



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

FORME DIFFERENZIALI
E
TEOREMA DI HODGE

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea magistrale di
Lorena Eleonora Lusso

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

Introduzione

Questa tesi si propone di presentare le definizioni e i risultati principali della teoria degli spazi di coomologia di de Rham per le varietà differenziabili, e di dare la dimostrazione del Teorema di decomposizione di Hodge.

Nel caso particolare in cui U sia un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , si dice p -esimo gruppo di coomologia di de Rham di U lo spazio vettoriale quoziente

$$H^p(U) = \frac{\text{Ker}(d : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U))}{\text{Im}(d : \Omega^{p-1}(U) \rightarrow \Omega^p(U))}.$$

Numerosi sono gli strumenti necessari alla comprensione di questa definizione, e fondamentali sono anche le sue applicazioni nello studio delle varietà. In particolare infatti abbiamo che i gruppi di coomologia sono degli invarianti topologici.

La tesi è suddivisa in due parti.

Nella prima parte, costituita dai primi 6 capitoli, viene studiata la coomologia di de Rham per generici aperti dello spazio Euclideo \mathbb{R}^n .

Nei primi due capitoli si parlerà quindi di forme differenziali e del prodotto esterno, sino ad arrivare allo studio della struttura algebrica dell'insieme delle forme, alle forme chiuse e a quelle esatte.

Dopo aver dato la definizione degli spazi di coomologia nel caso di aperti di \mathbb{R}^n , si passerà, nei capitoli 3 e 4, alla definizione e alle proprietà dei complessi di catene, delle sequenze e delle applicazioni tra complessi, e alla sequenza di Mayer-Vietoris, tecnica quest'ultima che ci permetterà di esprimere i gruppi di coomologia dell'unione di aperti in funzione di spazi più semplici, fondamentale per la semplificazione dei calcoli.

Nella seconda parte della tesi la definizione di coomologia di de Rham viene estesa al caso delle varietà differenziabili.

Nel capitolo 7 quindi, dopo un'introduzione su concetti noti quali lo spazio tangente, l'applicazione tangente e i campi vettoriali, saranno definite le forme differenziali su varietà, l'orientazione, la metrica Riemanniana, e verrà in particolare enunciato il Teorema degli intorni tubolari (teorema 22), utile per la dimostrazione di alcune importanti proprietà per gli spazi di coomologia su varietà.

Nel capitolo 8 verranno introdotti gli strumenti principali dell'integrazione su varietà: sarà definito l'operatore integrale sullo spazio vettoriale delle forme differenziali su una data varietà, o su un qualunque suo sottoinsieme, e seguirà l'enunciato del Teorema di Stokes (teorema 23), presentato assieme ad alcune applicazioni al calcolo degli spazi di coomologia.

L'ultimo capitolo è dedicato alla dimostrazione del Teorema di decomposizione di Hodge:

Teorema. *Per ogni intero p , $0 \leq p \leq n$, H^p è uno spazio a dimensione finita. Inoltre per lo spazio $\Omega^p(M)$ delle p -forme lisce su M valgono le seguenti decomposizioni in somma diretta:*

$$\begin{aligned}\Omega^p(M) &= \Delta(\Omega^p) \oplus H^p \\ &= d\delta(\Omega^p) \oplus \delta d(\Omega^p) \oplus H^p \\ &= d(\Omega^{p-1}) \oplus \delta(\Omega^{p+1}) \oplus H^p.\end{aligned}$$

Di conseguenza, l'equazione $\Delta\omega = \alpha$ ammette soluzione $\omega \in \Omega^p(M)$ se e solo se la p -forma α è ortogonale allo spazio delle p -forme armoniche.

Per la comprensione di tale teorema e della sua dimostrazione sarà necessario introdurre la definizione dell'operatore di Laplace-Beltrami e alcune sue proprietà, la definizione di forma armonica, e alcuni risultati che si inscrivono in un più ampio studio sulle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di soluzioni di equazioni della forma $\Delta\omega = \alpha$, quali ad esempio la definizione di soluzione debole, e il Teorema di regolarità.

Chiuderemo l'ultimo capitolo con alcune importanti proprietà degli spazi di coomologia, conseguenza diretta del teorema di Hodge.

Indice

1	L'algebra Alternante	5
2	Coomologia di de Rham	13
3	Complessi di catene	23
4	La sequenza di Mayer-Vietoris	29
5	Omotopia	34
6	Alcune applicazioni	43
7	Forme differenziali su varietà	53
8	Integrazione su varietà	72
9	Il teorema di Hodge	79
	Bibliografia	87

Capitolo 1

L'algebra Alternante

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Un'applicazione

$$f : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k \text{ volte}} \rightarrow \mathbb{R}$$

è detta *k-lineare* (o multilineare) se f è lineare in ogni fattore.

Definizione 1. Un'applicazione *k-lineare* $\omega: V^k \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *alternante* se $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0$ ogni volta che $\xi_i = \xi_j$ per una qualche coppia (i, j) , con $i \neq j$. Lo spazio vettoriale delle applicazioni *k-lineari alternanti* è indicato con $Alt^k(V)$.

Si nota immediatamente che $Alt^k(V) = 0$ se $k > \dim V$. Infatti, data e_1, \dots, e_n base di V , e data $\omega \in Alt^k(V)$, utilizzando la multilinearità abbiamo che:

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_n) = \omega\left(\sum \lambda_{i,1} e_i, \dots, \sum \lambda_{i,k} e_i\right) = \sum \lambda_J \omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$$

con $\lambda_J = \lambda_{j_1,1} \cdots \lambda_{j_k,k}$. Dato che $k > n$, deve necessariamente esserci una ripetizione tra gli elementi e_{j_1}, \dots, e_{j_k} . Quindi $\omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = 0$

Lemma 1. Se $\omega \in Alt^k(V)$ e $\sigma \in S(k)$, allora

$$\omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) = \text{sign}(\sigma) \omega(\xi_1, \dots, \xi_k).$$

dove $S(k)$ denota il gruppo simmetrico di permutazioni dell'insieme $\{1, \dots, k\}$

Dimostrazione. È sufficiente provare il risultato nel caso in cui σ sia una trasposizione, cioè $\sigma = (i, j)$, il caso generale segue dal fatto che il gruppo simmetrico è generato dalle trasposizioni. Sia

$$\omega_{i,j}(\xi, \xi') = \omega(\xi_1, \dots, \xi, \dots, \xi', \dots, \xi_k),$$

con ξ e ξ' rispettivamente in corrispondenza degli indici i e j , e i rimanenti ξ_ν arbitrari ma fissati. Dalla definizione segue che $\omega_{i,j} \in \text{Alt}^2(V)$. Possiamo quindi scrivere $\omega_{i,j}(\xi_i + \xi_j, \xi_i + \xi_j) = 0$ e, per la bilinearità, $\omega_{i,j}(\xi_i, \xi_j) = -\omega_{i,j}(\xi_j, \xi_i)$. □

Esempio 1. Sia $V = \mathbb{R}^k$ e $\xi_i = (\xi_{i1}, \dots, \xi_{ik})$. La funzione $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \det((\xi_{ij}))$ è un'applicazione alternante, per le regole del calcolo del determinante di matrici.

Vogliamo ora definire un'applicazione

$$\Lambda : \text{Alt}^p(V) \times \text{Alt}^q(V) \rightarrow \text{Alt}^{(p+q)}(V),$$

che chiameremo *prodotto esterno*, tale che nel caso particolare in cui $p = q = 1$ valga l'uguaglianza

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2) = \omega_1(\xi_1)\omega_2(\xi_2) - \omega_2(\xi_1)\omega_1(\xi_2)$$

Definizione 2. Un (p, q) -shuffle σ è una permutazione di $\{1, \dots, p+q\}$ tale che

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(p) \quad e \quad \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q).$$

L'insieme di tali permutazioni è denotato con $S(p, q)$. Notiamo che ciascuna di queste permutazioni è univocamente determinata dall'insieme $\{\sigma(1) \dots \sigma(p)\}$, e quindi che la cardinalità di $S(p, q)$ è esattamente $\binom{p+q}{p}$.

Definizione 3 (Prodotto esterno). Date $\omega_1 \in \text{Alt}^p(V)$ e $\omega_2 \in \text{Alt}^q(V)$, definiamo

$$\begin{aligned} & (\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(p, q)} \text{sign}(\sigma) \omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}). \end{aligned}$$

Segue dalla definizione che $\omega_1 \wedge \omega_2$ è un'applicazione $(p+q)$ -lineare, e si hanno inoltre i seguenti risultati:

Lemma 2. Se $\omega_1 \in \text{Alt}^p(V)$ e $\omega_2 \in \text{Alt}^q(V)$ allora $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \text{Alt}^{p+q}(V)$.

Dimostrazione. Dimostriamo che $(\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) = 0$ nel caso in cui $\xi_1 = \xi_2$. Poniamo

$$(i) \quad S_{12} = \{\sigma \in S(p, q) \mid \sigma(1) = 1, \sigma(p+1) = 2\}$$

$$(ii) \quad S_{21} = \{\sigma \in S(p, q) \mid \sigma(1) = 2, \sigma(p+1) = 1\}$$

$$(iii) \quad S_0 = S(p, q) - (S_{12} \cup S_{21}).$$

Se $\sigma \in S_0$ allora uno tra $\omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)})$ e $\omega_2(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)})$ è nullo in quanto o capita che $\xi_{\sigma(1)} = \xi_{\sigma(2)}$, oppure necessariamente $\xi_{\sigma(p+1)} = \xi_{\sigma(p+2)}$. La composizione a sinistra con la trasposizione $\tau = (1, 2)$ è una bigezione $S_{12} \rightarrow S_{21}$.

Abbiamo quindi, eliminando tutti i termini che risultano essere nulli, che

$$\begin{aligned} & (\omega_1 \wedge \omega_2)(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+q}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_{12}} \text{sign}(\sigma) \omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) \omega_2(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}) \\ & - \sum_{\sigma \in S_{12}} \text{sign}(\sigma) \omega_1(\xi_{\tau\sigma(1)}, \dots, \xi_{\tau\sigma(p)}) \omega_2(\xi_{\tau\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\tau\sigma(p+q)}). \end{aligned}$$

Dato che $\sigma(1) = 1$ e $\sigma(p+1) = 2$, mentre $\tau\sigma(1) = 2$ e $\tau\sigma(p+1) = 1$, notiamo che $\tau\sigma(i) = \sigma(i)$ ogni volta che $i \notin \{1, p+1\}$. Ma per ipotesi $\xi_1 = \xi_2$ e i due termini presenti nella somma coincidono, annullandosi a vicenda. Il caso $\xi_i = \xi_{i+1}$ è simile. La tesi è quindi dimostrata grazie al lemma che segue. \square

Lemma 3. Un'applicazione k -lineare ω è alternante se $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0$ per ogni k -upla con $\xi_i = \xi_{i+1}$ per qualche $1 \leq i \leq k-1$.

Dimostrazione. $S(k)$ è generata dall'insieme delle trasposizioni del tipo $(i, i+1)$ e, grazie al lemma 1, possiamo scrivere

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_i, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k) = -\omega(\xi_1, \dots, \xi_{i+1}, \xi_i, \dots, \xi_k).$$

Quindi il lemma 1 vale per ogni possibile $\sigma \in S(k)$, e ω è alternante. \square

Alcune semplici proprietà del prodotto esterno derivano direttamente dalla definizione, come ad esempio:

$$\begin{aligned}(\omega_1 + \omega'_1) \wedge \omega_2 &= \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega'_1 \wedge \omega_2 \\(\lambda \omega_1) \wedge \omega_2 &= \lambda(\omega_1 \wedge \omega_2) = \omega_1 \wedge \lambda \omega_2 \\ \omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega'_2) &= \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega'_2\end{aligned}$$

per $\omega_1, \omega'_1 \in \text{Alt}^p(V)$ e $\omega_2, \omega'_2 \in \text{Alt}^q(V)$.

Lemma 4. Se $\omega_1 \in \text{Alt}^p(V)$ e $\omega_2 \in \text{Alt}^q(V)$, allora $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1$.

Dimostrazione. Sia $\tau \in S(p+q)$ l'elemento con

$$\begin{aligned}\tau(1) &= p+1, \tau(2) = p+2, \dots, \tau(q) = p+q \\ \tau(q+1) &= 1, \tau(q+2) = 2, \dots, \tau(p+q) = p.\end{aligned}$$

Il segno di τ è $(-1)^{pq}$. La composizione con τ definisce una bigezione

$$S(p, q) \xrightarrow{\cong} S(q, p); \quad \sigma \rightarrow \sigma \circ \tau.$$

Notiamo che

$$\begin{aligned}\omega_2(\xi_{\sigma\tau(1)}, \dots, \xi_{\sigma\tau(q)}) &= \omega_2(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}) \\ \omega_1(\xi_{\sigma\tau(q+1)}, \dots, \xi_{\sigma\tau(p+q)}) &= \omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)})\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}& \omega_2 \wedge \omega_1(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(q, p)} \text{sign}(\sigma) \omega_2(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(q)}) \omega_1(\xi_{\sigma(q+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S(p, q)} \text{sign}(\sigma\tau) \omega_2(\xi_{\sigma\tau(1)}, \dots, \xi_{\sigma\tau(q)}) \omega_1(\xi_{\sigma\tau(q+1)}, \dots, \xi_{\sigma\tau(p+q)}) \\ &= (-1)^{pq} \sum_{\sigma \in S(p, q)} \text{sign}(\sigma) \omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) \omega_2(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}) \\ &= (-1)^{pq} \omega_1 \wedge \omega_2(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}).\end{aligned}$$

□

Lemma 5. Se $\omega_1 \in \text{Alt}^p(V)$, $\omega_2 \in \text{Alt}^q(V)$, e $\omega_3 \in \text{Alt}^r(V)$ allora

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3.$$

Dimostrazione. Chiamiamo $S(p, q, r)$ il sottoinsieme di $S(p+q+r)$ costituito da tutte le permutazioni σ tali che

$$\begin{aligned} \sigma(1) &< \dots < \sigma(p), \\ \sigma(p+1) &< \dots < \sigma(p+q), \\ \sigma(p+q+1) &< \dots < \sigma(p+q+r). \end{aligned}$$

Definiamo inoltre i sottoinsiemi $S(\bar{p}, q, r)$ e $S(p, q, \bar{r})$ di $S(p, q, r)$ dati da

$$\begin{aligned} \sigma \in S(\bar{p}, q, r) &\Leftrightarrow \sigma \text{ è l'identità su } \{1, \dots, p\} \text{ e } \sigma \in S(p, q, r) \\ \sigma \in S(p, q, \bar{r}) &\Leftrightarrow \sigma \text{ è l'identità su } \{p+q+1, \dots, p+q+r\} \text{ e } \sigma \in S(p, q, r). \end{aligned}$$

Sono definite le seguenti bigezioni

$$\begin{cases} S(p, q+r) \times S(\bar{p}, q, r) \xrightarrow{\cong} S(p, q, r); & (\sigma, \tau) \rightarrow \sigma \circ \tau \\ S(p+q, r) \times S(p, q, \bar{r}) \xrightarrow{\cong} S(p, q, r); & (\sigma, \tau) \rightarrow \sigma \circ \tau. \end{cases}$$

e con queste notazioni abbiamo

$$\begin{aligned} & [(\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3))(\xi_1, \dots, \xi_{p+q+r})] \\ = & \sum_{\sigma \in S(p, q+r)} \text{sign}(\sigma) \omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) (\omega_2 \wedge \omega_3)(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q+r)}) \\ & = \sum_{\sigma \in S(p, q+r)} \text{sign}(\sigma) \sum_{r \in S(\bar{p}, q, r)} \text{sign}(\tau) \omega_1(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) \\ & \omega_2(\xi_{\sigma\tau(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma\tau(p+q)}, \dots, \xi_{\sigma\tau(p+q+r)}) \omega_3(\xi_{\sigma\tau(p+q+1)}, \dots, \xi_{\sigma\tau(p+q+r)}) \\ & = \sum_{u \in S(p, q, r)} [\text{sign}(u) \omega_1(\xi_{u(1)}, \dots, \xi_{u(p)}) \omega_2(\xi_{u(p+1)}, \dots, \xi_{u(p+q)}) \\ & \omega_3(\xi_{u(p+q+1)}, \dots, \xi_{u(p+q+r)})] \end{aligned}$$

Allo stesso modo si può calcolare $[(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3](\xi_1, \dots, \xi_{p+q+r})$. \square

Una \mathbb{R} -algebra A consiste in uno spazio vettoriale su \mathbb{R} e una mappa bilineare $\mu: A \times A \rightarrow A$ associativa, $\mu(a, \mu(b, c)) = \mu(\mu(a, b), c)$ per ogni $a, b, c \in A$. L'algebra è detta unitaria se esiste un elemento neutro per μ , ovvero tale per cui $\mu(1, a) = \mu(a, 1) = a$ per qualunque $a \in A$.

Definizione 4. 1. Una \mathbb{R} -algebra graduata A_* è una sequenza di spazi vettoriali $A_k, k = 0, 1, \dots$ e applicazioni bilineari e associative

$$\mu: A_k \times A_l \rightarrow A_{k+l}$$

2. L'algebra A_* è detta connessa se esiste un elemento neutro $1 \in A_0$ e se $\epsilon: \mathbb{R} \rightarrow A_0$, data da $\epsilon(\tau) = \tau \cdot 1$, è un isomorfismo.

3. L'algebra A_* è detta anticommutativa se $\mu(a, b) = (-1)^{kl} \mu(b, a)$ per $a \in A_k$ e $b \in A_l$

Gli elementi in A_k si dicono di grado k . L'insieme $Alt^k(V)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} con le operazioni

$$\begin{aligned} (\omega_1 + \omega_2)(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \omega_1(\xi_1, \dots, \xi_k) + \omega_2(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ (\lambda\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \lambda\omega(\xi_1, \dots, \xi_k), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Il prodotto esterno che abbiamo definito è un'applicazione bilineare da $Alt^p(V) \times Alt^q(V)$ a $Alt^{p+q}(V)$. Poniamo $Alt^0 = \mathbb{R}$ ed estendiamo la definizione di prodotto anche ad insiemi del tipo $Alt^0(V) \times Alt^p(V)$ utilizzando la struttura di spazio vettoriale. Le proprietà formali delle forme alternanti possono quindi essere riassunte nel seguente teorema:

Teorema 1. $Alt^*(V)$ è un'algebra anticommutativa e connessa.

$Alt^*(V)$ è chiamata **algebra esterna** o **alternante** associata a V .

Lemma 6. Date le 1-forme $\omega_1, \dots, \omega_p \in Alt^1(V)$,

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_1(\xi_2) & \dots & \omega_1(\xi_p) \\ \omega_2(\xi_1) & \omega_2(\xi_2) & \dots & \omega_2(\xi_p) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_p(\xi_1) & \omega_p(\xi_2) & \dots & \omega_p(\xi_p) \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Il caso $p = 2$ è immediato. Per il caso generale procediamo per induzione su p . Dalla definizione di prodotto esterno possiamo scrivere

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_p)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} \omega_1(\xi_j) (\omega_2 \wedge \dots \wedge \widehat{\xi_j} \wedge \dots \wedge \xi_p)$$

dove $(\xi_1, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_p)$ indica la $(p-1)$ -upla in cui ξ_j è stato omesso. L'uguaglianza voluta segue sviluppando il determinante rispetto alla prima riga. \square

Lemma 7. *Date le 1-forme $\omega_1, \dots, \omega_p$ su V , $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \neq 0$ se e solo se sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Nel caso in cui le forme siano linearmente indipendenti, il fatto che $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p \neq 0$ discende direttamente dal lemma 6. Notiamo inoltre che in questo caso possiamo scegliere degli elementi $\xi_i \in V$, tali che $\omega_i(\xi_j) = \delta_i^j$, in modo tale che $\det(\omega_i(\xi_j)) = 1$.

Viceversa, se $\omega_1, \dots, \omega_p$ sono linearmente dipendenti, possiamo scrivere una di queste, poniamo ω_p , come combinazione lineare delle altre.

Se $\omega_p = \sum_{i=1}^{p-1} r_i \omega_i$, allora

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_p = \sum_{i=1}^{p-1} r_i \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{p-1} \wedge \omega_i = 0.$$

in quanto il determinante del lemma 6 ha due righe uguali. \square

Teorema 2. *Sia e_1, \dots, e_n una base di V , $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ la base duale in $Alt^1(V)$. Allora*

$$\{\epsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \epsilon_{\sigma(p)}\}_{\sigma \in S(p, n-p)}$$

è una base di $Alt^p(V)$. In particolare $\dim Alt^p(V) = \binom{\dim V}{p}$.

Dimostrazione. Dato che $\epsilon_i(e_j) = 0$ per $i \neq j$, e $\epsilon_i(e_i) = 1$, il lemma 6 ci da

$$\epsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon_{i_p}(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \{i_1, \dots, i_p\} \neq \{j_1, \dots, j_p\} \\ \text{sign}(\sigma) & \text{se } \{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_p\} \end{cases}$$

dove con σ indichiamo la permutazione $\sigma(i_k) = j_k$.

Ogni p -forma alternante può quindi essere scritta come

$$\omega = \sum_{\sigma \in S(p, n-p)} \omega(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)}) \epsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \epsilon_{\sigma(p)}$$

Allora $\epsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \epsilon_{\sigma(p)}$ genera lo spazio vettoriale $Alt^p(V)$. L'indipendenza lineare segue dal fatto che la relazione

$$\sum_{\sigma \in S(p, n-p)} \lambda_\sigma \epsilon_{\sigma(1)} \wedge \dots \wedge \epsilon_{\sigma(p)} = 0, \quad \lambda_\sigma \in \mathbb{R}$$

valutata in $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(p)})$ da $\lambda_\sigma = 0$.

□

Notiamo che $\text{Alt}^n(V) \cong \mathbb{R}$ se $n = \dim V$ e ricordiamo che $\text{Alt}^p(V) = 0$ se $p > n$. Una base di $\text{Alt}^n(V)$ è data da $\epsilon_1 \wedge \dots \wedge \epsilon_n$. In particolare ogni n -forma alternante su \mathbb{R}^n è proporzionale alla forma $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \det((\xi_{ij}))$ definita nell'esempio 1.

Una mappa lineare $f: V \rightarrow W$ induce una mappa lineare

$$\text{Alt}^p(f) : \text{Alt}^p(W) \rightarrow \text{Alt}^p(V)$$

definita attraverso la relazione $\text{Alt}^p(f)(\omega)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \omega(f(\xi_1), \dots, f(\xi_p))$. Per la composizione di applicazioni si ottiene $\text{Alt}^p(g \circ f) = \text{Alt}^p(f) \circ \text{Alt}^p(g)$, e $\text{Alt}^p(\text{id}) = \text{id}$. Queste due proprietà sono riassunte dicendo che $\text{Alt}^p(-)$ è un funtore controvariante. Se $\dim V = n$ e $f: V \rightarrow V$ è una mappa lineare, allora

$$\text{Alt}^n(f) : \text{Alt}^n(V) \rightarrow \text{Alt}^n(V)$$

è un endomorfismo lineare dello spazio vettoriale unidimensionale $\text{Alt}^n(V)$, e quindi non è altro che una moltiplicazione per un numero d .

Capitolo 2

Coomologia di de Rham

In questo capitolo indicheremo con U un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica di \mathbb{R}^n e $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ la base duale $\text{Alt}^1(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 5. Una p -forma differenziale su U è un'applicazione liscia $\omega : U \rightarrow \text{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$. Lo spazio vettoriale di tutte le applicazioni così definite è indicato con $\Omega^p(U)$.

Se $p = 0$ allora $\text{Alt}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$, e $\Omega^0(U)$ coincide con lo spazio vettoriale delle funzioni lisce su U a valori reali, $\Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$.

La derivata usuale di una mappa liscia $\omega : U \rightarrow \text{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ è indicata con il simbolo $D\omega$, e il suo valore in x con $D_x\omega$. È la mappa lineare

$$D_x\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Alt}^p(\mathbb{R}^n),$$

con

$$(D_x\omega)(e_i) = \frac{d}{dt}\omega(x + te_i)_{t=0} = \frac{\partial\omega}{\partial x_i}(x).$$

In $\text{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ abbiamo la base $\epsilon_I = \epsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon_{i_p}$, dove I varia all'interno dell'insieme delle p -uple del tipo $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$.

Ogni $\omega \in \Omega^p(U)$ può quindi essere scritta nella forma $\omega = \sum \omega_I(x)\epsilon_I$, con $\omega_I(x)$ funzioni di $x \in U$, lisce e a valori reali.

Il differenziale $D_x\omega$ è l'applicazione lineare

$$D_x\omega(e_j) = \sum_I \frac{\partial\omega_I}{\partial x_j}(x)\epsilon_I, \quad j = 1, \dots, n.$$

La funzione $x \rightarrow D_x\omega$ è una mappa liscia da U allo spazio vettoriale delle applicazioni lineari da \mathbb{R}^n ad $\text{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$.

Definizione 6. Il differenziale esterno $d: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$ è l'operatore lineare

$$d_x \omega(\xi_1, \dots, \xi_{p+1}) = \sum_{l=1}^{p+1} (-1)^{l-1} D_x \omega(\xi_l)(\xi_1, \dots, \tilde{\xi}_l, \dots, \xi_{p+1})$$

dove $(\xi_1, \dots, \tilde{\xi}_l, \dots, \xi_{p+1}) = (\xi_1, \dots, \xi_{l-1}, \xi_{l+1}, \dots, \xi_{p+1})$.

Notiamo che $d_x \omega \in \text{Alt}^{p+1}(\mathbb{R}^n)$. Infatti, ponendo $\xi_i = \xi_{i+1}$, si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{p+1} (-1)^{l-1} D_x \omega(\xi_l)(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_l, \dots, \xi_{p+1}) \\ &= (-1)^{i-1} D_x \omega(\xi_i)(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_{p+1}) \\ &+ (-1)^i D_x \omega(\xi_{i+1})(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_{i+1}, \dots, \xi_{p+1}) = 0. \end{aligned}$$

in quanto $(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_{p+1}) = (\xi_1, \dots, \hat{\xi}_{i+1}, \dots, \xi_{p+1})$.

Esempio 2. Sia $x_i: U \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione sulla i -esima coordinata. Allora $dx_i \in \Omega^1(U)$ è l'applicazione costante $dx_i: x \rightarrow \epsilon_i$.

In generale, per $f \in \Omega^0(U)$, si vede facilmente che

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \epsilon_i = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

e quindi che

$$d_x f(\xi) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \xi^1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \xi^n.$$

Lemma 8. Se $\omega(x) = f(x) \epsilon_I$ allora $d_x \omega = d_x f \wedge \epsilon_I$.

Dimostrazione. Sappiamo che

$$D_x \omega(\xi) = (D_x f)(\xi) \epsilon_I = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \xi_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \xi_n \right) \epsilon_I = d_x f(\xi) \epsilon_I$$

e la definizione 6 ci da:

$$\begin{aligned} d_x \omega(\xi_1, \dots, \xi_{p+1}) &= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} d_x f(\xi_k) \epsilon_I(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_k, \dots, \xi_{p+1}) \\ &= [d_x f \wedge \epsilon_I](\xi_1, \dots, \xi_{p+1}). \end{aligned}$$

Notiamo inoltre che per $\epsilon_I \in \text{Alt}^p(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\epsilon_k \wedge \epsilon_I = \begin{cases} 0 & \text{se } k \in I \\ (-1)^r \epsilon_J & \text{se } k \notin I \end{cases}$$

con r determinato dalla condizione $i_r < k < i_{r+1}$ e $J = (i_1, \dots, i_r, k, \dots, i_p)$.

Proposizione 1. Per $p \geq 0$ la composizione $\Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U) \rightarrow \Omega^{p+2}(U)$ è identicamente nulla.

Dimostrazione. Sia $\omega = f\epsilon_I$. Allora

$$d\omega = df \wedge \epsilon_I = \frac{\partial f}{\partial x_1} \epsilon_1 \wedge \epsilon_I + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \epsilon_n \wedge \epsilon_I.$$

Dalle proprietà $\epsilon_i \wedge \epsilon_i = 0$ e $\epsilon_i \wedge \epsilon_j = -\epsilon_j \wedge \epsilon_i$ otteniamo

$$\begin{aligned} d^2\omega &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \epsilon_i \wedge (\epsilon_j \wedge \epsilon_I) \\ &= \sum_{i < j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \epsilon_i \wedge \epsilon_j \wedge \epsilon_I = 0 \end{aligned}$$

□

Il prodotto esterno definito in $Alt^*(\mathbb{R}^n)$ induce un prodotto esterno su $\Omega^*(U)$ attraverso la relazione

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x)$$

Il prodotto esterno di una p -forma differenziale e una q -forma differenziale è una $(p+q)$ -forma differenziale, e quindi rimane definita un'applicazione bilineare

$$\wedge : \Omega^p(U) \times \Omega^q(U) \rightarrow \Omega^{p+q}(U)$$

Per una funzione liscia $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, abbiamo che

$$(f\omega_1) \wedge \omega_2 = f(\omega_1 \wedge \omega_2) = \omega_1 \wedge f\omega_2.$$

Notiamo inoltre che $f \wedge \omega = f\omega$ quando $f \in \Omega^0(U)$ e $\omega \in \Omega^p(U)$.

Lemma 9. Per $\omega_1 \in \Omega^p(U)$ e $\omega_2 \in \Omega^q(U)$ vale la formula

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare la formula nel caso in cui $\omega_1 = f\epsilon_I$ e $\omega_2 = g\epsilon_J$. In questo caso abbiamo che $\omega_1 \wedge \omega_2 = fg\epsilon_I \wedge \epsilon_J$, e quindi

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(fg) \wedge \epsilon_I \wedge \epsilon_J \\ &= (d(f)g + fd(g)) \wedge \epsilon_I \wedge \epsilon_J \\ &= d(f)g \wedge \epsilon_I \wedge \epsilon_J + fd(g) \wedge \epsilon_I \wedge \epsilon_J \\ &= df \wedge \epsilon_I \wedge g\epsilon_J + (-1)^p f\epsilon_I \wedge dg \wedge \epsilon_J \\ &= d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2. \end{aligned}$$

□

Riassumendo, abbiamo definito un'algebra anti-commutativa $\Omega^*(U)$ dotata di un *differenziale*

$$d : \Omega^* \rightarrow \Omega^{*+1}, \quad d \circ d = 0$$

di cui abbiamo dimostrato le proprietà principali.

Teorema 3. *Esiste uno e un solo operatore lineare $d: \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)$, $p = 0, 1, \dots$ tale che*

(i) $f \in \Omega^0(U)$, $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} \epsilon_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \epsilon_n$,

(ii) $d \circ d = 0$,

(iii) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$.

Dimostrazione. Sappiamo che esiste un operatore lineare che soddisfa le proprietà elencate, in quanto abbiamo già definito l'operatore d . Supponiamo ora per assurdo che d' sia un altro operatore lineare che soddisfa le proprietà (i), (ii) e (iii). La prima proprietà ci dice che $d = d'$ in $\Omega^0(U)$, e in particolare che $d'x_i = dx_i$ per la i -esima proiezione $x_i: U \rightarrow \mathbb{R}$. Segue che $d'x_i = \epsilon_i$, la funzione costante. Dato che $d' \circ d' = 0$, abbiamo $d'\epsilon_i = 0$. Dalla (iii) segue quindi che $d'\epsilon_I = 0$. Data $\omega = f\epsilon_I = f \wedge \epsilon_I$, $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, da (iii) abbiamo che

$$d'\omega = d'f \wedge \epsilon_I + f \wedge d'\epsilon_I = d'f \wedge \epsilon_I = d\omega.$$

Dato che ogni p -forma può essere scritta come somma di p -forme di questo tipo, d coincide con d' sull'intero spazio $\Omega^p(U)$, e la tesi è dimostrata. \square

Definizione 7. *Il p -esimo gruppo di coomologia di de Rham dell'insieme U è lo spazio vettoriale quoziente*

$$H^p(U) = \frac{\text{Ker}(d : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U))}{\text{Im}(d : \Omega^{p-1}(U) \rightarrow \Omega^p(U))}.$$

In particolare $H^p(U) = 0$ per $p < 0$, e $H^0(U)$ è il nucleo di

$$d : C^\infty(U, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(U),$$

e quindi lo spazio vettoriale delle mappe $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ con derivate nulle. Questo è esattamente lo spazio delle funzioni localmente costanti.

Sia \sim la relazione di equivalenza sull'aperto U tale che $q_1 \sim q_2$ se esiste una

curva continua $\alpha: [a, b] \rightarrow U$ con $\alpha(a) = q_1$, e $\alpha(b) = q_2$. La partizione di U costituita dalle sue classi di equivalenza suddivide U in aperti disgiunti detti *componenti connesse di U* . Una componente connessa di U è un sottoinsieme massimale W di U che non può essere scritto come unione disgiunta di due sottoinsiemi non vuoti di W (nella topologia indotta di \mathbb{R}^n).

Un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ha un insieme di componenti connesse al più numerabile.

Lemma 10. $H^0(U)$ è lo spazio vettoriale delle applicazioni $U \rightarrow \mathbb{R}$ che sono costanti in ogni componente connessa di U .

Dimostrazione. Una funzione localmente costante $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ induce su U una partizione costituita dagli insiemi disgiunti $f^{-1}(c)$, $c \in \mathbb{R}$. Di conseguenza $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ è localmente costante esattamente quando è costante in ogni componente connessa di U . \square

Una conseguenza importante è che $\dim H^0(U)$ rappresenta precisamente il numero delle componenti connesse di U .

Gli elementi in $\Omega^p(U)$ tali che $d\omega = 0$ sono detti *p -forme chiuse*. Gli elementi appartenenti all'immagine $d(\Omega^{p-1}(U)) \subset \Omega^p(U)$ sono dette *p -forme esatte*. Il p -esimo gruppo di coomologia misura quindi se ogni p -forma chiusa è anche esatta, e questa condizione è soddisfatta precisamente quando $H^p(U) = 0$.

Una p -forma chiusa $\omega \in \Omega^p(U)$ determina una p -classe di coomologia, che indichiamo con la scrittura

$$[\omega] = \omega + d\Omega^{p-1}(U) \in H^p(U)$$

e $[\omega_1] = [\omega_2]$ se e solo se $\omega_1 - \omega_2$ è esatta. In generale lo spazio vettoriale delle p -forme chiuse e quello delle p -forme esatte sono spazi a dimensione infinita. Al contrario, $H^p(U)$ ha il più delle volte dimensione finita. Possiamo definire un prodotto bilineare, associativo e anti-commutativo

$$H^p(U) \times H^q(U) \rightarrow H^{p+q}(U)$$

ponendo $[\omega_1][\omega_2] = [\omega_1 \wedge \omega_2]$.

Vogliamo rendere l'applicazione che ad ogni U associa $H^p(U)$ un *funtore controvariante*. Data dunque una mappa liscia $\phi: U_1 \rightarrow U_2$ tra aperti $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $U_2 \subset \mathbb{R}^m$, vogliamo definire una mappa lineare

$$H^p(\phi) : H^p(U_2) \rightarrow H^p(U_1),$$

che verifichi le relazioni

$$H^p(\phi_2 \circ \phi_1) = H^p(\phi_1) \circ H^p(\phi_2) \quad \text{e} \quad H^p(id) = id.$$

Definizione 8. Siano $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ insiemi aperti, e $\phi: U_1 \rightarrow U_2$ un'applicazione liscia. Il morfismo indotto $\Omega^p(\phi): \Omega^p(U_2) \rightarrow \Omega^p(U_1)$ è definito come:

$$\Omega^p(\phi)(\omega)_x = \text{Alt}^p(D_x\phi) \circ \omega(\phi(x)), \quad \Omega^0(\phi)(\omega)_x = \omega_{\phi(x)}.$$

Spesso $\Omega^p(\phi)(\omega)$ è anche indicato con la scrittura ϕ^* . Possiamo scrivere

$$\phi^*(\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_p) = \omega_{\phi(x)}(D_x\phi(\xi_1), \dots, D_x\phi(\xi_p)),$$

e, utilizzando la regola della catena $D_x(\psi \circ \phi) = D_{\phi(x)}(\psi) \circ D_x(\phi)$ per $\phi: U_1 \rightarrow U_2$, $\psi: U_2 \rightarrow U_3$, è facile vedere che

$$\Omega^p(\psi \circ \phi) = \Omega^p(\phi) \circ \Omega^p(\psi), \quad \Omega^p(id_U) = id_{\Omega^p(U)}.$$

Inoltre notiamo che $\Omega^p(i)(\omega) = \omega \circ i$, se $i: U_1 \hookrightarrow U_2$ è l'inclusione, in quanto $D_x i = id$.

Esempio 3. Per la 1-forma costante $\epsilon_i \in \Omega^1(U_2)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ e ϕ_i i -esima funzione coordinata, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \phi^*(\epsilon_i)(\xi) &= \epsilon_i(D_x\phi(\xi)) = \epsilon_i \left(\sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l} \xi^l \right) e_k \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_l} \xi^l = \sum_{l=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_l} \epsilon_l(\xi) = d\phi_i(\xi). \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere

$$\phi^*(\epsilon_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_k} \epsilon_k = d\phi_i.$$

Teorema 4. Dalla definizione 8 discendono le relazioni

- (i) $\phi^*(\omega \wedge \tau) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\tau)$,
- (ii) $\phi^*(f) = f \circ \phi$ per ogni $f \in \Omega^0(U_2)$,
- (iii) $d\phi^*(\omega) = \phi^*(d\omega)$.

Viceversa se $\phi': \Omega^*(U_2) \rightarrow \Omega^*(U_1)$ è un operatore lineare che soddisfa le tre condizioni date, allora necessariamente $\phi' = \phi^*$.

Dimostrazione. Sia $x \in U_1$ e siano ξ_1, \dots, ξ_{p+q} vettori di \mathbb{R}^n . Allora

$$\begin{aligned} \phi^*(\omega \wedge \tau)_x(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}) &= (\omega \wedge \tau)_{\phi(x)}(D_x\phi(\xi_1), \dots, D_x\phi(\xi_{p+q})) \\ &= \sum \text{sign}(\sigma) [\omega_{\phi(x)}(D_x\phi(\xi_{\sigma(1)}), \dots, D_x\phi(\xi_{\sigma(p)})) \tau_{\phi(x)}(D_x\phi(\xi_{\sigma(p+1)}), \dots, D_x\phi(\xi_{\sigma(p+q)}))] \\ &= \sum \text{sign}(\sigma) \phi^*(\omega)_x(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(p)}) \phi^*(\tau)_x(\xi_{\sigma(p+1)}, \dots, \xi_{\sigma(p+q)}) \\ &= (\phi^*(\omega)_x \wedge \phi^*(\tau)_x)(\xi_1, \dots, \xi_{p+q}). \end{aligned}$$

Questo dimostra (i) nel caso in cui $p > 0$ e $q > 0$. Nel caso in cui $p = 0$ o $q = 0$ il procedimento è analogo. La proprietà (ii) consegue in maniera immediata dalla definizione di ϕ^* per $p = 0$. Per la dimostrazione del punto (iii) iniziamo con il dimostrare che $d\phi^*(f) = \phi^*(df)$ nel caso in cui $f \in \Omega^0(U_2)$. Abbiamo che

$$df = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \epsilon_k = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_k} \wedge \epsilon_k,$$

con ϵ_k considerato come l'elemento di $\Omega^1(U_2)$ con valore costante ϵ_k . Dai punti (i) e (ii) otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \phi^*(df) &= \sum_{k=1}^m \phi^* \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \wedge \phi^*(\epsilon_k) - \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_l} \circ \phi \right) \wedge \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l} \epsilon_l \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi \right) \left(\frac{\partial \phi_k}{\partial x_l} \right) \epsilon_l = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \circ \phi \right) \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l} \right) \epsilon_l \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial (f \circ \phi)}{\partial x_l} \epsilon_l = d(f \circ \phi) = d(\phi^*(f)). \end{aligned}$$

Nel caso più generale $\omega = f\epsilon_I = f \wedge \epsilon_I$, e dato che $d\epsilon_I = 0$, il lemma 9 ci da $d\omega = df \wedge \epsilon_I$, e otteniamo

$$\begin{aligned} \phi^*(d\omega) &= \phi^*(df) \wedge \phi^*(\epsilon_I) = d(\phi^*f) \wedge \phi^*(\epsilon_I) \\ &= d(\phi^*(f) \wedge \phi^*(\epsilon_I)) = d(\phi^*\omega). \end{aligned}$$

□

In genere per indicare le p -forme costanti $\epsilon_I = \epsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon_{i_p}$, si utilizza la notazione

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$$

Una p -forma arbitraria potrà quindi essere scritta come

$$\omega(x) = \sum \omega_I(x) dx_I.$$

Esempio 4. Data $\gamma: (a, b) \rightarrow U$ curva liscia su U , $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, e sia

$$\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$$

una 1-forma su U . Allora si ha che

$$\begin{aligned} \gamma^*(\omega) &= \gamma^*(f_1) \wedge \gamma^*(dx_1) + \dots + \gamma^*(f_n) \wedge \gamma^*(dx_n) \\ &= \gamma^*(f_1) d(\gamma^*(x_1)) + \dots + \gamma^*(f_n) d(\gamma^*(x_n)) \\ &= (f_1 \circ \gamma) d\gamma_1 + \dots + (f_n \circ \gamma) d\gamma_n \\ &= [(f_1 \circ \gamma)\gamma'_1 + \dots + (f_n \circ \gamma)\gamma'_n] dt = \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ prodotto scalare usuale.

Data $\phi: U_1 \rightarrow U_2$ applicazione liscia tra aperti di \mathbb{R}^n , si ha che

$$\begin{aligned} \phi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) &= \phi^*(dx_1) \wedge \dots \wedge \phi^*(dx_n) = d\phi^*(x_1) \wedge \dots \wedge d\phi^*(x_n) \\ &= d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n = \det(D_x \phi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Esempio 5. Data $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi(x, t) = \psi(t)x$, con $\psi(t)$ funzione liscia a valori reali, abbiamo che

$$\phi^*(dx_i) = x_i \psi'(t) dt + \psi(t) dx_i.$$

Possiamo ora associare ad una mappa liscia $\phi: U_1 \rightarrow U_2$ una mappa lineare

$$H^p(\phi): H^p(U_2) \rightarrow H^p(U_1)$$

ponendo $H^p(\phi)[\omega] = [\phi^*(\omega)]$. La definizione è indipendente dalla scelta del rappresentante, in quanto $\phi^*(\omega + dv) = \phi^*(\omega) + \phi^*(dv) = \phi^*(\omega) + d\phi^*(v)$. Inoltre,

$$H^{p+q}(\phi)([\omega_1][\omega_2]) = (H^p(\phi)[\omega_1])(H^q(\phi)[\omega_2])$$

ed è tale che

$$H^*(\phi): H^*(U_2) \rightarrow H^*(U_1)$$

è un omomorfismo di algebre graduate.

Definizione 9. Un sottoinsieme $X \in \mathbb{R}^n$ è detto stellato rispetto al punto $x_0 \in X$ se il segmento di retta $tx_0 + (1-t)x$ con $t \in [0, 1]$ è contenuto in X per ogni $x \in X$.

Teorema 5 (Lemma di Poincaré). Se U è un insieme aperto e stellato allora $H^p(U) = 0$ per $p > 0$, e $H^0(U) = \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Possiamo assumere, senza ledere la generalità, che U sia stellato rispetto all'origine $0 \in \mathbb{R}^n$. Vogliamo costruire un operatore lineare

$$S_p : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p-1}(U)$$

tale che $dS_p + S_{p+1}d = id$ per $p > 0$, e $S_1d = id - e$, dove $e(\omega) = \omega(0)$ per $\omega \in \Omega^0(U)$. L'esistenza di un tale operatore implicherebbe immediatamente il teorema da dimostrare, in quanto per una qualunque p -forma chiusa ω , con $p > 0$, varrebbe che $dS_p(\omega) = \omega$, e quindi che $[\omega] = 0$. Per $p = 0$ invece avremmo che $\omega - \omega(0) = S_1d\omega = 0$, e ω dovrebbe necessariamente essere costante.

Innanzitutto costruiamo

$$\widehat{S}_p : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{p-1}(U).$$

Ogni $\omega \in \Omega^p(U \times \mathbb{R})$ può essere scritto nella forma

$$\omega = \sum f_I(x, t)dx_I + \sum g_J(x, t)dt \wedge dx_J$$

dove $I = (i_1, \dots, i_p)$ e $J = (j_1, \dots, j_{p-1})$. Definiamo

$$\widehat{S}_p(\omega) = \sum \left(\int_0^1 g_J(x, t)dt \right) dx_J.$$

Abbiamo quindi che

$$\begin{aligned} d\widehat{S}_p(\omega) + \widehat{S}_{p+1}d(\omega) &= \sum_{J,i} \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J(x, t)}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_J \\ &+ \sum_I \left(\int_0^1 \frac{\partial f_I(x, t)}{\partial t} dt \right) dx_I - \sum_{J,i} \left(\int_0^1 \frac{\partial g_J}{\partial x_i} dt \right) dx_i \wedge dx_J \\ &= \sum_I \left(\int_0^1 \frac{\partial f_I(x, t)}{\partial t} dt \right) dx_I \\ &= \sum f_I(x, 1)dx_I - \sum f_I(x, 0)dx_I. \end{aligned}$$

Applichiamo il risultato a $\phi^*(\omega)$, con

$$\phi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U, \quad \phi(x, t) = \psi(t)x$$

e $\psi(t)$ è una funzione liscia per la quale

$$\begin{cases} \psi(t) = 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \psi(t) = 1 & \text{se } t \geq 1 \\ 0 \leq \psi(t) \leq 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definiamo $S_p(\omega) = \widehat{S}_p(\phi^*(\omega))$. Supponiamo che $\omega = \sum h_I(x)dx_I$.

Dall'esempio 5 abbiamo che

$$\phi^*(\omega) = \sum h_I(\psi(t)x)(d\psi(t)x_{i_1} + \psi(t)dx_{i_1}) \wedge \dots \wedge (d\psi(t)x_{i_p} + \psi(t)dx_{i_p}).$$

Otteniamo quindi

$$\sum f_I(x, t)dx_I = \sum h_I(\psi(t)x)\psi(t)^p dx_I.$$

Questo implica che

$$dS_p(\omega) + S_{p+1}d(\omega) = \begin{cases} \sum_I h_I(x)dx_I = \omega & p > 0 \\ \omega(x) - \omega(0) & p = 0. \end{cases}$$

□

Capitolo 3

Complessi di catene

Una sequenza di spazi vettoriali e applicazioni lineari

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

è detta **esatta** quando $Imf = Kerg$.

Notiamo che $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ è esatta se f è suriettiva, e $0 \rightarrow B \xrightarrow{g} C$ è esatta se g è iniettiva. Una sequenza $A^* = \{A^i, d^i\}$,

$$\dots \rightarrow A^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} A^i \xrightarrow{d^i} A^{i+1} \xrightarrow{d^{i+1}} A^{i+2} \rightarrow \dots$$

di spazi vettoriali e applicazioni lineari è detta **complesso di catene** se è vero che $d^{i+1} \circ d^i = 0$ per ogni i . Si dice inoltre esatta se $Kerd^i = Imd^{i-1}$ per ogni i . Una sequenza esatta della forma

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

è detta esatta corta. Questo è equivalente a richiedere che f sia iniettiva, g suriettiva e che $Imf = Kerg$. Il *conucleo* di una mappa lineare $f : A \rightarrow B$ è definito come

$$Cok(f) = \frac{B}{Imf}$$

Per una sequenza esatta, g induce un isomorfismo

$$g : Cok(f) \xrightarrow{\cong} C.$$

Ogni sequenza esatta induce una sequenza esatta corta che può essere utilizzata per il calcolo dello spazio A^i :

$$0 \rightarrow Imd^{i-1} \rightarrow A^i \rightarrow Imd^i \rightarrow 0.$$

Spesso inoltre si utilizzano nei calcoli i seguenti isomorfismi:

$$\frac{A^i}{\text{Im}d^{i-2}} \cong \frac{A^{i-1}}{\text{Ker}d^{i-1}} \cong \text{Im}d^{i-1}.$$

Lemma 11. *Sia $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ una sequenza di spazi vettoriali corta ed esatta. Se A e C sono entrambi finito-dimensionali allora anche B è uno spazio a dimensione finita, e si ha che $B \cong A \oplus C$.*

Dimostrazione. Siano $\{a_i\}$ e $\{c_j\}$ basi rispettivamente di A e C . Per la suriettività di g possiamo scegliere $b_j \in B$ tali che $g(b_j) = c_j$. Si può dimostrare che $\{f(a_i), b_j\}$ è una base di B ; vediamo che i suoi elementi sono generatori dello spazio. Per $b \in B$ abbiamo che $g(b) = \sum \lambda_j c_j$, e quindi che $b - \sum \lambda_j b_j \in \text{Ker}g$. Dato che $\text{Ker}g = \text{Im}f$, $b - \sum \lambda_j b_j = f(a)$, e quindi

$$b - \sum \lambda_j b_j = f\left(\sum \mu_i a_i\right) = \sum \mu_i f(a_i).$$

Posso dunque scrivere ogni elemento di B come combinazione lineare di b_j e $f(a_j)$. Si conclude facilmente con la dimostrazione dell'indipendenza lineare. \square

Definizione 10. *Per un complesso di catene $A^* = \{\dots \rightarrow A^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} A^p \xrightarrow{d^p} A^{p+1} \rightarrow \dots\}$ definiamo il p -esimo spazio vettoriale di coomologia come*

$$H^p(A^*) = \frac{\text{Ker}d^p}{\text{Im}d^{p-1}}.$$

Gli elementi di $\text{Ker}d^p$ sono chiamati p -cicli (o sono detti chiusi) e gli elementi di $\text{Im}d^{p-1}$ sono detti p -bordi (o sono detti esatti). Gli elementi di $H^p(A^*)$ sono chiamati *classi di coomologia*. Un'applicazione $f: A^* \rightarrow B^*$ tra complessi di catene consiste in una famiglia $f^p: A^p \rightarrow B^p$ di applicazioni lineari che soddisfano la relazione $d_B^p \circ f^p = f^{p+1} \circ d_A^p$. Un'applicazione tra complessi può essere illustrata attraverso un diagramma commutativo di questo tipo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{p-1} & \xrightarrow{d^{p-1}} & A^p & \xrightarrow{d^p} & A^{p+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^{p-1} & & \downarrow f^p & & \downarrow f^{p+1} & & \\ \dots & \longrightarrow & B^{p-1} & \xrightarrow{d^{p-1}} & B^p & \xrightarrow{d^p} & B^{p+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Lemma 12. *Un'applicazione tra complessi $f: A^* \rightarrow B^*$ induce per ogni p un'applicazione lineare*

$$f^* = H^*(f) : H^p(A^*) \rightarrow H^p(B^*).$$

Dimostrazione. Sia $a \in A^p$ un ciclo (cioè tale che $d^p a = 0$) e $[a] = a + \text{Im}d^{p-1}$ sia la sua corrispondente classe di coomologia in $H^p(A^*)$. Definiamo $f^*([a]) = [f^p(a)]$. Notiamo che $d_B f^p(a) = f^{p+1} d_A^p(a) = f^{p+1}(0) = 0$, e quindi che $f^p(a)$ è un ciclo. Inoltre $[f^p(a)]$ è indipendente dalla scelta del rappresentante della classe $[a]$. Se $[a_1] = [a_2]$, allora $a_1 - a_2 \in \text{Im}d_A^{p-1}$, e $f^p(a_1 - a_2) = f^p d_A^{p-1}(x) = d_B^{p-1} f^{p-1}(x)$. Si ha quindi che $f^p(a_1) - f^p(a_2) \in \text{Im}d_B^{p-1}$, e $f^p(a_1)$ e $f^p(a_2)$ definiscono la stessa classe di coomologia. \square

Una sequenza corta ed esatta di complessi di catene

$$0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$$

consiste in due applicazioni tra complessi f e g tali che $0 \rightarrow A^p \xrightarrow{f^p} B^p \xrightarrow{g^p} C^p \rightarrow 0$ sia esatta per ogni p .

Lemma 13. *Per una sequenza corta ed esatta di complessi di catene, la sequenza*

$$H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*)$$

è esatta.

Dimostrazione. Dato che $g^p \circ f^p = 0$ abbiamo

$$g^* \circ f^*([a]) = g^*([f^p(a)]) = [g^p(f^p(a))] = 0$$

per ogni classe di coomologia $[a] \in H^p(A^*)$. Dato $[b] \in H^p(B)$ tale che $[b] \in \text{Ker}g^*$, vale che $g^p(b) = d_C^{p-1}(c)$. Dato che g^{p-1} è suriettiva, esiste $b_1 \in B^{p-1}$ tale che $g^{p-1}(b_1) = c$. Segue che $g^p(b - d_B^{p-1}(b_1)) = 0$. Esiste quindi $a \in A^p$ tale che $f^p(a) = b - d_B^{p-1}(b_1)$. Vogliamo ora dimostrare che a è un p -ciclo. Dato che f^{p+1} è iniettiva, è sufficiente notare che $f^{p+1}(d_A^p(a)) = 0$. Infatti

$$f^{p+1}(d_A^p(a)) = d_B^p(f^p(a)) = d_B^p(b - d_B^{p-1}(b_1)) = 0$$

dato che b è un p -ciclo e $d^p \circ d^{p-1} = 0$.

Abbiamo quindi trovato una classe di coomologia $[a] \in H^p(a)$, e $f^*[a] = [b - d_B^{p-1}(b_1)] = [b]$.

\square

Ci si potrebbe aspettare che la sequenza 24 possa essere estesa ad una sequenza esatta corta, ma questo non è sempre possibile. Riusciamo a capire quando è possibile costruire una tale estensione attraverso l'introduzione di un nuovo strumento:

Definizione 11. Per una sequenza esatta corta di complessi di catene $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$ definiamo

$$\partial^* : H^p(C^*) \rightarrow H^{p+1}(A^*)$$

come la mappa lineare data da

$$\partial^*([c]) = [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(c)))].$$

La definizione esprime che per ogni $b \in (g^p)^{-1}(c)$ abbiamo che $d_B^p(c) \in \text{Im} f^{p+1}$, e che l'elemento $a \in A^{p+1}$ tale che $f^{p+1}(a) = d_B^p(c)$ è un $p+1$ -ciclo. Inoltre si utilizza il fatto che l'elemento $a \in H^{p+1}(A^*)$ è indipendente dalla scelta di b .

Vogliamo dimostrare separatamente ognuna di queste affermazioni, dimostrando così che l'applicazione data è ben definita.

(i) Se $g^p(b) = c$ e $d_C^p(c) = 0$ allora $d_B^p(b) \in \text{Im} f^{p+1}$.

Si dimostra facilmente notando che $g^{p+1}d_B^p(b) = d_C^p(c) = 0$, per definizione di mappa tra complessi, e ricordando che $\text{Ker} g^{p+1} = \text{Im} f^{p+1}$.

(ii) Se $f^{p+1}(a) = d_B^p(b)$, allora $d_A^{p+1}(a) = 0$.

Si dimostra attraverso la relazione

$$f^{p+2}d_A^{p+1}(a) = d_B^{p+1}f^{p+1}(a) = d_B^{p+1}d_B^p(b) = 0.$$

L'uguaglianza segue dall'iniettività di f^{p+2} .

(iii) Se $g^p(b_1) = g^p(b_2) = c$ e $f^{p+1}(a_i) = d_B^p(b_i)$ per $i \in \{1, 2\}$, allora $[a_1] = [a_2] \in H^{p+1}(A^*)$.

L'elemento $b_1 - b_2$ è della forma $f^p(a)$ per un qualche a ; possiamo scrivere $d_B^p(b_1) - d_B^p(b_2) = d_B^p f^p(a) = f^{p+1}d_A^p(a)$, da cui segue che

$$(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b_1)) = (f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b_2)) + d_A^p(a).$$

I due elementi differiscono per un elemento dell'immagine di d^p , e quindi inducono la stessa classe di equivalenza nel passaggio al quoziente: la definizione non dipende dal rappresentante scelto.

Esempio 6. Un esempio semplice di sequenza esatta corta di complessi di catene con $\partial^* \neq 0$ è il seguente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{id} & \mathbb{R} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \xrightarrow{id} & \mathbb{R} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

in cui i punti indicano che i gruppi sono tutti nulli.

Lemma 14. La sequenza $H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*)$ è esatta.

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che

$$\partial^* g^*([b]) = \partial^*[g^p(b)] = [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(g^p(b))))] = [(f^{p+1})^{-1}(d_B^p(b))] = 0$$

(infatti $[b] \in H^p(B)$, e in particolare $b \in \text{Ker} d_B^p$). Supponiamo ora che $\partial^*[c] = 0$. Scegliamo $b \in B^p$ con $g^p(b) = c$ e $a \in A^p$, in modo tale che

$$d_B^p(b) = f^{p+1}(d_A^p a).$$

Valgono le uguaglianze $d_B^p(b - f^p(a)) = 0$ e $g^p(b - f^p(a)) = c$. Abbiamo quindi che $g^*[b - f^p(a)] = [c]$. \square

Lemma 15. La sequenza $H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*)$ è esatta.

Dimostrazione. Abbiamo che

$$f^* \partial^*([c]) = f^*[(f^{p+1})^{-1}(d_B^p((g^p)^{-1}(c))] = [d_B^p(b)] = 0,$$

dove $g^p(b) = c$. Poniamo ora $f^*[a] = 0$, ovvero $f^{p+1}(a) = d_B^p(b)$.

Allora $d_C^p(g^p(b)) = g^{p+1} f^{p+1}(a) = 0$, e $\partial^*[g^p(b)] = [a]$. \square

In virtù dei risultati dimostrati vale quindi il seguente teorema:

Teorema 6 (Sequenza di omologia lunga esatta). Sia $0 \rightarrow A^* \xrightarrow{f} B^* \xrightarrow{g} C^* \rightarrow 0$ una sequenza esatta corta di complessi di catene. Allora la sequenza

$$\dots \rightarrow H^p(A^*) \xrightarrow{f^*} H^p(B^*) \xrightarrow{g^*} H^p(C^*) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(A^*) \xrightarrow{f^*} H^{p+1}(B^*) \rightarrow \dots$$

è esatta.

Definizione 12. Due mappe tra complessi $f, g: A^* \rightarrow B^*$ sono dette omotope se esiste una mappa lineare $s: A^p \rightarrow B^p$ che soddisfa la relazione

$$d_B^{p-1}s + sd_A^p = f - g: A^p \rightarrow B^p$$

per ogni p .

In forma di diagramma, un'omotopia di mappe tra complessi è rappresentata dalle frecce oblique

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A^{p-1} & \longrightarrow & A^p & \longrightarrow & A^{p+1} & \longrightarrow & A^{p+2} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & & \\ \dots & \longrightarrow & B^{p-1} & \longrightarrow & B^p & \longrightarrow & B^{p+1} & \longrightarrow & B^{p+2} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Lemma 16. Date due applicazioni tra complessi omotope $f, g: A^* \rightarrow B^*$ abbiamo che

$$f^* = g^*: H^p(A^*) \rightarrow H^p(B^*).$$

Dimostrazione. Se $[a] \in H^p(A^*)$, allora

$$(f^* - g^*)[a] = [f^p(a) - g^p(a)] = [d_B^{p-1}s(a) + sd_A^p(a)] = [d_B^{p-1}s(a)] = 0.$$

□

Notiamo che se A^* e B^* sono complessi di catene, allora

$$H^p(A^* \oplus B^*) = H^p(A^*) \oplus H^p(B^*).$$

Questo segue in maniera ovvia dalle uguaglianze

$$\text{Ker}(d_{A \oplus B}^p) = \text{Ker}d_A^p \oplus \text{Ker}d_B^p$$

$$\text{Im}(d_{A \oplus B}^{p-1}) = \text{Im}d_A^{p-1} \oplus \text{Im}d_B^{p-1}.$$

Capitolo 4

La sequenza di Mayer-Vietoris

Il capitolo introduce una tecnica di calcolo fondamentale per la coomologia di de Rham, detta **sequenza di Mayer-Vietoris** attraverso la quale si esprime $H^*(U_1 \cup U_2)$ in funzione di $H^*(U_1)$, $H^*(U_2)$ e $H^*(U_1 \cap U_2)$, con U_1 e U_2 aperti di \mathbb{R}^n . Per iterazione si riesce quindi ad ottenere $H^*(U_1 \cup \dots \cup U_n)$ scritta in funzione di $H^*(U_\alpha)$, dove α varia all'interno di tutti i possibili sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ e dove $U_\alpha = \{U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_n}\}$, con $\alpha = \{i_1, \dots, i_n\}$. Combinato con il lemma di Poincaré, questo porta ad un calcolo di H^* per generici aperti in \mathbb{R}^n . Se, per esempio, U può essere ricoperto da un numero finito di aperti convessi U_i , allora ogni U_α sarà a sua volta convesso e quindi $H^*(U_\alpha)$ sarà noto grazie al lemma di Poincaré.

Teorema 7. *Siano U_1 e U_2 aperti di \mathbb{R}^n , $U = U_1 \cup U_2$. Per $\nu = 1, 2$, siano $i_\nu: U_\nu \rightarrow U$ e $j_\nu: U_1 \cap U_2 \rightarrow U_\nu$ le corrispondenti inclusioni. Allora la sequenza*

$$0 \rightarrow \Omega^p(U) \xrightarrow{I^*} \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2) \xrightarrow{J^*} \Omega^p(U_1 \cap U_2) \rightarrow 0$$

è esatta, dove $I^p(\omega) = (i_1^*(\omega), i_2^*(\omega))$, $J^p(\omega_1, \omega_2) = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$.

Dimostrazione. Data un'applicazione liscia $\phi: V \rightarrow W$ e una p -forma $\omega = \sum f_I dx_I \in \Omega^p(W)$,

$$\Omega^p(\phi)(\omega) = \phi^*(\omega) = \sum (f_I \circ \phi) d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_p}.$$

In particolare, se ϕ è l'inclusione di aperti in \mathbb{R}^n , cioè della forma $\phi_i(x) = x_i$, si ha che

$$d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_p} = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}.$$

Quindi

$$\phi^*(\omega) = \sum (f_I \circ \phi) dx_I.$$

Utilizziamo il risultato ottenuto nel caso in cui $\phi = i_\nu, j_\nu$, $\nu \in \{1, 2\}$. Dall'espressione ottenuta per ϕ^* otteniamo innanzitutto l'injectività di I^p . Infatti se $I^p(\omega) = 0$ allora $i_1^*(\omega) = 0 = i_2^*(\omega)$, e

$$i_\nu^*(\omega) = \sum (f_I \circ i_\nu) dx_I = 0$$

se e solo se $f_I \circ i_\nu = 0$ per ogni I . Il fatto che $f_I \circ i_1 = 0$ e $f_I \circ i_2 = 0$ implica $f_I = 0$ su tutto U , in quanto U_1 e U_2 ne costituiscono un ricoprimento, e quindi che $\omega = 0$.

In maniera simile dimostriamo l'uguaglianza $\text{Ker } J^p = \text{Im } I^p$. Innanzitutto notiamo che

$$J^p \circ I^p(\omega) = J^p(i_1^*(\omega), i_2^*(\omega)) = j_1^* i_1^*(\omega) - j_2^* i_2^*(\omega) = j^*(\omega) - j^*(\omega) = 0,$$

dove $j: U_1 \cap U_2 \rightarrow U$ è l'inclusione. Abbiamo quindi che $\text{Im } I^p \subseteq \text{Ker } J^p$. Per dimostrare l'inclusione inversa partiamo da due p -forme $\omega_\nu \in \Omega^p(U_\nu)$

$$\omega_1 = \sum f_I dx_I, \quad \omega_2 = \sum g_I dx_I.$$

Imponendo $J^p(\omega_1, \omega_2) = 0$, abbiamo $j_1^*(\omega_1) = j_2^*(\omega_2)$ che tradotto in componenti significa $f_I \circ j_1 = g_I \circ j_2$, equivalentemente, $f_I(x) = g_I(x)$ per $x \in U_1 \cap U_2$.

Definiamo una funzione liscia $h_I: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ come

$$h_I(x) = \begin{cases} f_I(x), & x \in U_1 \\ g_I(x), & x \in U_2. \end{cases}$$

Allora $I^p(\sum h_I dx_I) = (\omega_1, \omega_2)$, e l'inclusione inversa è dimostrata. Infine dimostriamo la suriettività di J^p . A questo scopo utilizziamo una partizione dell'unità $\{p_1, p_2\}$ con supporto in $\{U_1, U_2\}$, ovvero una funzione liscia

$$p_\nu: U \rightarrow [0, 1], \quad \nu \in 1, 2$$

per la quale $\text{supp}_U(p_\nu) \subset U_\nu$, e tale che $p_1(x) + p_2(x) = 1$ per ogni $x \in U$. Sia $f: U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione liscia. Utilizziamo $\{p_1, p_2\}$ per estendere f a U_1 e U_2 . Dato che $\text{supp}_U(p_1) \cap U_2 \subset U_1 \cap U_2$ possiamo definire la seguente funzione liscia

$$f_2(x) = \begin{cases} -f(x)p_1(x) & \text{se } x \in U_1 \cap U_2 \\ 0 & \text{se } x \in U_2 \setminus \text{supp}_U(p_1). \end{cases}$$

e, analogamente

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x)p_2(x) & \text{se } x \in U_1 \cap U_2 \\ 0 & \text{se } x \in U_1 \setminus \text{supp}_U(p_2). \end{cases}$$

Notiamo che $f_1(x) - f_2(x) = f(x)(p_1(x) - p_2(x)) = f(x)$ per $x \in U_1 \cap U_2$. Data una forma differenziale $\omega \in \Omega^p(U_1 \cap U_2)$, $\omega = \sum f_I dx_I$, possiamo applicare ciascuna delle due funzioni definite alle $f_I: U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Questo porta alle funzioni $f_{I,\nu}: U_\nu \rightarrow \mathbb{R}$ e quindi alle forme differenziali $\omega_\nu = \sum f_{I,\nu} dx_I \in \Omega^p(U_\nu)$. Con questa scelta abbiamo che $J^p(\omega_1, \omega_2) = \omega$, e quindi la suriettività di J^p . \square

Si può facilmente notare che

$$I: \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2)$$

$$J: \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2) \rightarrow \Omega^*(U_1 \cap U_2)$$

sono applicazioni tra complessi, e quindi che il teorema 7 porta alla definizione di una sequenza corta ed esatta di complessi di catene. Dal teorema 6 si ottiene in particolare una sequenza lunga ed esatta di spazi vettoriali di coomologia. Infine, dalle proprietà viste sugli spazi di coomologia della somma diretta di complessi di catene, segue che

$$H^p(\Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2)) = H^p(\Omega^*(U_1)) \oplus H^p(\Omega^*(U_2)).$$

Abbiamo quindi provato il seguente:

Teorema 8 (Teorema di Mayer-Vietoris). *Siano U_1 e U_2 aperti in \mathbb{R}^n e $U = U_1 \cup U_2$. Esiste una sequenza esatta di spazi vettoriali di coomologia*

$$\dots \rightarrow H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U) \rightarrow \dots$$

Qui $I^*([\omega]) = (i_1^*[\omega], i_2^*[\omega])$ e $J^*([\omega_1], [\omega_2]) = j_1^*[\omega_1] - j_2^*[\omega_2]$.

Corollario 1. *Se U_1 e U_2 sono aperti disgiunti in \mathbb{R}^n , allora*

$$I^*: H^p(U_1 \cup U_2) \rightarrow H^p(U_1) \oplus H^p(U_2)$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Sappiamo dal teorema 7 che

$$I^p : \Omega^p(U_1 \cup U_2) \rightarrow \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2)$$

è iniettiva. In questo caso particolare è quindi un isomorfismo. Dal fatto che $\Omega^p(U_1 \cup U_2) = \Omega^p(U_1) \oplus \Omega^p(U_2)$ segue quindi che anche la corrispondente applicazione sugli spazi di coomologia è un isomorfismo. \square

Esempio 7. Utilizziamo i risultati ottenuti per calcolare gli spazi di coomologia del piano privato di un punto: $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Siano

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 = 0\} \\ U_2 &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2) \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0\} \end{aligned}$$

Entrambi gli insiemi definiti sono aperti e stellati, e quindi tali che $H^p(U_1) = H^p(U_2) = 0$ per $p > 0$ e $H^0(U_1) = H^0(U_2) = \mathbb{R}$. La loro intersezione

$$U_1 \cap U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R} = \mathbb{R}_+^2 \cup \mathbb{R}_-^2$$

è l'unione disgiunta dei semipiani aperti $x_2 > 0$ e $x_2 < 0$. Segue quindi dal lemma di Poincaré e dal corollario 1 che

$$H^p(U_1 \cap U_2) = \begin{cases} 0 & \text{se } p > 0 \\ \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \text{se } p = 0 \end{cases}$$

Utilizzando il Teorema di Mayer-Vietoris possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} \\ H^{p+1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \xrightarrow{I^*} H^{p+1}(U_1) \oplus H^{p+1}(U_2) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Nel caso in cui $p > 0$

$$0 \rightarrow H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow 0$$

è esatta. In particolare abbiamo che ∂^* è un isomorfismo, e che $H^q(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = 0$ per $q \geq 2$. Nel caso in cui invece $p = 0$, otteniamo la sequenza esatta

$$\begin{aligned} H^{-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \xrightarrow{I^0} H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) \xrightarrow{J^0} \\ H^0(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \xrightarrow{I^1} H^1(U_1) \oplus H^1(U_2). \end{aligned}$$

Dato che $H^{-1}(U) = 0$ per ogni aperto, e in particolare $H^{-1}(U_\nu) = 0$, I^0 è iniettiva. Dato che $H^1(U_\nu) = 0$, ∂^* è suriettiva, compiendo le dovute sostituzioni la sequenza in esame si riduce alla sequenza esatta

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \xrightarrow{I^0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{J^0} \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \rightarrow 0.$$

Essendo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ uno spazio connesso, $H^0(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R}$ e, dal fatto che I^0 è iniettiva e dall'esattezza della sequenza, deduciamo che $\text{Im} I^0 \cong \mathbb{R} \cong \text{Ker} J^0$, e che J^0 ha rango 1. Quindi $\text{Im} J^0 \cong \mathbb{R}$ e, ancora una volta per l'esattezza

$$\partial^* : H^0(U_1 \cap U_2) / \text{Im} J^0 \xrightarrow{\cong} H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

Dato che $H^0(U_1 \cap U_2) / \text{Im} J^0 \cong \mathbb{R}$, abbiamo dimostrato che

$$H^p(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \geq 2 \\ \mathbb{R} & \text{se } p = 1 \\ \mathbb{R} & \text{se } p = 0. \end{cases}$$

Teorema 9. Se U è un aperto di \mathbb{R}^n ricopribile con un insieme di aperti convessi U_1, \dots, U_r , allora $H^p(U)$ è finitamente generato.

Dimostrazione. Utilizziamo l'induzione sul numero di aperti convessi che ricoprono U . Se $r = 1$ il teorema segue direttamente dal lemma di Poincaré. Supponiamo la tesi vera per $r - 1$ e lo dimostriamo per r .

Posto $V = U_1 \cup \dots \cup U_{r-1}$ tale che $U = V \cup U_r$, dal teorema 8 otteniamo la sequenza esatta

$$H^{p-1}(V \cap U_r) \xrightarrow{\partial^*} H^p(U) \xrightarrow{I^*} H^p(V) \oplus H^p(U_r)$$

che, per il lemma 11, implica che

$$H^p(U) \cong \text{Im} \partial^* \oplus \text{Im} I^*.$$

Sia V che $V \cap U_r = (U_1 \cap U_r) \cup \dots \cup (U_{r-1} \cap U_r)$ sono quindi unioni di $(r - 1)$ aperti convessi. Il teorema vale per gli spazi $H^*(V \cap U_1)$, $H^*(V)$ e $H^*(U_r)$, e quindi necessariamente anche per $H^*(U)$. \square

Capitolo 5

Omotopia

Definizione 13. Due applicazioni continue tra spazi topologici $f_\nu: X \rightarrow Y$, $\nu \in \{0, 1\}$, sono dette **omotope** se esiste una mappa continua

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tale che $F(x, \nu) = f_\nu(x)$ per $\nu \in \{0, 1\}$ e per qualunque $x \in X$.

F è detta omotopia da f_0 ed f_1 e si scrive $f_0 \cong f_1$.

Lemma 17. L'omotopia è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. Se F è un'omotopia da f_0 ad f_1 , un'omotopia da f_1 a f_0 è definita da

$$G(x, t) = F(x, 1 - t).$$

Se $f_0 \cong f_1$ attraverso F , e $f_1 \cong f_2$ attraverso G , allora $f_0 \cong f_2$ attraverso l'omotopia H definita nel modo seguente:

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{per } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & \text{per } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Infine abbiamo che $f(x) \cong f(x)$ attraverso l'applicazione $F(x, t) = f(x)$.

□

Lemma 18. Dati X, Y e Z spazi topologici e $f_\nu: X \rightarrow Y$ e $g_\nu: Y \rightarrow Z$ applicazioni continue per $\nu \in \{0, 1\}$, se $f_0 \cong f_1$ e $g_0 \cong g_1$ allora $g_0 \circ f_0 \cong g_1 \circ f_1$.

Dimostrazione. Se F è l'omotopia da f_0 a f_1 , e G l'omotopia da g_0 a g_1 , l'omotopia H da $g_0 \circ f_0$ a $g_1 \circ f_1$ è definita come $H(x, t) = G(F(x, t), t)$. □

Definizione 14. Un'applicazione continua $f: X \rightarrow Y$ è detta **equivalenza omotopica** se esiste $g: Y \rightarrow X$ continua tale che $g \circ f \cong id_X$ e $f \circ g \cong id_Y$. Tale applicazione è detta **inversa omotopica** di f .

Due spazi topologici X e Y si dicono **omotopicamente equivalenti** se esiste un'equivalenza omotopica tra i due. Diciamo che X è **contraibile** se X è equivalente ad uno spazio costituito da un singolo punto o , equivalentemente, se id_X è omotopa ad una mappa costante.

Le classi di equivalenza definite da questa relazione sull'insieme di tutti gli spazi topologici sono dette *tipi omotopici*.

Esempio 8. Sia $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ con la topologia indotta da \mathbb{R}^m . Se, per le applicazioni continue $f_\nu: X \rightarrow Y$, $\nu = 0, 1$, il segmento di retta in \mathbb{R}^m che unisce $f_0(x)$ ad $f_1(x)$ è contenuto in Y per ogni $x \in X$, possiamo definire un'omotopia $f: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ da f_0 ad f_1 nel seguente modo:

$$F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x)$$

In particolare questo dimostra che un insieme stellato in \mathbb{R}^m è contraibile.

Lemma 19. Se U e V sono aperti di spazi Euclidei, allora valgono le seguenti proprietà:

- (i) Ogni applicazione continua $h: U \rightarrow V$ è omotopa ad un'applicazione liscia.
- (ii) Se due applicazioni lisce $f_\nu: U \rightarrow V$, $\nu \in \{0, 1\}$ sono omotope, allora esiste un'applicazione liscia $F: X \times \mathbb{R} \rightarrow V$ con $F(x, \nu) = f_\nu(x)$ per $\nu \in \{0, 1\}$ e per ogni $x \in U$. F è detta *omotopia liscia* tra f_0 e f_1 .

Per la dimostrazione di questo lemma abbiamo bisogno del seguente risultato preliminare che riportiamo senza dimostrazione:

Lemma 20. Supponiamo che $A \subseteq U_0 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$, dove U_0 ed U sono aperti di \mathbb{R}^n e A è chiuso in U (rispetto alla topologia indotta da \mathbb{R}^n). Sia $h: U \rightarrow W$ un'applicazione continua da U ad un aperto $W \subseteq \mathbb{R}^m$ con restrizione ad U_0 liscia. Per ogni funzione continua $\epsilon: U \rightarrow (0, \infty)$ esiste una mappa liscia $f: U \rightarrow W$ che soddisfa le proprietà:

- (i) $\|f(x) - h(x)\| \leq \epsilon(x)$ per ogni $x \in U$.
- (ii) $f(x) = h(x)$ per ogni $x \in A$.

Dimostrazione lemma 19. Possiamo utilizzare il lemma 20 per approssimare h attraverso un'applicazione liscia $f: U \rightarrow V$. In particolare possiamo scegliere f tale che V contenga il segmento di retta che congiunge $h(x)$ e $f(x)$ per ogni $x \in U$. In questo modo, per l'esempio 8, abbiamo che $h \cong f$, e con questo la dimostrazione del punto (i) è conclusa.

Sia ora G un'omotopia da f_0 a f_1 , e $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una funzione continua tale che $\psi(t) = 0$ per $t \leq \frac{1}{3}$ e $\psi(t) = 1$ per $t \geq \frac{2}{3}$. Utilizziamo ψ per costruire

$$H: U \times \mathbb{R} \rightarrow V; \quad H(x, t) = G(x, \psi(t)).$$

Dato che $H(x, t) = f_0(x)$ per $t \leq \frac{1}{3}$ e $H(x, t) = f_1(x)$ per $t \geq \frac{2}{3}$, H è liscia sull'insieme $U \times (-\infty, \frac{1}{3}) \cup U \times (\frac{2}{3}, \infty)$. Il lemma 20 ci permette un'altra volta di approssimare H attraverso un'applicazione liscia $F: U \times \mathbb{R} \rightarrow V$ tale che F ed H abbiano la stessa restrizione su $U \times \{0, 1\}$. Per $\nu \in \{0, 1\}$ ed $x \in U$ abbiamo che $F(x, \nu) = H(x, \nu) = f_\nu(x)$. \square

Teorema 10. *Date due applicazioni lisce $f, g: U \rightarrow V$, se $f \cong g$ allora le applicazioni indotte tra i complessi*

$$f^*, g^*: \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U)$$

sono omotope.

Dimostrazione. Ogni p -forma ω su $U \times \mathbb{R}$ può essere scritta come

$$\omega = \sum f_I(x, t) dx_I + \sum g_J(x, t) dt \wedge dx_J.$$

con $I = (i_1, \dots, i_p)$ e $J = (j_1, \dots, j_{p-1})$. Se $\phi: U \rightarrow U \times \mathbb{R}$ è la mappa inclusione $\phi(x) = \phi_0(x) = (x, 0)$, allora

$$\phi^*(\omega) = \sum f_I(x, 0) d\phi_I = \sum f_I(x, 0) dx_I.$$

Infatti $\phi^*(dt \wedge dx_J) = 0$, dato che l'ultima componente di ϕ è costante. Analogamente, per $\phi_1(x) = (x, 1)$, abbiamo che

$$\phi_1^*(\omega) = \sum f_I(x, 1) dx_I.$$

Nella dimostrazione del lemma di Poincaré (lemma 5), abbiamo costruito l'operatore

$$\widehat{S}_p: \Omega^p(U \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^{p-1}(U)$$

in modo tale che

$$(d\widehat{S}_p + \widehat{S}_{p+1}d)(\omega) = \phi_1^*(\omega) - \phi_0^*(\omega).$$

Consideriamo la composizione $U \xrightarrow{\phi_\nu} U \times \mathbb{R} \xrightarrow{F} V$, dove F è un'omotopia liscia tra f e g . Abbiamo che $F \circ \phi_0 = f$ e $F \circ \phi_1 = g$. Definiamo

$$S_p : \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^{p-1}(U)$$

come l'applicazione $S_p = \widehat{S}_p \circ F^*$, e notiamo che vale la relazione

$$dS_p + S_{p+1}d = g^* - f^*.$$

Infatti, applicando $(d\widehat{S}_p + \widehat{S}_{p+1}d)$ a $F^*(\omega)$, otteniamo

$$\begin{aligned} d\widehat{S}_p(F^*(\omega)) + \widehat{S}_{p+1}dF^*(\omega) &= \phi_1^*F^*(\omega) - \phi_0^*F^*(\omega) \\ &= (F \circ \phi_1)^*(\omega) - (F \circ \phi_0)^*(\omega) = g^*(\omega) - f^*(\omega). \end{aligned}$$

Inoltre vale l'uguaglianza

$$\widehat{S}_{p+1}dF^*(\omega) = \widehat{S}_{p+1}F^*d(\omega) = S_{p+1}d(\omega),$$

in quanto F^* è un'applicazione tra complessi. \square

Nella situazione del teorema precedente abbiamo che $f^* = g^* : H^p(V) \rightarrow H^p(U)$. Per un'applicazione continua $\phi : U \rightarrow V$ possiamo trovare un'applicazione liscia $f : U \rightarrow V$ tale che $\phi \cong f$ per la (i) del lemma 19. La transitività della relazione di omotopia e i risultati dimostrati ci permettono di concludere che $f^* : H^p(V) \rightarrow H^p(U)$ è indipendente dalla scelta di f . Possiamo quindi definire

$$\phi^* = H^p(\phi) : H^p(V) \rightarrow H^p(U)$$

ponendo $\phi^* = f^*$, dove $f : U \rightarrow V$ è una qualunque applicazione liscia omotopa a ϕ .

Teorema 11. *Per $p \in \mathbb{Z}$ e U, V e W aperti di spazi Euclidei abbiamo che:*

(i) *Se $\phi_0, \phi_1 : U \rightarrow V$ sono applicazioni continue e omotope, allora*

$$\phi_0^* = \phi_1^* : H^p(V) \rightarrow H^p(U)$$

(ii) *Se $\phi : U \rightarrow V$ e $\psi : V \rightarrow W$ sono continue, allora $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : H^p(W) \rightarrow H^p(U)$.*

(iii) Se l'applicazione continua $\phi: U \rightarrow V$ è un'equivalenza omotopica, allora

$$\phi^* : H^p(V) \rightarrow H^p(U)$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Scegliamo un'applicazione liscia $f: U \rightarrow V$ con $\phi_0 \cong f$. Da questo segue che $\phi_1 \cong f$ e la (i) è immediata. Il punto (ii) nel caso in cui ϕ e ψ siano mappe lisce, segue direttamente dalla formula

$$\Omega^p(\psi \circ \phi) = \Omega^p(\phi) \circ \Omega^p(\psi)$$

Nel caso generale invece, scegliamo le applicazioni lisce $f: U \rightarrow V$ e $g: V \rightarrow W$ tali che $\phi \cong f$ e $\psi \cong g$. Sappiamo che $\psi \circ \phi \cong g \circ f$, e otteniamo

$$(\psi \circ \phi)^* = (g \circ f)^* = f^* \circ g^* = \phi^* \circ \psi^*.$$

che dimostra completamente il punto (ii). Notiamo ora che se $\psi: V \rightarrow U$ è l'inversa omotopica di ϕ , ovvero se valgono

$$\phi \circ \psi \cong id_U \quad \text{e} \quad \psi \circ \phi \cong id_V,$$

allora segue dal punto (ii) che $\psi^*: H^p(U) \rightarrow H^p(V)$ è l'inversa di ϕ^* e quindi che ϕ^* è un isomorfismo. \square

Il risultato mostra che $H^p(U)$ dipende esclusivamente dal tipo di omotopia di U . In particolare abbiamo:

Corollario 2 (Invarianza topologica). *Un omeomorfismo $h: U \rightarrow V$ tra aperti di spazi Euclidei induce un isomorfismo $h^*: H^p(V) \rightarrow H^p(U)$ per ogni p .*

Dimostrazione. Il corollario segue direttamente dal punto (iii) del teorema 11, in quanto l'inversa $h^{-1}: V \rightarrow U$ è in particolare l'inversa omotopica di h , e quindi h è un'equivalenza omotopica. \square

Corollario 3. *Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto contraibile, allora $H^p(U) = 0$ per $p > 0$ e $H^0(U) = \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Per la contraibilità possiamo prendere in considerazione un'equivalenza omotopica $F: U \times [0, 1] \rightarrow U$ da $f_0 = id_U$ ad una mappa costante f_1 con valore $x_0 \in U$. Per $x \in U$, $F(x, t)$ definisce una curva continua in U ,

che connette x ad x_0 . Quindi U è connesso e, per il lemma 10, $H^0(U) = \mathbb{R}$. Nel caso in cui $p > 0$, $\Omega^p(f_1): \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^p(U)$ è l'applicazione nulla.

Dal teorema 11 (i) sappiamo che

$$f_0^* = f_1^* = id_{H^p(U)} = 0$$

e quindi che $H^p(U) = 0$. □

Proposizione 2. *Per un arbitrario sottoinsieme chiuso A di \mathbb{R}^n , con $A \neq \mathbb{R}^n$, abbiamo i seguenti isomorfismi:*

$$\begin{aligned} H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) &\cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \quad \text{per } p \geq 1 \\ H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) &\cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R} \cdot 1 \\ H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) &\cong \mathbb{R}. \end{aligned}$$

dove \mathbb{R}^n è identificato con il sottospazio $\mathbb{R}^n \times 0$ di \mathbb{R}^{n+1} , e $\mathbb{R} \cdot 1$ indica il sottospazio di dimensione 1 costituito dall'insieme delle funzioni costanti.

Dimostrazione. Definiamo i seguenti sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, \infty) \\ U_2 &= \mathbb{R}^n \times (-\infty, 0) \cup (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-\infty, 1) \end{aligned}$$

Allora $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ e $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, 1)$.

Sia $\phi: U_1 \rightarrow U_1$ l'applicazione che agisce aggiungendo 1 alla $(n+1)$ esima coordinata. Per un qualunque $x \in U_1$, U_1 contiene il segmento di retta che congiunge x a $\phi(x)$, e $\phi(x)$ ad un punto fissato in $\mathbb{R}^n \setminus (0, \infty)$. Possiamo quindi costruire due omotopie, una tra id_{U_1} e ϕ , e la seconda tra ϕ e un'applicazione costante. Segue che U_1 è contraibile. Analogamente si può concludere che U_2 è contraibile, e $H^p(U_\nu)$ è descritto dai risultati precedentemente ottenuti per gli spazi contraibili. Sia π la proiezione di $U_1 \cap U_2 = (\mathbb{R}^n \setminus A) \times (-1, 1)$ su $\mathbb{R}^n \setminus A$. Definiamo $i: \mathbb{R}^n \setminus A \rightarrow U_1 \cap U_2$ come l'applicazione tale che $i(y) = (y, 0)$. Abbiamo che $\pi \circ i = id_{\mathbb{R}^n \setminus A}$ e $i \circ \pi \cong id_{U_1 \cap U_2}$. Dal teorema 11 concludiamo che

$$\pi^* : H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \rightarrow H^p(U_1 \cap U_2)$$

è un isomorfismo per ogni p . Il teorema 8 ci da, per $p \geq 1$, l'isomorfismo

$$\partial^* : H^p(U_1 \cap U_2) \rightarrow H^{p+1}(U_1 \cup U_2) = H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)$$

La composizione $\partial^* \circ \pi^*$ è il primo dei tre isomorfismi postulati dal teorema.

Consideriamo ora la sequenza esatta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) & \xrightarrow{I^*} & H^0(U_1) \oplus H^0(U_2) & & \\ & & \xrightarrow{J^*} & H^0(U_1 \cap U_2) & \xrightarrow{\partial^*} & H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) & \rightarrow 0. \end{array}$$

Un elemento di $H^0(U_1) \oplus H^0(U_2)$ è dato da una coppia di funzioni costanti su U_1 e U_2 con valori a_1 e a_2 . La loro immagine attraverso J^* è, dal teorema 8, la funzione costante su $U_1 \cap U_2$ con il valore $a_1 - a_2$.

Questo mostra che

$$\text{Ker } \partial^* = \text{Im } J^* = \mathbb{R} \cdot 1$$

e otteniamo così l'isomorfismo

$$H^1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong H^0(U_1 \cap U_2) / \mathbb{R} \cdot 1 \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A) / \mathbb{R} \cdot 1.$$

Abbiamo inoltre che $\dim \text{Im}(I^*) = \dim \text{Ker}(J^*) = 1$, e quindi

$$H^0(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \cong \mathbb{R}.$$

□

Teorema 12. *Per un arbitrario sottoinsieme chiuso A di \mathbb{R}^n , con $A \neq \mathbb{R}^n$ possiamo definire un diffeomorfismo*

$$R : \mathbb{R}^{n+1} \setminus A \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus A$$

$$\text{dato da } R(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}).$$

L'applicazione lineare indotta

$$R^* : H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A) \rightarrow H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)$$

è la moltiplicazione per -1 , nel caso in cui $p \geq 0$.

Dimostrazione. Nelle notazioni del teorema precedente, e indicando con R_1 e R_2 le opportune restrizioni di R , sono dati i seguenti diagrammi commutativi:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus A & \xrightarrow{R} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus A \\ \uparrow i_1 & & \uparrow i_2 \\ U_1 & \xrightarrow{R_1} & U_2 \\ \uparrow j_1 & & \uparrow j_2 \\ U_1 \cap U_2 & \xrightarrow{R_0} & U_1 \cap U_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus A & \xrightarrow{R} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus A \\ \uparrow i_2 & & \uparrow i_1 \\ U_2 & \xrightarrow{R_2} & U_1 \\ \uparrow j_2 & & \uparrow j_1 \\ U_1 \cap U_2 & \xrightarrow{R_0} & U_1 \cap U_2 \end{array}$$

Nella dimostrazione della proposizione 2 abbiamo visto che l'applicazione

$$\partial^* : H^p(U_1 \cap U_2) \rightarrow H^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)$$

è suriettiva.

È quindi ora sufficiente dimostrare che $R^* \circ \partial^*([\omega]) = -\partial^*([\omega])$ per una generica p -forma chiusa definita su $U_1 \cap U_2$. Utilizzando il teorema 7 possiamo trovare $\omega_\nu \in \Omega^p(U_\nu)$, $\nu \in \{1, 2\}$, con $\omega = j_1^*(\omega_1) - j_2^*(\omega_2)$. La definizione di ∂^* mostra che $\partial^*([\omega]) = [\tau]$, dove $\tau \in \Omega^{p+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus A)$ è determinato da $i_\nu^*(\tau) = d\omega_\nu$, per $\nu = 1, 2$. Otteniamo inoltre che

$$-R_0^*\omega = R_0^* \circ j_2^*(\omega_2) - R_0^* \circ j_1^*(\omega_1) = j_1^*(R_1^*\omega_2) - j_2^*(R_2^*\omega_1)$$

$$i_1^*(R^*\tau) = R_1^*(i_2^*\tau) = R_1^*(d\omega_2) = d(R_1^*\omega_2)$$

$$i_2^*(R^*\tau) = R_2^*(i_1^*\tau) = R_2^*(d\omega_1) = d(R_2^*\omega_1).$$

Queste equazioni e la definizione di ∂^* danno $\partial^*(-[R_0^*\omega]) = [R^*\tau]$, da cui segue che

$$\partial^* \circ R_0^*([\omega]) = -R_0^* \circ \partial^*([\omega]).$$

Per la proiezione $\pi: U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ abbiamo che $\pi \circ R_0 = \pi$ e quindi che la composizione

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \xrightarrow{\pi^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{R_0^*} H^p(U_1 \cap U_2)$$

coincide con π^* . Dato che π^* è un isomorfismo, R_0^* è necessariamente l'applicazione identica su $H^p(U_1 \cap U_2)$, e

$$\partial^*[\omega] = -R_0^* \circ \partial^*([\omega]).$$

e quest'uguaglianza completa la dimostrazione. \square

Teorema 13. *Per $n \geq 2$ abbiamo l'isomorfismo*

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0, n - 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Il caso $n = 2$ è dimostrato nell'esempio 7. Per il caso generale si procede per induzione su n , utilizzando la proposizione 2 \square

Ci sarà utile, nella dimostrazione del teorema che segue, notare che una generica matrice A di dimensione $n \times n$ che sia reale ed invertibile definisce un isomorfismo $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e un diffeomorfismo

$$f_A : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Lemma 21. *Per ogni $n \geq 2$, la mappa indotta*

$$f_A^* : H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

opera attraverso la moltiplicazione per $\det A / |\det A| \in \{\pm 1\}$.

Dimostrazione. Sia B la matrice ottenuta a partire da A attraverso la sostituzione della riga r con la somma della riga r e c volte la riga s , con $r \neq s$ e $c \in \mathbb{R}$.

$$B = (I + cE_{r,s})A,$$

dove I è la matrice identità e $E_{r,s}$ è la matrice con entrate unitarie nella sua r -esima riga e s -esima colonna, e tutti gli altri elementi nulli. Un'omotopia tra f_A e f_B è definita dalla matrice

$$(I + tcE_{r,s})A, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Dal teorema 11 segue che $f_A^* = f_B^*$. Inoltre $\det A = \det B$.

Attraverso una successione di operazioni simili, A può essere trasformata nella matrice $\text{diag}(1, \dots, 1, d)$ in cui $d = \det A$. È sufficiente quindi provare il teorema nel caso particolare di matrici diagonali. Le matrici

$$\text{diag}(1, \dots, 1, \frac{|d|^t d}{|d|}), \quad 0 \leq t \leq 1$$

definiscono un'omotopia che riduce il problema ai due casi $A = \text{diag}(1, \dots, 1, \pm 1)$, e quindi necessariamente f_A coincide con l'identità o coincide con la mappa R del teorema 12. \square

Proposizione 3. *Se $n \neq m$ allora gli spazi \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m non possono essere omeomorfi.*

Dimostrazione. Si può assumere che un eventuale omeomorfismo $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ porti 0 in 0 , e che quindi induca a sua volta un omeomorfismo tra $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ed $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Ma in tal caso avremmo che

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^p(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$$

per ogni p , in contraddizione con i risultati precedenti. \square

Capitolo 6

Alcune applicazioni

All'interno di questo capitolo utilizzeremo le notazioni standard:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \text{ n-palla}$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \text{ (n-1)-sfera}$$

Un per una mappa $f: X \rightarrow X$ è un punto $x \in X$ tale per cui $f(x) = x$.

Teorema 14 (Teorema del punto fisso di Brouwer, 1912). *Ogni mappa continua $f: D^n \rightarrow D^n$ ha un punto fisso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^n$. Per ogni $x \in D^n$ possiamo quindi definire il punto $g(x) \in S^{n-1}$ come il punto di intersezione tra S^{n-1} e la semiretta passante per i due punti distinti x e $f(x)$. Si ha quindi che $g(x) = x + tu$, dove $u = (x - f(x))/\|x - f(x)\|$, e

$$t = -x \cdot u + \sqrt{1 - \|x\|^2 + (x \cdot u)^2},$$

in cui $x \cdot u$ denota il prodotto scalare usuale.

L'espressione per $g(x)$ è ottenuta imponendo l'appartenenza del punto ad S^{n-1} , ovvero risolvendo l'equazione $(x + tu)(x + tu) = 1$. Esistono due soluzioni, in quanto due sono i punti di intersezione tra la retta e S^{n-1} , e tra le due scegliamo l'intersezione ottenuta per i valori non negativi di t . Dato che g è continua, e tale per cui $g|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$, il teorema segue direttamente dal lemma successivo. \square

Lemma 22. *Non esistono mappe continue $g: D^n \rightarrow S^{n-1}$ tali che $g|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $n \geq 2$ e consideriamo la mappa

$$r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad r(x) = x/\|x\|.$$

Notiamo che $id_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \cong r$, in quanto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ contiene sempre il segmento di retta congiungente x ed $r(x)$. Se g è tale per cui $g|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$, allora $g(t \cdot r(x))$, $0 \leq t \leq 1$ definisce un'omotopia da una mappa costante a r . Questo mostra che l'insieme $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è contraibile. Dal corollario 3 abbiamo che $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0$, in contraddizione con i risultati del teorema 13. \square

Lo spazio tangente ad S^n nel punto $x \in S^n$ è il complemento ortogonale in \mathbb{R}^{n+1} del vettore posizione, ed è indicato come $T_x S^n = \{x\}^\perp$.

Un campo vettoriale tangente su S^n è una mappa continua $v: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tale che $v(x) \in T_x S^n$ per ogni $x \in S^n$.

Teorema 15. *La sfera S^n ammette un campo vettoriale tangente v tale che $v(x) \neq 0$ per ogni $x \in S^n$ se e solo se n è dispari.*

Dimostrazione. Supponiamo che tale campo vettoriale esista e sia ben definito su S^n . Tale campo v può essere esteso ad un campo vettoriale w su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ponendo

$$w(x) = v\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Abbiamo che $w(x) \neq 0$ e $w(x) \cdot x = 0$. L'espressione

$$F(x, t) = (\cos \pi t)x + (\sin \pi t)w(x)$$

definisce un'omotopia da $f_0 = id_{(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})}$ alla mappa antipodale f_1 , $f_1(x) = -x$. Per il punto (i) del teorema 11 sappiamo che f_1^* è l'identità su $H^n(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ che, per il teorema 13, è uno spazio unidimensionale.

D'altra parte il lemma 21 dimostra che f_1^* è esattamente la moltiplicazione per $(-1)^{n+1}$. Quindi n è pari. Viceversa, per $n = 2m - 1$, possiamo definire un campo vettoriale v nel modo seguente:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_{2m}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2m}, x_{2m-1}).$$

\square

Diciamo che i campi vettoriali tangenti v_1, \dots, v_d su S^n sono **linearmente indipendenti** se, per ogni $x \in S^n$, i vettori $v_1(x), \dots, v_d(x)$ sono linearmente indipendenti.

Teorema 16 (Teorema di Adams). *Poniamo $n = 2m - 1$, e sia $2m = (2c + 1)2^{4a+b}$, dove $0 \leq b \leq 3$. Il massimo numero di campi vettoriali linearmente indipendenti su S^n è dato da $2^b + 8a - 1$.*

Lemma 23 (Urysohn-Tietze). *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme chiuso, ed $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ è continua, allora esiste un'applicazione continua $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che $g|_A = f$.*

Dimostrazione. Denotiamo la distanza euclidea in \mathbb{R}^n con $d(x, y)$ e, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Per $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$ possiamo definire l'intorno aperto $U_p \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ di p dato da

$$U_p = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, p) < \frac{1}{2} d(p, A) \right\}.$$

Questa famiglia di insiemi costituisce un ricoprimento di $\mathbb{R}^n \setminus A$, e possiamo quindi trovare una partizione dell'unità ϕ_p associata alla famiglia.

Definiamo ora la mappa g come

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ \sum_{p \in \mathbb{R}^n \setminus A} \phi_p(x) f(a(p)) & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

dove per $p \in \mathbb{R}^n \setminus A$, $a(p) \in A$ è scelto in modo tale che

$$d(p, a(p)) < 2d(p, A).$$

Dato che la somma è localmente finita su $\mathbb{R}^n \setminus A$, g è liscia su $\mathbb{R}^n \setminus A$.

L'unico punto che rimane da dimostrare è la continuità di g nei punti del bordo di A . Dati $x_0 \in A$ e $x \in U_p$ abbiamo:

$$d(x_0, p) \leq d(x_0, x) + d(x, p) < d(x_0, x) + \frac{1}{2} d(p, A) \leq d(x_0, x) + \frac{1}{2} d(p, x_0).$$

Quindi $d(x_0, p) < 2d(x_0, x)$ per $x \in U_p$. Dato che $d(p, a(p)) < 2d(p, A) \leq 2d(x_0, p)$ otteniamo che, per $x \in U_p$, $d(x_0, a(p)) \leq d(x_0, p) + d(p, a(p)) < 3d(x_0, p) < 6d(x_0, x)$. Per $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ abbiamo che

$$g(x) - g(x_0) = \sum_{p \in \mathbb{R}^n \setminus A} \phi_p(x) (f(a(p)) - f(x_0))$$

e

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq \sum_p \phi_p(x) \|f(a(p)) - f(x_0)\|,$$

dove sommiamo sui punti p tali che $x \in U_p$.

Per un arbitrario $\epsilon > 0$ scegliamo $\delta > 0$ in modo tale che $\|f(y) - f(x_0)\| < \epsilon$ per ogni $y \in A$, con $d(x_0, y) < 6\delta$. Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ e $d(x, x_0) < \delta$ allora, per p tale che $x \in U_p$, abbiamo che $d(x_0, a(p)) < 6\delta$ e $\|f(a(p)) - f(x_0)\| < \epsilon$.

Allora

$$\|g(x) - g(x_0)\| \leq \sum_p \phi_p(x) \cdot \epsilon = \epsilon.$$

La continuità di g in x_0 , e quindi su tutto il bordo, è così dimostrata. \square

Lemma 24. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^m$ due insiemi chiusi, e sia $\phi: A \rightarrow B$ un omeomorfismo. È possibile definire attraverso ϕ un secondo omeomorfismo $h: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$, tale da verificare la relazione*

$$h(x, 0_m) = (0_n, \phi(x))$$

per ogni $x \in A$.

Dimostrazione. Per il lemma 23 possiamo estendere ϕ ad una mappa continua $f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Possiamo definire un omeomorfismo $h_1: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ nel modo seguente:

$$h_1(x, y) = (x, y + f_1(x)).$$

L'omeomorfismo inverso può essere ottenuto semplicemente aggiungendo $-f_1(x)$ al posto di $f_1(x)$. Analogamente possiamo estendere ϕ^{-1} ad una mappa continua $f_2: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, e definire un omeomorfismo $h_2: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ come

$$h_2(x, y) = (x + f_2(y), y).$$

Ponendo $h = h_2^{-1} \circ h_1$, per ogni $x \in A$ vale l'uguaglianza

$$\begin{aligned} h(x, 0_m) &= h_2^{-1} \circ h_1(x, 0_m) = h_2^{-1}(x, f_1(x)) = h_2^{-1}(x, \phi(x)) \\ &= (x - f_2(\phi(x)), \phi(x)) = (0_n, \phi(x)). \end{aligned}$$

\square

Identifichiamo \mathbb{R}^n con il sottospazio di \mathbb{R}^{n+m} che costituito dall'insieme dei vettori della forma $(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$.

Corollario 4. *Dato un omeomorfismo $\phi: A \rightarrow B$ tra sottoinsiemi chiusi A e B di \mathbb{R}^n , allora ϕ può essere esteso ad un omeomorfismo $\tilde{\phi}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$.*

Dimostrazione. Per costruirlo basta comporre l'omeomorfismo del lemma 24 con l'omeomorfismo di $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ che scambia i due fattori tra loro. \square

Notiamo che restringendo $\tilde{\phi}$ otteniamo un omeomorfismo tra gli spazi $\mathbb{R}^{2n} \setminus A$ e $\mathbb{R}^{2n} \setminus B$. Al contrario può capitare che $\mathbb{R}^n \setminus A$ e $\mathbb{R}^n \setminus B$ non siano omeomorfi. Un celebre esempio è la **sfera cornuta di Alexander** Σ in \mathbb{R}^3 . Σ è omeomorfa ad S^2 , ma $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ non è omeomorfa ad $\mathbb{R}^3 \setminus S^2$.

Teorema 17. *Siano $A \neq \mathbb{R}^n$ e $B \neq \mathbb{R}^n$ due sottoinsiemi chiusi di \mathbb{R}^n . Se A e B sono omeomorfi, allora*

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus B).$$

Dimostrazione. Per induzione su m , dalla proposizione 2 si ottengono i seguenti isomorfismi:

$$H^{p+m}(\mathbb{R}^{n+m} \setminus A) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \quad \text{per } p > 0$$

$$H^m(\mathbb{R}^{n+m} \setminus A) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R} \cdot 1$$

per ogni $m \geq 1$. Analogamente per B . Dal corollario 4 sappiamo che $\mathbb{R}^{2n} \setminus A$ e $\mathbb{R}^{2n} \setminus B$ sono omeomorfi, e quindi che, dall'invarianza topologica, anche le rispettive coomologie di de Rham sono tra loro isomorfe.

Abbiamo dunque che

$$H^p(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong H^{p+n}(\mathbb{R}^{2n} \setminus B) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus B)$$

per $p > 0$, e

$$H^0(\mathbb{R}^n \setminus A)/\mathbb{R} \cdot 1 \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus A) \cong H^n(\mathbb{R}^{2n} \setminus B) \cong H^0(\mathbb{R}^n \setminus B)/\mathbb{R} \cdot 1.$$

\square

Per un insieme chiuso $A \subseteq \mathbb{R}^n$ il complemento aperto $U = \mathbb{R}^n \setminus A$ è sempre costituito dall'unione disgiunta di un insieme di componenti connesse al più numerabili, ciascuna di esse aperta. Nel caso in cui queste siano infinite, $H^0(U)$ sarà uno spazio a dimensione infinita. In caso contrario il numero di componenti connesse sarà esattamente $\dim H^0(U)$.

Corollario 5. *Se A e B sono due sottoinsiemi di \mathbb{R}^n chiusi e omeomorfi, allora $\mathbb{R}^n \setminus A$ e $\mathbb{R}^n \setminus B$ hanno lo stesso numero di componenti connesse.*

Dimostrazione. Se $A \neq \mathbb{R}^n$ e $B \neq \mathbb{R}^n$ l'affermazione segue direttamente dal teorema 17 e dalle osservazioni fatte. Se $A = \mathbb{R}^n$ e $B \neq \mathbb{R}^n$ allora $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ ha esattamente 2 componenti connesse (i semispazi aperti), mentre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus B$ è connesso. Se $A = \mathbb{R}^n$ e $B = \mathbb{R}^n$ allora $\mathbb{R}^{n+1} \setminus A$ ha esattamente due componenti connesse, mentre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus B$ è connesso. Quindi la situazione considerata non si può presentare. \square

Teorema 18 (Teorema di separazione di Jordan-Brouwer). *Se $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) è omeomorfo a S^{n-1} , allora*

- (i) $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$ ha esattamente 2 componenti connesse U_1 e U_2 , di cui U_1 è limitata e U_2 illimitata.
- (ii) Σ è l'insieme dei punti di bordo di U_1 e U_2 .

Diciamo che U_1 è il dominio interno di Σ , e U_2 il dominio esterno di Σ .

Dimostrazione. Dato che Σ è omeomorfo ad uno spazio compatto, è compatto, e quindi chiuso in \mathbb{R}^n . Per dimostrare (i) è sufficiente, per il corollario 5, verificarlo per $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Le due componenti connesse di $\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}$ sono:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \quad \text{e} \quad W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\}$$

Scegliendo $r = \max_{x \in \Sigma} \|x\|$, l'insieme connesso

$$rW = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > r\}$$

sarà contenuto in una delle due componenti di $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$, e l'altra componente dovrà essere limitata. Questo completa la dimostrazione di (i).

Sia dato ora $p \in \Sigma$ e consideriamo un intorno aperto V di p in \mathbb{R}^n .

L'insieme $A = \Sigma \setminus (\Sigma \cap V)$ è chiuso e omeomorfo ad un corrispondente sottoinsieme B di S^{n-1} . È ovvio che $\mathbb{R}^n \setminus B$ è connesso, e quindi dal corollario 5 anche $\mathbb{R}^n \setminus A$ lo è. Per $p_1 \in U_1$ e $p_2 \in U_2$ possiamo trovare una curva continua $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$, tale che $\gamma(a) = p_1$ e $\gamma(b) = p_2$. Per (i) la curva deve necessariamente intersecare Σ , e quindi $\gamma^{-1}(\Sigma)$ è non vuoto.

L'insieme chiuso $\gamma^{-1}(\Sigma) \subseteq [a, b]$ avrà un primo elemento c_1 e un ultimo elemento c_2 , entrambi appartenenti ad (a, b) . Quindi $\gamma(c_1) \in \Sigma \cap V$ e

$\gamma(c_2) \in \Sigma \cap V$ sono punti di contatto per $\gamma([a, c_1]) \subseteq U_1$ e $\gamma((c_2, b]) \subseteq U_2$ rispettivamente. Possiamo quindi trovare $t_1 \in [a, c_1]$ e $t_2 \in (c_2, b]$, tale che $\gamma(t_1) \in U_1 \cap V$ e $\gamma(t_2) \in U_2 \cap V$. Questo dimostra che p è punto di bordo per U_1 e U_2 , e la dimostrazione di (ii) è conclusa.

□

Teorema 19. *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è omeomorfo a D^k , con $k \leq n$, allora $\mathbb{R}^n \setminus A$ è connesso.*

Teorema 20 (Teorema di Brouwer). *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto arbitrario, e $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una mappa continua e iniettiva. L'immagine $f(U)$ è un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , ed $f: U \rightarrow f(U)$ è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che $f(U)$ è aperto; lo stesso varrà poi per un qualunque $W \subseteq U$ aperto, e dimostrerà la continuità della funzione inversa da $f(U)$ ad f . Consideriamo la sfera chiusa

$$D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \delta\}$$

che sia contenuta in U con bordo S e interno $\dot{D} = D \setminus S$. È sufficiente dimostrare che $f(\dot{D})$ è aperto.

Il caso $n = 1$ segue direttamente da risultati elementari sulle funzioni continue ad una variabile. Supponiamo quindi $n \geq 2$.

Sia S che $\Sigma = f(S)$ sono omeomorfi a S^{n-1} . Siano U_1 e U_2 le due componenti connesse di $\mathbb{R}^n \setminus \Sigma$. Entrambe le componenti sono aperte; U_1 sia la componente limitata e U_2 la componente illimitata. Dal teorema 19 sappiamo che $\mathbb{R}^n \setminus f(D)$ è connesso. Inoltre, essendo disgiunto da Σ , deve necessariamente essere contenuto o in U_1 o in U_2 . Dato che $f(D)$ è compatto, $\mathbb{R}^n \setminus f(D)$ è illimitato. Dobbiamo avere necessariamente che $\mathbb{R}^n \setminus f(D) \subseteq U_2$.

Segue che $\Sigma \cup U_1 = \mathbb{R}^n \setminus U_2 \subseteq f(D)$.

Vale quindi l'inclusione:

$$U_1 \subseteq f(\dot{D}).$$

Dato che \dot{D} è connesso, anche $f(\dot{D})$ sarà connesso.

Dall'inclusione $f(\dot{D}) \subseteq U_1 \cup U_2$, dobbiamo avere che $U_1 = f(\dot{D})$, e questo completa la dimostrazione.

□

Corollario 6 (Invarianza del dominio). *Se $V \subseteq \mathbb{R}^n$ è dotato della topologia indotta da \mathbb{R}^n ed è omeomorfo ad un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n , allora V è aperto in \mathbb{R}^n .*

Corollario 7 (Invarianza della dimensione). *Siano $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$ aperti non vuoti. Se U e V sono omeomorfi allora si ha necessariamente che $n = m$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $m < n$. Dal corollario 6 applicato a V , considerato come un sottoinsieme di \mathbb{R}^n attraverso l'inclusione $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$, segue che V è aperto in \mathbb{R}^n . Questo contraddice il fatto che V sia contenuto in un sottospazio proprio. □

Esempio 9. *Un **nodo** in \mathbb{R}^3 è un sottoinsieme $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ omeomorfo ad S^1 . Il corrispondente complementare è l'insieme aperto $U = \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$. Vogliamo dimostrare che:*

$$H^p(U) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } 0 \leq p \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per i risultati del teorema 17 è sufficiente dimostrarlo per il nodo banale $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$. Innanzitutto calcoliamo

$$H^p(\mathbb{R}^2 \setminus S^1) = H^p(\dot{D}^2) \oplus H^p(\mathbb{R}^2 \setminus D^2).$$

\dot{D}^2 è un insieme stellato, mentre $\mathbb{R}^2 \setminus D^2$ è diffeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Utilizzando il teorema 5 e l'esempio 7 segue che $H^p(\mathbb{R}^2 \setminus S^1)$ ha dimensione 2 per $p = 0$, dimensione 1 per $p = 1$, e dimensione 0 per $p \geq 2$. Applicando la proposizione 2 possiamo facilmente concludere.

Proposizione 4. *Sia $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ omeomorfo a S^{n-1} (con $n \geq 2$) e siano U_1 e U_2 rispettivamente il dominio interno ed esterno di Σ . Allora*

$$H^p(U_1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad e \quad H^p(U_2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0, n - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Il caso $p = 0$ segue direttamente dal teorema 18.

Poniamo $W = \mathbb{R}^n \setminus D^n$. Per $p > 0$ sono veri i seguenti isomorfismi:

$$\begin{aligned} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) &\cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus \Sigma) \cong H^p(\mathbb{R}^n \setminus S^{n-1}) \\ &\cong H^p(\dot{D}^n) \oplus H^p(W) \cong H^p(W). \end{aligned}$$

Si vede facilmente che la mappa inclusione $i: W \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è un'equivalenza omotopica con inversa omotopica definita da

$$g(x) = \frac{\|x\| + 1}{\|x\|} x$$

Dal teorema 11 abbiamo che $H^p(i)$ è un isomorfismo, e possiamo scrivere:

$$H^p(W) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0, n-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dalla decomposizione dello spazio in somma diretta deduciamo che $H^p(U_1) = 0$ e $H^p(U_2) = 0$ per $p \notin \{0, n-1\}$. Inoltre le dimensioni di $H^{n-1}(U_1)$ e $H^{n-1}(U_2)$ possono essere esclusivamente 0 o 1. Dunque, per concludere, è sufficiente dimostrare che $H^{n-1}(U_2) \neq 0$.

Senza ledere la generalità possiamo assumere che $0 \in U_1$ e che l'insieme limitato $U_1 \cup \Sigma$ sia contenuto in D^n . Otteniamo quindi il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \\ & \nearrow i & \uparrow \\ W & \longrightarrow & U_2 \end{array}$$

e, applicando H^{n-1} , otteniamo

$$\begin{array}{ccc} & & H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{R} \\ & \nearrow H^{n-1}(i) & \downarrow \\ H^{n-1}(W) & \longrightarrow & H^{n-1}(U_2) \end{array}$$

a sua volta commutativo, in cui $H^{n-1}(i)$ è un isomorfismo. Segue che $H^{n-1}(U_2) \neq 0$. □

Esempio 10. Vogliamo calcolare gli spazi di coomologia di “ \mathbb{R}^n con m buchi”, ovvero dell’insieme definito come

$$V = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m K_j \right)$$

I buchi K_j in \mathbb{R}^n sono insiemi compatti disgiunti con bordi Σ_j omeomorfi ad S^{n-1} . Gli interni $\dot{K}_j = K_j \setminus \Sigma_j$ sono esattamente i domini interni dei Σ_j . Vogliamo dimostrare che

$$H^p(V) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0 \\ \mathbb{R}^m & \text{se } p = n - 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Lo facciamo per induzione sul numero di buchi m . Il caso $m = 1$ discende direttamente dalla proposizione 4. Supponiamo che il risultato sia vero per

$$V_1 = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{m-1} K_j \right).$$

Sia $V_2 = \mathbb{R}^n \setminus K_m$. Notiamo che $V_1 \cap V_2 = \mathbb{R}^n$ e $V_1 \cup V_2 = V$. Per $p \geq 0$ abbiamo la sequenza di Mayer-Vietoris esatta

$$H^p(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{I^*} H^p(V_1) \oplus H^p(V_2) \xrightarrow{J^*} H^p(V) \rightarrow 0.$$

Se $p = 0$ allora $H^0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$ e I^* è iniettiva. Per l’ipotesi induttiva $H^0(V_1) \cong \mathbb{R}$, e $H^0(V_2) \cong \mathbb{R}$ per la proposizione 4. Il fatto che la sequenza sia esatta implica che $H^0(V) \cong \mathbb{R}$. Se $p > 0$ allora $H^p(\mathbb{R}^n) = 0$ e si ha l’isomorfismo

$$H^p(V_1) \oplus H^p(V_2) \cong H^p(V).$$

Per induzione otteniamo ciò che volevamo dimostrare.

Capitolo 7

Forme differenziali su varietà

In questo capitolo definiremo lo spazio delle forme differenziali $\Omega^*(M)$ su una varietà liscia M^m , e generalizzeremo tutti i concetti definiti nei capitoli precedenti al caso di varietà differenziabili. Per un punto dato $p \in M$ richiameremo la definizione di spazio vettoriale m -dimensionale T_pM , spazio tangente ad M in p . Inoltre, a partire da un'applicazione differenziabile $f : M \rightarrow N$ tra le varietà M ed N , definiremo la ben nota applicazione tangente indotta da f , $D_p f : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$.

Prima di iniziare sono necessarie alcune osservazioni:

- (i) Nel caso in cui $p \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, con U aperto, si identifica lo spazio tangente ad U in p con tutto \mathbb{R}^m . Più in generale abbiamo la seguente descrizione: consideriamo l'insieme delle curve parametrizzate $\gamma : I \rightarrow U$ con $\gamma(0) = p$, definite su intervalli aperti contenenti lo 0. Una relazione di equivalenza su quest'insieme è data dalla condizione $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0)$. Esiste una corrispondenza biunivoca tra le classi di equivalenza indotte da questa relazione e i vettori di \mathfrak{R}^m , che associa alla classe $[\gamma]$ di γ il vettore velocità $\gamma'(0) \in \mathbb{R}^m$.
- (ii) Considerando un secondo aperto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ e un'applicazione differenziabile $F : U \rightarrow V$, la matrice Jacobiana di F valutata in $p \in U$ definisce un'applicazione lineare $D_p F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Per $\gamma : I \rightarrow U$, $\gamma(0) = p$ curva liscia, la regola della catena implica che $D_p F(\gamma'(0)) = (F \circ \gamma)'(0)$. Abbiamo che

$$D_p F([\gamma]) = [F \circ \gamma]$$

e, in particolare, la classe di equivalenza di $F \circ \gamma$ dipende solo da $[\gamma]$.

Data M^m varietà differenziabile, e dato $p \in M^m$, consideriamo la carta (U, h) con U intorno aperto di p . Sull'insieme delle curve lisce $\alpha: I \rightarrow M$ tali che $\alpha(0) = p$ su un intervallo aperto di 0 , possiamo definire una relazione di equivalenza

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \Leftrightarrow (h \circ \alpha_1)'(0) = (h \circ \alpha_2)'(0).$$

Notiamo che questa relazione è indipendente dalla scelta di (U, h) . Infatti, se (\tilde{U}, \tilde{h}) è un'altra carta liscia su p , si trova facilmente che

$$(h \circ \alpha_1)'(0) = (h \circ \alpha_2)'(0) \Leftrightarrow (\tilde{h} \circ \alpha_1)'(0) = (\tilde{h} \circ \alpha_2)'(0).$$

Definizione 15. Lo *spazio tangente* $T_p M^m$ è l'insieme delle classi di equivalenza indotte sullo spazio delle curve lisce $\alpha: I \rightarrow M$, $\alpha(0) = p$, dalla relazione di equivalenza appena definita.

Possiamo dotare $T_p(M)$ della struttura di spazio vettoriale m -dimensionale; infatti se (U, h) è una carta liscia su M , $p \in U$, l'applicazione

$$\Phi_h : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \Phi_h([\alpha]) = (h \circ \alpha)'(0)$$

è un isomorfismo lineare.

Φ_h può facilmente essere identificato con $D_p h$. Scriveremo quindi $D_p h: T_p M \rightarrow \mathbb{R}^m$ per indicare tale isomorfismo lineare, e $D_{h(p)} h^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$ per l'isomorfismo inverso.

Lemma 25. Sia $f: M^m \rightarrow N^n$ un'applicazione liscia, e sia $p \in M$. Si ha che:

(i) Esiste un'applicazione lineare $D_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, definita come

$$D_p f([\alpha]) = [f \circ \alpha].$$

(ii) Data (U, h) tale che $p \in U \subset M$, e (V, g) tale che $f(p) \in V \subset N$, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_p(M) & \xrightarrow{D_p f} & T_{f(p)} M \\ \Phi_h \downarrow \cong & & \Phi_g \downarrow \cong \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{D_h(p)(g \circ f \circ h^{-1})} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Date due applicazioni differenziabili tra varietà $f: M \rightarrow N$, $\phi: N \rightarrow P$ e un punto $p \in M$, vale la regola della catena

$$D_p(\phi \circ f) = D_{f(p)}\phi \circ D_p f.$$

Data una carta liscia (U, h) attorno al punto $p \in M^m$, possiamo considerare la base per $T_p M$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p,$$

dove $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ è l'immagine attraverso $D_{h(p)}h^{-1}: \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$ dell' i -esimo vettore $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ della base canonica di \mathbb{R}^m . Un vettore tangente $X_p \in T_p M$ può quindi essere scritto in modo unico come

$$X_p = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

in cui $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Se $X_p = [\alpha]$, con $\alpha: I \rightarrow U$ tale che $\alpha(0) = p$, abbiamo che

$$\mathbf{a} = (h \circ \alpha)'(0).$$

Se $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ la mappa tangente indotta da f è data da

$$D_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}.$$

La **derivata direzionale** $X_p f \in \mathbb{R}$ è definita come l'immagine in \mathbb{R} di X_p attraverso $D_p f$,

$$X_p f = (f \circ \alpha)'(0).$$

In termini di $f \circ h^{-1}$ abbiamo, per la regola della catena, che

$$\begin{aligned} X_p f &= \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ h^{-1} \circ h \circ \alpha)(t)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(f h^{-1} \circ h \alpha(t))|_{t=0} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f h^{-1}}{\partial x_i}(h(p)) a_i. \end{aligned}$$

In particolare

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p f = \frac{\partial f h^{-1}}{\partial x_j}(h(p)).$$

Sotto le ipotesi del lemma 25 (ii) possiamo considerare la base per $T_{f(p)}N$ data da $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{f(p)}$, $1 \leq j \leq n$, e la matrice di $D_p f$ rispetto alle basi definite

per $T_p M$ e $T_{f(p)} N$ è la matrice Jacobiana di $g \circ f \circ h^{-1}$. Nel caso particolare in cui $N = M$, $f = id_M$ troviamo che

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(h(p)) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p.$$

per (U, h) e (V, g) carte su p con funzioni di transizione date da

$$(\phi_1, \dots, \phi_m) = \phi = g \circ h^{-1}$$

che esprimono le coordinate y_j in termini delle coordinate x_i .

Supponiamo ora che X sia una funzione che ad ogni $p \in M$ assegna un vettore tangente $X_p \in T_p M$. Data una carta (U, h) , abbiamo visto che

$$X_p = \sum_{i=1}^m a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

per determinati coefficienti $a_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, che in questo caso sono funzioni del punto p . Se queste applicazioni sono lisce in un intorno di $p \in U$, X è detto liscio in p . Questa condizione è indipendente dalla scelta della carta su p . Se X è liscio su ogni punto $p \in M$, X è detto **campo vettoriale liscio** su M .

Consideriamo ora la famiglia $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$, dove $\omega_p \in Alt^k(T_p M)$. Data $g: W \rightarrow M$ parametrizzazione locale, con W aperto di \mathbb{R}^m , e $x \in W$, abbiamo che

$$D_x g: \mathbb{R}^m \rightarrow T_{g(x)} M$$

è un isomorfismo, ed induce un isomorfismo

$$Alt^k(D_x g): Alt^k(T_{g(x)} M) \rightarrow Alt^k(\mathbb{R}^m).$$

Definiamo $g^*(\omega): W \rightarrow Alt^k(\mathbb{R}^m)$ come la funzione il cui valore in x è dato da

$$g^*(\omega)_x = Alt^k(D_x g)(\omega_{g(x)}) \quad \text{e} \quad g^*(\omega)_x = \omega_{g(x)} \quad \text{per} \quad k = 0.$$

Definizione 16. Una famiglia $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$ di k -forme alternanti su $T_p(M)$ è detta liscia se $g^*(\omega)$ è una funzione liscia per ogni parametrizzazione locale. L'insieme di tali famiglie lisce è uno spazio vettoriale che indichiamo con $\Omega^k(M)$. In particolare, $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Lemma 26. *Sia $g_i : W_i \rightarrow N$ una famiglia di parametrizzazioni locali con $N = \bigcup g_i(W_i)$. Se $g_i^*(\omega)$ è liscia per ogni i , allora ω è liscia.*

Dimostrazione. Sia $g : W \rightarrow N$ una qualunque parametrizzazione locale, e sia $z \in W$. Vogliamo dimostrare che $g^*(\omega)$ è liscia vicino ad z . Scegliamo un indice i in modo tale che $g(z) \in g_i(W_i)$. Vicino a z possiamo scrivere $g = g_i \circ g_i^{-1} \circ g = g_i \circ h$, dove $h = g_i^{-1} \circ g : g_i^{-1}(g_i(W_i)) \rightarrow W_i$ è una mappa liscia tra aperti di spazi euclidei. Abbiamo quindi che

$$g^*(\omega) = (g_i \circ h)^*(\omega) = h^*(g_i^*(\omega))$$

in un intorno di z , e la parte destra dell'uguaglianza è una k -forma liscia per ipotesi. \square

Il differenziale esterno

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

può essere definito attraverso parametrizzazioni locali $g : W \rightarrow M$ come segue. Se $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$ è una k -forma liscia su M , allora

$$d_p \omega = \text{Alt}^{k+1}((D_x g)^{-1}) \circ d_x(g^* \omega), \quad p = g(x).$$

Notiamo che $d_p \omega$ è indipendente dalla scelta della parametrizzazione locale. Infatti, data una parametrizzazione locale g , una qualunque altra parametrizzazione locale può essere espressa localmente come $g \circ \phi$, attraverso un diffeomorfismo opportuno $\phi : U \rightarrow W$. Siano $\xi_1, \dots, \xi_{k+1} \in T_p M$. Scegliamo $v_1, \dots, v_{k+1} \in \mathfrak{R}^n$ in modo tale che $D_x(g \circ \phi)(v_i) = \xi_i$. Vogliamo dimostrare che

$$d_y g^*(\omega)(w_1, \dots, w_{k+1}) = d_x(g \circ \phi)^*(\omega)(v_1, \dots, v_{k+1})$$

dove $\phi(x) = y$ e $D_x \phi(v_i) = w_i$. Ma questo segue direttamente dalle equazioni

$$\begin{aligned} (g \circ \phi)^* &= \phi^*(g^*(\omega)) \\ d\phi^*(\tau) &= \phi^*d(\tau), \end{aligned}$$

in cui $\tau = g^*(\omega)$.

È ovvio inoltre che $d \circ d = 0$. Abbiamo quindi definito un complesso di catene

$$\dots \rightarrow \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \xrightarrow{d} \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \dots$$

Abbiamo che $\Omega^k(M) = 0$ se $k > \dim M$, in quanto $\text{Alt}^k(T_p M) = 0$ per $k > \dim T_p M$. Un'applicazione liscia $\phi: M \rightarrow N$ induce un'applicazione tra complessi $\phi^*: \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$,

$$\phi^*(\tau)_p = \text{Alt}^k(D_p \phi)(\tau_{\phi(p)}), \text{ con } \tau \in \Omega^k(N), \text{ e } \phi^*(\tau)_p = \tau_{\phi(p)} \text{ per } k = 0.$$

Si definisce un prodotto bilineare $\omega \wedge \tau$ ponendo $(\omega \wedge \tau)_p = \omega_p \wedge \tau_p$,

$$\wedge: \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \rightarrow \Omega^{k+l}(M).$$

Si può dimostrare che $\phi^*\omega$ e $\omega \wedge \tau$ sono forme lisce. È inoltre facile vedere che valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \tau) &= d\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge d\tau \\ \omega \wedge \tau &= (-1)^{kl} \tau \wedge \omega \end{aligned}$$

per $\omega \in \Omega^k(M)$, $\tau \in \Omega^l(M)$.

Definizione 17. *La p -esima coomologia di de Rham $H^p(M)$ di una varietà M è il p -esimo spazio vettoriale di de Rham di $\Omega^*(M)$*

Il prodotto esterno induce un prodotto $H^p(M) \times H^q(M) \rightarrow H^{p+q}(M)$ che dota $H^*(M)$ della struttura di algebra graduata. Notiamo che $H^p(M) = 0$ per $p > n = \dim M$, o per $p < 0$.

L'applicazione tra complessi ϕ^* indotta da un'applicazione liscia $\phi: M \rightarrow N$ induce a sua volta un'applicazione lineare

$$H^p(\phi): H^p(N) \rightarrow H^p(M).$$

La coomologia di de Rham diventa un funtore controvariante dalla categoria delle varietà differenziabili e delle applicazioni lisce alla categoria delle \mathbb{R} -algebre graduate anti-commutative.

Definizione 18. (i) *Una varietà differenziabile M^n di dimensione n è detta **orientabile** se esiste $\omega \in \Omega^n(M^n)$ con $\omega_p \neq 0$ per ogni $p \in M$.*

Tale forma ω è detta "forma" di orientazione su M .

(ii) *Due forme di orientazione ω, τ su M si dicono equivalenti se $\tau = f \cdot \omega$, per una qualche $f \in \Omega^0(M)$ con $f(p) > 0$ per ogni $p \in M$.*

Un'orientazione su M è una classe di equivalenza di forme di orientazione su M .

Nello spazio euclideo \mathbb{R}^n possiamo considerare la forma di orientazione $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, detta “orientazione standard” di \mathbb{R}^n .

Sia M^n varietà orientata attraverso la forma di orientazione ω . Un base b_1, \dots, b_n di $T_p M$ è detta positivamente o negativamente orientata rispetto ad ω a seconda che il numero

$$\omega_p(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}$$

sia positivo o negativo. Il segno dipende esclusivamente dall’orientazione determinata da ω . Se ω e τ sono due forme di orientazione su M^n , allora $\tau = f \cdot \omega$ per una funzione unicamente determinata $f \in \Omega^0(M)$, con $f(p) \neq 0$ per ogni $p \in M$. Diciamo che ω e τ determinano la stessa orientazione in p , se $f(p) > 0$. Equivalentemente, ω e τ inducono le stesse basi orientate positivamente su $T_p M$. Se M è connessa, allora f ha segno costante su M , e si ha quindi che:

Lemma 27. *Su una varietà differenziabile connessa e orientabile esistono esattamente due orientazioni.*

Se U è un sottoinsieme aperto di una varietà orientabile M^n , allora un’orientazione su U è indotta attraverso la restrizione di una forma di orientazione definita su M . Per il viceversa vale il seguente:

Lemma 28. *Sia $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di una sottovarietà liscia M^n . Supponiamo che ogni V_i sia dotato di orientazione, e che le restrizioni delle orientazioni da V_i e V_j a $V_i \cap V_j$ coincidano per ogni $i \neq j$. Allora M ammette un’unica orientazione, con la restrizione data sui V_i , per ogni $i \in I$.*

Per la dimostrazione è necessario richiamare il seguente risultato sulle partizioni dell’unità.

Teorema 21. *Sia $\mathcal{V} = (V_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di una varietà liscia $M^n \subseteq \mathbb{R}^l$. Esiste una famiglia di applicazioni lisce $\phi_i: M \rightarrow [0, 1]$ ($i \in I$) tali che*

- (i) $\text{Supp}_M(\phi_i) \subseteq V_i$ per ogni $i \in I$.
- (ii) Ogni $p \in M$ ammette un intorno aperto in cui al più un numero finito di funzioni ϕ_i ($i \in I$) non sono nulle.
- (iii) Per ogni $p \in M$ abbiamo che $\sum_{i \in I} \phi_i(p) = 1$.

dimostrazione lemma 28. Indichiamo con $\omega_i \in \Omega^n(V_i)$ la forma di orientazione di V_i per ogni i , e consideriamo una famiglia di applicazioni lisce $\phi_i: M \rightarrow [0, 1]$ che soddisfa le proprietà del teorema 21. Possiamo definire $\omega \in \Omega^n(M)$ come

$$\omega = \sum_{i \in I} \phi_i \omega_i,$$

con $\phi_i \omega_i$ estesa ad una n -forma definita su tutta la varietà M , semplicemente imponendo che sia nulla in $M \setminus \text{Supp}_M(\phi_i)$. Questa è ancora una forma di orientazione, in quanto per $p \in V_i \subseteq M$ e b_1, \dots, b_n base di $T_p M$, con $\omega_{i,p}(b_1, \dots, b_n) > 0$, si ha che $\omega_{i',p}(b_1, \dots, b_n) > 0$ per ogni altro i' con $p \in V_{i'}$, e nella formula

$$\omega_p(b_1, \dots, b_n) = \sum_i \phi_i(p) \omega_{i,p}(b_1, \dots, b_n)$$

tutti i termini sono o positivi o nulli. Quindi ω è una forma di orientazione su M , e b_1, \dots, b_n sono orientati positivamente rispetto ad ω . L'orientazione di M determinata da ω ha le proprietà volute. Se τ è un'altra forma che dota M di un'orientazione che soddisfa le stesse proprietà, allora $\tau = f \cdot \omega$ e $\tau_p(b_1, \dots, b_n) = f(p) \cdot \omega_p(b_1, \dots, b_n)$. Dato che sia τ_p che ω_p sono positive su b_1, \dots, b_n abbiamo che $f(p) > 0$. Abbiamo quindi che ω e τ determinano la stessa orientazione. \square

Definizione 19. Sia $\phi: M_1^n \rightarrow M_2^n$ un diffeomorfismo tra due varietà orientate attraverso le forme di orientazione $\omega_j \in \Omega^n(M_j^n)$. Allora $\phi^*(\omega_2)$ è una forma di orientazione su M_1^n . Inoltre diciamo che ϕ “**preserva l'orientazione**” (o che la *inverte*) se $\phi^*(\omega_2)$ induce su M_1^n la stessa orientazione di ω_1 (rispettivamente di $-\omega_1$).

Esempio 11. Consideriamo un diffeomorfismo $\phi: U_1 \rightarrow U_2$ tra sottoinsiemi aperti U_1 e U_2 di \mathbb{R}^n , entrambi dotati dell'orientazione standard di \mathbb{R}^n . Sappiamo dall'esempio 4 (ii) che

$$\phi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \det(D_x \phi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

e possiamo quindi concludere che l'applicazione ϕ preserva l'orientazione se e solo se $\det(D_x \phi) > 0$ per ogni $x \in U_1$. Analogamente ϕ inverte l'orientazione se e solo se tutti i determinanti Jacobiani sono negativi.

Per ogni punto di una varietà liscia orientata M^n possiamo trovare una carta $h: U \rightarrow U', p \in U$, in modo tale che h sia un diffeomorfismo che preserva l'orientazione, considerando U con l'orientazione indotta da M , e U' con l'orientazione di \mathbb{R}^n . (U, h) è detta “carta orientata” di M . L'applicazione di cambiamento di coordinate associata a due carte orientate di M è un diffeomorfismo che preserva l'orientazione.

Per un qualunque atlante di M costituito da carte orientate, ogni determinante Jacobiano delle funzioni di transizione è positivo. Tali atlanti si dicono “atlanti positivi”.

Proposizione 5. *Se $\{h_i: U_i \rightarrow U'_i \mid i \in I\}$ è un atlante positivo su M^n , allora M^n ha un'orientazione unicamente determinata, e ogni h_i è una carta orientata.*

Dimostrazione. Per ciascun $i \in I$ consideriamo su U_i l'orientazione tale per cui h_i è un diffeomorfismo che preserva l'orientazione. Le due orientazioni su $U_i \cap U_j$ definite dalla restrizione delle orientazioni di U_i e U_j coincidono, e la tesi segue direttamente dal lemma 28. \square

Definizione 20. *Una **metrica riemanniana** su una varietà differenziabile M^n è una famiglia di prodotti scalari $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ su $T_p M$ per ogni $p \in M$, e tale che per ogni parametrizzazione locale $f: W \rightarrow M$ ed ogni coppia $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$,*

$$x \rightarrow \langle D_x f(v_1), D_x f(v_2) \rangle_{f(x)}$$

è una funzione differenziabile su W .

È sufficiente che la condizione sia soddisfatta per le funzioni

$$g_{ij}(x) = \langle D_x f(e_i), D_x f(e_j) \rangle_{f(x)}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

con e_1, \dots, e_n base canonica di \mathbb{R}^n . Queste funzioni sono dette “coefficienti della prima forma fondamentale”. Per $x \in W$ la matrice quadrata $(g_{ij}(x))$ di dimensione n è simmetrica e definita positiva.

Una varietà differenziabile munita di una metrica Riemanniana è detta **varietà Riemanniana**. Su una sottovarietà liscia $M^n \subseteq \mathbb{R}^l$ è possibile considerare la struttura Riemanniana definita restringendo al sottospazio $T_p M \subseteq \mathbb{R}^l$ il prodotto scalare usuale di \mathbb{R}^l .

Proposizione 6. *Se M^n è una varietà Riemanniana orientata, allora su M^n è definita la forma di orientazione vol_M , univocamente determinata e tale che*

$$vol_M(b_1, \dots, b_n) = 1$$

*per ogni base ortonormale orientata positivamente dello spazio tangente T_pM . Diciamo vol_M **forma di volume** della varietà M .*

Dimostrazione. Sia ω la forma di orientazione di M , $\omega \in \Omega^n(M^n)$. Consideriamo due basi ortonormali b_1, \dots, b_n e b'_1, \dots, b'_n dello spazio tangente T_pM orientate positivamente. Esiste una matrice ortogonale $n \times n$ che indichiamo con $C = (c_{ij})$ tali che

$$b'_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} b_j,$$

e $\omega_p \in Alt^n(T_pM)$ è tale che

$$\omega_p(b'_1, \dots, b'_n) = (\det C) \omega_p(b_1, \dots, b_n).$$

Dalla positività segue che $\det C > 0$, e quindi $\det C = 1$. Esiste allora una funzione $\rho: M \rightarrow (0, \infty)$ tale che $\rho(p) = \omega_p(b_1, \dots, b_n)$ per ogni base ortonormale orientata positivamente b_1, \dots, b_n di T_pM . Dobbiamo dimostrare ora che ρ è liscia; seguirebbe che $vol_M = \rho^{-1}\omega$ è la forma cercata. Consideriamo una parametrizzazione locale f che preservi l'orientazione, $f: W \rightarrow M^n$, e poniamo

$$X_j(q) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_q = D_q f(e_j) \in T_{f(q)}M \quad \text{per } 1 \leq j \leq n \text{ e } q \in W.$$

Gli $X_j(q)$ formano una base positivamente orientata di $T_{f(q)}M$. Applicando il processo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt otteniamo una matrice triangolare superiore $A(q) = (a_{i,j}(q))$ di funzioni lisce su W con $a_{ii}(q) > 0$, tali che

$$b_i(q) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(q) X_j(q), \quad i = 1, \dots, n$$

è una base ortonormale di $T_{f(q)}M$ positivamente orientata. Allora

$$\begin{aligned} \rho \circ f(q) &= \omega_{f(q)}(b_1(q), \dots, b_n(q)) = (\det A(q)) \omega_{f(q)}(X_1(q), \dots, X_n(q)) \\ &= (\det A(q)) (f^* \omega)_q(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

e questo dimostra il fatto che ρ sia liscia. □

Proposizione 7. Sia $f: W \rightarrow M^n$ una parametrizzazione locale che preserva l'orientazione, e poniamo $g_{ij}(x) = \langle D_x f(e_i), D_x f(e_j) \rangle_{f(x)}$. Possiamo esprimere l'immagine di vol_M attraverso f^* in coordinate locali come

$$f^*(\text{vol}_M) = \sqrt{\det(g_{ij}(x))} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Dimostrazione. Si ripete la dimostrazione della proposizione precedente ma partendo da $\omega = \text{vol}_M$, da cui segue che $\rho(p) = 1$ per ogni $p \in M$. Otteniamo che

$$f^*(\text{vol}_M) = (\det A(x))^{-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Possiamo scrivere inoltre che

$$\langle b_i(q), b_k(q) \rangle_{f(q)} = \delta_{ik} = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ij}(q) g_{jl}(q) a_{kl}(q).$$

Questa è la matrice identità, $I = A(q)G(q)A(q)^t$, con $G(q) = (g_{jl}(q))$. In particolare $(\det A(q))^2 \det G(q) = 1$. Dato che $\det A(q) = \prod a_{ii}(q) > 0$, otteniamo

$$(\det A(q))^{-1} = \sqrt{\det G(q)}.$$

□

Esempio 12. Definiamo una $(n-1)$ -forma $\omega_0 \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ come

$$\omega_{0x}(w_1, \dots, w_{n-1}) = \det(x, w_1, \dots, w_{n-1}) \in \text{Alt}^{n-1}(\mathbb{R}^n),$$

per $x \in \mathbb{R}^n$. Dato che $\omega_{0x}(e_1, \dots, \tilde{e}_i, \dots, e_n) = (-1)^{i-1} x_i$, abbiamo

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Se $x \in S^{n-1}$ e w_1, \dots, w_{n-1} è una base per $T_x S^{n-1}$, allora $\{x, w_1, \dots, w_{n-1}\}$ diventa una base di \mathbb{R}^n , e $\omega_{0x} \neq 0$. Segue che $\omega_0|_{S^{n-1}} = i^*(\omega_0)$ è una forma di orientazione su S^{n-1} .

Rispetto all'orientazione di S^{n-1} data da ω_0 , la base w_1, \dots, w_{n-1} di $T_x S^{n-1}$ è orientata positivamente se e solo se la base x, w_1, \dots, w_{n-1} di \mathbb{R}^n è orientata positivamente. Considerando S^{n-1} con la struttura Riemanniana indotta da \mathbb{R}^n abbiamo che

$$\text{vol}_{S^{n-1}} = \omega_0|_{S^{n-1}}.$$

Possiamo costruire una $(n-1)$ -forma chiusa ω su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ con $\omega|_{S^{n-1}} = \text{vol}_{S^{n-1}}$ ponendo $\omega = r^*(\text{vol}_{S^{n-1}})$, dove $r: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ è la mappa $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Per $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\omega_x \in \text{Alt}^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ è data da

$$\begin{aligned}\omega_x(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \omega_{0r(x)}(D_x r(v_1), \dots, D_x r(v_{n-1})) \\ &= \|x\|^{-1} \det(x, D_x r(v_1), \dots, D_x r(v_{n-1})).\end{aligned}$$

Possiamo ora dimostrare che

$$D_x r(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v \in \mathbb{R}x \\ v\|x\|^{-1} & \text{se } v \in (\mathbb{R}x)^\perp \end{cases}$$

Per dimostrarlo consideriamo una curva liscia $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tale che $\gamma(0) = x$, e $\dot{\gamma}(0) = v$. Per la definizione di $D_x r$ e dell'applicazione r , possiamo scrivere

$$(D_x r)(v) = \frac{d}{dt} r(\gamma(t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} |_{t=0} = \frac{\dot{\gamma}(t)\|\gamma(t)\| - \frac{1}{2}\gamma \langle \gamma, \gamma \rangle^{-\frac{1}{2}} 2 \langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle}{\|\gamma\|^2} |_{t=0}$$

che, calcolato in $t = 0$, ci da

$$\frac{v\|x\| - x\|x\|^{-1} \langle x, v \rangle}{\|x\|^2}$$

dai cui si ottengono immediatamente i risultati voluti nei casi in cui $v \in (\mathbb{R}x)^\perp$ o $v \in \mathbb{R}x$. Posto $v = u + w$, con u e w proiezioni rispettivamente sullo spazio $\mathbb{R}x$ e $\mathbb{R}x^\perp$, possiamo quindi scrivere

$$D_x r(v) = D_x r(u + w) = 0 + D_x r(w) = \|x\|^{-1} w.$$

Indicando con w_i la proiezione ortogonale di v_i su $(\mathbb{R}x)^\perp$, si ha che

$$\begin{aligned}w_x(v_1, \dots, v_{n-1}) &= \|x\|^{-n} \det(x, w_1, \dots, w_{n-1}) = \|x\|^{-n} \det(x, v_1, \dots, v_{n-1}) \\ &= \|x\|^{-n} \omega_{0x}(v_1, \dots, v_{n-1}).\end{aligned}$$

Quindi la forma chiusa ω è data da

$$\omega = \frac{1}{\|x\|^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Esempio 13. Per l'applicazione antipodale

$$A: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}; \quad Ax = -x$$

abbiamo che

$$A^*(vol_{S^{n-1}}) = (-1)^n vol_{S^{n-1}},$$

e A preserva l'orientazione se e solo se n è pari. In questo caso otteniamo una forma di orientazione τ su $\mathbb{R}P^{n-1}$ tale che $\pi^*(\tau) = vol_{S^{n-1}}$, dove $\pi: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$. Per $x \in S^{n-1}$,

$$T_x S^{n-1} \xrightarrow{D_x A} T_{Ax} S^{n-1}$$

è un'isometria lineare. Esiste quindi una struttura Riemanniana su $\mathbb{R}P^{n-1}$ caratterizzata dalla richiesta che l'isomorfismo

$$T_x S^{n-1} \xrightarrow{D_x \pi} T_{\pi(x)} \mathbb{R}P^{n-1}$$

sia un'isometria per ogni $x \in S^{n-1}$. Se n è pari e $\mathbb{R}P^{n-1}$ è orientato come prima, si ottiene $\pi^*(vol_{\mathbb{R}P^{n-1}}) = vol_{S^{n-1}}$. Viceversa supponiamo che $\mathbb{R}P^{n-1}$ sia orientabile, e che $n \geq 2$. Scegliamo un'orientazione e indichiamo $vol_{\mathbb{R}P^{n-1}}$ la forma di volume che ne risulta. Dato che $D_x \pi$ è un'isometria, $\pi^*(vol_{\mathbb{R}P^{n-1}})$ deve coincidere con $\pm vol_{S^{n-1}}$ in ogni punto, e per la continuità il segno deve essere localmente costante. S^{n-1} è connesso, il segno è quindi costante su tutto S^{n-1} . Ne consegue che

$$\pi^*(vol_{\mathbb{R}P^{n-1}}) = \delta vol_{S^{n-1}},$$

con $\delta = \pm 1$. Possiamo applicare A^* e utilizzare l'equazione $\pi \circ A = \pi$ per ottenere

$$\begin{aligned} (-1)^n \delta vol_{S^{n-1}} &= \delta A^*(vol_{S^{n-1}}) = A^* \pi^*(vol_{\mathbb{R}P^{n-1}}) \\ &= (\pi \circ A)^*(vol_{\mathbb{R}P^{n-1}}) = \pi^*(vol_{\mathbb{R}P^{n-1}}) = \delta vol_{S^{n-1}}. \end{aligned}$$

Questo richiede che n sia pari, e quindi implica che $\mathbb{R}P^{n-1}$ è orientabile se e solo se n è pari.

Osserviamo che per due varietà differenziabili M^m e N^n il prodotto cartesiano $M^m \times N^n$ è ancora una varietà differenziabile, di dimensione $m + n$. Per una coppia di carte $h: U \rightarrow U'$ e $k: V \rightarrow V'$ di M ed N rispettivamente, possiamo utilizzare $h \times k: U \times V \rightarrow U' \times V'$ come una carta di $M \times N$. L'insieme di tali carte prodotto forma un atlante differenziabile su $M \times N$. Per $p \in M$ e $q \in N$ esiste un isomorfismo naturale

$$T_{(p,q)}(M \times N) \cong T_p M \oplus T_q N.$$

Se M ed N sono orientate, nella costruzione dell'atlante sul prodotto si possono utilizzare carte orientate (U, h) e (V, k) . Il diffeomorfismo di trasformazione di coordinate tra le carte $(U \times V, h \times k)$ soddisfa le condizioni della proposizione 5. Otteniamo quindi un'orientazione su $M \times N$. Se le orientazioni su M ed N sono date rispettivamente delle forme $\omega \in \Omega^m(M)$ e $\sigma \in \Omega^n(N)$, l'orientazione sul prodotto è data dalla forma $\pi_M^*(\omega) \wedge \pi_N^*(\sigma)$, dove π_M e π_N sono le proiezioni di $M \times N$ su M ed N .

Nel seguito considereremo una varietà liscia $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ di dimensione n . In ogni punto $p \in M$ è definito lo spazio vettoriale normale $T_p M^\perp$ di dimensione k . Un **campo vettoriale normale** Y su un aperto $W \subseteq M$ è un'applicazione liscia $Y : W \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ con $Y(p) \in T_p M^\perp$ per ogni $p \in W$. Nel caso in cui $k = 1$, e ogni $Y(p)$ abbia norma unitaria, Y è detto **applicazione di Gauss**. È sempre possibile definire localmente una tale applicazione. Vale infatti il seguente:

Lemma 29. *Per ogni $p_0 \in M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ esiste un intorno aperto W di p_0 su M e una famiglia di campi vettoriali normali lisci Y_j ($1 \leq j \leq k$) definita su W tale che $Y_1(p), \dots, Y_k(p)$ formano una base ortonormale di $T_p M^\perp$ per ogni $p \in W$.*

Dimostrazione. Dato un sistema di coordinate su $p_0 \in M$, esistono X_1, \dots, X_n campi vettoriali tangenti che in ogni punto p definiscono una base per $T_p M$. Scegliamo una base V_1, \dots, V_k di $T_{p_0} M^\perp$.

Il determinante della matrice quadrata di dimensione $(n+k)$ di colonne $X_1(p), \dots, X_n(p), V_1, \dots, V_k$,

$$\det(X_1(p), \dots, X_n(p), V_1, \dots, V_k),$$

è non nullo in p_0 , ed è inoltre diverso da zero in ogni p appartenente ad un qualche intorno W di p_0 su M . Applicando l'algoritmo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt alla base di \mathbb{R}^{n+k}

$$X_1(p), \dots, X_n(p), V_1, \dots, V_k \quad (p \in W)$$

otteniamo la base ortonormale

$$\tilde{X}_1(p), \dots, \tilde{X}_n(p), Y_1(p), \dots, Y_k(p),$$

i cui primi n vettori generano $T_p M$. Le formule dell'ortonormalizzazione mostrano che \tilde{X}_i e Y_j sono funzioni differenziabili su W al variare di p , e che quindi Y_1, \dots, Y_k soddisfano le proprietà volute. \square

Proposizione 8. *Data $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ sottovarietà differenziabile di codimensione 1, esiste una corrispondenza biunivoca tra i campi vettoriali normali lisci Y definiti su M e le n -forme in $\Omega^n(M)$. Questa associa al campo Y la n -forma $\omega = \omega_Y$ data da*

$$\omega_p(W_1, \dots, W_n) = \det(Y(p), W_1, \dots, W_n)$$

per $p \in M$, $W_i \in T_pM$. Inoltre la relazione descritta induce una corrispondenza biunivoca tra le applicazioni di Gauss $Y: M \rightarrow S^n$ e le orientazioni su M .

Dimostrazione. Se $p \in M$, dato che $Y(p) \notin T_pM$, $Y(p) = 0$ se e solo se $\omega_p = 0$. Dato che ω_Y dipende linearmente da Y , l'applicazione $Y \rightarrow \omega_Y$ è lineare, e dunque deve essere iniettiva. Se Y è un'applicazione di Gauss, ω_Y è una forma di orientazione, e si può facilmente notare che ω_Y è esattamente la forma di volume associata all'orientazione determinata da ω_Y e alla struttura Riemanniana indotta da \mathbb{R}^{n+1} . Se su M è possibile definire un'applicazione di Gauss Y ogni elemento in $\Omega^n(M)$ ha la forma $f \cdot \omega_Y = \omega_{fY}$ per qualche $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, e la tesi è immediata. Dai risultati precedenti sappiamo che un'applicazione di Gauss è sempre definibile localmente, e quindi che M può essere ricoperta da insiemi aperti, per ciascuno dei quali esiste un'applicazione di Gauss. Per ognuno di questi vale la corrispondenza, e il caso globale segue automaticamente.

Un'orientazione di M determina una forma di volume vol_M , e dalla proprietà appena dimostrata otteniamo Y tale che $\omega_Y = vol_M$. La Y così definita è un'applicazione di Gauss. \square

Teorema 22 (Teorema degli intorni tubolari). *Sia $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ una sottovarietà differenziabile. Esiste un insieme aperto $V \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ che contiene M , e un'estensione di id_M ad un'applicazione liscia $r: V \rightarrow M$, tale che*

- (i) *Per $x \in V$ e $y \in M$, $\|x - r(x)\| \leq \|x - y\|$, e vale l'uguaglianza se e solo se $y = r(x)$.*
- (ii) *Per ogni $p \in M$ la fibra $r^{-1}(p)$ è una palla aperta contenuta nel sottospazio affine $p + T_pM^\perp$, con centro p e raggio $\rho(p)$, con ρ funzione liscia positiva su M . Se M è compatto allora ρ può essere considerata costante.*

(iii) Se $\epsilon: M \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, e $0 < \epsilon(p) < \rho(p)$ per ogni $p \in M$, allora

$$S_\epsilon = \{x \in V \mid \|x - r(x)\| = \epsilon(r(x))\}$$

è una sottovarietà liscia di \mathbb{R}^{n+k} , di codimensione l .

$V = V_p$ è detto **intorno tubolare aperto** di M di raggio ρ .

Concludiamo il capitolo con alcune applicazioni del teorema degli intorni tubolari. Indichiamo con (V, i, r) un intorno tubolare di M , in cui i rappresenta l'inclusione $i: M \rightarrow V$ e $r: V \rightarrow M$ la retrazione differenziabile che verifica la relazione $r \circ i = id_M$.

Per gli spazi di coomologia abbiamo che

$$H^d(i) \circ H^d(r) = id_{H^d(M)}.$$

Segue che $H^d(i): H^d(V) \rightarrow H^d(M)$ è suriettiva, e $H^d(r): H^d(M) \rightarrow H^d(V)$ è iniettiva.

Proposizione 9. Per ogni varietà differenziabile compatta M^n , tutti gli spazi di coomologia $H^d(M)$ hanno dimensione finita.

Dimostrazione. Possiamo assumere che M^n sia una sottovarietà di \mathbb{R}^{n+k} , e che (V, i, r) sia un suo intorno tubolare. Dato che M è compatta possiamo trovare un numero finito di palle aperte U_1, \dots, U_r in \mathbb{R}^{n+k} tali che $U = \bigcup U_i$ soddisfi la relazione $M \subseteq U \subseteq V$. Ora abbiamo l'inclusione $i: M \rightarrow U$ e un'applicazione differenziabile $r|_U: U \rightarrow M$ tale che $r|_U \circ i = id_M$. Questo mostra che

$$H^d(i): H^d(U) \rightarrow H^d(M)$$

è suriettiva, e la tesi segue dal teorema 9. □

Proposizione 10. Date M_1 ed M_2 sottovarietà differenziabili di spazi Euclidei, valgono le seguenti proprietà:

(i) Se $f_0, f_1: M_1 \rightarrow M_2$ sono omotope, allora

$$H^d(f_0) = H^d(f_1): H^d(M_2) \rightarrow H^d(M_1).$$

(ii) Ogni mappa continua $M_1 \rightarrow M_2$ è omotopa ad un'applicazione differenziabile.

Dimostrazione. Consideriamo gli intorni tubolari (V_ν, i_ν, r_ν) di M_ν , per $\nu = 1, 2$. Per le proprietà della composizione di funzioni omotope, possiamo scrivere $i_2 \circ f_0 \circ r_1 \cong i_2 \circ f_1 \circ r_1$. Segue che $H^d(i_1 \circ f_0 \circ r_1) = H^d(i_2 \circ f_1 \circ r_1)$, e quindi

$$H^d(r_1) \circ H^d(f_0) \circ H^d(i_2) = H^d(r_1) \circ H^d(f_1) \circ H^d(i_2).$$

Dal fatto che $H^d(r_1)$ è iniettiva e $H^d(i_2)$ è suriettiva, possiamo concludere che $H^d(f_0)$ e $H^d(f_1)$ coincidono.

Se $\phi: M_1 \rightarrow M_2$ è continua, possiamo utilizzare il lemma 19 (i) per trovare un'applicazione liscia $g: V_1 \rightarrow V_2$ tale che $g \cong i_2 \circ \phi \circ r_1$. Per un'applicazione liscia $f = r_2 \circ g \circ i_1: M_1 \rightarrow M_2$, il lemma 18 mostra che $f \cong \tau_2 \circ (i_2 \circ \phi \circ \tau_1) \circ i_1 = \phi$. \square

Si può facilmente provare, con dimostrazioni analoghe, che i risultati contenuti nel teorema 11 e nel corollario 2, dimostrati nel caso particolare di aperti di \mathbb{R}^n , sono validi anche nel caso più generale delle varietà differenziabili.

Corollario 8. *Se $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$ è una varietà differenziabile e (V, i, r) è un suo intorno tubolare aperti, allora*

$$H^d(i): H^d(V) \rightarrow H^d(M)$$

è un isomorfismo, e $H^d(r)$ è la sua inversa.

Dimostrazione. Abbiamo che $r \circ i = id_M$, e inoltre $i \circ r \cong id_V$, in quanto V contiene il segmento di retta che congiunge x ed $r(x)$ per ogni $x \in V$. Per la proposizione 10 (i) possiamo concludere che $H^d(r)$ e $H^d(i)$ sono l'una l'inversa dell'altra. \square

Esempio 14 (Calcolo degli spazi di coomologia di S^n). *Per $n \geq 1$ vogliamo dimostrare che*

$$H^d(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } d = 0, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sia $i: S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ l'immersione, e definiamo $r: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ come $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Allora $r \circ i = id_{S^n}$, $i \circ r \cong id_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$; segue immediatamente che $H^d(i): H^d(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \rightarrow H^d(S^n)$ è un isomorfismo per qualunque d . Dai risultati del teorema 13 sugli spazi di coomologia di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ otteniamo la tesi.

Nel caso in cui U_1 e U_2 siano aperti di una varietà differenziabile $M^n \subseteq \mathbb{R}^l$, la dimostrazione del teorema 7 può essere ripetuta senza variazioni significative. Così come nel caso di aperti di \mathbb{R}^n il risultato permette quindi la definizione della sequenza di Mayer-Vietoris

$$\rightarrow H^p(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{I^*} H^p(U_1) \oplus H^p(U_2) \xrightarrow{J^*} H^p(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\partial^*} H^{p+1}(U_1 \cup U_2) \rightarrow$$

Esempio 15 (Calcolo degli spazi di coomologia di $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$). *Vogliamo calcolare gli spazi di coomologia di de Rham degli spazi proiettivi $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ per ogni $n \geq 2$. Notiamo innanzitutto che*

$$\text{Alt}^p(D_x\pi) : \text{Alt}^p(T_{\pi(x)}\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow \text{Alt}^p(T_xS^{n-1})$$

è un isomorfismo per ogni $x \in S^{n-1}$. Abbiamo quindi che

$$\Omega^p(\pi) : \Omega^p(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \rightarrow \Omega^p(S^{n-1})$$

è un monomorfismo, e troviamo che l'immagine di $\Omega^p(\pi)$ coincide con l'insieme delle p -forme ω su S^{n-1} tali che $A^*\omega = \omega$.

Dato che $A \circ A = \text{id}_{\Omega^p(S^{n-1})}$, sappiamo che $A^* = \Omega^p(A) : \Omega^p(S^{n-1}) \rightarrow \Omega^p(S^{n-1})$ ha ordine 2, cioè è tale che $A^* \circ A^* = \text{id}_{\Omega^p(S^{n-1})}$, e possiamo decomporla nei due autospazi

$$\Omega^p(S^{n-1}) = \Omega_+^p(S^{n-1}) \oplus \Omega_-^p(S^{n-1})$$

dove

$$\Omega_{\pm}^p(S^{n-1}) = \text{Im}\left(\frac{1}{2}(\text{id} \pm A^*)\right).$$

di autovalori $+1$ e -1 rispettivamente. Da questo deriva la decomposizione in somma diretta

$$\Omega^*(S^{n-1}) = \Omega_+^*(S^{n-1}) \oplus \Omega_-^*(S^{n-1}).$$

L'applicazione $\pi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ induce l'isomorfismo

$$\Omega^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}) \cong \Omega_+^*(S^{n-1}).$$

Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} H^p(S^{n-1}) &\cong H^p(\Omega_+^*(S^{n-1})) \oplus H^p(\Omega_-^*(S^{n-1})) \\ &\cong H_+^p(S^{n-1}) \oplus H_-^p(S^{n-1}) \end{aligned}$$

dove $H_{\pm}^p(S^{n-1})$ è il (\pm) -autospatio di A^* su $H^p(S^{n-1})$.

Combinando questi risultati otteniamo che

$$H^p(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong H_+^p(S^{n-1}).$$

e il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \longrightarrow & H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \\ i^* \downarrow \cong & & i^* \downarrow \cong \\ H^{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{A^*} & H^{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

in cui l'applicazione $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ è quella indotta dall'applicazione lineare $x \rightarrow (-x)$ di \mathbb{R}^n in sé. Il lemma 21 mostra invece che l'applicazione A^* è la moltiplicazione per $(-1)^n$. Utilizzando l'esempio 14 otteniamo quindi che

$$H^p(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } p = 0, n - 1 \text{ permpari} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Capitolo 8

Integrazione su varietà

Il primo passo di questo capitolo sarà la definizione di un operatore integrale

$$\int_M : \Omega_c^n(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

sullo spazio vettoriale delle n -forme differenziali a supporto compatto, con M^n varietà differenziabile di dimensione n . Estenderemo successivamente la definizione di integrale a sottoinsiemi generici della varietà M^n , e enunceremo il teorema di Stokes. Infine saranno presentati alcuni esempi di calcolo degli spazi $H^n(M^n)$ per varietà compatte connesse ed orientabili.

Nel caso particolare in cui M^n coincida con \mathbb{R}^n , considerato con l'orientazione standard, possiamo scrivere una forma generica $\omega \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ in modo unico come

$$\omega = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

con $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ funzione a supporto compatto. Definiamo quindi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu_n,$$

dove $d\mu_n$ è l'usuale misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n .

La stessa definizione può essere utilizzata per $\omega \in \Omega_c^n(V)$, con $V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, in quanto ω ed f sono estendibili in maniera differenziabile a tutto \mathbb{R}^n semplicemente imponendo che siano identicamente nulle in $\mathbb{R}^n \setminus \text{supp}_V(\omega)$.

Lemma 30. *Sia $\phi: V \rightarrow W$ un diffeomorfismo tra due sottoinsiemi aperti V e W di \mathbb{R}^n , e supponiamo che il determinante jacobiano $\det(D_x\phi)$ abbia segno costante $\delta = \pm 1$ per $x \in V$. Per $\omega \in \Omega_c^n(W)$ abbiamo che*

$$\int_V \phi^*(\omega) = \delta \cdot \int_W \omega.$$

Dimostrazione. Possiamo esprimere ω come

$$\omega = f(x)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

con $f \in C_c^\infty(W, \mathbb{R})$. Dall'esempio 4 segue che

$$\begin{aligned} \phi^*(\omega)(x) &= \phi^*(f)(x)\phi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= f(\phi(x))\det(D_x\phi)dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \delta f(\phi(x))|\det(D_x\phi)|dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

La tesi segue quindi dal teorema di trasformazione degli integrali, che afferma che

$$\int_W f(x)d\mu_n = \int_V f(\phi(x))|\det(D_x\phi)|d\mu_n.$$

□

Proposizione 11. *Data un'arbitraria varietà differenziabile M^n orientata, esiste un'unica applicazione lineare*

$$\int_M : \Omega_c^n(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che per qualunque $\omega \in \Omega_c^n(M^n)$ di supporto contenuto in U , con (U, h) carta orientata positivamente, vale la relazione

$$\int_M \omega = \int_{h(U)} (h^{-1})^*\omega.$$

Lemma 31 (Proprietà dell'integrale). *Valgono le seguenti proprietà:*

- (i) $\int_M \omega$ cambia segno quando l'orientazione di M^n viene invertita.
- (ii) Se $\omega \in \Omega_c^n(M^n)$ ha supporto contenuto in un aperto $W \subset M^n$, allora

$$\int_M \omega = \int_W \omega,$$

con W considerato orientato secondo l'orientazione indotta da M .

(iii) Dato $\phi: N^n \rightarrow M^n$ diffeomorfismo che preserva l'orientazione, si ha che

$$\int_M \omega = \int_N \phi^*(\omega)$$

per $\omega \in \Omega_c^n(M)$.

Dimostrazione. Attraverso l'utilizzo delle partizioni dell'unità, possiamo ricondurci al caso in cui $\text{supp}_M(\omega)$ è contenuto in un unico sistema di coordinate. Tutte le proprietà sono dunque conseguenza diretta del lemma 30 e della relazione

$$\int_M \omega = \int_{h(U)} (h^{-1})^* \omega.$$

□

Se l'orientazione di M è indotta dalla forma $\sigma \in \Omega^n(M)$, una n -forma continua può essere scritta in modo unico come $f\sigma$, con $f \in C^0(M, \mathbb{R})$, e il supporto di $f\sigma$ coincide con quello di f .

L'integrale

$$\int_M \omega = \int_{h(U)} (h^{-1})^* \omega,$$

esteso alle n -forme continue, permette la definizione di un operatore lineare

$$I_\sigma : C_c^0(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}; \quad I_\sigma(f) = \int_M f\sigma.$$

Questo operatore lineare è positivo, ovvero $I_\sigma(f) \geq 0$ per $f \geq 0$. È sufficiente dimostrarlo nel caso in cui $\text{supp}(f) \subseteq U$, dove (U, h) è una carta C^∞ orientata positivamente, in quanto possiamo sempre ricondurci a questo caso attraverso l'utilizzo di una partizione dell'unità. Abbiamo quindi che

$$I_\sigma(f) = \int_M f\sigma = \int_{h(U)} (h^{-1})^* f\sigma = \int_{h(U)} f \circ h^{-1}(x) \phi(x) d\mu_n,$$

dove ϕ è determinato dalla relazione $(h^{-1})^*(\sigma) = \phi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Dato che ϕ è positiva otteniamo che $I_\sigma(f) \geq 0$. Si può dimostrare che I_σ determina una misura positiva μ_σ su M che soddisfa la relazione

$$\int_M f(x) d\mu_\sigma = \int_M f\sigma, \quad f \in C_c^\infty(M, \mathbb{R}).$$

L'intera teoria dell'integrazione di Lebesgue diventa ora strumento utile nell'integrazione di forme su varietà differenziabili.

Se M^n è una varietà Riemanniana orientata, la forma di volume vol_M determina una misura μ_M su M^n analoga alla misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n . Per un insieme compatto K , definiamo il volume K come

$$Vol(K) = \int_K vol_M \in \mathbb{R}.$$

Definizione 21. *Data M^n varietà differenziabile, un sottoinsieme $N \subseteq M^n$ è detto **dominio a bordo liscio**, o **sottovarietà con bordo a codimensione zero**, se per ogni $p \in M$ esiste una carta (U, h) su p , tale che*

$$h(U \cap N) = h(U) \cap \mathbb{R}_-^n,$$

dove $\mathbb{R}_-^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\}$.

La condizione è automaticamente verificata se p è un punto interno o esterno di N . Si può infatti scegliere (U, h) , con $p \in U$, in modo tale che $h(U)$ sia contenuto in un semispazio aperto in \mathbb{R}^n definito alternativamente da $x_1 < 0$ o da $x_1 > 0$. Per definizione di bordo, se $p \in \partial N$, allora $h(p)$ ha la prima coordinata nulla. Date (U, h) e (V, k) due carte definite su un punto di bordo $p \in \partial N$, il diffeomorfismo di cambio di coordinate

$$\phi = k \circ h^{-1} : h(U \cap V) \rightarrow k(U \cap V)$$

induce una mappa

$$h(U \cap V) \cap \mathbb{R}_-^n \rightarrow k(U \cap V) \cap \mathbb{R}_-^n,$$

la cui restrizione è il diffeomorfismo

$$\Psi : h(U \cap V) \cap \partial \mathbb{R}_-^n \rightarrow k(U \cap V) \cap \partial \mathbb{R}_-^n,$$

La matrice Jacobiana nel punto $q = h(p) \in \partial \mathbb{R}_-^n$ per $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ ha la forma

$$D_q \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & D_q \Psi & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$

Dato che $D_q \phi$ è invertibile, dobbiamo avere che $(\partial \phi_1 / \partial x_1)(q) \neq 0$. Sappiamo che ϕ mappa \mathbb{R}_-^n in \mathbb{R}_-^n , e abbiamo quindi che $(\partial \phi_1 / \partial x_1)(q) > 0$. Un vettore tangente $w \in T_p M$ in un punto di bordo $p \in \partial N$ si dice **esterno**

se esiste una carta differenziabile (U, h) su p tale che $h(U \cap N) = h(U) \cap \mathbb{R}_-^n$ e tale che la prima coordinata di $D_p h(w) \in \mathbb{R}^n$ sia positiva. Questo varrà quindi anche per ogni altra carta differenziabile su p .

Lemma 32. *Sia $N \subseteq M^n$ un dominio a bordo liscio. Allora ∂N è una sottovarietà differenziabile di M^n di dimensione $(n - 1)$.*

Inoltre, se M^n (con $n \geq 2$) è orientata, esiste un'orientazione indotta su ∂N tale che se $p \in \partial N$ e $v_1 \in T_p M$ è un vettore tangente diretto esternamente, allora una base v_2, \dots, v_n di $T_p \partial N$ è orientata positivamente se e solo se la base v_1, v_2, \dots, v_n di $T_p M$ è orientata positivamente.

Dimostrazione. Ogni carta liscia (U, h) in M tale che $h(U \cap N) = h(U) \cap \mathbb{R}_-^n$ può essere ristretta ad una carta $(U \cap \partial N, h|_U)$ su ∂N :

$$h|_U : U \cap \partial N \rightarrow h(U) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}).$$

L'insieme di queste carte forma un atlante differenziabile su ∂N .

Supponiamo ora che M^n sia orientata. A meno di cambiare il segno di x_2 , possiamo scegliere per ogni $p \in \partial N$ una carta (U, h) su p dello stesso tipo e che sia inoltre orientata positivamente. Le carte lisce $(U \cap \partial N, h|_U)$ su ∂N , definite a partire da queste ultime, hanno diffeomorfismi di trasformazione che sono orientati positivamente, e determinano un'orientazione di ∂N che soddisfa le proprietà volute. \square

Nel caso $n = 1$, un'orientazione su ∂N consiste nella scelta di un segno, $+$ o $-$, per ogni punto $p \in \partial N$. Dato il vettore esterno $v_1 \in T_p M$, al punto p è assegnato il segno $+$ se v_1 è una base orientata positivamente di $T_p M$, il segno $-$ se è una base orientata negativamente.

Osserviamo che per poter integrare n -forme $\omega \in \Omega_c^n(M)$ sui domini N con bordo liscio si pone:

$$\int_N \omega = \int_M 1_N \omega$$

dove 1_N è la funzione con valore 1 su N e zero su punti esterni ad N .

Una 0-forma su ∂N è una funzione $f : \partial N \rightarrow \mathbb{R}$. Se f ha supporto compatto definiamo

$$\int_{\partial N} f = \sum_{p \in \partial N} \text{sgn}(p) f(p).$$

Teorema 23 (Teorema di Stokes). *Sia $N \subseteq M^n$ un dominio con bordo liscio contenuto in una varietà differenziabile orientata, e consideriamo ∂N dotato dell'orientazione indotta da M . Per ogni $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$, con $N \cap \text{supp}_N(\omega)$ compatto, si ha che*

$$\int_{\partial N} i^*(\omega) = \int_N d\omega,$$

dove $i: \partial N \rightarrow M$ è l'inclusione.

Nel caso particolare in cui $N = M$, abbiamo il seguente risultato:

Corollario 9. *Se M^n è una varietà differenziabile orientata, e $\omega \in \Omega_c^{n-1}(M)$, allora*

$$\int_M d\omega = 0.$$

Consideriamo ora una d -forma chiusa ω su M^n . Un modo per dimostrare che le classi di coomologia $[\omega] \in H^d(M)$ sono non nulle è dimostrare che

$$\int_Q f^*(\omega) \neq 0$$

per un'applicazione liscia $f: Q^d \rightarrow M$ scelta in maniera adeguata, definita su una varietà differenziabile orientata e liscia Q^d . Se $\omega = d\tau$ per una qualche $\tau \in \Omega^{d-1}(M)$, dal corollario 9 abbiamo che

$$\int_Q f^*(\omega) = \int_Q d(f^*(\tau)) = 0.$$

Si può dimostrare inoltre che $[\omega] = 0$ se e solo se ogni integrale della forma $\int_Q f^*(\omega)$ si annulla. Inoltre valgono i seguenti risultati:

Teorema 24. *Se M^n è una varietà differenziabile connessa e orientata, allora la sequenza*

$$\Omega_c^{n-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^n(M) \xrightarrow{\int_M} \mathbb{R} \rightarrow 0$$

è esatta.

Corollario 10. *Per una varietà differenziabile connessa e compatta M^n , l'integrazione su M induce un isomorfismo*

$$\int_M : H^n(M^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}.$$

Concludiamo il capitolo con due esempi di applicazione del teorema di Stokes e delle sue conseguenze.

Esempio 16. Consideriamo la $(n-1)$ -forma chiusa su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\omega = \frac{1}{\|x\|^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Per i risultati dimostrati nell'esempio 12, la preimmagine di ω attraverso l'inclusione di S^{n-1} è la forma di volume $vol_{S^{n-1}}$, che ha integrale positivo su S^{n-1} . Possiamo quindi concludere, per le osservazioni fatte, che $[\omega] \neq 0$ in $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Se $n \geq 2$, dato che $H^p(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{R}$ per $p = n-1$, possiamo dire che $[\omega]$ è una base per $H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Abbiamo quindi un isomorfismo

$$H^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} \quad (n \geq 2)$$

definito dall'integrazione su S^{n-1} . L'immagine di $[\omega]$ attraverso l'isomorfismo dato è il volume

$$Vol(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} vol_{S^{n-1}}.$$

Esempio 17. Il volume di S^{n-1} può essere calcolato applicando il teorema di Stokes a D^n , considerato con l'orientazione standard di \mathbb{R}^n , e utilizzando la $(n-1)$ -forma su \mathbb{R}^n data da

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Dato che $\omega_0|_{S^{n-1}} = vol_{S^{n-1}}$, e che $d\omega_0 = ndx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$, abbiamo che

$$Vol(S^{n-1}) = \int_{S^{n-1}} \omega_0 = \int_{D^n} d\omega_0 = n \cdot Vol(D^n).$$

Per induzione su m e attraverso una dimostrazione che utilizza il teorema di Fubini, si può dimostrare che

$$Vol(D^{2m}) = \frac{\pi^m}{m!} \quad e \quad Vol(D^{2m+1}) = \frac{2^{2m+1} m! \pi^m}{(2m+1)!}.$$

Questo porta a

$$Vol(S^{2m-1}) = 2m \frac{\pi^m}{m!} = \frac{2\pi^m}{(m-1)!},$$

$$Vol(S^{2m}) = (2m+1) \frac{2^{2m+1} m! \pi^m}{(2m+1)!} = \frac{2^{2m+1} m! \pi^m}{(2m)!}.$$

Capitolo 9

Il teorema di Hodge

L'obiettivo principale del capitolo è la dimostrazione del teorema di decomposizione di Hodge, che ci permetterà di dedurre alcuni importanti risultati relativi agli spazi di coomologia di de Rham nel caso particolare di varietà Riemanniane compatte e orientate. Per arrivare al teorema sono necessarie alcune definizioni e risultati preliminari, tra i quali di particolare importanza sono la definizione dell'operatore di Laplace-Beltrami e le sue proprietà. In tutto il corso del capitolo M indicherà una varietà Riemanniana di dimensione n , compatta e dotata di orientazione.

Dato V spazio vettoriale orientato dotato di prodotto scalare, possiamo definire una trasformazione lineare

$$* : \Omega^p(V) \longrightarrow \Omega^{n-p}(V)$$

imponendo che per ogni base ortonormale e_1, \dots, e_n di V (e, in particolare, per ogni riordinamento di una data base ortonormale), valgano le seguenti proprietà:

- (i) $*(1) = \pm e_1 \wedge \dots \wedge e_n$,
- (ii) $*(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \pm 1$,
- (iii) $*(e_1 \wedge \dots \wedge e_p) = \pm e_{p+1} \wedge \dots \wedge e_n$.

dove consideriamo il segno $+$ o $-$ a seconda dell'orientazione definita su V . Si può inoltre dimostrare, come conseguenza delle precedenti, che vale la proprietà:

$$** = (-1)^{p(n-p)}.$$

È inoltre necessaria ai nostri scopi la definizione di un secondo operatore $\delta: \Omega^p(V) \rightarrow \Omega^{p-1}(V)$, che porta p -forme in $(p-1)$ -forme. Tale operatore viene definito imponendo che valga la relazione

$$\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d * .$$

Sulle 0-forme, δ è semplicemente il funzionale lineare nullo.

Definizione 22. *L'operatore di Laplace-Beltrami o Laplaciano Δ è definito come*

$$\Delta = \delta d + d\delta$$

ed è un operatore lineare su $\Omega^p(M)$ per ogni p , con $0 \leq p \leq n$.

È semplice notare che sulle funzioni di classe C^∞ definite sullo spazio euclideo \mathbb{R}^n , il Laplaciano coincide con l'operatore $(-1) \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, e si può verificare che Δ commuta con $*$, ovvero che vale l'uguaglianza

$$*\Delta = \Delta * .$$

Definiamo un prodotto scalare sullo spazio vettoriale $\Omega^p(M)$ delle p -forme su M ponendo:

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge * \beta \quad \text{per } \alpha, \beta \in \Omega^p(M)$$

e denotiamo la corrispondente norma come $\|\alpha\|$. Possiamo estendere questo prodotto, definito per ciascun $0 \leq p \leq n$, ad un prodotto scalare definito sulla somma diretta $\sum_{p=0}^n \Omega^p(M)$, imponendo che gli spazi $\Omega^p(M)$ siano tutti tra loro ortogonali.

Proposizione 12. *δ è l'operatore aggiunto del differenziale d sullo spazio $\sum_{p=0}^n \Omega^p(M)$, ovvero vale l'uguaglianza:*

$$\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta\beta \rangle .$$

Dimostrazione. Per la linearità e l'ortogonalità degli spazi $\Omega^p(M)$, la dimostrazione si riduce al caso in cui α sia una $(p-1)$ -forma e β una p -forma, e l'uguaglianza generale segue in maniera immediata.

In questo caso particolare si ha che

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge * \beta) &= d\alpha \wedge * \beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d * \beta \\ &= d\alpha \wedge * \beta - \alpha \wedge * \delta \beta. \end{aligned}$$

Integrando entrambi i membri su M , e applicando il corollario 9 del teorema di Stokes alla parte sinistra dell'uguaglianza, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M (d\alpha \wedge * \beta - \alpha \wedge * \delta \beta) \\ &= \langle d\alpha \wedge \beta \rangle - \langle \alpha \wedge \delta \beta \rangle. \end{aligned}$$

e quindi $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \delta \beta \rangle$. \square

Corollario 11. Δ è un operatore autoaggiunto, ovvero:

$$\langle \Delta \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta \beta \rangle \quad (\alpha, \beta \in \Omega^p(M), \quad 0 \leq p \leq n).$$

Proposizione 13. $\Delta \alpha = 0$ se e solo se $d\alpha = 0$ e $\delta \alpha = 0$

Dimostrazione. La prima implicazione deriva in modo ovvio dalla definizione. Infatti $\Delta \alpha$ è chiaramente nullo se $d\alpha = 0$ e $\delta \alpha = 0$. Per il viceversa invece possiamo scrivere, per la proposizione 12, che

$$\begin{aligned} \langle \Delta \alpha, \alpha \rangle &= \langle (d\delta + \delta d)\alpha, \alpha \rangle \\ &= \langle d\delta \alpha, \alpha \rangle + \langle \delta d\alpha, \alpha \rangle \\ &= \langle \delta \alpha, \delta \alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Si vede ora che $\Delta \alpha = 0$ implica necessariamente che $\delta \alpha = 0$ e $d\alpha = 0$. \square

Corollario 12. *Le uniche funzioni armoniche (cioè tali che $\Delta f = 0$) definite su una varietà Riemanniana compatta connessa e orientata sono le funzioni costanti.*

Nel seguito Δ^* indicherà l'aggiunto dell'operatore Δ . Dato che Δ è autoaggiunto, le due scritte hanno lo stesso significato, ma si preferisce mantenerne la distinzione per la forma di alcune definizioni. I risultati che vedremo in seguito, oltre ad essere utili nella nostra analisi delle coomologie di de Rham, si inscrivono in un più ampio studio sulle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una soluzione di equazioni della forma $\Delta \omega = \alpha$. Molti sono i termini e le definizioni relativi a questo ambito che vengono utilizzati nella dimostrazione di risultati a noi necessari per concludere. Introduciamo quindi ora alcuni strumenti a noi utili, e in particolare necessari per la dimostrazione del teorema di Hodge.

Sia ω una soluzione dell'equazione $\Delta\omega = \alpha$. Abbiamo che

$$\langle \Delta\omega, \phi \rangle = \langle \alpha, \phi \rangle \quad \text{per ogni } \phi \in \Omega^p(M),$$

e inoltre

$$\langle \omega, \Delta^*\phi \rangle = \langle \alpha, \phi \rangle \quad \text{per ogni } \phi \in \Omega^p(M).$$

L'ultima uguaglianza suggerisce che possiamo vedere una qualunque soluzione dell'equazione $\Delta\omega = \alpha$ come un certo tipo di funzionale lineare definito su $\Omega^p(M)$. Abbiamo infatti che ω definisce un funzionale limitato e lineare l su $\Omega^p(M)$ attraverso la relazione

$$l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle \quad \text{per ogni } \beta \in \Omega^p(M);$$

e, per i risultati visti, l soddisfa

$$l(\Delta^*\phi) = \langle \alpha, \phi \rangle \quad \text{per ogni } \phi \in \Omega^p(M).$$

Questo modo di vedere la soluzione risulta estremamente utile, permettendo l'utilizzo di svariate tecniche proprie dell'analisi funzionale nella risoluzione di questo tipo di equazioni. Tale funzionale è detto **soluzione debole** per l'equazione $\Delta\omega = \alpha$. Abbiamo quindi che una **soluzione debole** di $\Delta\omega = \alpha$ è un funzionale lineare limitato $l: \Omega^p(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$l(\Delta^*\phi) = \langle \alpha, \phi \rangle \quad \text{per ogni } \phi \in \Omega^p(M).$$

Ogni soluzione ordinaria $\omega \in \Omega^p(M)$ dell'equazione in esame determina quindi una soluzione debole attraverso le relazioni viste. Vediamo inoltre che anche il viceversa è vero:

Teorema 25 (Teorema di regolarità). *Sia $\alpha \in \Omega^p(M)$, e sia l una soluzione debole dell'equazione $\Delta\omega = \alpha$. Esiste allora $\omega \in \Omega^p(M)$ tale che*

$$l(\beta) = \langle \omega, \beta \rangle$$

per ogni $\beta \in \Omega^p(M)$. Di conseguenza, $\Delta\omega = \alpha$.

Per la dimostrazione del teorema di Hodge ci saranno utili anche i seguenti risultati:

Lemma 33. *Sia $\{\alpha_n\}$ una successione di p -forme lisce su M tali che $\|\alpha_n\| \leq c$ e $\|\Delta\alpha_n\| \leq c$ per ogni n e per una qualche costante $c > 0$. Allora $\{\alpha_n\}$ ammette una sottosuccessione di Cauchy in $\Omega^p(M)$.*

Definizione 23. *Definiamo lo spazio H^p come*

$$H^p = \{\omega \in \Omega^p(M) : \Delta\omega = 0\}.$$

Gli elementi di H^p sono detti p -forme armoniche.

Teorema 26 (Teorema di Hahn-Banach). *Se M è un sottospazio di uno spazio vettoriale normato X ed f è un funzionale lineare limitato su M , allora f può essere esteso ad un funzionale lineare limitato F su X , tale che $\|f\| = \|F\|$.*

Lemma 34. *Esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$\|\beta\| \leq c\|\Delta\beta\| \quad \text{per ogni } \beta \in (H^p)^\perp,$$

dove con $(H^p)^\perp$ indichiamo il sottospazio di $\Omega^p(M)$ costituito da tutti gli elementi ortogonali ad H^p .

Siamo ora in possesso di tutti gli strumenti necessari per dimostrare il risultato centrale di questo capitolo:

Teorema 27 (Teorema di decomposizione di Hodge). *Per ogni intero p , $0 \leq p \leq n$, H^p è uno spazio a dimensione finita. Inoltre per lo spazio $\Omega^p(M)$ delle p -forme lisce su M valgono le seguenti decomposizioni in somma diretta:*

$$\begin{aligned} \Omega^p(M) &= \Delta(\Omega^p) \oplus H^p \\ &= d\delta(\Omega^p) \oplus \delta d(\Omega^p) \oplus H^p \\ &= d(\Omega^{p-1}) \oplus \delta(\Omega^{p+1}) \oplus H^p. \end{aligned}$$

Di conseguenza, l'equazione $\Delta\omega = \alpha$ ammette soluzione $\omega \in \Omega^p(M)$ se e solo se la p -forma α è ortogonale allo spazio delle p -forme armoniche.

Dimostrazione. Se per assurdo gli H^p fossero spazi a dimensione infinita, sarebbe possibile trovare una successione ortonormale infinita di elementi di H^p . Ma per il lemma 33 questa dovrebbe ammettere una sottosuccessione di Cauchy, fatto impossibile per l'ortogonalità. Gli spazi H^p hanno quindi dimensione finita per ogni p .

Per la seconda parte del teorema, è sufficiente dimostrare l'uguaglianza $\Omega^p(M) = \Delta(\Omega^p) \oplus H^p$, mentre le successive uguaglianze derivano direttamente dalla definizione di Δ e dalle sue proprietà. Data $\{\omega_1, \dots, \omega_l\}$ base

ortonormale di H^p , una forma arbitraria $\alpha \in \Omega^p(M)$ può essere scritta in maniera unica come

$$\alpha = \beta + \sum_{i=1}^l \langle \alpha, \omega_i \rangle \omega_i$$

con β forma opportuna in $(H^p)^\perp$. Abbiamo quindi la decomposizione in somma diretta di spazi ortogonali

$$\Omega^p(M) = H^{p\perp} \oplus H^p.$$

Il teorema sarà quindi dimostrato con la dimostrazione dell'uguaglianza $(H^p)^\perp = \Delta(\Omega^p)$. Indichiamo con H l'operatore proiezione di $\Omega^p(M)$ su H^p , ovvero l'operatore definito in modo tale che $H(\alpha)$ sia la parte armonica di α . È immediato vedere che $\Delta(\Omega^p) \subset (H^p)^\perp$. Infatti per $\omega \in \Omega^p$ e $\alpha \in H^p$, abbiamo che

$$\langle \Delta\omega, \alpha \rangle = \langle \omega, \Delta\alpha \rangle = 0$$

per definizione di H^p .

Vogliamo ora dimostrare l'inclusione inversa $(H^p)^\perp \subset \Delta(\Omega^p)$.

Consideriamo α elemento fissato in $(H^p)^\perp$ e definiamo un operatore l su $\Delta(\Omega^p)$ ponendo

$$l(\Delta\phi) = \langle \alpha, \phi \rangle \quad \text{per ogni } \phi \in \Omega^p(M).$$

L'operatore l è ben definito; infatti, se $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2$, per la linearità di Δ si ha che $\phi_1 - \phi_2 \in H^p$, e quindi che $\langle \alpha, \phi_1 - \phi_2 \rangle = 0$. Inoltre l è un funzionale lineare limitato su $\Delta(\Omega^p)$. Infatti, fissando ora $\phi \in \Omega^p(M)$, e $\psi = \phi - H(\phi)$, e utilizzando la disuguaglianza 34, otteniamo:

$$\begin{aligned} |l(\Delta\phi)| &= |l(\Delta\psi)| = |\langle \alpha, \psi \rangle| \leq \|\alpha\| \|\psi\| \\ &\leq c \|\alpha\| \|\Delta\psi\| = c \|\alpha\| \|\Delta\phi\|. \end{aligned}$$

Per il teorema di Hahn-Banach l si estende ad un funzionale lineare limitato su $\Omega^p(M)$, ed è quindi una soluzione debole dell'equazione $\Delta\omega = \alpha$. Per il teorema 25 esiste $\omega \in \Omega^p(M)$ tale che $\Delta\omega = \alpha$. Abbiamo quindi che

$$(H^p)^\perp = \Delta(\Omega^p),$$

e il teorema di Hodge è dimostrato. \square

Definizione 24. *Definiamo l'operatore di Green $G: \Omega^p(M) \rightarrow (H^p)^\perp$ imponendo $G(\alpha)$ sia uguale all'unica soluzione dell'equazione $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$ in $(H^p)^\perp$. Si può dimostrare che G è un operatore lineare limitato e autoaggiunto, che porta successioni limitate in successioni che ammettono sottosuccessioni di Cauchy.*

Proposizione 14. *G commuta con d , δ e Δ . In generale infatti G commuta con qualunque operatore lineare che commuta con il Laplaciano Δ .*

Dimostrazione. Supponiamo che $T\Delta = \Delta T$ con $T: \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^q(M)$.

Sia $\pi_{(H^p)^\perp}$ la proiezione di $\Omega^p(M)$ su $(H^p)^\perp$. Per definizione di G possiamo scrivere

$$G = (\Delta | (H^p)^\perp)^{-1} \circ \pi_{(H^p)^\perp}.$$

Il fatto che $T\Delta = \Delta T$ implica che $T(H^p) \subset H^q$ e, dato che $(H^p)^\perp = \Delta(\Omega^p)$, questo implica anche che $T((H^p)^\perp) \subset (H^q)^\perp$. Segue l'uguaglianza

$$T \circ \pi_{(H^p)^\perp} = \pi_{(H^q)^\perp} \circ T,$$

e, su $(H^p)^\perp$,

$$T \circ (\Delta | (H^p)^\perp) = (\Delta | (H^q)^\perp) \circ T,$$

e quindi $(H^p)^\perp$,

$$T \circ (\Delta | (H^p)^\perp)^{-1} = (\Delta | (H^q)^\perp)^{-1} \circ T.$$

Dalle uguaglianze possiamo concludere che G commuta con T . □

Teorema 28. *Ogni spazio di coomologia di de Rham di una varietà Riemanniana M compatta e orientata contiene un unico rappresentante armonico.*

Dimostrazione. Sia α una p -forma arbitraria su M . Dal teorema di decomposizione di Hodge e dalla definizione dell'operatore di Green G , abbiamo

$$\alpha = d\delta G\alpha + \delta dG\alpha + H\alpha.$$

Dato che G commuta con d , possiamo scrivere

$$\alpha = d\delta G\alpha + \delta Gd\alpha + H\alpha.$$

Se α è una forma chiusa,

$$\alpha = d\delta G\alpha + H\alpha,$$

e quindi $H\alpha$ è una p -forma armonica contenuta nella stessa classe di coomologia di de Rham di α . Se due forme armoniche α_1 e α_2 differiscono per una forma esatta $d\beta$, allora abbiamo che

$$0 = d\beta + (\alpha_1 - \alpha_2).$$

Ma $d\beta$ e $(\alpha_1 - \alpha_2)$ sono ortogonali, dato che

$$\langle d\beta, \alpha_1 - \alpha_2 \rangle = \langle \beta, \delta\alpha_1 - \delta\alpha_2 \rangle = \langle \beta, 0 \rangle = 0.$$

Quindi $d\beta = 0$ e $\alpha_1 = \alpha_2$. Esiste quindi un'unica forma armonica in ciascuna classe di coomologia di de Rham. \square

Conseguenza diretta di questi risultati è il corollario seguente, già dimostrato nei capitoli precedenti (proposizione 9) mediante gli intorni tubolari, ma che può essere provato in maniera più semplice attraverso gli strumenti introdotti in questo capitolo.

Corollario 13. *I gruppi di coomologia di de Rham per varietà differenziabili compatte orientabili sono tutti a dimensione finita.*

Dimostrazione. Ogni varietà differenziabile può essere dotata di una metrica Riemanniana. Il corollario segue quindi direttamente dal teorema 28 e dal fatto che gli spazi delle forme armoniche H^p abbiano sempre dimensione finita. \square

Concludiamo con due ulteriori proprietà degli spazi di coomologia, che discendono direttamente da quelle precedenti:

Teorema 29 (Dualità di Poincaré). *Data una varietà Riemanniana M compatta, orientata di dimensione n , è possibile definire un isomorfismo*

$$H^{n-p}(M) \cong (H^p(M))^*$$

dove con $(H^p(M))^*$ si indica il duale dello spazio di coomologia $H^p(M)$.

Corollario 14. *Se M è una varietà differenziabile compatta, connessa e orientabile di dimensione n , allora*

$$H^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

Bibliografia

- [1] Ib Madsen and Jorgen Tornehave, **From Calculus to Cohomology**, Cambridge University press
- [2] Frank W. Warner, **Foundations of differentiable manifolds and Lie groups**, Scott Foresman and company
- [3] Walter Rudin, **Real and Complex Analysis**, McGraw-Hill