Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Insieme di Cantor e curve di Peano

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea di
Lorena Eleonora Lusso

Anno Accademico 2008/2009

Indice

Introduzione

Nel 1890 il matematico Giuseppe Peano (1858−1932) pubblicò un articolo intitolato "Sur une courbe qui remplit toute une aire plane" sui Mathematische Annalen nel quale dimostrava l'esistenza di una 'strana' curva (da allora detta di Peano) che 'riempie completamente un quadrato', ovvero un'applicazione $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ continua e suriettiva.

Il risultato di Peano, generalizzabile ad una funzione continua e suriettiva $f : [0,1] \to [0,1]^n$, aprì la strada alla ricerca del concetto di dimensione topologica e allo studio degli spazi di Peano.

In questa tesi viene illustrata una dimostrazione dell'esistenza delle curve di Peano. La dimostrazione esposta utilizza la definizione dell'insieme di Cantor, famoso sottoinsieme dei numeri reali introdotto dal matematico tedesco Georg Cantor.

L'esposizione è suddivisa in due capitoli organizzati come segue.
Nel primo capitolo sono raccolte le definizioni e gli elementi di base della topologia generale, come ad esempio la definizione di topologia e topologia prodotto, di continuità delle applicazioni tra spazi topologici e del concetto di compattezza per spazi topologici, e alcuni risultati non banali quali i teoremi di Tychonoff e di Tietze.

Il secondo capitolo è dedicato alla dimostrazione del teorema di Peano attraverso gli strumenti sviluppati nel primo capitolo.

Capitolo 1

Richiami

1.1 Spazi topologici e basi

Definizione 1 (Topologia su un insieme X). *Sia X un insieme non vuoto. Una classe non vuota T di sottoinsiemi di X è una topologia su X se e solo se soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $\emptyset, X \subset T$;
2. *L'unione di un numero qualsiasi di insiemi di T appartiene a T;*
3. *L'intersezione di due insiemi qualsiasi (e quindi di un qualunque numero finito di insiemi) di T appartiene a T.*

Gli elementi di T si chiamano *insiemi aperti* o *aperti della topologia T.*

Le proprietà precedenti possono essere espresse in modo equivalente dicendo che: l'insieme vuoto e X sono aperti, l'unione di una qualsiasi famiglia di aperti è un aperto, l'intersezione di due aperti (e quindi di un numero finito di aperti) è un aperto.

Uno *spazio topologico* è un insieme X in cui è stata assegnata una topologia T e viene denotato con (X,T) o semplicemente con X sottointendendo la topologia.

Gli elementi di uno spazio topologico X vengono detti *punti* e l'insieme X *supporto* dello spazio topologico (X,T).

Esiste una naturale relazione d'ordine tra le topologie su un insieme X.

Definizione 2. *Date due topologie $\mathcal{T}$ e $\mathcal{R}$ su X, diremo che $\mathcal{T}$ è più fine di $\mathcal{R}$ (e di conseguenza che $\mathcal{R}$ è meno fine di $\mathcal{T}$) se $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$, cioè se ogni aperto della topologia $\mathcal{R}$ è anche aperto di $\mathcal{T}$.*

Mentre l'unione di topologie non è detto che costituisca una topologia, possiamo, a partire da un insieme qualsiasi di topologie, costruirne di nuove attraverso l'intersezione delle stesse. In particolare vale il seguente risultato:

Teorema 1. *Sia $\{\mathcal{T}_i : i \in I\}$ una collezione qualsiasi di topologie su un insieme X. Allora l'intersezione $\bigcap_i \mathcal{T}_i$ è anch'essa una topologia.* [1]

Definizione 3 (Base di una topologia)**.** *Sia T una topologia sull'insieme non vuoto X. Una sottofamiglia di insiemi aperti $B \subset T$ si dice* ***base*** *di T se ogni aperto $U \in T$ può essere ottenuto come unione di elementi di $\mathcal{B}$, cioè per ogni $U \in T$ esiste $B_j \in \mathcal{B}, j \in J$ tale che $U = \bigcup_{j \in J} B_j$. Equivalentemente $\mathcal{B} \subset T$ è una base di T se per ogni $U \in T$ e per ogni punto $x \in U$ esiste $B_x \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_x \subset U$.*

Le due definizioni sono equivalenti. Infatti se x è un punto di un aperto $U \in T$, dato che per ipotesi $U = \bigcup_{j \in J} B_j$ allora x deve necessariamente appartenere a $B_{j_0} \subset U$ per qualche $j_0 \in J$; viceversa, dato $U \in T$, se per ogni $x \in U$ esiste $B_x \in B, x \in B_x$, allora U può esprimersi come unione di elementi di B, $U = \bigcup_{x \in U} B_x$.

La proposizione seguente fornisce condizioni necessarie e sufficienti perché una classe di insiemi sia una base per una topologia T.

Proposizione 1. *Sia $\mathcal{B}$ una classe di sottoinsiemi di un insieme non vuoto X. Allora $\mathcal{B}$ è una base per qualche topologia T su X se e solo se possiede le due proprietà seguenti:*

[1] Per la dimostrazione si veda [2], pag 35.

- *$X = \bigcup\{B \mid B \in \mathcal{B}\}$;*
- *Per ogni coppia di insiemi $U, V \in \mathcal{B}$, l'insieme $U \cap V$ è unione di elementi di B.*

Allora esiste un'unica topologia T_B su X che ha $\mathcal{B}$ come base. [2]

Definizione 4. *Una **prebase** di uno spazio topologico (X,T) è una classe $\mathcal{P}$ di sottoinsiemi aperti di X tale che la famiglia delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{P}$ costituisce una base per la topologia T.*

Notiamo che ogni base di uno spazio topologico è anche una prebase dello stesso.

1.2 Applicazioni continue

Definizione 5. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra spazi topologici. Diremo che f è continua nel punto $x \in X$ se per ogni intorno U di $f(x)$ esiste un intorno V di x tale che $f(V) \subset U$. Un'applicazione tra spazi topologici è continua se e solo se è continua in ogni punto di X.*

O, equivalentemente:

Definizione 6. *Un'applicazione $f : X \to Y$ tra due spazi topologici X e Y si dice continua se, per ogni aperto $A \subset Y$ l'insieme*

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

è aperto in X.

Dalle definizioni segue che, data $\mathcal{B}$ base della topologia di Y, un'applicazione $f : X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $B \in \mathcal{B}$ l'insieme $f^{-1}(B)$ è aperto in X (ogni aperto in Y è unione di elementi di $\mathcal{B}$).

Possiamo quindi studiare la continuità di un'applicazione semplicemente verificandola sugli elementi di una base della topologia.

[2] Per la dimostrazione si veda [1], pag 39.

Teorema 2. *La composizione di applicazioni continue è continua.*

Un'importante classe di applicazioni continue è quella degli **omeomorfismi**.

Definizione 7. *Un'applicazione continua $f : X \to Y$ si dice un* ***omeomorfismo****, o equivalenza topologica, se esiste un'applicazione continua $g : Y \to X$ tale che le composizioni gf e fg sono le identità in X e Y rispettivamente. Due spazi si dicono* ***omemorfi*** *se esiste un omeomorfismo tra di loro.*

L'equivalenza topologica è una relazione di equivalenza tra spazi topologici. Una proprietà che una volta posseduta da uno spazio X è posseduta anche da ogni spazio ad esso omeomorfo è detta *proprietà* topologica. Da ciò consegue che ogni proprietà che si definisce esclusivamente in termini di aperti o di funzioni continue è una proprietà topologica.

1.3 Prodotti topologici

Siano P, Q spazi topologici, denotiamo con $P \times Q$ il loro prodotto cartesiano e con $p : P \times Q \to P, \quad q : P \times Q \to Q$ le proiezioni sui fattori, ovvero le applicazioni così definite:

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{p}: & P \times Q & \longrightarrow & \mathrm{P} \\ & (x, y) & \longrightarrow & \mathrm{x} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} \mathbf{q}: & P \times Q & \longrightarrow & \mathrm{Q} \\ & (x, y) & \longrightarrow & \mathrm{y} \end{array}$$

La collezione $\mathcal{T}$ delle topologie su $P \times Q$ che rendono continue p e q, cioè tali per cui $p^{-1}(U)$ e $q^{-1}(U)$ sono aperti della topologia su $P \times Q$, è non vuota poiché contiene la topologia discreta, e l'intersezione di tutte le topologie in $\mathcal{T}$ è la meno fine tra quelle che rendono p e q continue.

Definizione 8. *La* ***topologia prodotto*** *su $P \times Q$ è la topologia meno fine tra quelle che rendono continue entrambe le proiezioni. I sottoinsiemi della forma $U \times V$, al variare di U e V tra gli aperti di P e Q, formano una base della topologia prodotto che chiameremo* ***base canonica****.*

La costruzione precedente si estende al prodotto di un qualsiasi insieme finito $P_1, \ldots, P_n$ di spazi topologici. La topologia prodotto su $P_1 \times \cdots \times P_n$ è la meno fine tra tutte le topologie che rendono le proiezioni continue. La base canonica della topologia prodotto è data dai sottoinsiemi della forma $U_1 \times \cdots \times U_n$ al variare di U_i tra gli aperti in P_i.

Per parlare di prodotti infiniti è necessaria una definizione di prodotto cartesiano che possa essere estesa ad un numero infinito di insiemi:

Definizione 9 (Prodotto cartesiano di insiemi). *Data una famiglia qualsiasi $\{X_i \mid i \in I\}$ di insiemi, si definisce il prodotto cartesiano $X = \prod_{i \in I} X_i$ come l'insieme di tutte le applicazioni $x : I \to \bigcup_i X_i$ tali che $x_i \in X_i$ per ogni indice $i \in I$. In altre parole, ogni elemento del prodotto $\prod_{i \in I} X_i$ è una collezione $\{x_i\}$ tale che $x_i \in X_i$ per ogni i.*

Definiamo le proiezioni $p_i : X \to X_i$ come $p_i(x) = x_i$.

Se ciascun X_i del prodotto cartesiano è uno spazio topologico, definiamo la topologia prodotto in X come la meno fine tra quelle che rendono tutte le proiezioni continue. Questo equivale a dire che i sottoinsiemi $p_i^{-1}(U)$, al variare di $i \in I$ e U negli aperti di X_i, formano una prebase che chiameremo prebase canonica.

1.4 Spazi metrici e spazi metrizzabili

Definizione 10. *Una* ***distanza*** *o* ***metrica*** *su un insieme X è un'applicazione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. *$d(x, y) \geq 0$ per ogni $x, y \in X$ e vale $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$.*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$ per ogni $x, y \in X$.*
3. *$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ per ogni $x, y, z \in X$.*

Definizione 11 (Spazio metrico). *Uno spazio metrico è una coppia (X,d), dove X è un insieme e d è una distanza su X.*

Definizione 12 (Palla aperta). *Sia (X,d) uno spazio metrico. Il sottoinsieme*

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \text{ è minore di } r\}$$

viene detto ***palla aperta*** *di centro x e raggio r (rispetto alla distanza d).*

Definizione 13 (Topologia indotta da una distanza). *Sia (X,d) uno spazio metrico. Nella topologia su X indotta dalla distanza d, un sottoinsieme $A \subset X$ è aperto se per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset A$.*

Dato che ogni distanza induce in modo naturale una struttura topologica, ogni spazio metrico è uno spazio topologico. La topologia indotta dalla distanza d viene indicata con T_d.

Definizione 14 (Spazio metrizzabile). *Uno spazio topologico (X,T) è detto* ***metrizzabile*** *se esiste su X una metrica d che induce la topologia T, ovvero tale che $T = T_d$.*

1.5 Spazi primo-numerabili

Definizione 15 (Intorno di un punto x). *Sia X uno spazio topologico e $x \in X$. Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice intorno di x se x è un punto interno di U, cioè se esiste un aperto V tale che $x \in V$ e $V \subset U$.*

Denotiamo con $\mathcal{I}(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di x.

Definizione 16 (Sistema fondamentale di intorni di x). *Sia x un punto di uno spazio topologico X. Una sottofamiglia $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}(x)$ si dice una* ***base locale*** *oppure un* ***sistema fondamentale di intorni*** *di x, se per ogni $U \in \mathcal{I}(x)$ esiste $A \in \mathcal{J}$ tale che $A \subset U$.*

Definizione 17. *Uno spazio topologico (X,T) è detto spazio N_1 o primo numerabile se soddisfa la seguente condizione, nota come* ***primo assioma di numerabilità****:*

N_1 : *per ogni $x \in X$ esiste una base locale numerabile per la topologia T.*

Lemma 1. *Ogni spazio metrico soddisfa il primo assioma di numerabilità.*

1.6 Proprietà di separazione

Spazi T1 Uno spazio topologico X è detto uno spazio T_1 se e solo se soddisfa l'assioma seguente:

T_1 : Dati due punti distinti qualsiasi $a, b \in X$, ognuno di essi appartiene ad un insieme aperto che non contiene l'altro, ovvero esistono due insiemi aperti U e V tali che:

$$a \in U, \quad b \notin U \quad e \quad b \in V, \quad a \notin V$$

Notiamo che non è detto che gli insiemi U e V siano disgiunti.

Il teorema seguente dà una caratterizzazione molto semplice degli spazi T_1.

Teorema 3. *Uno spazio topologico X è uno spazio T_1 se e solo se ogni sottoinsieme unitario $\{x\}$ di X è chiuso.*

Spazi di Hausdorff Uno spazio X è detto *spazio di Hausdorff* o spazio T_2 se e solo se soddisfa l'assioma seguente:

T_2 : Data una coppia di punti distinti $a, b \in X$ ognuno di essi appartiene a un insieme aperto che non contiene l'altro e i due insiemi aperti sono disgiunti. In altre parole, esistono due insiemi aperti U e V tali che

$$a \in U, \quad b \in V \quad e \quad U \cap V = \emptyset$$

Uno spazio di Hausdorff è sempre uno spazio T_1.

Spazi regolari Uno spazio topologico è detto regolare se e solo se soddisfa la seguente condizione:

R: Per ogni sottoinsieme chiuso C in X e ogni $x \in X \setminus C$ esistono due aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$, $C \subset V$.

Uno spazio regolare X che soddisfi anche l'assioma di separazione T_1 è detto *spazio* T_3.

Spazi normali Uno spazio topologico è detto normale se e solo se soddisfa la seguente condizione:

N: Per ogni coppia di sottoinsiemi chiusi e disgiunti C_1 e C_2 in X esistono due aperti disgiunti U e V tali che $C_1 \subset U, C_2 \subset V$.

Uno spazio normale che soddisfi anche l'assioma di separazione T_1, cioè uno spazio T_1 normale, è detto uno *spazio* T_4.

Valgono le seguenti implicazioni:

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1.$$

Il comportamento generale delle proprietà di separazione rispetto ai sottospazi è il seguente:

Proposizione 2. *Ogni sottospazio di uno spazio T_i, $i = 1,2,3$ è ancora T_i. Un sottospazio chiuso di uno spazio T_4 è ancora T_4.*

In particolare vale il seguente risultato:

Proposizione 3. *Sottospazi e prodotti di spazi di Hausdorff sono di Hausdorff.*

Dimostrazione. Siano X uno spazio di Hausdorff, $Y \subset X$ un sottospazio e $x, y \in Y$ punti distinti. Esistono allora due aperti disgiunti $U, V \subset X$ tali che $x \in U$ e $y \in V$. I sottoinsiemi $U \cap Y$ e $V \cap Y$ sono allora aperti disgiunti di Y contenenti rispettivamente x e y.

Siano X,Y spazi di Hausdorff e $(x, y), (z, w) \in X \times Y$ punti distinti; supponiamo per fissare le idee che $x \neq z$, esistono allora due aperti disgiunti

$U, V \subset X$ tali che $x \in U$ e $z \in V$. Ne segue che $(x, y) \in U \times Y$, $(z, w) \in V \times Y$ e $U \times Y \cap V \times Y = (U \cap V) \times Y = \emptyset$. Anche il prodotto risulta quindi essere uno spazio di Hausdorff. $\square$

1.7 Successioni

Definizione 18. *Sia X uno spazio topologico. Denotiamo con* $\mathbb{N}^+$ *l'insieme dei numeri naturali positivi. Un'applicazione* $f : \mathbb{N}^+ \to X$ *si chiama successione di elementi di X. Per ogni* $n \in \mathbb{N}^+$ *l'immagine* $x_n = f(n)$ *si chiama n-esimo termine della successione f.*

La successione x_n si dice *convergente* al punto $x \in X$ (e x si dice limite della successione) se per ogni aperto U contenente x esiste $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tale che $x_n \in U$ per ogni $n \geq n_0$ e si scriverà

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x.$$

Definizione 19. *Una* ***sottosuccessione*** *di una successione* $f : \mathbb{N}^+ \to X$ *è la composizione di f con un'applicazione* $k : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ *strettamente crescente.*

Equivalentemente una sottosuccessione di x_n è una successione x_{n_k}, $\quad k = 1, 2 \ldots$ ottenuta in corrispondenza di una successione crescente di interi positivi $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$.

Proposizione 4 (sottosuccessioni convergenti)**.** *Sia X uno spazio topologico* N_1 *e* T_1*. Sia* x_n *una successione in X e sia x punto di accumulazione per la successione, ovvero* $x \in D(\{x_n\})$*, allora esiste una sottosuccessione* x_{n_k} *di* x_n *convergente a x.*[3]

1.8 Continuità sequenziale e per basi locali

Definizione 20 (Continuità sequenziale)**.** *Un'applicazione* $f : X \to Y$ *è detta sequenzialmente continua nel punto* $x \in X$ *se e solo se, per ogni successione* x_n *a valori in X tale che* $lim_{n \to \infty} x_n = x$*, si ha che* $lim_{n \to \infty} f(x_n) =$

[3] Per la dimostrazione si veda [2], pag 70 e ss.

$f(x)$. Un'applicazione $f : X \to Y$ è detta sequenzialmente continua se è tale in ogni punto $x \in X$.

La continuità e la continuità sequenziale di una funzione f sono legate nel modo seguente:

Proposizione 5. *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici. Allora f è sequenzialmente continua.*

Dimostrazione. Sia x_n una successione in X convergente ad un punto $x \in X$ e sia V un aperto contenente $f(x)$. Allora, per la continuità della funzione f, esiste un aperto U contenente x tale che $f(U) \subset V$. Dato che la successione x_n converge ad x, esiste $n_0 \in \mathbb{N}^+$ tale che $x_n \in U$ per $n \geq n_0$. Questo implica che $f(x_n) \in f(U) \subset V$ per ogni $n \geq n_0$ e quindi la successione $f(x_n)$ converge a $f(x)$.

□

Prima di esaminare il particolare caso in cui vale l'inversa della proposizione precedente, dimostriamo il seguente lemma:

Lemma 2. *Sia X uno spazio topologico N_1 e $x \in X$.*

- *Esiste una base locale nidificata di x, cioè una base locale numerabile $\mathcal{B}_x = \{B_1, \ldots, B_n, \ldots\}$ tale che*

$$B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots ;$$

- *se x_n è una successione in X tale che $x_n \in \mathcal{B}_n$ per ogni n allora x_n converge a x.*

Dimostrazione. Per dimostrare la prima parte consideriamo $U_1, U_2, \ldots U_n, \ldots$ è base locale di x (che esiste per qualunque $x \in X$ in quanto X è primo numerabile). Allora posso costruire una base nidificata nel modo seguente:

$$B_1 = U_1, \quad B_2 = U_1 \cap U_2, \quad B = U_1 \cap U_2 \cdots \cap U_n$$

Che sia nidificata è ovvio. Per dimostrare che è una base considero un qualunque aperto U contenente x. Allora esiste n_0 tale che $x \in U_{n_0} \subset U$ e quindi $x \in B_{n_0} \subset U_{n_0} \subset U$.

Per dimostrare la seconda parte sia U un aperto contenente x. Allora esiste n_0 e $B_{n_0} \in \mathcal{B}_x$ tale che $x_{n_0} \in B_{n_0} \subset U$ (in quanto $\mathcal{B}_x$ è una base locale) e quindi $x_n \in B_n \subset B_{n_0} \subset U$ per ogni $n \geq n_0$ (in quanto $\mathcal{B}_x$ è nidificata). Questo mostra che $lim_{n\to\infty} x_n = x$.

□

Come anticipato, in generale non vale l'inversa della proposizione 5, ma vale il seguente risultato:

Proposizione 6. *Sia X uno spazio topologico N_1. Una funzione $f : X \to Y$ sequenzialmente continua è continua.*

Dimostrazione. Sia $x \in X$. Dimostriamo che se f non è continua in x allora esiste una successione x_n in X convergente a x tale che la sua immagine $f(x_n)$ non è convergente a $f(x)$. Se f non è continua allora esiste un aperto V di Y contenente $f(x)$ per il quale non può esistere alcun aperto U contenente x tale che $f(U) \subset V$.

In particolare se $\mathcal{B}_x = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una base locale nidificata di x allora, per ogni n, esiste $x_n \in B_n$ tale che $x_n \notin f^{-1}(V)$.

Per il Lemma 2 la condizione $x_n \in B_n, \forall n \in \mathbb{N}$, implica che x_n converge ad x. D'altra parte $x_n \notin f^{-1}(V), \forall n \in \mathbb{N}$, implica che $f(x_n)$ non converge ad $f(x)$ (infatti V è un aperto di Y contenente $f(x)$ che non contiene nessun punto di $f(x_n)$).

□

Dato che ogni spazio metrico è N_1 otteniamo il seguente risultato:

Corollario 1. *Sia X uno spazio metrico. Una funzione $f : X \to Y$ è continua se e solo se è sequenzialmente continua.*

Proposizione 7 (Continuità per basi locali numerabili)**.** *Siano (X,d) e (Y,δ) spazi metrici, e sia $B_n(x)$ una base locale numerabile nidificata per il punto*

$x \in (X, d)$. L'applicazione $f : X \to Y$ è continua nel punto x se e solo se per ogni successione x_n tale che $x_n \in B_n(x)$ si ha che $\delta(f(x), f(x_n)) \to 0$ per $n \to +\infty$.

Dimostrazione. Per il Corollario 1 la dimostrazione della proposizione equivale alla dimostrazione dell'equivalenza tra le due condizioni $x_n \in B_n(x)$ e $lim_{n\to\infty} x_n = x$. Ma queste sono equivalenti per il Lemma 2.

□

1.9 Spazi compatti

Definizione 21 (Ricoprimento)**.** *Un ricoprimento di un insieme X è una famiglia $\mathfrak{U}$ di sottoinsiemi di X tale che $X = \bigcup \{U \mid U \in \mathfrak{U}\}$. Diremo che il ricoprimento è finito se $\mathfrak{U}$ è una famiglia finita; numerabile se $\mathfrak{U}$ è una famiglia numerabile.*

Un *sottoricoprimento* di un ricoprimento $\mathfrak{U}$ di X è una sottofamiglia di $\mathfrak{U}$ che sia ancora un ricoprimento di X.

Molte proprietà importanti degli spazi topologici riguardano il comportamento rispetto ai ricoprimenti.

Definizione 22. *Un ricoprimento $\mathfrak{U}$ di uno spazio topologico X si dice:*

1. ***aperto** se ogni $U \in \mathfrak{U}$ è aperto.*

2. ***chiuso** se ogni $U \in \mathfrak{U}$ è chiuso.*

Definizione 23 (Spazio compatto)**.** *Uno spazio topologico X si dice compatto se ogni ricoprimento aperto di X possiede un sottoricoprimento finito, ovvero se, dato un qualsiasi ricoprimento $\mathfrak{U}$ di X, esiste un numero finito di aperti $U_1, \dots, U_k \in \mathfrak{U}$ tali che $X = U_1 \cup \dots \cup U_k$. Un sottospazio di uno spazio topologico si dice compatto se è compatto rispetto alla topologia indotta.*

Teorema 4 (Teorema principale sulla compattezza)**.** *Siano X e Y spazi topologici e sia $f : X \to Y$ una funzione continua. Se X è compatto allora f(X) è compatto. In particolare la compattezza è una proprietà topologica.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$, cioè $\mathcal{U}$ è costituito da aperti di Y la cui unione contiene $f(X)$. Dato che la funzione f è continua ogni $f^{-1}(U)$ è un insieme aperto di X. Siccome $\mathcal{U}$ ricopre $f(X)$, ogni punto di x sta in qualche $f^{-1}(U)$, e quindi la famiglia $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ è un ricoprimento aperto di X. Siccome X è compatto, un numero finito di questi aperti, $f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_k)$ ricopre X, $X \subset f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k)$.
Allora $U_1 \dots U_k$ è un ricoprimento aperto di $f(X)$ in quanto

$$f(X) \subset f(f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f^{-1}(U_k)) = f(f^{-1}(U_1) \cup \dots \cup f(f^{-1}(U_k)) \subset U_1 \cup \dots \cup U_k.$$

□

Proposizione 8 (Prodotto di spazi compatti)**.** *Il prodotto finito $X_1 \times \dots \times X_k$ di spazi compatti è compatto se e solo se ciascun $X_j, j = 1, \dots, k$ è compatto.*

La proposizione può essere generalizzata al caso di prodotti infiniti:

Teorema 5 (di Tychonoff). *Il prodotto di una famiglia qualsiasi di spazi topologici compatti è compatto.*

Esistono diverse dimostrazione del teorema di Tychonoff, ciascuna delle quali utilizza l'assioma di scelta o enunciati ad esso equivalenti: questo perché *il teorema di Tychonoff è equivalente all'assioma della scelta.*

1.10 Il lemma dell'applicazione chiusa

Definizione 24. *Siano X e Y due spazi topologici. Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice:*

1. ***aperta** se $f(A)$ è aperto in Y per ogni aperto A di X.*
2. ***chiusa** se $f(C)$ è chiuso in Y per ogni chiuso C di X.*

Definizione 25 (applicazione indotta)**.** *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici e sia T un sottospazio di Y tale che $f(X) \subset T$. Ponendo $g(x) = f(x), \quad x \in X$, resta definita un'applicazione $g : X \to T$ che è continua. Infatti un aperto di T è della forma $T \cap V$, V aperto in*

Y, e $g^{-1}(T \cap V) = f^{-1}(V)$ *che è aperto in quanto* f *è per ipotesi continua. L'applicazione* g *si chiama applicazione indotta da* f.

Definizione 26 (embedding topologico)**.** *Un'applicazione* $f : X \to Y$ *si chiama embedding topologico se l'applicazione* $X \to f(X)$ *indotta da* f *è un omeomorfismo (dove f(X) è dotato della topologia indotta da quella di Y). In particolare un omeomorfismo* $f : X \to Y$ *è un embedding topologico.*

Lemma 3 (**Il lemma dell'applicazione chiusa**)**.** *Supponiamo che la funzione* $f : X \to Y$ *sia continua, che* X *sia uno spazio topologico compatto* X *e che* Y *sia uno spazio di Hausdorff. Valgono i seguenti fatti:*[4]

1. *f è un'applicazione chiusa;*

2. *se f è una bigezione allora è un omeomorfismo;*

3. *se f è iniettiva allora è un embedding topologico.*

1.11 Spazi numerabilmente e sequenzialmente compatti

Definizione 27. *Uno spazio topologico si dice* ***sequenzialmente compatto*** *se ogni successione di punti in* X *contiene una sottosuccessione convergente ad un punto di X.*

Definizione 28. *Uno spazio topologico si dice* ***numerabilmente compatto*** *se ogni suo sottoinsieme infinito ha un punto di accumulazione in X.*

Teorema 6 (teorema di Bolzano-Weierstrass per spazi topologici)**.** *Uno spazio topologico compatto è numerabilmente compatto.*

Dimostrazione. Sia X uno spazio compatto e $S \subset X$ un suo sottoinsieme infinito. Supponiamo per assurdo che $D(S) = \emptyset$. Allora per ogni punto di $x \in X$ esiste un aperto U, $x \in U$, tale che $U \cap S$ o è l'insieme vuoto (cioè x è esterno all'insieme S), oppure coincide con $\{x\}$ (il punto appartiene ad S).

[4] Per la dimostrazione si veda [2], pag 136.

L'insieme di questi aperti è un ricoprimento aperto di X. Per la compattezza di X esiste quindi un numero finito di aperti che ricoprono X e che contengono al più un punto di S. Ma questo implica che S è finito, in contraddizione con l'ipotesi. □

Teorema 7. *Sia X uno spazio topologico compatto, N_1 e T_1. Allora X è sequenzialmente compatto.*

Dimostrazione. Sia x_n una successione di punti in X. Se la successione è costituita da un numero finito di punti allora contiene una sottosuccessione (costante) convergente. Supponiamo quindi che x_n sia costituita da un numero infinito di punti. Dato che X è compatto è, per il Teorema 6, numerabilmente compatto. L'insieme $\{x_n\}$ ha un punto di accumulazione, cioè esiste $x \in X$ tale che $x \in D(\{x_n\})$. Essendo X sia N_1 che T_1 segue, per la Proposizione 4 che x_n contiene una sottosuccessione x_{n_k} convergente al punto x. □

Concludiamo il capitolo con un importante risultato noto sotto il nome di *lemma di estensione di Tietze*:

Teorema 8 (lemma di estensione di Tietze). *Sia C un sottoinsieme chiuso di uno spazio normale X e sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione reale continua. Allora f possiede un'estensione continua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$.*

Capitolo 2

Curve di Peano e insieme di Cantor

2.1 Insieme di Cantor

Indichiamo con X lo spazio di tutte le successioni $a : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$. Possiamo pensare X come il prodotto di $\mathbb{N}$ copie dello spazio discreto $\{0, 1\}$ e considerare in X la topologia prodotto. Lo spazio X così definito gode, per costruzione, di alcune importanti proprietà che derivano delle proprietà dello spazio $\{0, 1\}$

Notiamo che ogni spazio topologico discreto è compatto se e solo se è finito. Infatti in uno spazio discreto X la famiglia delle singolette $\{x \mid x \in X\}$ è un ricoprimento aperto che possiede un sottoricoprimento finito se e solo se X è finito. Sappiamo quindi che lo spazio $\{0, 1\}$ è uno spazio topologico compatto. Oltre a godere di questa proprietà possiamo notare che $\{0, 1\}$ è anche uno spazio di Hausdorff.

A partire da questi risultati, attraverso l'utilizzo del Teorema 5 e della Proposizione 3, possiamo concludere che anche X, per costruzione, è uno spazio topologico compatto e di Hausdorff.

Data una qualunque successione $a \in X$, gli insiemi:

$$U(N, a) = \{b \in X \mid b_n = a_n \text{ per ogni n } \leq N\}, N \in \mathbb{N},$$

formano un sistema fondamentale di intorni di a.

In particolare, lo spazio X soddisfa il primo assioma di numerabilità.

Essendo quindi X uno spazio topologico compatto, N_1 e T_1, per il Teorema 7, X è anche compatto per successioni.

Lemma 4. *Nelle notazioni precedenti:*

1. *Per ogni intero positivo n e per ogni numero reale $r > 1$ l'applicazione*

$$f : X \to \mathbb{R}^n, \qquad f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r^k}(a_{kn+1}, a_{kn+2}, ..., a_{kn+n})$$

è continua.

2. *Per ogni intero positivo n l'applicazione*

$$p : X \to [0,1]^n\,, \qquad p(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}(a_{kn+1}, a_{kn+2}, a_{kn+n})$$

è continua e suriettiva.

3. *L'applicazione*

$$g : X \to [0,1]\,, \qquad g(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k} a_k$$

è continua e iniettiva.

Dimostrazione. La continuità delle funzioni f p e g è da dimostrarsi attraverso l'utilizzo della Proposizione 7. Consideriamo su R^n la distanza $d(x,y) = \sum_i \mid x_i - y_i \mid$.

Se $b \in U(nN, a)$, allora valgono le seguenti disuguaglianze:

$$d(f(b), f(a)) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{n}{r^k} = \frac{nr}{r^N(r-1)}.$$

$$d(p(b), p(a)) \leq \sum_{k=N}^{\infty} \frac{n}{2^{k+1}} = \frac{n}{2^N}.$$

e

$$d(g(b), g(a)) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^N}$$

La suriettività di p segue dal fatto che ogni numero reale $x \in [0,1]$ può essere scritto (in maniera non unica) come $x = \sum_{k>0} a_k/2^k$ per una opportuna successione a_k a valori in $\{0,1\}$.

L'iniettività di g si dimostra come segue.
Siano $a, b \in X$ due successioni distinte e sia N il massimo intero tale che $a_i = b_i$, per ogni $i < N$.
Supponiamo per fissare le idee che $a_N = 0$ e $b_N = 1$. Allora vale:

$$g(b) - g(a) = \frac{2}{3^N} + \sum_{k>N} \frac{2}{3^k}(b_k - a_k) \geq \frac{2}{3^N} - \sum_{k>N} \frac{2}{3^k} = \frac{1}{3^N} > 0$$

□

Definizione 29. *L'immagine $C = g(X) \subset [0,1]$ dell'applicazione g definita nel Lemma 4 viene detta **insieme di Cantor**.*

L'insieme di Cantor risulta quindi essere, per costruzione, l'insieme dei numeri compresi tra 0 e 1 nel cui sviluppo decimale in base 3 non compare mai la cifra 1.

Poiché X è compatto e $[0,1]$ è di Hausdorff, segue dal Lemma 3 che C è un sottoinsieme chiuso dell'intervallo $[0,1]$.

2.2 Curve di Peano

Teorema 9 (Curve di Peano). *Per ogni intero $n > 0$ esiste un'applicazione continua e suriettiva $[0,1] \to [0,1]^n$.*

Dimostrazione. Siano p e g le applicazioni introdotte nel Lemma 4.

Siccome X è, come abbiamo visto, uno spazio topologico compatto, e l'insieme $C \subset [0,1]$ è uno spazio Hausdorff, l'applicazione bigettiva $g : X \to C$ è, per il secondo risultato del Lemma 3, un omeomorfismo.

L'applicazione

$$pg^{-1} : C \to [0,1]^n = \overbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1]}^{n \text{ volte}}$$

è un'applicazione continua e suriettiva, in quanto composizione di applicazioni continue e suriettive.

Dato che $[0,1] \subset \mathbb{R}$ ciascuna delle n componenti della funzione pg^{-1} verifica le condizioni del Lemma 8.

Il lemma quindi, applicato alle componenti, ci assicura che la composizione pg^{-1} si estende ad una applicazione continua e suriettiva $[0,1] \to [0,1]^n$.

$\square$

Bibliografia

[1] Marco Manetti. **Topologia**, Springer 2008

[2] Andrea Loi. **Appunti di topologia generale**, 2008/2009

[3] Seymour Lipschutz. **Topologia**, Etas 1979