**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI**

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

# Presentazioni poligonali delle superfici topologiche

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di laurea di
Luigi Pistis

ANNO ACCADEMICO 2007–2008

# Indice

# Introduzione

Una varietà topologica $M$ è uno spazio topologico di Hausdorff localmente euclideo, cioè per ogni punto $x$ di $M$ esiste un intorno $U$ di $x$ omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, dove $n \in \mathbb{N}$ è la dimensione della varietà. In modo informale potremmo dire che le varietà sono come le curve (dimensione 1) e le superfici (dimensione 2), ma possono essere anche di dimensione superiore. Un importante problema della topologia è la classificazione delle varietà, ovvero avere un lista di varietà $n$-dimensionali e un teorema che ci dica che ogni varietà $n$-dimensionale è omeomorfa esattamente ad una varietà presente nella lista. Inoltre è interessante avere un elenco di invarianti topologici che possono essere calcolati per sapere in che punto della lista mettere una data varietà. Il teorema in questione esiste per le varietà di dimensione 1 e afferma che una varietà connessa di dimensione 1 è omeomorfa alla circonferenza se è compatta o alla retta se non lo è. Il teorema per le varietà a 2 dimensioni è l'argomento principale di questa tesi, esso asserisce che una varietà a 2 dimensioni connessa e compatta è omeomorfa alla sfera o ad una somma connessa di tori se è orientabile o ad una somma connessa di piani proiettivi se non è orientabile. Per le varietà a 3 dimensioni esiste la congettura di geometrizzazione di Thurston [Thu], di cui quella di Poincarè è un caso particolare, che è stata recentemente dimostrata da Perelman. Per varietà di dimensione 4 o superiore non è possibile una completa classificazione.

Lo scopo di questa tesi è quello di dimostrare il teorema di classificazione delle superfici. Più precisamente si dimostrerà che ogni superficie ammette una presentazione poligonale standard ed è quindi omeomorfa alle superfici sopra menzionate. La tesi è strutturata nel seguente modo. Il primo capitolo richiama le nozioni fondamentali di topologia e alcuni teoremi che vengono utilizzati nel seguito. Nel secondo capitolo vengono definite le superfici fondamentali (toro, sfera, piano proiettivo), introdotte le presentazioni poligonali delle superfici e le trasformazioni elementari che si possono compiere su di esse. Infine l'ultimo capitolo è dedicato alla dimostrazione del teorema di classificazione.

# Capitolo 1

# Richiami di topologia

In questo capitolo verranno richiamati i concetti di topologia algebrica che verranno utilizzati nel resto della tesi.

### Spazi topologici e omeomorfismi

**Definizione 1** Una topololgia su un insieme $X$ è una famiglia $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di $X$ che soddisfano le seguenti proprietà:
i) $\emptyset \in \mathcal{U}$, $X \in \mathcal{U}$;
ii) l'intersezione finita di elementi di $\mathcal{U}$ appartiene a $\mathcal{U}$;
iii)l'unione di una qualsiasi famiglia di elementi di $\mathcal{U}$ appartiene a $\mathcal{U}$.

L'insieme $X$ con la suddetta famiglia $\mathcal{U}$ viene detto spazio topologico. Gli elementi $U \in \mathcal{U}$ sono detti aperti di $X$.

**Definizione 2** Una funzione $f : X \to Y$ fra due spazi topologici si dice continua se per ogni aperto $U$ di $Y$, la controimmagine $f^{-1}(U)$ è aperta in $X$.

**Teorema 3** Siano $X$, $Y$, $Z$ tre spazi topologici. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono due funzioni continue, allora la funzione composta $h = g \circ f : X \to Z$ è continua.

*Dimostrazione.* Se $U$ è aperto in $Z$, $g^{-1}(U)$ è aperto in $Y$ e quindi $f^{-1}(g^{-1}(U))$ è aperto in $X$. Ma $f^{-1}(g^{-1}(U)) = h^{-1}(U)$, e quindi $h$ è continua.

□

**Definizione 4** Siano $X$ e $Y$ due spazi topologici; si dice che essi sono omeomorfi se esistono due funzioni continue $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ che siano l'una l'inversa dell'altra. In questo caso scriveremo che $X \simeq Y$ e diremo che $f$ e $g$ sono omeomorfismi tra $X$ e $Y$.

**Definizione 5** Sia $S$ un sottoinsieme di uno spazio topologico $X$. La topologia su $S$ indotta dalla topologia di $X$ è definita come la famiglia di sottoinsiemi di $S$ della forma $U \cap S$, dove $U$ è un aperto di $X$.

Un sottoinsieme $S$ di $X$ dotato della topologia indotta viene detto sottospazio di $X$.

**Definizione 6** Un'applicazione $f : X \to Y$ si chiama embedding topologico se l'applicazione $X \to f(X)$ è un omeomorfismo (dove $f(X)$ è dotato della topologia indotta da quella di $Y$ ).

**Proprietà topologiche**

**Compattezza**

**Definizione 7** Un ricoprimento di un sottoinsieme $S$ di un insieme $X$ è una famiglia di sottoinsiemi $\{U_j \mid j \in J\}$ di $X$ tale che $S \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$. Il ricoprimento è detto finito se l'insieme di indici $J$ è finito.

**Definizione 8** Siano $\{U_j \mid j \in J\}$ e $\{V_k \mid k \in K\}$ due ricoprimenti di un sottoinsieme $S$ di $X$. Diremo che $\{U_j \mid j \in J\}$ è un sottoricoprimento di $\{V_k \mid k \in K\}$ se per ogni $j \in J$ esiste $k \in K$ tale che $U_j = V_k$.

**Definizione 9** Siano $X$ uno spazio topologico e $S$ un sottoinsieme di $X$; diremo che un ricoprimento $\{U_j \mid j \in J\}$ di $S$ è aperto se $U_j$ è un sottoinsieme aperto di $X$ per ogni $j \in J$.

**Definizione 10** Un sottoinsieme $S$ di uno spazio topologico $X$ si dice compatto se ogni ricoprimento aperto di $S$ ammette un sottoricoprimento finito.

**Teorema 11** Un sottoinsieme $S$ di $X$ è compatto se e solo se è compatto come spazio topologico con la topologia indotta.

**Teorema 12** L'immagine di uno spazio compatto tramite un'applicazione continua è compatta.

**Corollario 13** Se $X$ e $Y$ sono due spazi topologici omeomorfi, $X$ è compatto se e solo se $Y$ è compatto.

**Teorema 14** Un sottoinsieme chiuso di uno spazio compatto è compatto.

**Teorema 15** Un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ è compatto.

**Connessione**

**Definizione 16** Uno spazio topologico $X$ si dice connesso se i soli sottoinsiemi di $X$ contemporaneamente aperti e chiusi sono $X$ e $\emptyset$. Un sottoinsieme si dice connesso se lo è come spazio topologico con la topologia indotta.

**Teorema 17** Uno spazio $X$ è connesso se e solo se $X$ non è unione di due aperti disgiunti non vuoti.

**Teorema 18** L'immagine di uno spazio connesso tramite un'applicazione continua è connessa.

**Corollario 19** Se $X$ e $Y$ sono due spazi topologici omeomorfi,allora $X$ è connesso se e solo se $Y$ è connesso.

**Teorema 20** Sia $\{Y_j \mid j \in J\}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi di uno spazio $X$; se $\bigcap_{j\in J} Y_j \neq 0$ allora $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$ è connesso.

**Hausdorff**

**Definizione 21** Uno spazio $X$ è detto di Hausdorff se per ogni coppia di punti distinti $x$, $y$ di $X$ esistono due aperti $U_x$ e $U_y$ contenenti rispettivamente $x$ e $y$, tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.

**Teorema 22** In uno spazio di Hausdorff ogni punto è chiuso.

**Teorema 23** Un sottoinsieme compatto $A$ di uno spazio di Hausdorff $X$ è chiuso.

**Teorema 24** Un sottospazio $S$ di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff.

**Topologia quoziente**

**Definizione 25** Sia $X$ uno spazio topologico, $Y$ un insieme qualunque e $f : X \to Y$ una funzione suriettiva. Definiamo una topologia su $Y$ dichiarando che ogni $\mathcal{U} \subset Y$ è aperto se e solo se $f^{-1}(\mathcal{U})$ è aperto in $X$. Tale topologia è detta *topologia quoziente*.

**Definizione 26** In generale, se $X$ e $Y$ sono spazi topologici una funzione $f : X \to Y$ è detta *identificazione* se è suriettiva e $Y$ ha la topologia quoziente indotta da $f$.

Un metodo per costruire identificazioni è il seguente. Definiamo una relazione di equivalenza $\sim$ su uno spazio topologico $X$. Per ogni $x \in X$ sia $[x]$ la classe di equivalenza di $x$. Denotiamo con $X/\sim$ l'insieme delle classi di equivalenza, che formano una partizione di $X$. Sia $\pi : X \to X/\sim$ la proiezione naturale, cioè l'applicazione che manda ogni elemento di $x \in X$ nella sua classe di equivalenza, $\pi(x) = [x]$. Siccome $\pi$ è suriettiva possiamo definire la topologia quoziente su $X/\sim$. In questo caso diremo che $X/\sim$ è uno spazio quoziente relativo a $\sim$. Segue che $\pi$ è un'identificazione.

**Teorema 27** Lo spazio quoziente di uno spazio connesso è connesso.

**Teorema 28** Lo spazio quoziente di uno spazio compatto è compatto.

**Teorema 29** (proprietà universale della topologia quoziente) Sia $f : X \to Y$ un'identificazione. Per ogni spazio topologico $Z$, un'applicazione $g : Y \to Z$ è continua se e solo se $g \circ f : X \to Z$ è continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

**Teorema 30** (caratterizzazione delle identificazioni) Siano $X$ e $Y$ due spazi topologici, e sia $f : X \to Y$ una funzione suriettiva. Allora $f$ è una identificazione se e solo se soddisfa la proprietà universale del quoziente.

**Teorema 31** (unicità degli spazi quoziente) Siano $f_1 : X \to Y_1$ e $f_2 : X \to Y_2$ due identificazioni tali che $f_1(x) = f_1(y)$ se e solo se $f_2(x) = f_2(y)$, allora esiste un unico omeomorfismo $\phi : Y_1 \to Y_2$ tale che $\phi \circ f_1 = f_2$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ Y_1 \arrow[r, "\phi"'] & Y_2 \end{tikzcd}$$

**Teorema 32** (della mappa chiusa) Sia $f$ una applicazione continua da uno spazio compatto a uno di Hausdorff, allora:

(a) $f$ è una applicazione chiusa.

(b) Se $f$ è suriettiva è una identificazione.

(c) Se $f$ è biettiva è un omeomorfismo.

(d) Se $f$ è iniettiva è un embedding topologico.

**Definizione 33** Definiremo ora una topologia che verrà usata nel seguito. Siano $X_1$ e $X_2$ due insiemi, la loro unione disgiunta è $X_1 \coprod X_2 = X_1 \times \{0\} \cup X_2 \times \{1\}$. Supponiamo di avere una collezione di spazi topologici non vuoti $\{X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Diciamo che un sottoinsieme dell'unione disgiunta $\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha$ è aperto se e solo se la sua intersezione con ognuno degli $X_\alpha$ è aperta (cioè appartiene a $\mathcal{T}_\alpha$ . Questa è una topologia detta topologia dell'unione disgiunta.

*Dimostrazione* E' facile verificare che l'insieme vuoto e l'insieme universo appartengono alla topologia. Siano $\mathcal{U}_1$ e $\mathcal{U}_2$ due aperti della topologia dell'unione disgiunta, allora la loro intersezione $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ è aperta. Perchè sia aperta deve avvenire che $(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap X_\alpha$ sia aperta per ogni $X_\alpha$, e infatti $(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2) \cap X_\alpha = (\mathcal{U}_1 \cap X_\alpha) \cap (\mathcal{U}_2 \cap X_\alpha) \in \mathcal{T}_\alpha$ poichè entrambi i membri tra le parentesi tonde appartengono a $\mathcal{T}_\alpha$. Allo stesso modo per l'unione arbitraria di aperti della topologia dell'unione disgiunta $(\mathcal{U}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{U}_n) \cap X_\alpha = (\mathcal{U}_1 \cap X_\alpha) \cup \cdots \cup (\mathcal{U}_n \cap X_\alpha)$ e poichè tutti i membri sono aperti di $\mathcal{T}_\alpha$ la loro intersezione è aperta.

$\square$

**Varietà topologiche**

**Definizione 34** Una varietà topologica $n$-dimensionale è uno spazio topologico che ha le seguenti proprietà:

(a) è di Hausdorff;

(b) è localmente euclideo di dimensione $n$;

(c) possiede una base numerabile di aperti.

**Definizione 35** Un modo per costruire superfici incollando due superfici date è detto somma connessa. Sebbene la useremo con le superfici si può definire per varietà di dimensione $n$. Siano $M_1$ e $M_2$ due varietà $n$-dimensionali, la somma connessa è la varietà ottenuta rimuovendo due palle aperte da $M_1$ e $M_2$ ed incollando successivamente i nuovi bordi sferici. Più rigorosamente, sia $B_i \subset M_i$ una palla euclidea, prendiamo un omeomorfismo tra i bordi $f : \partial B_1 \to \partial B_2$. Sia $M_i' = M_i \setminus B_i$, definiamo lo spazio quoziente di $M_1' \coprod M_2'$ identificando ogni $p \in \partial B_1$ con $f(p) \in \partial B_2$. Lo spazio quoziente risultante è la somma connessa di $M_1$ ed $M_2$ e si indica con $M_1 \# M_2$.

**Teorema 36** Se $M_1$ ed $M_2$ sono varietà connesse di dimensione $n$ la somma connessa $M_1 \# M_2$ è una varietà connessa di dimensione $n$.

# Capitolo 2

# Presentazioni

### Superfici fondamentali

Nel seguito indicheremo con $I$ l'intervallo chiuso $[0,1]$ e con $I^2 = I \times I$ il quadrato di lato 1.

**Definizione 37** $\mathbb{S}^2$ è la sfera di $\mathbb{R}^3$ di raggio unitario (Figura 2.1).

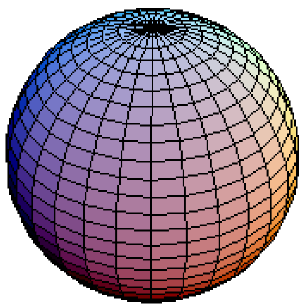

Figura 2.1: Sfera $\mathbb{S}^2$

**Definizione 38** $\mathbb{T}^2$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ $S^1 \times S^1$. Esso è omeomorfo alla superficie a ciambella (che indicheremo con *Ciamb*) di $R^3$, ottenuta facendo ruotare il cerchio $(y-R)^2 + z^2 = r^2$ di centro $(R,0)$, $R > r$ del piano $yz$ intorno all'asse $z$, quindi possiamo visualizzarlo come in Figura 2.2.

*Dimostrazione.* $\mathbb{T}^2$ è l'insieme $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ tale che

$$\begin{cases} (x_1)^2 + (x_2)^2 = 1 \\ (x_3)^2 + (x_4)^2 = 1 \end{cases}$$

Sia $F : \mathbb{T}^2 \to Ciamb$ definita da

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((R + rx_3)x_1, (R + rx_3)x2, rx_4)$$

e sia $G : Ciamb \to \mathbb{T}^2$ definita da

$$G(x, y, z) = (\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{r}, \frac{z}{r})$$

$F$ è un omeomorfismo dal toro alla superficie a ciambella, infatti $F$ e $G$ sono continue e facendo i calcoli si dimostra facilmente che le $F \circ G = I_C$ e che $G \circ F = I_T$, dove $I_C$ e $I_T$ sono rispettivamente l'identità sulla superficie a ciambella e l'identità sul toro.

□

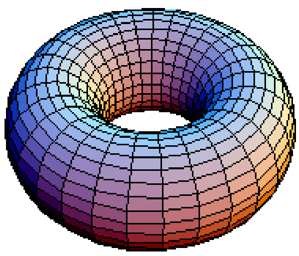

Figura 2.2: Toro $\mathbb{T}^2$

**Definizione 39** $\mathbb{P}^2$ è il piano proiettivo reale dato dall'insieme delle classi di equivalenza relative alla relazione $\sim$ definita su $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ nel modo seguente: $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y$ (Figura 2.3).

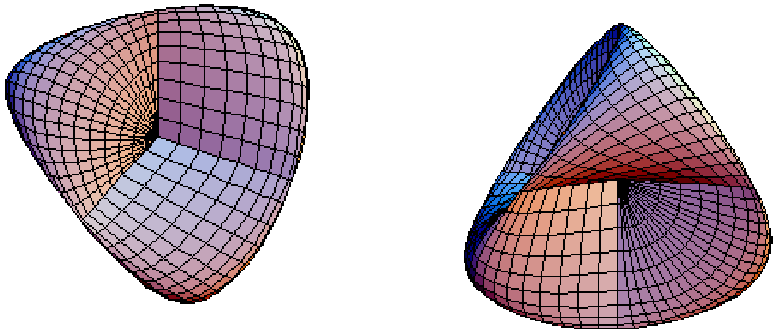

Figura 2.3: Realizzazione del piano proiettivo reale: superficie di Steiner

**Definizione 40** La bottiglia di Klein $K$ (Figura 2.4-2.5) è la varietà a 2 dimensioni ottenuta quozientando $I^2$ con la relazione di equivalenza $\sim_k$ definita nel modo seguente: $p \sim_k q \Leftrightarrow p = q$ oppure $\{p, q\} = \{(0, t), (1, t)\}$ oppure $\{p, q\} = \{(t, 0), (1 - t, 1)\}$ per $0 \leq t \leq 1$.

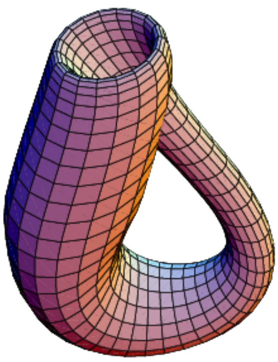

Figura 2.4: Bottiglia di Klein

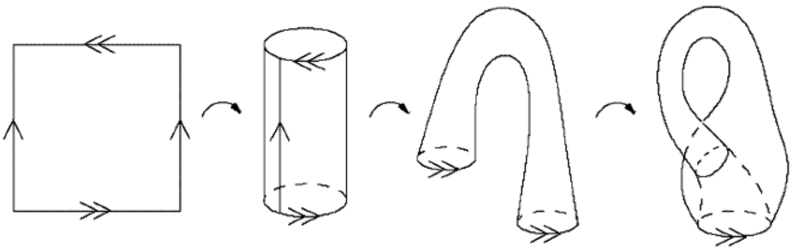

Figura 2.5: Bottiglia di Klein

**Teorema 41** La sfera $\mathbb{S}^2$ è omeomorfa ai seguenti spazi quoziente:

(a) Il disco chiuso $\overline{\mathbb{B}^2} \subseteq \mathbb{R}^2$ quozientato usando la relazione di equivalenza definita da $(x, y) \sim (-x, y)$ per ogni $x \in \partial\overline{\mathbb{B}^2}$ e $(x, y) \sim (x, y)$ per ogni punto del disco (Figura 2.6).

(b) $I^2/\sim_s$ dove $\sim_s$ è la seguente relazione di equivalenza: $p \sim_s q \Leftrightarrow p = q$ oppure $\{p, q\} = \{(0, t), (t, 0)\}$ oppure $\{p, q\} = \{(t, 1), (1, t)\}$ con $0 \leq t \leq 1$ (Figura 2.7).

*Dimostrazione.*

(a) Definiamo l'applicazione $f : \overline{\mathbb{B}^2} \to \mathbb{S}^2$ data da

$$f(x, y) = \begin{cases} (-\sqrt{1-y^2}\cos\frac{\pi x}{\sqrt{1-y^2}}, -\sqrt{1-y^2}\sin\frac{\pi x}{\sqrt{1-y^2}}, y) & \text{se } y \neq \pm 1 \\ (0, 0, y) & \text{se } y = \pm 1 \end{cases}$$

Per il lemma della mappa chiusa è una identificazione e produce le stesse identificazioni della relazione di equivalenza.

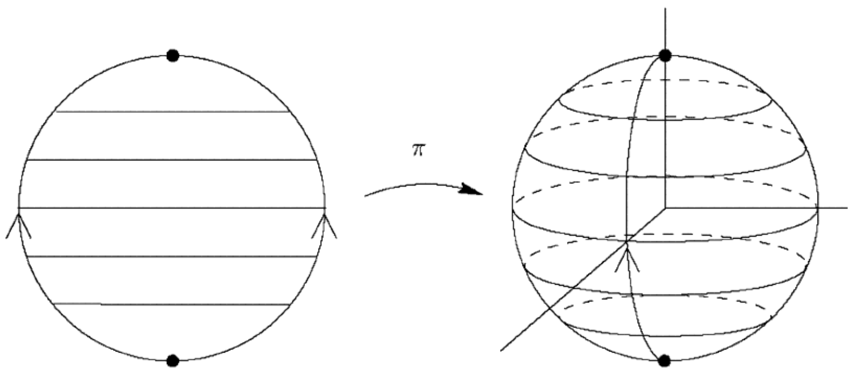


Figura 2.6: Sfera ottenuta quozientando un disco

(b) Diamo solo l'idea della dimostrazione. Si trova l'identificazione cercata come composizione di mappe più semplici. Osservando la Figura 2.7 vediamo che bisogna scalare il quadrato ottenendo un quadrato di lato 2, con centro nell'origine, deformarlo nel disco e infine ruotare il disco fino a ricondurci al caso (a).

□

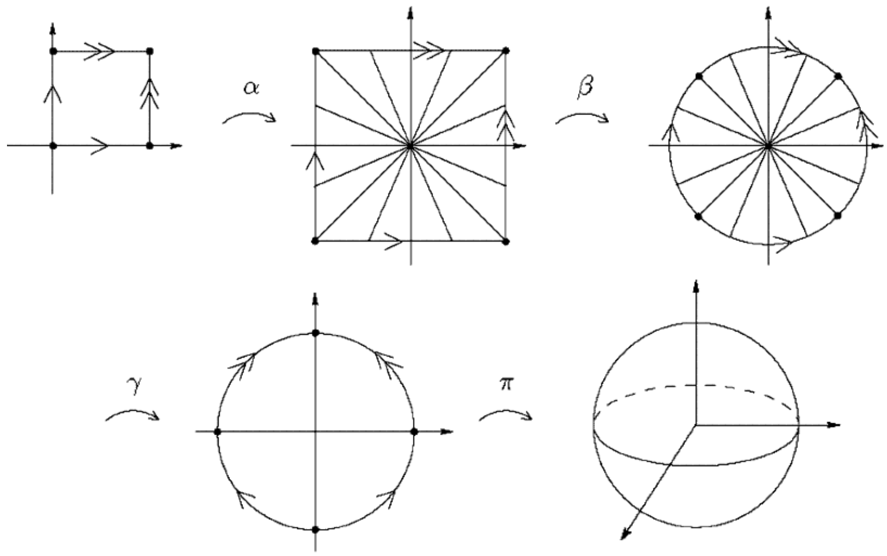


Figura 2.7: Sfera ottenuta quozientando un quadrato

**Teorema 42** Il toro $\mathbb{T}^2$ è omeomorfo allo spazio quoziente $I^2/\sim_t$, dove $\sim_t$ è la seguente relazione di equivalenza: $p \sim_t q \Leftrightarrow p = q$ oppure $\{p,q\} = \{(t,0),(t,1)\}$ oppure $\{p,q\} = \{(0,t),(1,t)\}$ con $0 \leq t \leq 1$ (Figura 2.8).

*Dimostrazione.* Costruiamo la seguente mappa $f : I \times I \to \mathbb{T}^2$ ponendo $f(u,v) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, \cos 2\pi v, \sin 2\pi v)$. Poichè $I^2$ è compatto e $\mathbb{T}^2$ di Hausdorff, ed $f$ suriettiva, per il teorema 32 (della mappa chiusa) $f$ è una identificazione. Detta $\pi$ la proiezione si vede facilmente che $\pi(x_1,y_1) = \pi(x_2,y_2)$ se e solo se $f(x_1,x_2) = f(x_2,y_2)$, quindi per il teorema 31 (unicità degli spazi quoziente) $S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$ e $I^2/\sim$ sono omeomorfi.

□

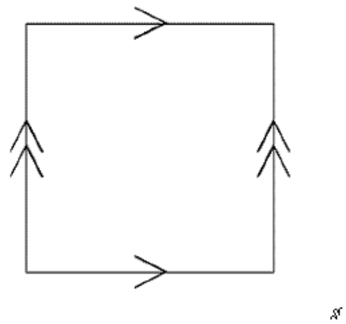

Figura 2.8: Toro ottenuto quozientando un quadrato

**Teorema 43** Il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ è omeomorfo ai seguenti spazi quoziente (Figura 2.9):

(a) La sfera $\mathbb{S}^2$ quozientata con la relazione di equivalenza che identifica punti antipodali, cioè $x \sim y \Leftrightarrow x = \pm y$ per ogni $x, y \in \mathbb{S}^2$.

(b) Il disco chiuso $\overline{\mathbb{B}^2} \subseteq \mathbb{R}^2$ quozientato usando la relazione di equivalenza definita da $(x, y) \sim (-x, -y)$ per ogni $(x, y) \in \partial\overline{\mathbb{B}^2}$ e $(x, y) \sim (x, y)$ per ogni punto del disco.

(c) $I^2/\sim_p$ dove $\sim_p$ è la seguente relazione di equivalenza $p \sim_p q \Leftrightarrow p = q$ oppure $\{p, q\} = \{(t, 0), (1-t, 1)\}$ oppure $\{p, q\} = \{(0, 1-t), (1, t)\}$ con $0 \leq t \leq 1$.

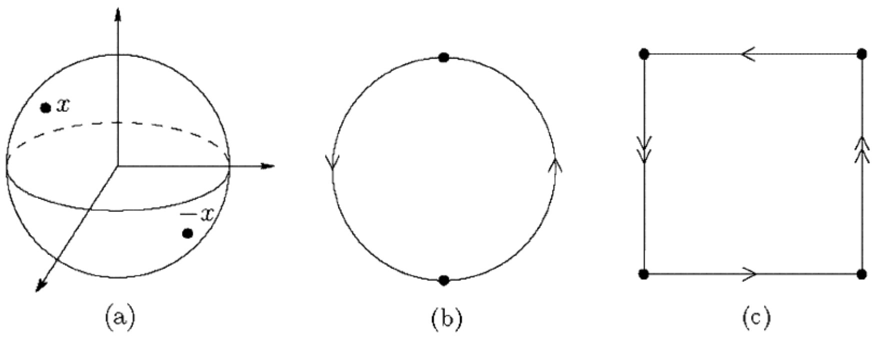


Figura 2.9: Piano proiettivo come spazio quoziente

### Presentazioni poligonali

**Definizione 44** Sia $S$ un insieme, una *parola* in $S$ è una n-upla ordinata di simboli, ognuno della forma $a$ o $a^{-1}$ con $a \in S$.

**Definizione 45** Una *presentazione poligonale* $\mathcal{P} = \langle S \mid W_1, \dots, W_n \rangle$ è formata da un insieme finito $S$ più un numero finito di parole $W_1, \dots, W_n$ di $S$ di lunghezza almeno 3, tali che ogni simbolo di $S$ appaia in almeno una parola. Nel caso particolare in cui $S$ è formato da un solo elemento sono ammesse le presentazioni con una singola parola di lunghezza 2, tali presentazioni sono quattro: $\langle a \mid aa \rangle$,$\langle a \mid aa^{-1} \rangle$,$\langle a \mid a^{-1}a \rangle$,e $\langle a \mid a^{-1}a^{-1} \rangle$.

**Definizione 46** Ogni presentazione poligonale $\mathcal{P}$ determina uno spazio topologico $\mid \mathcal{P} \mid$, detto *realizzazione geometrica* di $\mathcal{P}$, nel seguente modo:

(a) Per ogni parola $W_i$ di lunghezza $n$, sia $P_i$ la regione convessa di $n$ lati del piano che ha il suo centro nell'origine, lati di lunghezza 1, angoli uguali e un vertice nell'asse positivo delle $y$.

(b) E' definita una corrispondenza biunivoca tra i simboli di $W_i$ e i lati di $P_i$ in senso antiorario, partendo dal vertice sull'asse $y$.

(c) Sia $\mid \mathcal{P} \mid$ lo spazio quoziente di $\coprod_i P_i$ trovato identificando tutte le coppie di lati che hanno lo stesso simbolo usando l'omeomorfismo che manda il primo vertice di un lato sul primo dell'altro (ordinando i vertici in senso antiorario) se i due lati hanno la stessa etichetta $a$ o $a^{-1}$, mentre manda il primo vertice di uno nel secondo dell'altro se i due lati sono $a$ e $a^{-1}$.

Ricordando le definizioni di sfera e proiettivo, se $\mathcal{P}$ è una delle presentazioni con parole di lunghezza 2, definiamo $\mid \mathcal{P} \mid$ come la sfera se la parola è $aa^{-1}$ o $a^{-1}a$ e il proiettivo se è $aa$ o $a^{-1}a^{-1}$ (Figura 2.10).

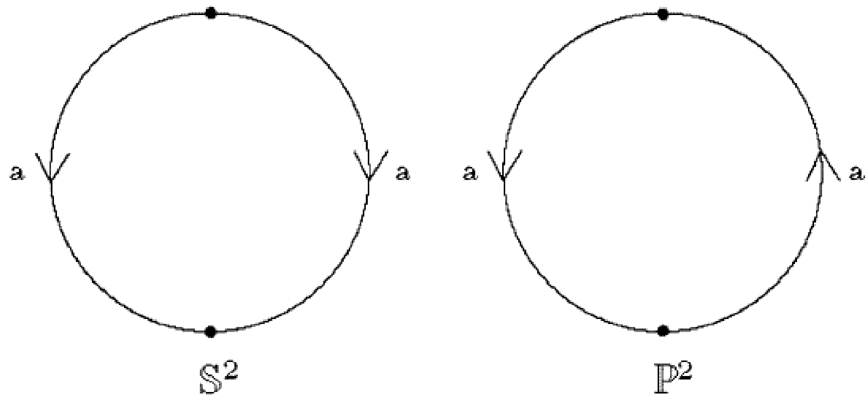


Figura 2.10: Presentazione della sfera e del proiettivo

**Definizione 47** Una presentazione poligonale è detta *presentazione di una superficie* se ogni simbolo $a \in S$ appare esattamente due volte in $W_1, \ldots W_n$ (considerando $a$ e $a^{-1}$ come lo stesso simbolo)(Figura 2.10).

Le parti interne, i lati e i vertici di una regione poligonale $P_i$ sono detti rispettivamente facce, lati e vertici della presentazione. Il numero di facce corrisponde al numero delle parole, mentre il numero di lati corrisponde alla somma delle lettere di tutte le parole. Se un lato è chiamato $a$, il primo vertice in senso antiorario è detto vertice iniziale, mentre l'altro è detto vertice finale; se un lato è chiamato $a^{-1}$ tali definizioni sono invertite. Nelle figure ogni lato è descritto da una freccia che punta dal vertice iniziale verso quello finale, dunque se un lato è chiamato $a$ viene contrassegnato da una freccia in senso antiorario, se è chiamato $a^{-1}$ da una in senso orario.

### Trasformazioni elementari

**Definizione 48** Le seguenti operazioni sono dette *trasformazioni elementari* di una presentazione poligonale. Nella notazione utilizzata $a, b, c, a^{-1}$, $b^{-1} \ldots$ sono simboli di $S$ o loro inversi, $e$ è un simbolo non appartenente ad $S$, $W_1, W_2 \ldots$ sono parole della presentazione e $W_1W_2$ è la parola formata concatenando $W_1$ e $W_2$.

- RELABELING:
  - Cambiare ogni occorrenza del simbolo $a$ con un altro simbolo che non fa parte della presentazione.

  - Scambiare tutte le occorrenze dei simboli $a$ e $b$,
  - Scambiare tra loro tutte le $a$ con le $a^{-1}$.

- SUBDIVIDING: Rimpiazzare tutte le $a$ con $ae$ e tutte le $a^{-1}$ con $e^{-1}a^{-1}$.
- CONSOLIDATING: Se i simboli $a$ e $b$ appaiono sempre adiacenti tra loro come $ab$ o $b^{-1}a^{-1}$, possiamo rimpiazzare $ab$ con $a$ e $b^{-1}a^{-1}$ con $a^{-1}$, purchè il risultato siano una o più parole di lunghezza 3 o una singola parola di lunghezza 2.
- REFLECTING:

$$\langle S \mid a_1 \dots a_m, W_2, \dots, W_n \rangle \mapsto \langle S \mid a_m^{-1} \dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_n \rangle.$$

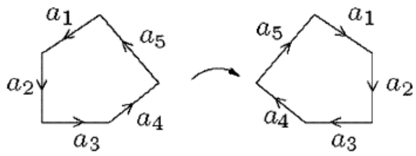


Figura 2.11: Reflecting

- ROTATING:

$$\langle S \mid a_1 a_2 \dots a_m, W_2, \dots, W_n \rangle \mapsto \langle S \mid a_2 \dots a_m a_1, W_2, \dots, W_n \rangle.$$

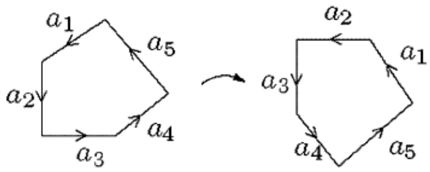


Figura 2.12: Rotating

- CUTTING: Se $W_1$ e $W_2$ hanno lunghezza almeno 2

$$\langle S \mid W_1 W_2, W_3, \dots, W_n \rangle \mapsto \langle S, e \mid W_1 e, e^{-1} W_2, W_3, \dots, W_n \rangle.$$

- PASTING:

$$\langle S, e \mid W_1 e, e^{-1} W_2, W_3, \ldots, W_n \rangle \mapsto \langle S \mid W_1 W_2, W_3, \ldots, W_n \rangle.$$

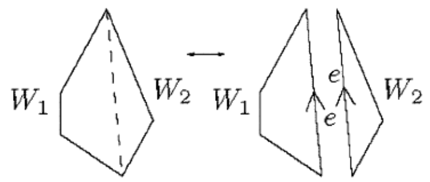


Figura 2.13: Cutting/Pasting

- FOLDING: Se $W_1$ ha lunghezza almeno 3

$$\langle S, e \mid W_1 e e^{-1}, W_2, \ldots, W_n \rangle \mapsto \langle S \mid W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle.$$

- UNFOLDING:

$$\langle S \mid W_1, W_2, \ldots, W_n \rangle \mapsto \langle S, e \mid W_1 e e^{-1}, W_2, \ldots, W_n \rangle.$$

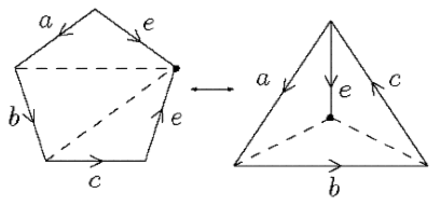


Figura 2.14: Folding/Unfolding

**Teorema 49** Ogni trasformazione elementare di una presentazione poligonale produce una presentazione topologicamente equivalente.

**Teorema 50** Siano $M_1$ e $M_2$ superfici determinate rispettivamente dalle presentazioni $\langle S_1 \mid W_1 \rangle$ e $\langle S_2 \mid W_2 \rangle$ in cui $S_1$ ed $S_2$ sono insiemi disgiunti ed entrambe le presentazioni hanno una singola faccia. Allora la presentazione della somma connessa $M_1 \# M_2$ è $\langle S_1, S_2 \mid W_1 W_2 \rangle$, dove $W_1 W_2$ è la parola formata concatenando le parole $W_1$ e $W_2$.

**Definizione 51** Con quanto detto fino ad ora siamo pronti a dare le presentazioni poligonali di alcune superfici fondamentali, tali presentazioni le chiameremo *presentazioni standard*.

(a) La sfera:$\langle a \mid aa^{-1}\rangle$ o $\langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1}\rangle$.

(b) Il toro: $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1}\rangle$.

(c) Il piano proiettivo: $\langle a \mid aa\rangle$ o $\langle a, b \mid abab\rangle$.

(d) La bottiglia di Klein: $\langle a, b \mid abab^{-1}\rangle$.

(e) Somma connessa di $n$ tori:$\langle a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \mid a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \ldots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}\rangle$.

(f) Somma connessa di piani proiettivi:$\langle a_1, \ldots, a_n \mid a_1a_1 \ldots a_na_n\rangle$.

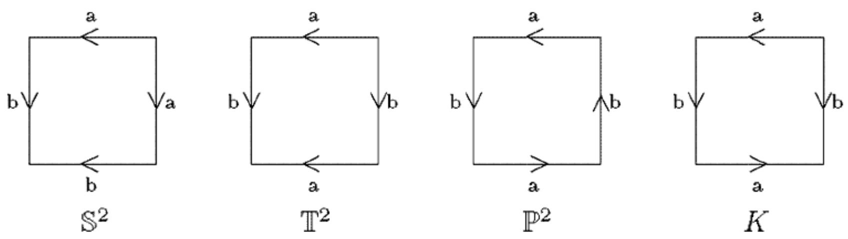


Figura 2.15: Cutting/Pasting

# Capitolo 3

# Teorema di classificazione

**Teorema 52** *Ogni presentazione poligonale di una superficie connessa è equivalente, con un opportuna sequenza di trasformazioni elementari, alla presentazione di una delle seguenti:*

*(a) la sfera* $\mathbb{S}^2$*;*

*(b) una somma connessa di tori* $\mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2$*;*

*(c) una somma connessa di proiettivi* $\mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2$*.*

*Perciò, ogni superficie connessa e compatta è omeomorfa ad una delle superfici di questa lista.*

*Dimostrazione.* Sia $M$ una superficie compatta determinata da una data presentazione. Dimostreremo il teorema trasformando, mediante passi successivi, tale presentazione in una delle presentazioni standard. Nel seguito chiameremo *complementari* due lati se compaiono nella presentazione come $a$ e $a^{-1}$, mentre li chiameremo *gemelli* se appaiono come $a, a$ o $a^{-1}, a^{-1}$.

PASSO 1: *$M$ ammette una presentazione con un'unica faccia.* Poichè $M$ è connessa, se ci sono più facce, qualche lato di una faccia deve essere identificato con un altro lato di un'altra faccia. Altrimenti $M$ sarebbe unione disgiunta di quozienti delle sue facce, e questi formerebbero una separazione di $M$. Pertanto con una serie di trasformazioni elementari possiamo ridurre il numero di facce ad uno solo (in particolare si userà pasting, e se necessario reflecting e rotating).

PASSO 2: *$M$ è omeomorfa alla sfera, oppure ammette una presentazione in cui non ci sono coppie di lati complementari adiacenti.* Ogni coppia di lati complementari adiacenti può essere rimossa con una folding, a meno che non sia l'unica coppia di lati della presentazione, in questo caso la presentazione è $\langle a, a^{-1} | aa^{-1} \rangle$ e quindi $M$ è omeomorfa alla sfera.

Nel seguito assumeremo che $M$ non sia omeomorfa alla sfera.

PASSO 3: *$M$ ammette una presentazione in cui tutti i lati gemelli sono adiacenti.* Se due lati gemelli non sono adiacenti, la presentazione è descritta da una parola della forma $VaWa$, dove ne $V$ ne $W$ sono vuoti. Possiamo trasformare mediante trasformazioni elementare $VaWa$ in $VWb^{-1}b$ (Figura 3.1). In questo modo abbiamo diminuito di uno il numero di lati gemelli non adiacenti, può essere necessario ripetere questo procedimento più volte. Inoltre potremmo aver creato dei lati complementari adiacenti che dovranno essere eliminati ripetendo il PASSO 2.

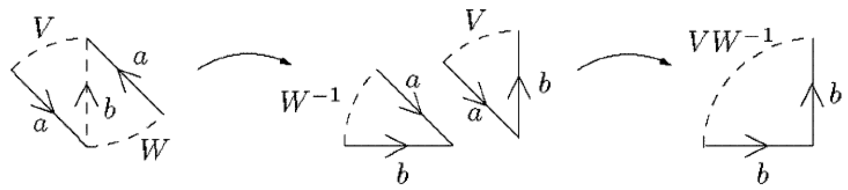


Figura 3.1: Passo 3

PASSO 4: *$M$ ammette una presentazione in cui tutti i vertici sono identificati in un singolo punto.* Prendiamo una qualsiasi classe di equivalenza di vertici e chiamiamola $v$. Se ci sono vertici che non sono identificati con $v$, ci deve essere qualche lato che va da un vertice di $v$ verso un vertice di un'altra classe di equivalenze $w$, chiamiamo questo lato $a$. L'altro lato che tocca $a$ nel suo vertice $v$ non può essere identificato con $a$, infatti se fosse un lato complementare con $a$ l'avremmo rimosso al PASSO 2, e se fosse un lato gemello con $a$ i due vertici sarebbero identificati e noi abbiamo supposto che non lo siano. Chiamiamo tale vertice $b$ e il suo altro vertice $x$ ($x$ può essere identificato con $v$, $w$ o con nessuno dei due). Da qualche altra parte nel poligono c'è un altro vertice chiamato $b$ o $b^{-1}$. Assumiamo che sia $b^{-1}$ (se fosse $b$ il ragionamento sarebbe simile ma con una reflecting in più). Perciò la parola che descrive la presentazione sarà della forma $baXb^{-1}Y$, dove $X$ e $Y$ sono due parole qualunque non entrambe nulle. Ora possiamo tagliare lungo $c$ e incollare lungo $b$ (Figura 3.2). In questo modo i vertici chiamati $v$ sono diminuiti, mentre è aumentato il numero di vertici $w$. Potremmo inoltre avere introdotto dei nuovi lati adiacenti complementare, quindi ripetiamo il PASSO 2 per rimuoverli. Ciò potrebbe far diminuire ulteriormente il numero di vertici di $v$ (per esempio se un vertice di $v$ appare tra due lati complementari che vengono rimossi da una folding), ma sicuramente non li fa aumentare. Dunque ripetendo il procedimento un numero finito di volte rimuoveremo completamente la classe di equivalenza $v$ dalla presentazione.

Iterando questo procedimento per ogni classe di equivalenza di vertici ne rimarrà una sola.

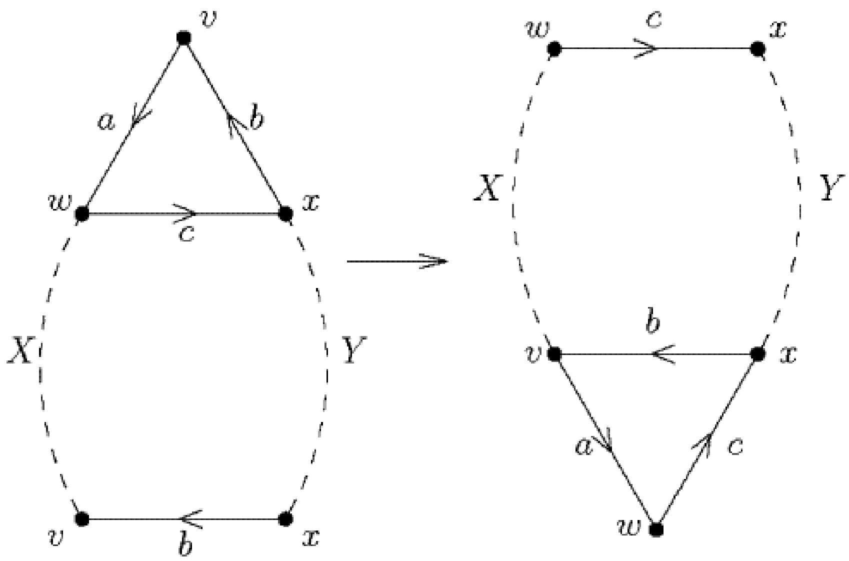


Figura 3.2: Passo 4

PASSO 5: *Se la presentazione ha due lati complementari* $a, a^{-1}$*, allora ne ha altri due* $b, b^{-1}$ *che appaiono alternati con i primi, ad esempio* $a, \ldots, b, \ldots,$ $a^{-1}, \ldots, b^{-1}$. Se non è così, la presentazione è della forma $aXa^{-1}Y$, dove $X$ contiene solo lati complementari o lati gemelli adiacenti. Perciò ogni lato in $X$ è identificato con un altro lato in $X$, a lo stesso vale per $Y$. Ma ciò significa che il vertice terminale di $a$ e $a^{-1}$ entrambi i quali toccano $X$, possono essere identificati solo con vertici in $X$, mentre il vertice iniziale può essere identificato solo con vertici in $Y$. Questa è una contraddizione perchè per il PASSO 4 tutti i vertici sono identificati insieme.

PASSO 6: *$M$ ammette una presentazione in cui tutte le coppie di lati complementari alternate tra loro appaiono senza altri lati nel mezzo.* Se la presentazione è data dalla parola $WaXbYa^{-1}Zb^{-1}$ applichiamo delle trasformazioni elementari (Figura 3.3) che la trasformano in $cdc^{-1}d^{-1}WZYX$, quindi abbiamo sostituito le vecchie coppie alternate, separate dai lati $WXYZ$, con le coppie $cdc^{-1}d^{-1}$ che non hanno altri lati nel mezzo. Tale procedimento si può ripetere per tutte le coppie di lati complementari alternate.

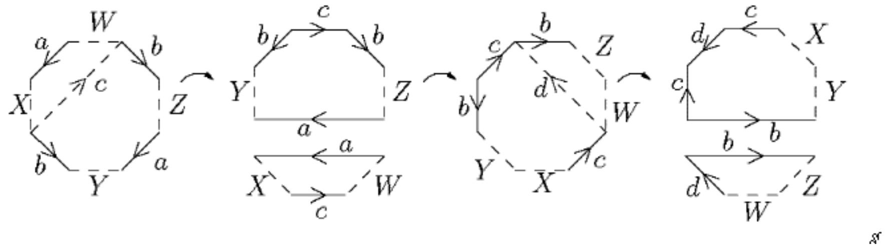


Figura 3.3: Passo 6

PASSO 7: *M è omeomorfa o ad una somma connessa di tori, o ad una somma connessa di piani proiettivi.* Da quanto fatto fino ad ora, tutti i lati gemelli appaiono adiacenti tra loro, e tutti i lati complementari appaiono in gruppi del tipo $aba^{-1}b^{-1}$.Questa è la presentazione di una somma connessa di tori e di piani proiettivi. Se ci sono solo tori, o solo piani proiettivi abbiamo finito.

Per concludere proviamo i seguenti lemmi (53-54), che prendono in considerazione i casi in cui la presentazione contiene sia lati complementari che gemelli (dunque è formata sia da tori che da piani proiettivi). Essi dimostrano che la presentazione di $\mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2$ può essere trasformata in quella di $\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$, questo consente di rimuovere ogni occorrenza di $\mathbb{T}^2$ e conclude la dimostrazione.

□

**Lemma 53** La bottiglia di Klein è omeomorfa a $\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$.

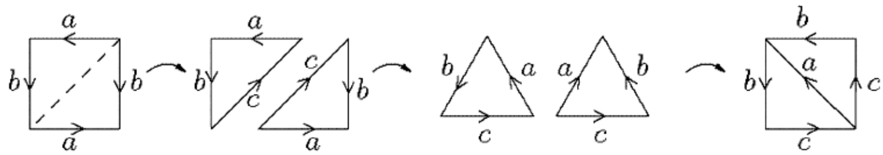


Figura 3.4: Trasformazione della bottiglia di Klein in $\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$

*Dimostrazione.* Con una sequenza di trasformazioni elementari (Figura 3.4) si dimostra che la bottiglia di Klein ha la seguente presentazione $\langle b, c|bbcc\rangle$, che è la presentazione della somma connessa di due piani proiettivi.

$$\langle a, b|abab^{-1}\rangle \cong \langle a, b, c|abc, c^{-1}ab^{-1}\rangle \cong \langle a, b, c|bca, a^{-1}cb\rangle \cong \langle b, c|bbcc\rangle$$

□

**Lemma 54** La somma connessa $\mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2$ è omeomorfa a $\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$.

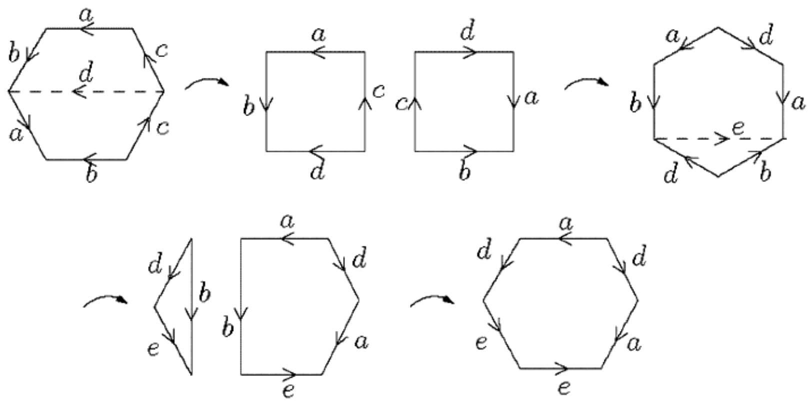

Figura 3.5: Trasformazione di $\mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2$ in $\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$

*Dimostrazione.* Partiamo da $\langle a, b, c | abab^{-1}cc\rangle$ che è la presentazione di $K\#\mathbb{P}^2$, e dunque, per il lemma precedente, di $\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2\#\mathbb{P}^2$. Seguendo la Figura 3.5 vediamo le trasformazioni elementari necessarie per ottenere $\langle a, d, e | a^{-1}d^{-1}adee\rangle$ che è la presentazione di $\mathbb{T}^2\#\mathbb{P}^2$.

□

### Caratteristica di Eulero

**Definizione 55** Se P è una presentazione poligonale definiamo la caratteristica di Eulero (detta anche caratteristica di Eulero-Poincarè) come $V - E + F$ dove $V$ è il numero di vertici (dopo l'identificazione), $E$ è il numero dei lati (rappresentato dal numero dei simboli che rappresentano i lati), $F$ è il numero delle facce.

**Teorema 56** La caratteristica di Eulero di una presentazione poligonale non cambia per trasformazioni elementari.

*Dimostrazione.* Relabeling, rotating, reflecting non cambiano il numero di vertici, lati, e facce, quindi non cambiano la caratteristica di Eulero. Subdividing aumenta di uno sia il numero dei lati sia quello dei vertici e lascia invariato il numero delle facce. Cutting aumenta di uno sia il numero delle facce sia quello dei lati e lascia invariati i vertici. Unfolding aumenta di uno sia il numero dei lati sia quello dei vertici e lascia invariato in numero delle facce. Quindi con queste trasformazioni il numero $V - E + F$ non cambia. Consolidating, pasting e folding sono le inverse delle precedenti e quindi anch'esse non cambiano la caratteristica di Eulero.

□

**Teorema 57** La caratteristica di Eulero della presentazione standard di una superficie è uguale a:

(a) 2 per la sfera;

(b) $2 - 2n$ per la somma connessa di $n$ tori;

(c) $s - n$ per la somma connessa di $n$ piani proiettivi.

Da questi risultati sembrerebbe che data una superficie con la sua presentazione sia possibile stabilire a quale superficie fondamentale sia omeomorfa semplicemente calcolando la caratteristica di Eulero della presentazione. Sebbene questo sia possibile non è stato dimostrato in questa tesi. Infatti per concludere che la caratteristica di Eulero-Poincarè è un invariante topologico è necessario dimostrare che le superfici standard non sono omeomorfe tra loro, e per fare ciò bisogna usare strumenti più sofisticati di topologia algebrica.

# Bibliografia

[Kos] Kosniowski Czes. *Introduzione alla topologia algebrica*. Zanichelli.

[Lee] Lee John M. *Introduction to topological manifolds*. Springer.

[Loi] Loi Andrea. *Appunti di topologia generale*.

[Thu] William P. Thurston *Three-dimensional geometry and topology*. Princeton University Press.