\sum_{r=m+1}^{n-1} \int_r^{r+1} A(t)f'(t)\,dt = \\ &= -\int_{m+1}^{n} A(t)f'(t)\,dt.\end{aligned}$$

Inoltre sia $A(t) = A(n)$ per $n \leq t \leq x$, si ha

$$A(x)f(x) - A(n)f(n) = A(n)[f(x) - f(n)] = \int_n^x A(t)f'(t)\,dt$$

e quindi

$$A(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_n^x A(t)f'(t)\,dt.$$

Allo stesso modo

$$A(m)f(m+1) - A(y)f(y) = A(m)[f(m+1) - f(y)] = \int_y^{m+1} A(t)f'(t)\,dt$$

e quindi

$$-A(m)f(m+1) = -A(y)f(y) - \int_y^{m+1} A(t)f'(t)\,dt$$

Ricordiamo dalla dimostrazione del Teorema 1.3.1 che

$$\sum_{r=m+1}^{n} a(r)f(r) = -A(m)f(m+1) + \sum_{r=m+1}^{n} A(r)(f(r) - f(r+1)) + A(n)f(n)$$

e sostituendo i risultati appena trovati otteminamo l'enunciato del teorema.

$\square$

Corollario 1.3.3. *Se f ha derivata continua nell'intervallo $[1, x]$, allora:*

(i)

$$\sum_{r \leq x} a(r)f(r) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)\,dt$$

(ii)

$$\sum_{r \leq x} a(r)[f(x) - f(r)] = \int_1^x A(t)f'(t)\,dt$$

Dimostrazione. Ponendo $y = 1$ nel Teorema 1.3.2, si ha

$$\sum_{1<r\leq x} a(r)f(r) = \sum_{2\leq r\leq x} a(r)f(r) = A(x)f(x) - A(1)f(1) - \int_1^x A(t)f'(t)\,dt$$

e poiché $A(1)f(1) = a(1)f(1)$ abbiamo la (i). La (ii) segue dalla (i) considerando che $A(x)f(x) = \sum_{r\leq x} a(r)f(x)$.

□

Corollario 1.3.4. *Se f ha derivata continua nell'intervallo $[2, x]$ e $a(1) = 0$, allora*

$$\sum_{2\leq r\leq x} a(r)f(r) = A(x)f(x) - \int_2^x A(t)f'(t)\,dt$$

Dimostrazione. Prendiamo $y = 2$ nel Teorema 1.3.2, e sommiamoci $a(2)f(2)$

$$a(2)f(2) \sum_{2<r\leq x} a(r)f(r) = \sum_{2\leq r\leq x} a(r)f(r) =$$

$$= a(2)f(2) + A(x)f(x) - A(2)f(2) - \int_2^x A(t)f'(t)\,dt$$

L'enunciato segue considerando che $a(1) = 0$ e quindi $A(2) = a(2)$.

□

1.4 Stime integrali

L'uso degli integrali per stimare una somma discreta è una tecnica utile che useremo in seguito

Teorema 1.4.1. *Supponiamo che f sia una funzione decrescente su $[m, n]$ con $m, n \in \mathbb{Z}$. Allora si ha*

$$f(m+1) + \ldots + f(n) \leq \int_m^n f(t)\,dt \leq f(m) + \ldots + f(n-1).$$

Dimostrazione. Sia $f(t)$ decrescente, allora per $r - 1 \leq t \leq r$ si ha $f(r) \leq f(t) \leq f(r-1)$. Integrando su questo intervallo (osservare che ha lunghezza 1) si ha

$$f(r) \leq \int_{r-1}^r f(t)\,dt \leq f(r-1).$$

Sommando questa diseguaglianza per $r = m+1, \ldots n$ si ottiene l'enunciato.

□

Osservazione 1.4.2. Se la funzione f è crescente valgono la disuguaglianze opposte

$$f(m+1)+\ldots+f(n) \geq \int_m^n f(t)\,dt \geq f(m)+\ldots+f(n-1).$$

Notazione 1.4.3. Sia $x \geq 1$ (non necessariamente intero) siano:

$$S(x) = \sum_{1\leq r\leq x} f(r) \qquad \text{e} \qquad I(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

Osservazione 1.4.4. Sia $m = 1$ nel Teorema 1.4.1, allora si ottiene

$$f(2)+\ldots+f(n) \leq \int_1^n f(t)\,dt \leq f(1)+\ldots+f(n-1)$$

cioè

$$S(n)-f(1) \leq I(n) \leq S(n-1)$$

o, equivalentemente,

$$I(n+1) \leq S(n) \leq I(n)+f(1) \tag{1.1}$$

Ciò mostra come trovare dei limiti per $S(n)$ usando $I(n)$ quando n è un intero.

Osservazione 1.4.5. Anche in questo caso quando $f(t)$ è crescente si hanno le diseguaglianze opposte.

Teorema 1.4.6. *Sia $f(t)$ decrescente e non negativa per ogni $t \geq 1$. Allora la serie $\sum_{r=1}^{\infty} f(r)$ è convergente se e solo se l'integrale $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ lo è. Se la somma della serie è S, e il valore dell'integrale è I, si ha $I \leq S \leq I+f(1)$.*

Dimostrazione. La convergenza della serie (o del'integrale) significa che $S(n)$ (o $I(n)$) tende ad un limite per $n \to \infty$. Sia $S(n)$ che $I(n)$ crescono cono n, quindi tendono ad un limite se e solo se sono limitati superiormente. Utilizzando l'Osservazione 1.4.4, se l'integrale converge a I allora $I(n) \leq I$ per ogni n, e quindi $S(n) \leq I+f(1)$. Quindi $S(n) \to S \leq I+f(1)$. Viceversa se la serie converge ad S allora $I(n) \leq S(n) \leq S$ per ogni n, quindi $I(n) \to I \leq S$.

□

1.5 Formula della somma di Eulero

Questa formula fornisce una espressione della differenza tra la sommatoria e il corrispondente integrale.

Teorema 1.5.1. *Siano m e n interi e f una funzione (a valori reali o complessi) derivabile nell'intervallo $[m, n]$. Allora:*

$$\sum_{r=m+1}^{m} f(r) - \int_m^n f(t)\,dt = \int_m^n (t-[t])f'(t)\,dt$$

Dimostrazione. Per $r-1 \leq t \leq r$ si ha $[t] = r-1$. Integriamo per parti

$$\int_{r-1}^{r} (t-[t])f'(t)\,dt = \int_{r-1}^{r} (t-r+1)f'(t)\,dt =$$

$$[(t-r+1)f(t)]_{r-1}^{r} - \int_{r-1}^{r} f(t)\,dt = f(r) - \int_{r-1}^{r} f(t)\,dt$$

Sommando per $r = m+1, \ldots n$ si ottiene l'enunciato.

□

Teorema 1.5.2. *Supponiamo che f sia differenziabile su $[1, \infty]$ e che $\sum_{r=1}^{\infty} f(r)$ e $\int_1^{\infty} f(t)\,dt$ siano entrambe convergenti, allora:*

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{\infty} f(r) - \int_1^{\infty} f(t)\,dt &= f(1) + \int_1^{\infty} (t-[t])f'(t)\,dt \\ &= 1/2f(1) + \int_1^{\infty} (t-[t]-1/2)f'(t)\,dt\end{aligned}$$

Dimostrazione. Per la prima espressione si prende $m = 1$ nel Teorema 1.5.1 e si fa tendere n ad infinito. Si osservi che la sommatoria nel Teorema 1.5.1 inizia con $f(2)$ e per questo abbiamo aggiunto $f(1)$. La seconda espressione deriva dalla prima.

□

1.6 Funzione li di Gauss e funzione θ di Chebyshev

Definizione 1.6.1. La funzione $li : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta integrale logartmico ed è definita da

$$li(x) = \begin{cases} \int_2^x \frac{1}{\ln t}\,dt & \text{se } x \leq 2 \\ 0 & \text{se } x \leq 2 \end{cases}$$

Osservazione 1.6.2. Sia

$$I_n(x) = \int_e^x \frac{1}{(\ln t)^n}\,dt.$$

Integrando per parti si trova

$$I_n(x) = \left[\frac{t}{(\ln t)^n}\right]_e^x + \int_e^x t\frac{n}{t(\ln t)^{n+}}\,dt = \frac{x}{(\ln x)^n} - e + nI_{n+1}(x).$$

Lemma 1.6.3. *Si ha*

$$I_n(x) \sim \frac{x}{(\ln x)^n} \qquad \textit{quando} \qquad x \to \infty.$$

Dimostrazione. Per l'Osservazione 1.6.2 si ha che l'enunciato è equivalente a dire che

$$I_{n+1}(x)\frac{(\ln x)^n}{x} \to 0 \qquad \textit{quando} \qquad x \to \infty.$$

Dividendo l'integrale in due parti e considerando che $\ln t \geq 1$ per $e \leq t \leq x^{1/2}$ (quindi $1/\ln t \leq 1$) e $\ln t \leq \ln(x^{1/2}) = 1/2 \ln x$ per $x^{1/2} \leq t \leq x$ (cioè $1/\ln t \leq 2/\ln x$), si ha

$$\begin{aligned} I_{n+1}(x) = \int_e^{x^{1/2}} \frac{1}{(\ln t)^{n+1}}\, dt + \int_{x^{1/2}}^{x} \frac{1}{(\ln t)^{n+1}}\, dt \leq \\ \leq x^{1/2} + x\left(\frac{2}{\ln x}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

dove la lunghezza degli intervalli di integrazione è stata stimata superiormente con $x^{1/2}$ e x rispettivamente. Quindi si ha

$$I_{n+1}(x)\frac{(\ln x)^n}{x} \leq \frac{(\ln x)^n}{x^{1/2}} + \frac{2^{n+1}}{\ln x}$$

che, come desiderato, converge a 0 per $x \to \infty$.

□

Teorema 1.6.4. *Si ha che $li(x) \sim x/\ln x$ quando $x \to \infty$. Più esattamente*

$$li(x) = \frac{x}{\ln x} + r(x)$$

dove

$$r(x) \sim \frac{x}{(\ln x)^2} \quad \textit{quando} \quad x \to \infty$$

Dimostrazione. La prima parte segue dal Lemma 1.6.3 con $n = 1$. Mentre usando l'Osservazione 1.6.2 si ha $li(x)$[1] $= I_1(x) = \frac{x}{\ln x} + I_2(x) - e$, ed ancora dal Lemma 1.6.3 si ottiene $r(x) = I_2(x) - e \sim x/(\ln x)^2$ che è la seconda parte dell'enunciato

□

Teorema 1.6.5.

$$li(x) = \frac{x}{\ln x - 1} + q(x)$$

dove

$$q(x) \sim \frac{x}{(\ln x)^3} \quad \textit{quando} \quad x \to \infty$$

[1]Senza ledere la generalità, si può integrare a partire da e invece che da 2, onde evitare di portare dietro nei calcoli la costante $2/\ln 2$.

Dimostrazione. Dall' Osservazione 1.6.2, sappiamo che $I_1(x) = \frac{x}{\ln x} + I_2(x) - e$ e $I_2(x) = \frac{x}{(\ln x)^2} + 2I_3(x) - e$, mettendoli insieme si ha

$$I_1(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} - 2e + 2I_3(x).$$

Sia ora

$$q(x)^2 = I_1(x) - \frac{x}{\ln x - 1} = \frac{x}{(\ln x - 1)(\ln x)^2} - 2e + 2I_3(x),$$

quindi

$$q(x)\frac{(\ln x)^3}{x} \to -1 + 0 + 2 = 1 \qquad \text{quando} \qquad x \to \infty$$

Dove si è usato nuovamente il Lemma 1.6.3 per $I_3(x)\frac{(\ln x)^3}{x} \to 1$ per $x \to \infty$.

□

Osservazione 1.6.6. I teoremi 1.6.4 e 1.6.5 mostrano che l'approssimazione di $li(x)$ con $x/(\ln x - 1)$ è migliore di quella con $x/\ln x$ per un fattore $\ln x$.

Osservazione 1.6.7. I teoremi 1.6.4 e 1.6.5 provano la seconda parte del teorema dei numeri primi, cioè

$$li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\, dt \sim \frac{x}{\ln x} \sim \frac{x}{ln - 1}.$$

Definizione 1.6.8. La funzione

$$\theta(x) = \sum_{p \in P[x]} \ln p$$

è detta funzione theta di Chebyshev.

Osservazione 1.6.9. Se $p_1, \ldots p_n$ sono in primi non maggiori di x, si ha $\theta(x) = \ln p_1 + \ldots + \ln p_n = \ln(p_1 p_2 \ldots p_n)$.

Definizione 1.6.10. $\pi(x) =$ il numero dei numeri primi non maggiori di x.

Teorema 1.6.11. *Per ogni $x > 0$ si ha $\theta(x) \leq \pi(x)\ln(x) \leq x \ln x$.*

Dimostrazione. É immediata, dall'Ossevazione 1.6.9 che $n = \pi(x)$ e considerando che $\ln p_j \leq \ln x$ per ogni $j \leq n$.

□

[2]É stato omesso il seguente passaggio nel calcolo di $q(x)$:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y-1} = \frac{(y+1)(y-1) - y^2}{y^2(y-1)}$$

con $y = \ln x$.

Teorema 1.6.12. *Valgono le seguenti relazioni che esprimono θ in funzione di π (e viceversa):*

(i)
$$\theta(x) = \pi(x)\ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt$$

(ii)
$$\pi(x) = \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\ln t)^2}\,dt$$

Dimostrazione Sia u_P la funzione caratteristica, allora

$$\theta(x) = \sum_{n\le x} u_P(n)\ln n = \pi(x)\ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}\,dt$$

dove nell'ultimo passaggio si utilizza il Teorema 1.3.4 con $a = u_P$, $A(x) = \sum_{r\le x} a(r) = \pi(x)$ e $f(x) = \ln(x)$.

Per dimostrare la (ii) poniamo

$$a(n) = \begin{cases} \ln n & \text{se } n \text{ è primo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \pi(x) = \sum_{2\le n\le x} a(n)\frac{1}{\ln n}$$

questo posso farlo considerando che $\frac{a(n)}{\ln n} = 1$ se n è primo. Ora utilizzando nuovamente il Teorema 1.3.4 ponendo $f = \ln$ e osservando che $\theta(x) = \sum_{n\le x} a(n)$ si ha

$$\pi(x) = \sum_{2\le n\le x} a(n)f(n) = \theta(x)\frac{1}{\ln x} - \int_2^x \theta(t)\frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt.$$

□

Concludiamo con un teorema fondamentale per la dimostrazione del teorema dei numeri primi.

Teorema 1.6.13. *Supponiamo che per qualche costante c_0 e C_0 si abbia che $c_0x \le \theta(x) \le C_0x$ per tutti gli $x \ge 2$. Allora*

$$c_0[li(x) + \alpha] \le \pi(x) \le C_0[li(x) + \alpha]$$

per ogni $x \ge 2$, con $\alpha = 2/\ln 2$. Inoltre se per qualche costante c e C e qualche x_0 si ha che $cx \le \theta(x) \le Cx$ per tutti gli $x \ge x_0$. Allora esiste x_1 tale che

$$(c - \varepsilon)li(x) \le \pi(x) \le (C + \varepsilon)li(x) \tag{1.2}$$

per ogni $x \ge x_1$ con $\varepsilon > 0$.

Dimostrazione. Integrando per parti (con 1 come fattore) si ottiene

$$li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\, dt = \frac{x}{\ln x} - \alpha + \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\, dt,$$

dove $\alpha = 2/\ln 2$, quindi

$$c_0[li(x) + \alpha] = \frac{c_0 x}{\ln x} + \int_2^x \frac{c_0}{(\ln t)^2}\, dt.$$

Confrontando con la (1.6.12.(ii))e utilizzando l'ipotesi che $c_0 x \leq \theta(x)$ possiamo concludere che $c_0[li(x) + \alpha] \leq \pi(x)$. Il ragionamento è simile (usando $\theta(x) \leq C_0 x$) per dimostrare che $\pi(x) \leq C_0[li(x) + \alpha]$

Per la seconda parte dell'enunciato prendiamo $x > x_0$, allora si ha

$$\begin{aligned} \pi(x) =& \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\theta(t)}{t(\ln t)^2}\, dt = \\ =& \frac{\theta(x)}{\ln x} + \int_2^{x_0} \frac{\theta(t)}{t(\ln t)^2}\, dt + \int_{x_0}^x \frac{\theta(t)}{t(\ln t)^2}\, dt = \\ =& \frac{\theta(x)}{\ln x} + C\int_2^{x_0} \frac{1}{(\ln t)^2}\, dt + K + \int_{x_0}^x \frac{\theta(t)}{t(\ln t)^2}\, dt \end{aligned}$$

dove

$$K = \int_2^{x_0} \left(\frac{\theta(t)}{t(\ln t)^2} - \frac{C}{(\ln t)^2} \right).$$

Ora possiamo usare la condizione $\theta(x) \leq Cx$ e $li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\, dt = \frac{x}{\ln x} - \alpha + \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\, dt$ e si trova:

$$\begin{aligned} \pi(x) \leq& \frac{Cx}{\ln x} + C\int_2^{x_0} \frac{1}{(\ln t)^2}\, dt + K + \int_{x_0}^x \frac{C\,\cancel{t}}{\cancel{t}(\ln t)^2}\, dt = \\ =& \frac{Cx}{\ln x} + C\int_2^{x} \frac{1}{(\ln t)^2}\, dt + K = \\ =& C\left(\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{1}{(\ln t)^2}\, dt \right) + K = \\ =& C(li(x) + \alpha) + K = Cli(x) + K' \end{aligned}$$

dove $K' = C\alpha + K$. Poiché $li(x) \to \infty$ per $x \to \infty$, esiste x_1 tale che, per $x \leq x_1$ si abbia $K' \leq \varepsilon li(x)$, e quindi

$$\pi \leq (C + \varepsilon) li(x).$$

Per la disuguaglianza a sinistra si procede allo stesso modo usando la condizione $cx \leq \theta(x)$.

□

Osservazione 1.6.14. Per dimostrare il teorema dei numeri primi dimostreremo che $\theta(x)$ soddisfa le ipotesi del Teorema 1.6.13 con $c = 1 - \varepsilon$ e $C = 1 + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$.

1.7 Funzione Λ di von Mangoldt e funzione ψ di Chebyshev

Definizione 1.7.1. La funzione

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{se } n = p^m \text{ per qualche primo } p \text{ e qualche intero } m \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è detta funzione di von Mangoldt.

Definizione 1.7.2. La somma parziale

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

relativa alla Λ è detta *psi* di Chebyshev.

Osservazione 1.7.3. Siano $p_1, p_2, \ldots, p_n$ i primi non maggiori di x, per $j \leq n$ sia k_j il più grande k tale che $p_j^k \leq x$. Allora per $1 \leq k \leq k_j$, ogni p_j^k contribuisce con un termine $\ln p_j$ a $\psi(x)$, e quindi si ha che $\psi(x) = k_1 \ln p_1 + \cdots + k_n \ln p_n$

Teorema 1.7.4. *Per ogni $x > 0$, si ha $\psi \leq \pi(x)\ln(x)$.*

Dimostrazione. Con la notazione dell'osservazione precedente si ha che $n = \pi(x)$ e che $p_j^{k_j} \leq x \Rightarrow \ln p_j^{k_j} \leq \ln x \Rightarrow k_j \ln p_j \leq \ln x \Rightarrow \psi(x) \leq \pi(x) \ln x$

□

Lemma 1.7.5. *Sia m il più grande intero tale che $2^m \leq x$. Allora*

$$\psi(x) = \theta(x) + \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/3}) + \cdots + \theta(x^{1/m}).$$

Dimostrazione. Per ogni $k \leq m$ la differenza $\psi(x) - \theta(x)$ contiene un termine $\ln p$ per ogni p tale che $p^k \leq x$, cioè $p \leq x^{1/k}$. Questi primi possono esistere soltanto se $k \leq m$ (perché 2 è il primo più piccolo), quindi $k = 1, 2, \ldots, m$. Fissato k, la somma di tali termini è $\theta(x^{1/k})$ (per come è definita $\theta(x)$.

□

Osservazione 1.7.6. Considerando che quando $x < 2^n$, cioè $x^{1/n} < 2$ si ha $\theta(x^{1/m}) = 0$, possiamo enunciare il lemma precedente anche nel modo seguente:

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta(x^{1/n}).$$

Teorema 1.7.7. *Si ha*

$$\frac{1}{x}[\psi(x) - \theta(x)] \to 0$$

quando $x \to \infty$. Quindi se una tra $\psi(x)/x$ e $\theta(x)/x$ tende ad un limite l per $x \to \infty$, anche l'altro lo fa.

Dimostrazione. Per dimostrarlo usiamo il Teorema 1.6.11 e il Lemma 1.7.5,

$$\begin{aligned}
\psi(x) - \theta(x) =& \theta(x^{1/2}) + \theta(x^{1/3}) + \cdots + \theta(x^{1/m}) \leq \\
\leq& \theta(x^{1/2}) + m\theta(x^{1/3}) \leq \frac{1}{2}x^{1/2}\ln x + \frac{m}{3}x^{1/3}\ln x \leq \\
\leq& \frac{1}{2}x^{1/2}\ln x + \frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln 2}x^{1/3}\ln x = \\
=& \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{\ln x}{\ln 2}x^{1/3-1/2}\right)x^{1/2}\ln x \leq \\
\leq& \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\ln 2}\frac{1}{e}\right)x^{1/2}\ln x < \\
<& 2x^{1/2}\ln x.
\end{aligned}$$

Nei passaggi precedenti m è stato maggiorato con $\ln x/\ln 2$ (poiché $2^m \leq x$), e la funzione $1/3\ln x/x^{1/6}$ con il suo massimo. Quindi $0 \leq \psi(x) - \theta(x) < 2x^{1/2}\ln x$ e il teorema è dimostrato (considerando che il limite per $x \to \infty$ di $(2x^{1/2}\ln x)/x$ è zero).

□

Osservazione 1.7.8. Dal Teorema 1.6.13 e dalla (1.2) del Teorema 1.7.7, segue che per dimostrare il teorema dei numeri primi è sufficiente che $\psi(x)/x \to 1$ per $x \to \infty$. Per dimostrare questo abbiamo bisogno di risultati di analisi complessa trattati nel capitolo successivo.

Capitolo 2

Analisi complessa e ζ di Riemann

2.1 Serie di Dirichlet e funzione zeta di Riemann

Notazione 2.1.1. Nel seguito della tesi indicheremo un numero complesso con $s = \sigma + it$.

Definizione 2.1.2. Una serie di Dirichlet è una serie della forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

Osservazione 2.1.3. Ad ogni funzione aritmetica possiamo associare una funzione di Dirichlet definita in questo modo.

Definizione 2.1.4. La funzione zeta di Riemann è la serie di Dirichlet nel caso $a(n) = 1$, ovvero

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Teorema 2.1.5. *(proprietà della funzione zeta a variabile reale) $\zeta(\sigma)$ converge per ogni $\sigma > 1$. Per tali σ si ha che $\zeta(\sigma)$ è maggiore di 1 ed è decrescente. Inoltre*

$$\frac{1}{\sigma - 1} \leq \zeta(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma - 1} + 1.$$

Dimostrazione. Innanzitutto $\zeta(\sigma)$ è decrescente perché lo è ogni termine $1/n^\sigma$. Sia $f(t) = 1/t^\sigma$, allora

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^\sigma}\, dt = \frac{1}{\sigma - 1}.$$

Applicando il Teorema 1.4.6 si ottiene l'enunciato.

□

Teorema 2.1.6. *Sia $a(n)$ una funzione aritmetica, e sia $A(x) = \sum_{n \le x} a(n)$ la somma parziale associata. Allora per ogni $X \ge 1$ si ha:*

$$\sum_{n \le X} \frac{a(n)}{n^s} = \frac{A(X)}{X^s} + s \int_1^X \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

Supponiamo che $s \neq 0$ e $A(x)/x^s \to 0$ per $x \to \infty$. Allora se una tra

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \qquad e \qquad s \int_1^{\infty} \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx$$

converge, allora anche l'altra converge allo stesso valore. Inoltre per $X \ge 1$, si ha

$$\sum_{n > X} \frac{a(n)}{n^s} = -\frac{A(X)}{X^s} + s \int_X^{\infty} \frac{A(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si usa il Corollario 1.3.3.(i)) applicata alla funzione $f(x) = 1/x^s$.

□

Teorema 2.1.7. *Supponiamo f sia continua tranne in valori interi, e che abbia limite destro e sinistro in ogni intero (questa condizione è soddisfatta da somme parziali di funzioni aritmetiche). Supponiamo inoltre che per qualche α reale positivo si abbia $|f(x)| \le Mx^{\alpha}$ per ogni $x \ge 1$. Allora*

$$I(s) = \int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x^{s+1}}\, dx$$

è convergente per ogni $s = \sigma + it$ con $\sigma > \alpha$. Inoltre, per $\sigma > \alpha$, si ha

$$|I(s)| \le \frac{M}{\sigma - \alpha}$$

Dimostrazione. La prima condizione assicura che la funzione sia integrabile secondo Riemann. Ricordando che $|x^s| = x^{\sigma}$, si ha

$$\left| \frac{f(x)}{x^{s+1}} \right| \le \frac{M}{x^{\sigma - \alpha + 1}}$$

inoltre si ha che $\int_1^{\infty} \frac{1}{x\sigma - \alpha + 1}\, dx = \frac{1}{\sigma - \alpha}$. La dimostrazione è conclusa una volta considerata la seguente proprietà degli integrali: $|\int_a^b g(x)\, dx| \le \int_a^b |g(x)|\, dx$

□

Osservazione 2.1.8. $I(s) = \int_1^{\infty} \frac{f(x)}{x^{s+1}}\, dx$ è detto talvolta integrale di Dirichlet.

Lemma 2.1.9. *Sia $a(n)$ una funzione aritmetica e sia $A(x) = \sum_{n\leq x} a(n)$ la somma parziale associata. Supponiamo che $|A(x)| \leq Mx^{\alpha}$ per ogni $x \geq 1$, per qualche $\alpha \geq 0$. Allora la serie di Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^s$ è convergente per ogni $s = \sigma + it$ con $\sigma > \alpha$. Chiamiamo $F(s)$ tale somma, e sia $F_X(s) = \sum_{n\leq X} a(n)/n^s$. Allora*

$$|F(s)| \leq M\frac{|s|}{\sigma - \alpha} \qquad e \qquad |F(s) - F_X(s)| \leq \frac{M}{X^{\sigma-\alpha}}\left(\frac{|s|}{\sigma - \alpha} + 1\right)$$

Dimostrazione. Segue dai teoremi 2.1.7 e 2.1.6.

□

2.2 Differenziabilità

Lemma 2.2.1. *Se (f_n) è una successione di funzioni olomorfe che converge uniformemente ad una funzione f in qualche rettangolo E, allora f è olomorfa su $int(E)$ e $f'(s) = \lim_{n\to\infty} f_n'(s)$ per ogni $s \in int(E)$.*

Teorema 2.2.2. *Supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^s$ converga a $F(s)$ per $\operatorname{Re} s > \sigma_c$. Allora $F(s)$ è olomorfa per tali s con derivata data da*

$$F'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\ln n}{n^s}$$

Dimostrazione. Sia $\alpha > \sigma_c$,$b(n) = a(n)/n^{\alpha}$ e $B(x) = \sum_{n\leq x} b(n)$. Allora $\sum_{n=1}^{\infty} b(n)$ converge, quindi eisiste M tale che $|B(x)| \leq M$, per ogni $x \geq 1$. Sia inoltre $F(s) = G(s-\alpha)$, dove $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)/n^s$. Dimostreremo che $G(s)$ è olomorfa e ha derivata come enunciato, per $\operatorname{Re} s > 0$. Quindi segue che

$$F'(s) = G'(s-\alpha) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)\ln n}{n^{s-\alpha}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\ln n}{n^s}$$

per ogni s tale che $\operatorname{Re} s > \alpha > \sigma_c$. Per la dimostrazione si usa il Lemma 2.2.1. Sia $G_N(s) = \sum_{n=1}^{N} b(n)/n^s$, poiché è una somma finita si ha

$$G'(s) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{b(n)\ln n}{n^s}.$$

Presi $\delta > 0$,$R > 0$, sia $E_{\delta,R} \in \mathbb{C}$ l'insieme constituito dagli $s = \sigma + it$ con $\sigma \geq \delta$ e $|t| \leq R$. Vedremo che $G_N \to G(s)$ uniformemente su $E_{\delta,R}$ e da ciò segue il teorema. Usando il Lemma 2.1.9 con $\alpha = 0$, si ha

$$|G(s) - G_N(s)| \leq \frac{M}{X^{\sigma}}\left(\frac{|s|}{\sigma} + 1\right)$$

e, poiché $s \in E_{\delta,R}$,

$$\frac{|s|}{\sigma} \leq \frac{\sigma + |t|}{\sigma} = 1 + \frac{|t|}{\sigma} \leq 1 + \frac{R}{\sigma}$$

e quindi

$$|G(s) - G_N(s)| \leq \frac{M}{X^\sigma}\left(\frac{R}{\sigma} + 2\right)$$

che tende a zero per $N \to \infty$ e prova la uniforme convergenza.

□

Teorema 2.2.3. *Supponiamo $f(x)$ continua tranne in valori interi, e che abbia limite destro e sinistro in ogni intero. Supponiamo inoltre che $|f(x)| \leq Mx^\alpha$ per ogni $x \geq 1$. Sia*

$$I(s) = \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}}\, dx.$$

Allora $I(s)$ è olomorfa per $s = \sigma + it$ con $\sigma > \alpha$, e

$$I'(s) = -\int_1^\infty \frac{f(x) \ln x}{x^{s+1}}\, dx.$$

Dimostrazione. Per poter derivare sotto il segno di integrale dobbiamo avere (oltre alla prima condizione) l'uniforme convergenza. Sia $E_\delta = \{s : \sigma \geq \alpha + \delta\}$. Usando il Teorema 2.1.7, per $s \in E_\delta$ e per $N \in \mathbb{N}$, si ha

$$|I(s) - I_N(s)| \leq \frac{M}{(\sigma - \alpha)N^{\sigma - \alpha}} \leq \frac{M}{\delta N^\delta}.$$

Quindi $I_N(s) \to I(s)$ per $N \to \infty$ uniformemente in E_δ.

□

2.3 Prodotto di Eulero

Notazione 2.3.1. Nel seguito considerando serie della forma $\sum_{p \in P} f(p)$ è implicito che i numeri primi sono presi in ordine crescente.

Teorema 2.3.2. *Supponiamo che la somma ripetuta $\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty |a_{j,k}|$ converga. Allora le somme ripetute $\sum_{j=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty a_{j,k}$ e $\sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty a_{j,k}$ convergono alla stessa somma S. Inoltre se $\sum_{n=1}^\infty c_n$ è una qualunque serie ottenuta disponendo i termini $a_{j,k}$ in una singola serie, $\sum_{n=1}^\infty c_n$ converge a S.*

Dimostrazione. Una dimostrazione può essere trovata nell'appendice B di [Jam].

□

Teorema 2.3.3. *(prodotto semplice di Eulero) Per* $\operatorname{Re} s > 1$*, si ha*

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \tag{2.1}$$

*Dimostrazione.*La ζ di Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \tag{2.2}$$

è convergente per $\operatorname{Re} s > 1$. Moltiplicando ambo i membri di (2.2) per $\frac{1}{2^s}$ si ha

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} \cdots , \tag{2.3}$$

e poi sottraendo (2.3) da (2.2)

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} \cdots . \tag{2.4}$$

Ripetiamo il procedimento moltiplicando per $\frac{1}{3^s}$ e poi sottraendo da (2.4)

$$\frac{1}{3^2}\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \frac{1}{21^s} + \frac{1}{27^s} \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + \cdots$$

Alla fine si avrà

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\cdots\zeta(s) = 1$$

e quindi

$$\zeta(s) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\cdots}$$

□

Osservazione 2.3.4. $\zeta(s) \neq 0$ per $\operatorname{Re} s > 1$.

2.4 Funzione di Möbius

Definizione 2.4.1. La funzione

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^k & \text{se } n \text{ è prodotto di } k \text{ primi distinti } (n = p_1 p_2 \dots p_k) \\ 0 & \text{se } p^2 \mid n \text{ per qualche primo } p \end{cases}$$

è detta funzione di Möbius.

Teorema 2.4.2. *Per* $\operatorname{Re} s > 1$, *si ha*

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$$

Dimostrazione. Usando il prodotto di Eulero (2.1), si ha

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$

Fissato un numero N, sia

$$Q_N = \prod_{p \in P[N]} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

se $n = p_1 p_2 \cdots p_k$, con $p_j \leq N$, allora (sfruttando il fatto che $a(n) = 1/n^s$ è completamente moltiplicativa)

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{p_1^s} \frac{1}{p_2^s} \cdots \frac{1}{p_k^s}$$

quindi $(-1)^k a(n)$ è un termine di Q_N, anche $a(1) = 1$ è un termine di Q_N. Ma se un certo p_j^2 è un fattore di n, allora in Q_N non c'è un termine $a(n)$. Quindi se E_N è l'insieme degli interi esprimibile come prodotto di primi in $P[N]$ si ha

$$Q_N = \sum_{n \in E_N} \mu(n) a(n) = \sum_{n \in E_N} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Rimane da dimostrare che la serie converge, ma questo è vero perché $|\mu(n)| \leq 1$ per ogni n.

□

Lemma 2.4.3. *Per* $s = \sigma + it$ *con* $\sigma > 1$ *si ha*

$$\left| \frac{1}{\zeta(s)} \right| \leq \zeta(\sigma)$$

Dimostrazione. Deriva dal Teorema 2.4.2 e dal fatto che $|\mu(n)| \leq 1$ per ogni n.

□

2.5 $\ln \zeta(s)$ e $\zeta'(s)/\zeta(s)$

Sia w il logaritmo di un numero complesso z, allora $e^w = z$ ed esso non è unico. Siano $z_j \in \mathbb{C}$, con $j \in \mathbb{N}$, dei numeri complessi e siano w_j i loro logaritmi. Se questi ultimi possono essere scelti in modo tale che la somma $\sum_{j=1}^{\infty} w_j$ sia convergente a un certo w, allora

$$e^w = e^{\sum_{j=1}^{\infty} w_j} = \prod_{j=1}^{\infty} z_j.$$

E quindi w è un logaritmo di $\prod_{j=1}^{\infty} z_j$. Dunque utilizzando il prodotto di Eulero (2.1) si può osservare che otteniamo un logaritmo della funzione $\zeta(s)$ se per ogni p possiamo scegliere un logaritmo w_p di $\left(\frac{1}{1-p^{-s}}\right)$ in modo tale che $\sum_{p\in P} w_p$ converga. Ora vederemo come ottenere questo risultato.

Lemma 2.5.1. *Sia* $h(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m/m$ *per* $|z| < 1$*. Allora* $h(z)$ *è un logaritmo di* $1/(1-z)$*. Inoltre* $|h(z)| \leq 2|z|$ *quando* $|z| \leq 1/2$*.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che se $h(z)$ è un logaritmo di $1/(1-z)$ si ha $e^{h(z)} = 1/(1-z) \Rightarrow (1-z)e^{h(z)} = 1$. Inoltre la serie $h(z)$ converge per $|z| < 1$. Derivando si ottiene

$$h'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{m-1} = \frac{1}{1-z}$$

e quindi

$$\frac{d}{dz}(1-z)e^{h(z)} = -e^{h(z)} + \frac{(1-z)}{(1-z)}e^{h(z)} = 0$$

perciò $(1-z)e^{h(z)} = c$, con c costante. Se prendiamo $z = 0$ si trova $c = 1$ che è ciò che volevamo dimostrare. Inoltre per $|z| \leq 1/2$ si ha

$$|h(z)| = \sum_{m=1}^{\infty} (|z|^m/m) = \frac{|z|}{1-|z|} \leq 2|z|.$$

□

Teorema 2.5.2. *Per* $\mathrm{Re}\, s > 1$*, una funzione olomorfa che è logaritmo di* $\zeta(s)$ *è definita da*

$$H(s) = \sum_{p\in P} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$$

con

$$c(n) = \begin{cases} 1/m & \textit{se } n = p^m \textit{ per qualche primo } p \textit{ e qualche intero } n \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

entrambe le serie sono assolutamente convergenti.

Dimostrazione. Con h definita come nel Lemma 2.5.1 se $\sum_{p\in P} h(1/p^s)$ è convergente allora è un logaritmo di $\zeta(s)$.

$$\sum_{p\in P} h(1/p^s) = \sum_{p\in P} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{p^s}\right)^m = \sum_{p\in P} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms}}.$$

Quest'ultima sarà convergente se, ricordando il Teorema 2.3.2, è convergente

$$\sum_{p\in P} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma}}.$$

in quanto $|p^{ms}| = p^{m\sigma}$. Ma questo è vero, in quanto, utilizzando la seconda parte del Lemma 2.5.1,si ha

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma}} = h\left(\frac{1}{p^\sigma}\right) \leq \frac{2}{p^\sigma}$$

e $\sum_{p\in P}(2/p^\sigma)$ è convergente. Inoltre dal Teorema 2.2.2 sappiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$ è olomorfa.

□

Abbiamo trovato quindi un logaritmo di ζ che possiede derivata, consideriamo tale derivata.

Teorema 2.5.3. *Per* $\operatorname{Re} s > 1$ *si ha*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

dove Λ *è la funzione di von Mangoldt della Definizione 1.7.1.*

*Dimostrazione.*Si ricordi che, se $g(s)$ differenziabile e $e^g(s) = f(s)$ si ha che $g'(s)e^{g(s)} = f'(s) \Rightarrow g'(s) = f'(s)/f(s)$. Nel nostro caso sia $H(s)$ definita come nel Teorema 2.5.2, si ha

$$H'(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta'(s)} = -\sum_{n-1}^{\infty} \frac{c(n)\ln n}{n^s}$$

dove nell'ultimo passaggio si è usato il Teorema 2.2.2. Ora, sia $n = p^m$, si ha

$$c(n)\ln n = \frac{1}{m} m \ln p = \ln p$$

il che conclude la dimostrazione.

□

2.6 Estensione della funzione zeta a $\operatorname{Re} s > 0$

Definizione 2.6.1. Per $\operatorname{Re} s > 0$ sia

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s\int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx \tag{2.5}$$

Teorema 2.6.2. *La funzione $\zeta(s)$ (2.5), è definita e olomorfa per tutti gli $s \neq 1$ con $\operatorname{Re} s > 0$, e soddisfa*

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 + r_1(s)$$

dove $|r_1(s)| \leq |s|/\sigma$. La derivata è data da

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} - \int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx + s\int_1^\infty \frac{(x-[x])\ln x}{x^{s+1}}\,dx.$$

Inoltre $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ è olomorfa in $s = 1$, quindi $\zeta(s)$ ha un polo semplice in $s = 1$

Dimostrazione. Prendiamo $f(x) = 1/x^s$, si ha $\int_1^\infty f(x)\,dx = 1/(s-1)$ per $\operatorname{Re} s > 1$. Usando il Teorema 1.5.2 si ha la (2.5).

Ora, poiché $0 \leq x - [x] < 1$ per ogni x possiamo applicare il Teorema 2.1.7 con $M = 1, \alpha = 0$ e quindi l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx$$

è convergente a $I(s)$ per ogni $s = \sigma + it$ con $\sigma > 0$ e $|I(s)| \leq 1/\sigma$. Inoltre dal Teorema 2.2.3 sappiamo che, per tali s, $I(s)$ è olomorfa e che

$$I'(s) = -\int_1^\infty \frac{x-[x]-\ln x}{x^{s+1}}\,dx$$

e quindi l'espressione per $\zeta'(s)$ si ottiene utilizzando $I'(s)$ e le usuali regole di derivazione.

□

Teorema 2.6.3. *Per ogni $s \neq 1$ con $\operatorname{Re} > 0$ e tutti gli interi $N \leq 1$, si ha*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + r_N(s)$$

dove

$$r_N(s) = -s\int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx.$$

Inoltre si ha

$$|r_N(s)| \leq \frac{|s|}{\sigma N^\sigma},$$

quindi

$$\zeta(s) = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} \right).$$

Dimostrazione. Applichiamo la formula per la somma di Eulero del Teorema 1.5.1 alla funzione $f(x) = 1/x^s$ (con $s \neq 1$) e aggiungiamo il termine $f(1) = 1$, si trova

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_1^N \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx.$$

Sottraiamo quest'ultima dalla (2.5) e troviamo l'enunciato. Per concludere si osservi che (poiché $x - [x] \leq 1$)

$$\left| \int_N^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}\,dx} \right| \leq \int_N^\infty \frac{1}{x^{\sigma+1}}\,dx = \frac{1}{\sigma N^\sigma}$$

□

2.6.1 Serie di potenze

Lemma 2.6.4. *Si ha*

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \to \gamma \qquad \textit{quando} \qquad s \to 1$$

dove $\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^2}\,dx$ è detta costante di Eulero. In qualche disco con centro in $s = 1$, $\zeta(s)$ è esprimibile in serie di potenze

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \sum_1^\infty c_n (s-1)^n.$$

Dimostrazione. Per $s \neq 1$ dalla (2.5) e dal Teorema 2.6.2, sappiamo che

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - sI(s) \qquad \text{dove} \qquad I(s) = \int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx$$

e sappiamo che $I(s)$ è definita e olomorfa in $s = 1$. Quindi

$$\lim_{s\to 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = +1 - I(1) = 1 - \int_1^\infty \frac{x-[x]}{x^{s+1}}\,dx = \gamma.$$

Ne segue che $\zeta(s)$ è esprimibile nella serie di potenze richiesta e converge almeno in $|s-1| < 1$.

□

Osservazione 2.6.5. La costante di Eulero γ è circa $0.577216\ldots$.

Osservazione 2.6.6. Si ha

$$\zeta'(s) = -\frac{1}{(s-1)^2} + c_1 + 2c_2(s-1) + \cdots .$$

Lemma 2.6.7. *In qualche disco con centro in $s = 1$, si ha l'espressione in serie di potenze*

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \gamma + a_1(s-1) + \cdots$$

Dimostrazione. Si noti che $\zeta(s)$ è della forma $g(s)/(s-1)$, dove $g(s)$ è differenziabile e e non nulla in 1. Segue che

$$\frac{1}{\zeta(s)} = (s-1)\frac{1}{g(s)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{g'(s)}{g(s)} - \frac{1}{s-1}$$

(in cui $1/g(s)$ è ben definita e differenziabile in 1). Allora $\zeta'(s)/\zeta(s)$ è esprimibile in serie di potenze (in qualche disco con centro 1), cioè

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + a_0 + a_1(s-1) + \cdots .$$

Il prodotto di questa serie per $\zeta(s)$ deve essere uguale a $\zeta'(s)$

□

2.6.2 Stime

Concluderemo questa sezione con delle stime di $|\zeta'|$ e di $1/|\zeta|$ in funzione di t (più precisamente di $\ln t$) che ci serviranno nel teorema dei numeri primi.

Lemma 2.6.8. *Quando $\sigma \geq 1$ e $t \geq 2$, si ha*

$$|\zeta(\sigma + it) \leq \ln t + 4$$

Dimostrazione. Dal Teorema 2.6.3 sappiamo che

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + r_N(s)$$

con

$$|r_N(s)| \leq \frac{|s|}{\sigma N^\sigma} \leq \left(1 + \frac{t}{\sigma}\right)\frac{1}{N^\sigma}.$$

Siano $\sigma \geq 1$ e $t \geq 2$, e $N = [t]$ (quindi $N \leq t \leq N+1$). Allora

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq \ln N + 1 \leq \ln t + 1,$$

$$\left|\frac{N^{1-s}}{s-1}\right| \le \frac{1}{t} \qquad \text{poiché } |s-1| \ge t,$$

$$|r_N(s)| \le \frac{1+t}{N} \le \frac{2+N}{N} \le 2 \qquad \text{poiché } N \ge 2.$$

Sommando questi termini si trova $|\zeta(s)| \le \ln t + \frac{3}{2}$.

□

Lemma 2.6.9. *Per $N \ge 2$, si ha*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n} \le \frac{1}{2}(\ln N)^2 + \frac{1}{8}.$$

Dimostrazione. Sia $f(x) = (\ln x)/x$, allora $f'(x) = (1 - \ln x)/x^2 < 0$ per $x > e$. Quindi $f(x)$ è decrescente per $x > e$, e quindi utilizzando il Teorema 1.4.1 si trova

$$\sum_{n=4}^{N} \frac{\ln n}{n} \le \int_3^N \frac{\ln x}{x}\, dx = \frac{1}{2}(\ln N)^2 - \frac{1}{2}(\ln 3)^2.$$

Aggiungendo i termini mancanti e considerando che $\ln 1 = 0$, e che (facendo il calcolo esplicitamente) $(\ln 2)/2 + (\ln 3)/3 - (\ln 3)^2/3 < 1/8$, si ottiene l'enunciato.

□

Lemma 2.6.10. *Per $\sigma \ge 1$, $t \ge 2$, si ha*

$$|\zeta'(\sigma + it)| \le \frac{1}{2}(\ln t + 3)^2$$

Dimostrazione. Differenziando ζ e r_N nel Teorema 2.6.3 si trova

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n^s} - \frac{N^{1-s}\ln N}{s-1} - \frac{N^{1-s}}{(s-1)^2} - I_1(s) + sI_2(s),$$

dove

$$I_1(s) = \int_N^\infty \frac{x - [x]}{x^{s+1}}\, dx \qquad \text{e} \qquad I_2(s) = \int_N^\infty \frac{(x-[x])\ln x}{x^{s+1}}\, dx$$

Stimiamo ora queste quantità, per farlo ricordiamo che $\sigma \ge 1$ e $t \ge 2$, sia $N = [t]$, utilizziamo il Lemma 2.6.9 e consideriamo che $\ln x/x$ ha massimo $1/e < 1/2$ in e.

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln n}{n^s}\right| \le \frac{1}{2}(\ln N)^2 + \frac{1}{8} \le \frac{1}{2}(\ln t)^2 + \frac{1}{8}$$

$$\left|\frac{N^{1-s}\ln N}{s-1}\right| \leq \frac{\ln N}{t} \leq \frac{\ln t}{t} < \frac{1}{2}$$
$$\left|\frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}\right| \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{4}$$
$$|I_1| \leq \int_N^\infty \frac{1}{x^2} = \frac{1}{N} \leq \frac{1}{2}$$
$$|I_2| \leq \int_N^\infty \frac{\ln x}{x^{\sigma+1}}\,dx = \frac{\ln N}{\sigma N^\sigma} + \frac{1}{\sigma^2 N^\sigma}$$

quindi

$$|sI_2| \leq \left(1+\frac{t}{\sigma}\right)\frac{\ln N+1}{\sigma N} \leq \frac{1+t}{N}(\ln N+1) \leq 2(\ln t+1)$$

dove si è considerato che $t+1 \leq N+2 \leq 2N$. Sommando tutti questi termini si ha

$$|\zeta'(s)| \leq \frac{1}{2}(\ln t)^s + 2\ln t + 4 < \frac{1}{2}(\ln t+3)^2.$$

□

Osservazione 2.6.11. Nel teorema finale useremo come maggiorazione $\frac{1}{2}(\ln t + 5)^2 > \frac{1}{2}(\ln t+3)^2$.

Con il prodotto di Eulero (2.1) abbiamo visto che si ha $\zeta(s) \neq 0$ quando $\operatorname{Re} s > 1$, ora vogliamo dimostrare che $\zeta(s) \neq 0$ quando $\operatorname{Re} s = 1$ in modo che la funzione $\zeta'(s)/\zeta(s)$ esista. Inoltre vogliamo anche dare una stima di $1/|\zeta(s)|$ in funzione di t, che ci servirà nel teorema finale (i primi due sono dei lemmi tecnici che servono per dimostrare il quarto che è la stima che ci servirà).

Lemma 2.6.12. *Supponiamo che $a(n) \geq 0$ per ogni n e che la serie di Dirichlet $\sum_{n=1}^\infty a(n)/n^s$ converga a $f(s)$ quando $\operatorname{Re} s > 0$. Allora per $\sigma > \sigma_0$ si ha*

$$3f(\sigma) + 4\operatorname{Re} f(\sigma+it) + \operatorname{Re} f(\sigma+2it) \geq 0$$

Dimostrazione. Si ha

$$3f(\sigma) + 4f(\sigma+it) + f(\sigma+2it) = \sum_{n=1}^\infty \frac{a(n)}{n^\sigma}(3 + 4^{-it} + n^{-2it}).$$

Ma $\operatorname{Re}(3+4^{-it}+n^{-2it}) = 3 + 4\cos\theta_n + \cos 2\theta_n$, dove $\cos\theta_n = t\ln n$. Per concludere si osservi che, per ogni θ,

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta = 2 + 4\cos\theta + 2\cos^2\theta = 2(1+\cos\theta) \geq 0.$$

□

Lemma 2.6.13. *Per ogni* $\sigma > 1$ *e per ogni* t*, si ha*

$$\zeta(\sigma)^3|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

Dimostrazione. Si osservi che, dal Teorema 2.5.2, sappiamo che per $\operatorname{Re} s > 1$ possiamo scrivere $\ln\zeta$ nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^s$, con $a(n) \leq 0$, inoltre $\operatorname{Re}\ln z = \ln|z|$. Allora applicando il Lemma 2.6.12 a $\ln\zeta(s)$, si ottiene l'enunciato.

□

Lemma 2.6.14. *Supponiamo che, per ogni* $\sigma \geq 1$ *e* $t \geq t_0$*, si abbia*

$$|\zeta(\sigma+2it)| \leq M_1(t) = M_1 \qquad e \qquad |\zeta'(\sigma+it)| \leq M_2(t) = M_2$$

dove M_1,$M_2 \geq 1$*. Allora, per tali* σ *e* t*, si ha*

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leq 2^5 M_1(t) M_2(t)^3.$$

In particolare, per $\sigma \geq 1$*,* $t \geq 2$*, si ha*

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \leq 4(\ln t + 5)^7$$

Dimostrazione. Dal Teorema 2.1.5 e dal Lemma 2.4.3

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \leq \zeta(\sigma) \leq \frac{\sigma}{\sigma-1}$$

si ha $1/|\zeta(s)| \leq 5$ per $\sigma > 5/4$, quindi l'enunciato è valido per ogni $t > 1$. Dunque prendiamo $\sigma \leq 5/4$, si osservi che $5/4 < 2^{1/3}$ e quindi $\zeta(\sigma) \leq 2^{1/3}/(\sigma-1)$. Da questa stima e dal Lemma 2.6.13 si ha,

$$\frac{2}{(\sigma-1)^3}|\zeta(\sigma+it)|^4 M_1 \geq 1$$

cioè

$$|\zeta(\sigma+it)| \geq f(\sigma) \qquad \text{dove} \qquad f(\sigma) = \frac{(\sigma-1)^{3/4}}{s^{1/4}M_1^{1/4}}.$$

Definiamo ora η come

$$f(\eta) = 2M_2(\eta-1),$$

quindi $\eta - 1 = \frac{1}{2^5 M_1 M_2^4}$. Supponiamo che $1 < \sigma < \eta$ e consideriamo che

$$\zeta(\eta+it) - \zeta(\sigma+it) = \int_\sigma^\eta \zeta(x+it)\,dx,$$

allora si ha

$$|\zeta(\eta+it) - \zeta(\sigma+it)| = M_2(\eta-\sigma) < M_2(\eta-1).$$

Da quest'ultima, poiché $|\zeta(\eta + it)| \geq f(\eta) = 2M_2(\eta - 1)$, segue che

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq M_2(\eta - 1) = \frac{1}{2^5 M_1 M_2^3}.$$

Se invece $\eta \leq \sigma \leq 5/4$, si ha

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq f(\sigma) \geq f(\eta) = \frac{1}{2^4 M_1 M_2^3}.$$

Utilizzando i lemmi 2.6.8 e 2.6.10, possiamo prendere $M_1 = \ln 2t{+}4 < \ln t{+}5$ e $M_2 = \frac{1}{2}(\ln t + 3)^2$ e si dimostra la seconda parte del teorema

□

2.7 Alcuni integrali complessi

Teorema 2.7.1. *(teorema integrale di Cauchy) Sia U un sottoinsieme aperto e semplicemente connesso di $\mathbb{C}$, sia inoltre $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, e sia γ un cammino chiuso in U. Allora si ha*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0.$$

Teorema 2.7.2. *(formula integrale di Cauchy) Sia U un sottoinsieme aperto e semplicemente connesso di $\mathbb{C}$, sia inoltre $f : U \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, e il disco chiuso D sia completamente contenuto in U. Allora se γ è il bordo del disco, per ogni a contenuto nell'interno del disco si ha:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\, dz$$

Le dimostrazioni dei teoremi (2.7.1) e (2.7.2) possono essere trovate in [Ahlf] (capitolo IV).

Notazione 2.7.3.

(i) $E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} x \geq 1 \\ 0 & \text{se} x < 1 \end{cases}$

(ii) $\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\, ds = \int_{L_c} f(s)\, ds$

Lemma 2.7.4. *Se $x > 0$ e $c > 0$, allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{x^s}{s^2}\, ds = E(x) \ln x.$$

*Dimostrazione.*Sia C il cerchio di centro l'origine e raggio $R > c$. Prendiamo la retta $\mathrm{Re}\, s = c$, che incontra il cerchio in $c \pm it_R$, e sia L_R il segmento da $c - t_R$ a $c + it_R$. Chiamiamo inoltre C_1 la parte del cerchio a destra della retta e C_2 quella a sinistra. Per ogni percorso Γ nel piano complesso scriviamo

$$I(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{x^s}{s(s-1)}\, ds.$$

Ora prendiamo $x^s = e^{\ln x} = e^{\lambda s}$, si ha

$$\frac{x^s}{s^2} = \frac{e^{\lambda s}}{s^2} = \frac{1}{s^2}(1 + \lambda s + \frac{1}{2}\lambda^2 s^2 + \cdots)$$

e questa serie è uniformemente convergente per gni insieme della forma $r_1 \leq |s| \leq r_2$. Quindi la serie può essere integrata termine a termine su $\gamma = L_R \cup C_1$, che è un percorso chiuso intorno al punto 0. Usando la formula di Cauchy del Teorema 2.7.2, troviamo che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{s^2}\, ds = 0, \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{s}\, ds = 1, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{s^n}\, ds = 0$$

quindi si ha

$$I(L_R \cup C_1) = \lambda.$$

Consideriamo ora che $|x^s| = x^\sigma$. Se $x \leq 1$ e $s \in C_1$, si ha che $|x^s| \leq x^c$, e quindi $|x^s/s^2| \leq x^c/R^2$ (poiché $|s| = R$), allora si ha

$$I(C_1) \leq \frac{1}{2\pi} \frac{x^c}{R^2} 2\pi R = \frac{x^c}{R}$$

che tende a 0 se $R \to \infty$. Quindi si ha

$$I(L_R) \to \lambda = \ln x \qquad \text{quando} \qquad x \to \infty$$

Quindi abbiamo dimostrato l'enunciato per $x \leq 1$, ora per dimostrarlo per $0 < x < 1$ usiamo $I(C_2 \cup L_R)$. In questo caso non ci sono poli all'interno del percorso, quindi per il Teorema 2.7.1 l'integrale è nullo. Questa volta si ha che se $s \in C_2$, $c \leq \sigma$ ma poiché $0 < x < 1$ troviamo nuovamente che $|x^s| = x^\sigma \leq x^c$ e ripetendo il ragionamento di prima si trova che $I(C_2) \to 0$ per $R \to \infty$ e quindi anche $I(L_R) \to 0$ (per $R \to \infty$).

□

Lemma 2.7.5. *Se $x > 0$ e $c > 1$, allora*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{x^s}{s(s-1)}\, ds = E(x)(x-1).$$

Dimostrazione. É simile alla dimostrazione del Lemma 2.7.4. La differenza è che per dimostrare che l'integrale lungo C_1 e C_2 tende a 0 si usa la condizione $|s(s-1)| \leq R(R-1)$. Per calcolare $I(C_1 \cup L_R)$ si osservi che

$$\frac{x^s}{s(s-1)} = \frac{x^s}{s-1} - \frac{x^s}{s}$$

e utilizzando la formula di Cauchy del Teorema 2.7.2 si trova che $I(C_1 \cup L_R) = x^1 - x^0 = x - 1$.

$\square$

Lemma 2.7.6. *Supponiamo che la serie di Dirichlet* $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)/n^s$ *sia assolutamente convergente per* $\mathrm{Re}\, s > 1$*, con somma* $f(s)$*. Sia* $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$*. Allora, per* $c > 1$ *e* $x > 1$*, si ha*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{x^{s-1}}{s(s-1)} f(s)\, ds = \sum_{n \leq x} a(n) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{x} \right).$$

Dimostrazione. Sia $x^s f(s) = G(s) + H(s)$, dove

$$G(s) = \sum_{n \leq x} a(n) \left(\frac{x}{n} \right)^s \qquad \text{e} \qquad H(s) = \sum_{n > x} \left(\frac{x}{n} \right)^s.$$

Allora, usando il Lemma 2.7.5, si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{G(s)}{s(s-1)}\, ds &= \sum_{n \leq x} a(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{1}{s(s-1)} \left(\frac{x}{n} \right)^s ds \\ &= \sum_{n \leq x} a(n) E\left(\frac{x}{n} \right) \left(\frac{x}{n} - 1 \right) = \\ &= \sum_{n \leq x} a(n) \left(\frac{x}{n} - 1 \right) \end{aligned}$$

poiché per $n \leq x$, $E\left(\frac{x}{n}\right) = 1$. Sia ora $\sum_{n>x} |a(n)|(x/n)^c$ convergente ad un certo M. Per $n > x$ e $\mathrm{Re}\, s \geq c$, si ha $|(x/n)^s| \leq (x/n)^c$, e quindi $|H(s)| \leq M$. Ripetiamo ora il ragionamento fatto nella dimostrazione del Lemma 2.7.4, sia

$$\int_{C_2 \cup L_R} \frac{H(s)}{s(s-1)}\, ds.$$

Poiché $H(s)$ è differenziabile per $\mathrm{Re}\, s > 1$, questo integrale è uguale a zero per il Teorema 2.7.1. E vediamo che il contributo di C_2 tende a zero quando $R \to \infty$. Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{H(s)}{s(s-1)}\, ds = 0.$$

Per concludere la dimostrazione bisogna dividere tutto per x.

$\square$

Osservazione 2.7.7. Usando la formula di Abel del Corollario 1.3.3 possiamo riscrivere la formula trovata nel Lemma 2.7.6 come

$$\int_1^x \frac{A(y)}{y^2}\,dy.$$

Lemma 2.7.8. *(Lemma di Riemann-Lebesgue) Sia ϕ una funzione a valori complessi su $\mathbb{R}$ con derivata continua e tale che $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|\,dt$ sia convergente. Sia $F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\phi(t)\,dt$ (con $\lambda \in \mathbb{R}$). Allora si ha che $F(\lambda) \to 0$ quando $\lambda \to \infty$.*

Dimostrazione. Prendiamo $\varepsilon > 0$, allora esiste T tale che $\int_T^{\infty} |\phi(x)|\,dt \leq \varepsilon$ (e anche per $(-\infty, -T]$). Per ogni λ si ha

$$\left|\int_T^{\infty} e^{i\lambda t}\phi(t)\,dt\right| \leq \varepsilon.$$

Ora, $|\phi(x)|$ è limitata su $[-T, T]$ (per la continuità della derivata), diciamo da M. Sia

$$F_T(\lambda) = \int_{-T}^{T} e^{i\lambda t}\phi(t)\,dt$$

integrando per parti troviamo

$$F_T(\lambda) = \frac{1}{i\lambda}[e^{i\lambda t} - \frac{1}{i\lambda}\phi(t)]_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} e^{i\lambda t}\phi'(t)\,dt$$

e quindi si ha

$$|F_T(\lambda)| \leq \frac{1}{\lambda}[|\phi(T)| + |\phi(-T)|] + \frac{2MT}{\lambda}.$$

Quindi $F_T\lambda \to 0$ quando $\lambda \to \infty$, e per λ sufficientemente grande si ha $|F_T(\lambda)| \leq \varepsilon$. Se aggiungiamo i contributi per gli intervalli $[T, \infty)$ e $(-\infty, -T]$ troviamo che $|F(\lambda)| \leq 3\varepsilon$ per tali λ.

□

Capitolo 3

Il teorema dei numeri primi

Sia $\pi(x)$ la funzione che conta il numero di numeri primi minori di x. Allora si ha che, per $x \to \infty$,

$$\pi(x) \sim li(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t}\, dt \sim \frac{x}{\ln x} \sim \frac{x}{\ln x - 1}.$$

3.1 Lemma fondamentale

Teorema 3.1.1. *Supponiamo che f sia una funzione complessa, differenziabile su una regione che comprende $\operatorname{Re} s \geq 1$, eccetto al più nel punto 1. Supponiamo inoltre che:*

(I) la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ converga assolutamente a $f(s)$ quando $\operatorname{Re} s > 1$;

(II) $f(s) = \frac{\alpha}{s-1} + \alpha_0 + (s-1)h(s)$, dove h è differenziabile in 1;

(III) esista una funzione $P(t)$ tale che $|f(\sigma \pm it)| \leq P(t)$ quando $\sigma \geq 1$ e $t \geq t_0$ (dove $t_0 \geq 1$), e $\int_1^{\infty} \frac{P(t)}{t^2}\, dt$ è convergente. Allora

$$\int_1^{\infty} \frac{A(x) - \alpha x}{x^2}\, dx \qquad \text{converge a} \qquad \alpha_0 - \alpha.$$

Dimostrazione. Scriviamo $\phi(s) = h(s)/s$, sia $h(s)$ che $\phi(s)$ sono differenziabili in tutti i punti con $\operatorname{Re} s \geq 1$. Usando l'identità $\frac{1}{(s-1)} = \frac{s}{(s-1)} - 1$, si ha

$$(s-1)h(s) = f(s) - \frac{\alpha}{s-1} - \alpha_0 = f(s) - \alpha\frac{s}{s-1} - \alpha'$$

dove $\alpha' = \alpha_0 - \alpha$. Quindi si ha

$$\phi(s) = \frac{f(s)}{s(s-1)} - \frac{\alpha}{(s-1)^2} - \frac{\alpha'}{s(s-1)}. \tag{3.1}$$

Per ogni $s = \sigma + it$ con $\sigma \geq 1$ e $|t| \geq t_0$, si ha $|s(s-1)\phi(s)| \leq P_1(t)$, dove $P_1(t) = P(t) + |\alpha| + |\alpha_0|$. Per tali s si ha che $|s(s-1)| \geq t^2$ e quindi

$$|\phi(s)| \leq \frac{P_1(t)}{t^2}. \tag{3.2}$$

Inoltre $\int_1^\infty [P_1(t)/t^2]\, dt$ è convergente.

Ora definiamo, per $x > 1$ e $c \leq 1$,

$$I(x,c) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_c} x^{s-1} \phi(s)\, ds$$

Per ogni $c > 1$ usando prima (3.1) e poi il Lemma 2.7.6 nel primo addendo, il Lemma 2.7.4 nel secondo e il Lemma 2.7.5 nel terzo, si trova:

$$\begin{aligned} I(x,c) =& \frac{1}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{x^{s-1}}{s(s-1)} f(s)\, ds - \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{x^{s-1}}{(s-1)^2}\, ds \\ &- \frac{\alpha'}{2\pi i} \int_{L_c} \frac{x^{s-1}}{s(s-1)}\, ds = \\ =& \int_1^x \frac{A(y)}{y^2}\, dy - \alpha \ln x - \alpha' \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \\ =& \int_1^x \frac{A(y) - \alpha y}{y^2}\, dy - \alpha' \left(1 - \frac{1}{x}\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dimostriamo ora che questo è indipendente da $c > 1$, cioè $I(x,c) = I(x,1)$ per $c > 1$. Sia

$$I(x,c) = \int_{-\infty}^{\infty} g(c,t)\, dt$$

dove $g(c,t) = x^{c-1+it}\phi(c+it)$. Prendiamo ora $\varepsilon > 0$, allora esiste $T \leq t_0$ tale che

$$\int_T^\infty \frac{P_1(t)}{t^2}\, dt \leq \varepsilon.$$

Quindi dalla (3.2) e dal fatto che se $1 \leq c \leq 2$ si ha $|x^{c-1+it}| = x^{c-1} \leq x$, si ha

$$\int_T^\infty |g(c,t)|\, dt \leq x\varepsilon.$$

Una simile stima si può fare per l'integrale tra $(-\infty, -T)$. Infine consideriamo che $g(c,t)$ è continua nel rettangolo chiuso $1 \leq c \leq 2$, $-T \leq t \leq T$, allora è uniformemente continua. Quindi se c è abbastaza vicino a 1 si ha che $|g(c,t) - g(1,t)| \leq \varepsilon/2T$ per ogni $t \in [-T, T]$. Per tale c si trova

$$\left| \int_{-T}^T g(c,t)\, dt - \int_{-T}^T g(1,t)\, dt \right| \leq \varepsilon.$$

Insieme alle precedenti stime ottenute per $(-\infty, -T]$ e $[T, \infty)$ troviamo che

$$|I(x,c) - I(x,1)| \leq \varepsilon(1 + 2x).$$

Poiché $I(x,c)$ è indipendente da $c > 1$ questo mostra che $I(x,c) = I(x,1)$ allora sia $s = 1 + it$, si ha

$$I(x,1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x^{it}\phi(1+it)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\phi(1+it)\,dt$$

dove $\lambda = \ln x$. Dalla (3.2) sappiamo inoltre che $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(1+it)|\,dt$ è convergente. Allora dal (2.7.8) segue che $I(x,1) \to 0$ quando $x \to \infty$ e quindi, dalla (3.3), che

$$\int_1^x \frac{A(y) - \alpha y}{y^2}\,dy \to \alpha' \qquad \text{quando} \qquad x \to \infty.$$

□

Lemma 3.1.2. *Supponiamo che A sia una funzione a valori reali su $[1,\infty)$ tale che*

$$\int_1^{\infty} \frac{A(x) - x}{x^2}\,dx$$

sia convergente. Inoltre supponiamo che A sia crescente e non negativa. allora:

$$\frac{A(x)}{x} \to 1 \qquad \textit{quando} \qquad x \to \infty.$$

Dimostrazione. Si osservi che vogliamo dimostrare che $x(\delta - 1) \leq A(x) \leq x(\delta + 1)$ per x sufficientemente grande. Sia $0 < \delta < 1/2$. La convergenza dell'integrale $\int_1^{\infty} \frac{A(x)-\alpha x}{x^2}\,dx$ implica che, per ogni $\delta_1 > 0$ esiste R tale che, quando $R \leq x_0 < x_1$ si abbia

$$\left|\int_{x_0}^{x_1} \frac{A(x) - x}{x^2}\,dx\right| < \delta_1.$$

Supponiamo (per assurdo) che per qualche $x_0 > R$ si abbia $A(x_0) > (1+\delta)x_0$, poiché $A(x)$ è crescente $A(x) > (1+\delta)x_0$ per ogni $x \geq x_0$. Sia $x_1 = (1+\delta)x_0$. Allora

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} \frac{A(x) - x}{x^2}\,dx >&(1+\delta)x_0\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{x^2}\,dx - \int_{x_0}^{x_1}\frac{1}{x}\,dx = \\ =&x_1\left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_1}\right) - \ln\frac{x_1}{x_0} = \\ =&\delta - \ln(1+\delta).\end{aligned}$$

Prendiamo ora $\delta_1 = \delta - \ln(1+\delta)$. Allora $\delta_1 > 0$, si ottiene dalla serie per $\ln(1+x)$ che $\delta_1 > \frac{1}{6}\delta^2$. Quindi, se R corrisponde a δ_1, questo è in contraddizione con quanto detto precedentemente e perciò $A(x) \leq (1+\delta)x$ per $x > R$.

Allo stesso modo, se supponiamo (sempre per assurdo) che per qualche $x_0 \geq 2R$ si abbia $A(x_0) < (1-\delta)x_0$, e prendiamo $x_2 = (1-\delta)x_0 < x_0$ (si noti che $x_2 \geq R$ e che $A(x) \leq A(x_0) < (1-\delta)x_0$ per ogni $x \leq x_0$), si ha

$$\begin{aligned}\int_{x_2}^{x_0} \frac{A(x)-x}{x^2}\,dx <&(1-\delta)x_0 \int_{x_2}^{x_0} \frac{1}{x^2}\,dx - \int_{x_2}^{x_0} \frac{1}{x}\,dx = \\ =&x_2\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_0}\right) - \ln\frac{x_0}{x_2} = \\ =&\delta + \ln(1-\delta).\end{aligned}$$

Poniamo $\delta_2 = -\delta - \ln(1-\delta)$ (si osservi che $\delta_2 > 0$ (si ottiene dalla serie per $\ln(1-x)$ che $\delta_1 > \frac{1}{2}\delta^2$), se R corrisponde a δ_2 si ha $\int_{x_2}^{x_0} \frac{A(x)-x}{x^2}\,dx < -\delta_2$ che è in contraddizione con quanto detto inizialmente e perciò $A(x) \geq (1-\delta)x$ per $x \geq R$.

$\square$

Osservazione 3.1.3. Le serie logaritmiche usate nella dimostrazione del Lemma 3.1.2 sono

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \qquad \text{e} \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

per $|x| < 1$

3.2 Dimostrazione del teorema dei numeri primi

Ricordiamo ancora che lo scopo di questa tesi è dimostrare che:

$$\pi(x) \sim li(x) \sim \frac{x}{\ln x} \sim \frac{x}{ln-1} \qquad \text{quando} \qquad x \to \infty.$$

Sappiamo che, se $\psi(x)/x \to 1$ per $x \to \infty$, usando il Teorema 1.7.7 si trova che $\theta(x)/x \to 1$ quando $x \to \infty$. Con questo, applicando il Teorema 1.6.13, $\pi(x) \sim li(x)$ è dimostrato. Mentre è stato precedentemente dimostrato (Osservazione 1.6.7) che $li(x) \sim x/\ln x \sim x/ln-1$. Quindi ora non resta che dimostrare che

$$\frac{\psi(x)}{x} \to 1 \qquad \text{quando} \qquad x \to \infty,$$

Per farlo prendiamo

$$f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \quad , \quad a(n) = \Lambda(n) \quad \text{e} \quad A(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \psi(x),$$

mostreremo che sono rispettate le condizioni (I),(II) e (III) del Teorema 3.1.1, questo, con il fatto che $\psi(x)$ è crescente e non negativa, soddisfa le ipotesi del Lemma 3.1.2 e quindi la dimostrazione è conclusa. Per il Teorema 2.5.3, sappiamo che

$$f(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

Mentre per il Lemma 2.6.7

$$f(s) = \frac{1}{s-1} - \gamma + (s-1)h(s),$$

quindi condizioni (I) e (II) sono soddisfatte. Per quel che riguarda la (III), considerando i lemmi 2.6.14 e 2.6.10, si ha che $|f(\sigma \pm it)| \leq 2(\ln t + 5)^9 = P(t)$ quando $\sigma > 1$ e $t \leq 2$. L'integrale $\int_1^\infty P(t)/t^2$ è convergente come richiesto.

$\square$

Bibliografia

[Jam] G. J. O. Jameson. *The Prime Number Theorem.* Cambridge University Press.

[Ahlf] Lars V. Ahlfors *Complex Analysis.* McGraw-Hill, Inc.