Indice di avvolgimento e applicazioni

Giovanni Placini

Relatore: Prof. Andrea Loi

Introduzione

Lo scopo della presente tesi è la dimostrazione del Teorema del panino in dimensione 3, noto anche come teorema di Stone-Tukey dai nomi di Marshall Stone e John Wilder Tukey che lo dimostrarono nel 1942. Il teorema afferma che dati n oggetti in uno spazio di dimensione n esiste un iperpiano che li divide tutti a metà. Per la dimostrazione si utilizzerà il concetto di indice di avvolgimento e di grado di una funzione. Il teorema sarà dunque dato come conseguenza del Teorema di Borsuk-Ulam. La tesi si sviluppa in 3 capitoli. Nel primo sono richiamati alcuni concetti di topologia di base e sono introdotti argomenti che verranno sviluppati successivamente. Nel secondo capitolo verrà data la definizione di indice di avvolgimento e quella di grado di una funzione e ne saranno inoltre dimostrate alcune proprietà. Nel terzo capitolo verranno esposte alcune applicazioni di questi concetti. Utilizzando queste saranno dimostrati il Teorema fondamentale dell'algebra, il Teorema di Borsuk-Ulam ed il Teorema del panino. Saranno inoltre riportate ulteriori conseguenze di quanto esaminato precedentemente.

Indice

1 Richiami e premesse **3**

2 Indice di avvolgimento **10**

2.1 Definizione 10

2.2 Omotopie e riparametrizzazioni 13

2.3 Variazione del punto 21

2.4 Gradi e gradi locali 23

3 Applicazioni **33**

3.1 Teorema fondamentale dell'algebra 33

3.2 Punti fissi e retrazioni 35

3.3 Antipodi 41

3.4 Teorema del panino 47

Bibliografia **53**

Capitolo 1

Richiami e premesse

Questo capitolo ha lo scopo di richiamare alcuni concetti di topologia di base che saranno utilizzati in seguito ed introdurre altri argomenti che saranno meglio analizzati nei capitoli successivi. Presenteremo prima dei risultati noti di topologia ed in seguito ci soffermeremo sulla ricerca di una funzione angolo derivabile infinite volte.
Nel primo capitolo faremo uso frequente del Lemma di Lebesgue. Prima di enunciarlo, dimostriamo la seguente

Proposizione 1.1 *Sia K uno spazio topologico compatto e $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti di K. Allora esiste un punto P, detto punto limite, tale che per ogni intorno U_P di P vale $U_P \cap A_n \neq \emptyset$ per un numero infinito di $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che un tale punto non esista. Allora per ogni $P \in K$ esiste un intorno U_P tale che valga $U_P \cap A_n$ per un numero finito di $n \in \mathbb{N}$. Questi U_p costituiscono un ricoprimento aperto di K. Per la compattezza di K possiamo estrarre da questo un sottoricoprimento finito che contenga K. Consideriamo ora tutti gli A_n che hanno intersezione non vuota con gli elementi del sottoricoprimento. Quindi solo un numero finito di A_n sarebbero contenuti in K.

$\square$

Possiamo ora dimostrare il

Lemma 1.1 (di Lebesgue) *Dato un ricoprimento aperto di uno spazio metrico compatto K, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che ogni sottoinsieme di K di diametro minore di ε è contenuto in qualche aperto del ricoprimento.*

Dimostrazione. Se per assurdo non fosse così, esisterebbe, $\forall n \in \mathbb{N}$, un sottoinsieme A_n di diametro minore di $\frac{1}{n}$. Per la proposizione precedente esisterà un punto limite P. Sia dunque U un aperto del ricoprimento che contiene P, ed $r > 0$ tale che l'intorno di P di raggio r sia interamente contenuto in U. Esisteranno quindi infiniti n con $1/n < r/2$ tali che A_n intersechi l'intorno di P di raggio $r/2$. Ma questi A_n dovrebbero essere contenuti in U.

□

Riportiamo ora una serie di risultati che utilizzeremo nei prossimi capitoli.

Proposizione 1.2 *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se X è compatto allora f assume valore massimo e minimo su X.*

Dimostrazione. La tesi deriva dal fatto che l'immagine di un compatto tramite un'applicazione continua è un compatto e in $\mathbb{R}$ i compatti sono chiusi e limitati.

□

Proposizione 1.3 *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se X è connesso e compatto allora f assume tutti i valori tra il massimo e il minimo.*

Dimostrazione. $f(X)$ deve essere necessariamente un intervallo chiuso in $\mathbb{R}$ da cui l'asserto.

□

Proposizione 1.4 *Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua e localmente costante. Se X è connesso allora f è costante su tutto X.*

Dimostrazione. Sia Y il sottoinsieme di X in cui f è costante. Supponiamo per assurdo che $Z = X \backslash Y \neq \emptyset$. Per la continuità di f per ogni $z \in Z$ esiste un aperto contenente z che non contiene punti di Y e possiamo ripetere il ragionamento per ogni $y \in Y$. Ma allora le unioni di questi aperti formano una separazione di X contro l'ipotesi che sia connesso.

$\square$

Lemma 1.2 (dell'applicazione chiusa) *Sia $f : X \to Y$ una funzione continua tra uno spazio compatto X e uno spazio di Hausdorff Y. Se f è una bigezione allora f è un omeomorfismo.*

Dimostrazione. É sufficiente mostrare che f è chiusa. Sia $C \subset X$ un sottoinsieme chiuso di X e quindi necessariamente compatto. Allora anche $f(C)$ è compatto in quanto immagine di un compatto tramite una funzione continua. Ma allora $f(C)$ è chiuso in quanto sottoinsieme compatto di uno spazio di Hausdorff.

$\square$

Richiamiamo ora la definizione di topologia quoziente ed alcune proprietà. Sia X uno spazio topologico, Y un insieme e $f : X \to Y$ un'applicazione suriettiva. Si definisce *topologia quoziente su Y relativa ad f* la famiglia:

$$T_f = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \ \ \textit{è} \ \ \textit{aperto} \ \ \textit{in} \ \ X\}$$

Y con la suddetta topologia è detto spazio quoziente di X relativo ad f. Notiamo inoltre che f è continua con la topologia T_f. Siano ora X e Y due spazi topologici con le topologie T_X e T_Y. Definiamo *identificazione* un'applicazione suriettiva $f : X \to Y$ tale che $T_f = T_Y$.

Proposizione 1.5 *Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva tra spazi topologici. Supponiamo che f sia aperta. Allora Y è lo spazio quoziente di X relativo ad f. In particolare, se f è un omeomorfismo, allora la topologia su Y è la topologia quoziente relativa ad f.*

Dimostrazione. Sia V un sottoinsieme di Y tale che $f^{-1}(V)$ è aperto. Se f è aperta allora, per la suriettività di f, $V = f(f^{-1}(V))$ è aperto in Y e quindi la topologia su Y è T_f.

$\square$

Consideriamo ora un esempio di identificazione che ci sarà utile in seguito:

$$\varphi : [0,1] \to S^1, \quad t \mapsto (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$$

dove S^1 è la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine. Poiché φ è chiusa, continua e suriettiva discende dalla Proposizione 1.5 che la topologia su S^1,indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$, coincide con la topologia T_φ.
Diamo infine una proposizione che sfrutteremo nel prossimo capitolo:

Proposizione 1.6 *Sia $f : X \to Y$ una identificazione. Allora, per ogni spazio topologico Z, un'applicazione $g : Y \to Z$ è continua se e solo se $g \circ f : X \to Z$ è continua.*

Dimostrazione. Se g è continua allora $g \circ f$ è continua in quanto composizione di funzioni continue. Viceversa, assumiamo $g \circ f$ continua e sia W un aperto di Z. Allora $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ è aperto in X. Questo implica che $g^{-1}(W)$ è aperto in Y e quindi g è continua.

$\square$

É di fondamentale importanza per la discussione che porteremo avanti nei prossimi capitoli riuscire ad esprimere una qualunque curva in coordinate polari per mezzo di funzioni che siano derivabili infinite volte. Vediamo ora come questo possa essere possibile.
Ogni punto P del piano può essere espresso in coordinate polari ovvero nella forma $P = (rcos(\vartheta), rsin(\vartheta))$. Il problema risiede nel fatto che, mentre r è univocamente determinato (essendo la distanza dall'origine), ϑ risulta determinato solo a meno di multipli interi di 2π. Sia quindi $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ una curva data in coordinate cartesiane da $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Vogliamo

esprimere γ in coordinate polari, cioè trovare due funzioni C^∞, $r(t)$ e $\vartheta(t)$ tali che

$$\gamma(t) = (r(t)cos(\vartheta(t)), r(t)sin(\vartheta(t))) \qquad \forall t \in [a,b]$$

Non incontriamo problemi nella definizione di $r(t)$ perché, in quanto distanza dall'origine, è naturalmente definita come:

$$r(t) = \|\gamma(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Non è così naturale la definizione della funzione angolo $\vartheta(t)$. Potremmo eliminare l'ambiguità restringendo il codominio all'intervallo $(-\pi, \pi]$ ma vi sarebbe una discontinuità ogni volta che la curva attraversa l'asse negativo delle x. Possiamo fissare arbitrariamente l'angolo iniziale, ovvero scegliere un numero reale ϑ_a tale che

$$\gamma(a) = (x(a), y(a)) = (r(a)cos(\vartheta_a), r(a)sin(\vartheta_a))$$

Fissato quindi l'angolo iniziale abbiamo una scelta privilegiata per la derivata di $\vartheta(t)$ e cioè la variazione dell'angolo

$$\vartheta'(t) = \frac{-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} = \frac{-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)}{r(t)^2}$$

Possiamo quindi definire $\vartheta(t)$ come l'unica funzione con questa derivata e la condizione iniziale $\vartheta(a) = \vartheta_a$ e cioè definiamo $\vartheta(t)$ come

$$\vartheta(t) = \vartheta_a + \int_a^t \frac{-y(\tau)x'(\tau) + x(\tau)y'(\tau)}{r(\tau)^2} d\tau$$

Proposizione 1.7 *Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ una curva espressa in coordinate cartesiane da $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad \forall t \in [a,b]$. Con le definizioni precedentemente esposte $r(t)$ e $\vartheta(t)$ sono funzioni C^∞. Inoltre vale*

$$\gamma(t) = (r(t)cos(\vartheta(t)), r(t)sin(\vartheta(t))) \qquad \forall t \in [a,b]$$

Dimostrazione. La prima parte è vera per $r(t)$ perché composizione di funzioni C^∞ e per $\vartheta(t)$ in quanto integrale di una funzione C^∞. Per la seconda parte consideriamo i vettori

$$u(t) = (cos(\vartheta(t)), sin(\vartheta(t))) \qquad v(t) = (-sin(\vartheta(t)), cos(\vartheta(t)))$$

Vogliamo dimostrare che

$$\frac{1}{r(t)}\gamma(t) = u(t)$$

Ma poiché $u(t)$ e $v(t)$ costituiscono una base ortonormale del piano basta dimostrare che primo e secondo membro hanno le stesse proiezioni su $u(t)$ e $v(t)$. Sappiamo già che $u(t) \cdot v(t) = 0$ e $u(t) \cdot u(t) = 1$ quindi dobbiamo dimostrare che questo vale anche per il primo membro. Ora poiché sappiamo per definizione che questo è vero nel punto iniziale ci basta dimostrare che

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r(t)}\gamma(t) \cdot u(t)\right) \equiv 0 \quad e \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r(t)}\gamma(t) \cdot v(t)\right) \equiv 0$$

Questo si verifica facilmente con qualche calcolo. Lo mostriamo per la prima delle due equivalenze (indicheremo $r'(t)$ con $\dot{r}$ etc.) :

$$\frac{r\dot{x} - x\dot{r}}{r^2}cos(\vartheta) + \frac{r\dot{y} - y\dot{r}}{r^2}sin(\vartheta) + \frac{x}{\dot{r}}\dot{\vartheta}(-sin(\vartheta)) + \frac{y}{r}\dot{\vartheta}(cos(\vartheta)) =$$

$$= \frac{1}{r^3}(cos(\vartheta)[r^2\dot{x} - xr\dot{r} + yr^2\dot{\vartheta}] + sin(\vartheta)[r^2\dot{y} - yr\dot{r} - xr^2\dot{\vartheta}])$$

Ora utilizzando le identità $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ e $r^2\dot{\vartheta} = -y\dot{x} + x\dot{y}$ è facile vedere che i termini tra parentesi quadre si annullano.

□

Nei prossimi capitoli indicheremo con S^n la *sfera n-dimensionale* cioè l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^{n+1}$ che hanno distanza 1 dall'origine:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

Ci capiterà spesso di indicare una circonferenza di raggio generico r e centro qualsiasi $P_0 = (x_0, y_0)$ con C ovvero:

$$C = \{P \in \mathbb{R}^2 : \|P - P_0\| = r\}$$

Indicheremo invece con D^n il *disco n-dimensionale* cioè l'insieme dei punti di $\mathbb{R}^n$ che hanno distanza minore o uguale ad 1 dall'origine:

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$$

Ci capiterà, per semplicità, di indicare con D il disco bidimensionale D^2. Facciamo presente che ogni risultato riguardante i dischi e le sfere che verrà riportato è valido per ogni spazio omeomorfo a questi e viceversa. In particolare i risultati saranno validi per dischi o sfere di raggio e centro qualunque.

Capitolo 2

Indice di avvolgimento

2.1 Definizione

Per ogni punto $P \in \mathbb{R}^2$ ed ogni settore S con vertice in P possiamo definire sul settore una funzione angolo continua (in effetti C^∞) sebbene la scelta sia unica a meno di multipli interi di 2π. Gli angoli sono misurati in senso antiorario dal vettore x uscente da P verso destra. Data la applicazione in coordinate polari:

$$p_P(r, \vartheta) = P + (rcos\vartheta, rsen\vartheta)$$

un settore è l'immagine di una striscia $X = \{(r, \vartheta) | r > 0; \vartheta_1 < \vartheta < \vartheta_2\}$ dove ϑ_1 e ϑ_2 sono due numeri reali tali che $0 < \vartheta_1 - \vartheta_2 \leq 2\pi$. Il fatto che la funzione angolo sia continua sul settore può essere dimostrato in due modi: analiticamente usando la funzione arcotangente o topologicamente come mostriamo ora. La applicazione p_P è biunivoca e continua dalla striscia X al settore S, per cui applicazione biunivocamente rettangoli chiusi nella striscia sulle loro immagini, anzi la restrizione di p_P a questi rettangoli è un omeomorfismo per il Lemma 1.2 poiché questi sono compatti e di Hausdorff. Possiamo concludere che p_P è un diffeomorfismo da X in S poiché è un omeomorfismo le cui componenti sono differenziabili. Quindi ha inversa continua, il che significa che r e ϑ sono funzioni continue di x e y.

Possiamo ora definire l'indice di avvolgimento $W(\gamma, P)$ di una curva γ:[a,b]$\rightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ come segue:

1. Si suddivida $[a, b]$ negli intervalli $[t_{i-1}, t_i]$ con $a = t_0 < \ldots < t_n = b$ tali che ognuno di questi sia mandato in qualche settore con vertice in P. L'esistenza di tale suddivisione è garantita dal lemma di Lebesgue poichè ogni punto dell'immagine di γ è contenuto in qualcuno di questi settori.

2. Si scelga S_i, uno tra questi settori, contenente $\gamma([t_{i-1}, t_i])$ e la corrispondente funzione angolo ϑ_i su S_i per $1 \leq i \leq n$. Sia ora $P_i = \gamma(t_i)$ per $1 \leq i \leq n$. Definiamo

$$W(\gamma, P) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} (\vartheta_i(P_i) - \vartheta_i(P_{i-1})) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} [(\vartheta_1(P_1) - \vartheta_1(P_0)) + (\vartheta_2(P_2) - \vartheta_2(P_1)) + \ldots + (\vartheta_n(P_n) - \vartheta_n(P_{n-1}))]$$

Dove il termine i-esimo rappresenta la variazione netta dell'angolo lungo l'i-esima parte della curva.

Per essere sicuri di aver ben definito gli indice di avvolgimento abbiamo bisogno di dimostrare il seguente

Teorema 2.1 *(a) La definizione di indice di avvolgimento è indipendente dalle scelte fatte nei passaggi 1 e 2. (b) Se γ è una curva chiusa allora $W(\gamma, P)$ è un'intero.*

Dimostrazione. Per mostrare che la definizione è indipendente dalle scelta dei settori S_i e delle funzioni angolo ϑ_i, supponiamo che S_i' e ϑ_i' siano due diverse scelte. In questo caso ϑ_i' e ϑ_i differiranno per un multiplo di 2π sulla componente di $S_i \cap S'_i$ che contiene $\gamma([t_{i-1}, t_i])$. Si ha quindi

$$(\vartheta_i(P_i) - \vartheta_i(P_{i-1})) = (\vartheta'_i(P_i) - \vartheta'_i(P_{i-1}))$$

per cui sommando su i è facile vedere che l'indice di avvolgimento non cambia.

Consideriamo ora una diversa scelta della suddivisione. Mostriamo innanzitutto che aggiungendo un punto ad una suddivisione la somma non cambia. Supponiamo di aggiungere t' con $t_{i-1} < t' < t_i$. Scelti S_i e ϑ_i per $[t_{i-1}, t_i]$ gli stessi possono essere scelti per i sottointervalli $[t_{i-1}, t']$ e $[t', t_i]$. Detto $P' = \gamma(t')$ si ha

$$(\vartheta_i(P_i) - \vartheta_i(P')) + (\vartheta_i(P') - \vartheta_i(P_{i-1})) = (\vartheta_i(P_i) - \vartheta_i(P_{i-1}))$$

quindi nuovamente la somma non cambia.

Possiamo quindi inserire un numero finito di punti in una suddivisione senza che la somma cambi. Ne consegue che, se due suddivisioni soddisfano le condizioni date nello Step 1, la suddivisione che possiede i punti di entrambe definisce lo stesso indice di avvolgimento delle due.

(b) In generale vogliamo dimostrare che se ϑ_a è l'angolo del punto $\gamma(a)$ allora l'angolo di $\gamma(b)$ è dato da $\vartheta_a + 2\pi W(\gamma, p)$. Questo è banalmente vero per la restrizione di γ all'intervallo $[t_{i-1}, t_i]$. É ora facile vedere che sommando i contributi si ottiene l'asserto.

$\square$

Enunciamo e dimostriamo ora alcune proprietà dell'indice di avvolgimento che discendono direttamente della definizione.

Proposizione 2.1 *Se $\gamma : [a, b] \to U$ è una curva chiusa, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ tale che si possa definire una funzione angolo continua su tutto U, allora $W(\gamma, P) = 0$.*

Dimostrazione. Si scelga un settore S con vertice in P tale che l'immagine di γ sia interamente contenuta in S. Data una qualunque suddivisione di $[a, b]$, scegliamo, per ogni sottointervallo $[t_{i-1}, t_i]$, il settore S, il quale sicuramente contiene $\gamma([t_{i-1}, t_i])$. Possiamo quindi utilizzare per ogni sottointervallo la stessa funzione angolo ϑ_S. Nella sommatoria si elimineranno tutti i termini tranne il primo e l'ultimo e si avrà:

$$W(\gamma, P) = \frac{1}{2\pi}(\vartheta_S(P_n) - \vartheta_S(P_0)) = 0$$

Perché essendo γ chiusa si ha $P_0 = \gamma(a) = \gamma(b) = P_n$

□

Proposizione 2.2 *Sia* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ *una curva nel piano e* ν *un qualunque vettore di* $\mathbb{R}^2$. *Sia inoltre* $\gamma + \nu$ *la curva definita da* $(\gamma + \nu)(t) = \gamma(t) + \nu$. *Allora*

$$W(\gamma + \nu, P + \nu) = W(\gamma, P)$$

Ovvero l'indice di avvolgimento è invariante rispetto alle traslazioni.

Dimostrazione. Scelta una suddivisione e dei settori S_i con delle funzioni angolo ϑ_i per P e γ, questi inducono la stessa suddivisione e i settori $S_i + \nu$ per $P + \nu$ e $\gamma + \nu$. Le funzioni angolo ϑ_i possono essere traslate nei settori $S_i + \nu$. Da questa scelta deriva che le sommatorie sono uguali termine a termine.

□

2.2 Omotopie e riparametrizzazioni

Sia $R = [a, b] \times [c, d]$ un rettangolo chiuso e $\Gamma : R \to \mathbb{R}^2$ una applicazione continua. La restrizione di Γ ai lati del rettangolo definisce quattro curve γ_1,γ_2,γ_3 e γ_4:

$$\gamma_1(t) = \Gamma(t, c) \quad \gamma_3(t) = \Gamma(t, d) \quad con \quad t \in [a, b]$$

$$\gamma_2(s) = \Gamma(b, s) \quad \gamma_4(s) = \Gamma(a, s) \quad con \quad s \in [c, d]$$

Teorema 2.2 *Per ogni punto $P \notin \Gamma(R)$ vale*

$$W(\gamma_1, P) + W(\gamma_2, P) = W(\gamma_3, P) + W(\gamma_4, P).$$

Dimostrazione. Per il lemma di Lebesgue esisteranno due suddivisioni

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_n = b \quad e \quad c = s_0 < s_1 < \ldots < s_j < \ldots < s_m = d$$

di $[a, b]$ e $[c, d]$ che individuano una suddivisione di R nei rettangoli $R_{i,j}$ tali che $\Gamma(R_{i,j}) \subset S_{i,j}$ dove $S_{i,j}$ è un settore con vertice in P nel quale è definita una funzione angolo continua $\vartheta_{i,j}$. Ora, per i contributi opposti dei bordi interni a $\Gamma(R)$ si ha:

$$W(\Gamma|_{\partial R}, P) = \sum_{i,j} W(\Gamma|_{\partial R_{i,j}}, P)$$

dove $W(\Gamma|_{\partial R}, P)$ è definita da

$$W(\Gamma|_{\partial R}, P) = W(\gamma_1, P) + W(\gamma_2, P) - W(\gamma_3, P) - W(\gamma_4, P)$$

e $W(\Gamma|_{\partial R_{i,j}}, P)$ è definito similmente per ogni rettangolo $R_{i,j}$. Ma ognuno di questi rettangoli è mandato in una regione in cui è definita una funzione angolo continua e quindi i loro indice di avvolgimento sono nulli per la Proposizione 2.1. Si ha dunque:

$$W(\gamma_1, P) + W(\gamma_2, P) - W(\gamma_3, P) - W(\gamma_4, P) = 0$$

$\square$

Questo teorema ci garantisce che l'indice di avvolgimento è invariante per trasformazioni omotopiche. Vogliamo ora considerare due tipi di omotopie: il primo per curve aventi gli stessi estremi e il secondo per curve chiuse.

Se $\gamma : [a, b] \to U$ e $\delta : [a, b] \to U$ sono curve con gli stessi estremi, *un'omotopia da* γ *in* δ *con gli estremi fissati* è una applicazione continua $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$ tale che

$$H(t, 0) = \gamma(t) \qquad e \quad H(t, 1) = \delta(t) \qquad \forall t \in [a, b]$$

$$H(a, s) = \gamma(a) = \delta(a) \quad e \quad H(b, s) = \gamma(b) = \delta(b) \qquad \forall s \in [0, 1]$$

Le curve $\gamma_s = H(t, s)$ costituiscono una famiglia continua di curve regolari da $\gamma_0 = \gamma$ a $\gamma_1 = \delta$. le curve γ e δ sono dette *omotope con estremi fissi* se esiste una tale omotopia H.
Se invece γ e δ sono curve chiuse in U definite sullo stesso intervallo $[a, b]$ *un'omotopia da* γ *in* δ *attraverso curve chiuse* è una applicazione continua $H : [a, b] \times [0, 1] \to U$, tale che:

$$H(t, 0) = \gamma(t) \quad e \quad H(t, 1) = \delta(t) \qquad \forall t \in [a, b]$$

$$H(a, s) = H(b, s) \qquad \forall s \in [0, 1]$$

Le curve γ e δ sono dette *curve omotope chiuse* se esiste una tale H.

Analizziamo ora alcune proprietà delle curve chiuse.

Proposizione 2.3 *Le relazioni di omotopia con gli estremi fissi e attraverso curve chiuse sono relazioni di equivalenza.*

Dimostrazione La dimostrazione vale in entrambi i casi anche se per brevità consideriamo solo curve chiuse.
Riflessività: Detta $\gamma : [a, b] \to U$ una curva chiusa. Un'omotopia da γ in γ è data banalmente da $H(t, s) = \gamma(t)$.
Simmetria: Siano $\gamma : [a, b] \to U$ e $\delta : [a, b] \to U$ due curve chiuse tali che esista un'omotopia attraverso curve chiuse $H(t, s)$ da γ in δ. Allora, come si verifica facilmente, un omotopia da δ in γ è data da $H(t, (1 - s))$.
Transitività: Siano $\gamma : [a, b] \to U$, $\delta : [a, b] \to U$ e $\varphi : [a, b] \to U$ tre curve tali che γ sia omotopa a δ attraverso l'omotopia $H_1(t, s)$ e δ sia omotopa a

φ attraverso l'omotopia $H_2(t,s)$. Allora un'omotopia da γ in φ è data da

$$H(t,s) = H_1(t,2s) \quad s \in [0, \frac{1}{2}] \qquad H(t,s) = H_2(t,(2s-1)) \quad s \in [\frac{1}{2}, 1]$$

$\square$

Corollario 2.1 *Se due curve γ, δ : sono omotope, come curve con estremi fissi o come curve chiuse, allora*

$$W(\gamma, P) = W(\delta, P)$$

Dimostrazione. Poiché γ e δ sono omotope esiste una funzione continua $H : [a,b] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ che soddisfa le condizioni prima citate. Il corollario si verifica immediatamente ponendo $\Gamma(t,s) = H(t,s)$ nel Teorema 2.2. Nel primo caso si ottiene

$$W(\gamma, P) + W(\delta(b), P) = W(\gamma(a), P) + W(\delta, P)$$

dove però $W(\delta(b), P) = W(\gamma(a), P) = 0$. Nel secondo caso invece si ha

$$W(\gamma, P) + W(H(a,s), P) = W(H(b,s), P) + W(\delta, P)$$

dove però $H(a,s) = H(b,s) \qquad \forall s \in [0,1]$.

$\square$

Consideriamo ora cosa accade in caso di cambiamento del parametro per la curva. Il caso più semplice si ha per un cambiamento di parametro monotono.

Corollario 2.2 *Sia $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ una curva continua e*
$\varphi : [c,d] \rightarrow [a,b]$ una funzione monotona continua. Valgono le seguenti:
(a) Se φ è crescente allora $W(\gamma \circ \varphi, P) = W(\gamma, P)$
(b) Se φ e decrescente allora $W(\gamma \circ \varphi, P) = -W(\gamma, P)$

Dimostrazione. Analizzeremo solamente il caso di cambiamento di coordinate monotono perché il caso (b) è analogo. Per il lemma di Lebesgue

possiamo trovare una suddivisione $c = t'_0 \leq t'_1 \leq \ldots \leq t'_n = d$ tale che $\gamma \circ \varphi$ porti ogni sottointervallo $[t'_{i-1}, t'_i]$ in un settore S_i con vertice in P. Poiché φ è monotona è anche invertibile. Consideriamo dunque la suddivisione di $[a, b]$ data da
$a = \varphi(t'_0) \leq \varphi(t'_1) \leq \ldots \leq \varphi(t'_n) = b$. Ora questa suddivisione è tale che l'immagine di ogni sottointervallo $[\varphi(t'_{i-1}), \varphi(t'_i)]$ attraverso γ sia contenuta nel settore S_i. Dunque le sommatorie degli indici di avvolgimento $W(\gamma \circ \varphi, P)$ e $W(\gamma, P)$ sono uguali termine a termine.

$\square$

Generalizziamo ora il risultato ottenuto nel seguente

Corollario 2.3 *Sia* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ *una curva continua e*
$\varphi : [c, d] \to [a, b]$ *una funzione continua. Valgono le seguenti:*
(a) Se $\varphi(c) = a$ *e* $\varphi(d) = b$, *allora* $W(\gamma \circ \varphi, P) = W(\gamma, P)$
(b) Se $\varphi(c) = b$ *e* $\varphi(d) = a$, *allora* $W(\gamma \circ \varphi, P) = -W(\gamma, P)$

Dimostrazione. (a) Definiamo $\Gamma : [a, b] \times [c, d] \to U$ come segue:

$$\Gamma(t, s) = \gamma\left(\min_{t,s}(t + \varphi(s) - a, b)\right)$$

Γ è continua perché è composizione di funzioni continue. Ora le curve che costituiscono i bordi sono $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_4 = \gamma \circ \varphi$, e γ_2 e γ_3 sono curve costanti nel punto $\gamma(b)$. Ora per ottenere (a) ci basta applicare il Teorema 2.2.
(b) In analogia in questo caso definiamo

$$\Gamma(s, t) = \gamma\left(\max_{t,s}(t + \varphi(s) - b, a)\right).$$

Abbiamo quindi $\gamma_1 = \gamma$, $\gamma_2 = \gamma \circ \varphi$, γ_3 e γ_4 sono costanti.

$\square$

Un'altra applicazione del teorema 2.2 è un risultato di Poincaré e Bohl noto come teorema del cane al guinzaglio. Il nome del teorema è dovuto al fatto

che si possa formulare come segue:
Se il guinzaglio è più corto della distanza dal padrone al palo allora il cane ed il padrone gireranno intorno al palo lo stesso numero di volte.
Diamone ora una formulazione più rigorosa:

Teorema 2.3 (del cane al guinzaglio) *Siano* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ *e* $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ *due curve chiuse. Supponiamo inoltre che il punto* P *non appartenga mai al segmento di estremi* $\gamma(t)$*,* $\delta(t)$*. Allora*

$$W(\gamma, P) = W(\delta, P)$$

Dimostrazione. Sia $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$H(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s\delta(t) \text{ con } t \in [a,b],\ s \in [0,1]$$

Questa è un'omotopia continua da γ in δ attraverso curve chiuse. Inoltre le ipotesi implicano che H porti il rettangolo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$. La tesi discende dal Corollario 2.1.

□

Corollario 2.4 *Se* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *e* $\delta : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *sono curve chiuse tali che* $\|\gamma(t) - \delta(t)\| < \|\gamma(t) - P\|\ \forall t \in [a,b]$*, allora*

$$W(\gamma, P) = W(\delta, P).$$

Dimostrazione. Le ipotesi implicano che P non appartiene a nessuna delle due curve e che il segmento di estremi $\gamma(t)$, $\delta(t)$ non passa mai per P.

□

Dimostriamo ora alcune proprietà degli indice di avvolgimento relative alle curve omotope.

Proposizione 2.4 *Due curve chiuse* $\gamma : [a,b] \to U$ *e* $\delta : [a,b] \to U$*, o aventi gli stessi estremi, sono omotope se* U *è un sottoinsieme convesso di* $\mathbb{R}^2$*.*

Dimostrazione. L'omotopia cercata è data da

$$H(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s\delta(t) \quad con \quad t \in [a,b], \quad s \in [0,1]$$

$\square$

Proposizione 2.5 *Il risultato precedente è valido anche se U è solamente stellato.*

Dimostrazione. Sia P il punto rispetto al quale U è stellato. L'omotopia che cerchiamo è data da

$$H(t,s) = (1-2s)\gamma(t)+2sP \;\; s \in [0,\frac{1}{2}] \quad H(t,s) = (2s-1)\delta(t)+(2-2s)P \;\; s \in [\frac{1}{2},1]$$

$\square$

Consideriamo ora una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$. Indichiamo con γ^t la restrizione di γ all'intervallo $[a,t]$. Una volta scelto ϑ_a come angolo iniziale per $\gamma(a)$, l'angolo per $\gamma(t)$ è univocamente determinato da

$$\vartheta(t) = \vartheta_a + 2\pi \cdot W(\gamma^t, P).$$

Possiamo quindi costruire una applicazione continua
$\tilde{\gamma} : [a,b] \to \{(r,\vartheta) : r > 0\}$ tale che, indicando con p_P la applicazione polare, $p_P \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ e $\gamma(a) = (r(a), \vartheta_a)$.
Una tale funzione $\tilde{\gamma}$ è detta *lifting* di γ con punto iniziale $(r(a), \vartheta_a)$.
Le due seguenti proposizioni dimostrano che vale il viceversa del Corollario 2.1.

Proposizione 2.6 *Siano γ e δ due curve da $[a,b]$ in $\mathbb{R}^2\backslash\{P\}$ con gli stessi estremi. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1. *γ e δ sono omotope in $\mathbb{R}^2\backslash\{P\}$*
2. *$W(\gamma, P) = W(\delta, P)$*
3. *se $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\delta}$ sono lifting di γ e δ con lo stesso punto iniziale allora hanno lo stesso punto finale*

Dimostrazione.
$1 \Rightarrow 2$ Discende dal Corollario 2.1.
$2 \Rightarrow 3$ Dati due qualunque lifting $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\delta}$ con lo stesso punto iniziale si ha:

$$\tilde{\gamma}(b) = (r(b), \vartheta_a + 2\pi \cdot W(\gamma, P)) = (r(b), \vartheta_a + 2\pi \cdot W(\delta, P)) = \tilde{\delta}(b).$$

$3 \Rightarrow 1$ Si avrà $\gamma(a) = \delta(a)$ e $\gamma(b) = \delta(b)$ per cui sono omotope tramite l'omotopia

$$H(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s\delta(t) \quad \textit{con} \quad t \in [a,b], \quad s \in [0,1]$$

□

Proposizione 2.7 *Siano γ e δ due curve chiuse da $[a,b]$ in $\mathbb{R}^2\backslash\{P\}$.*
γ e δ sono omotope attraverso curve chiuse in $\mathbb{R}^2\backslash\{P\}$ se e solo se $W(\gamma, P) = W(\delta, P)$.

Dimostrazione. La prima parte deriva dal Corollario 2.1. Viceversa supponiamo $W(\gamma, P) = W(\delta, P)$. Consideriamo quindi $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\delta}$ due lifting di γ e δ con lo stesso angolo iniziale.Per la precedente proposizione avranno allora anche lo stesso angolo finale. Possiamo quindi costruire l'omotopia

$$\tilde{H}(t,s) = (1-s)\tilde{\gamma}(t) + s\tilde{\delta}(t) \quad \textit{con} \quad t \in [a,b], \quad s \in [0,1]$$

Fissato $s \in [0,1]$ il lifting $H(t,s)$ è chiuso in quanto ha lo stesso punto iniziale e finale. L'omotopia cercata è quindi $H(t,s) = p_P \circ \tilde{H}(t,s)$.

□

2.3 Variazione del punto

Vogliamo ora studiare il caso in cui sia fissata una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ e vari il punto P ma sempre sotto la condizione che la curva non passi per P. Indicheremo in seguito l'immagine della curva γ con $Supp(\gamma)$ e la chiameremo supporto di γ ovvero

$$Supp(\gamma) = \gamma([a, b])$$

Poiché l'intervallo è compatto anche il supporto di γ sarà compatto ed è quindi un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^2$. Il complementare del supporto è un aperto di $\mathbb{R}^2$ che possiede delle componenti connesse, anche infinite, ognuna delle quali sarà un aperto. Inoltre, dal momento che il supporto della curva è limitato, c'è una componente connessa di $\mathbb{R}^2 \backslash Supp(\gamma)$, che chiameremo componente illimitata, che contiene tutti i punti esterni a γ.

Proposizione 2.8 *Sia $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ una curva chiusa. Considerata come funzione di P, la funzione $W(\gamma, P)$ è costante su ogni componente connessa di $\mathbb{R}^2 \backslash Supp(\gamma)$ e si annulla sulla componente illimitata.*

Dimostrazione. Per dimostrare la prima parte dell'enunciato è sufficiente mostrare che $W(\gamma, P)$ è una funzione localmente costante in $\mathbb{R}^2 \backslash Supp(\gamma)$ e per la Proposizione 1.4 sarà costante su ogni componente connessa. Fissato P, prendiamo un disco centrato in P e contenuto in $\mathbb{R}^2 \backslash Supp(\gamma)$. Mostriamo che $W(\gamma, P') = W(\gamma, P)$ per ogni P' nel disco. Sia $\nu = P' - P$ il vettore da P a P'. Per la Proposizione 2.2

$$W(\gamma, P) = W(\gamma + \nu, P + \nu) = W(\gamma + \nu, P')$$

Consideriamo l'omotopia attraverso curve chiuse da γ in $\gamma + \nu$ definita da $H(t, s) = \gamma(t) + s\nu$ con $t \in [a, b]$ e $s \in [0, 1]$. Poiché vale sempre $H(t, s) \neq P'$ si ha:

$$W(\gamma + \nu, P') = W(\gamma, P)$$

Per dimostrare la seconda parte della proposizione è sufficiente mostrare che se l'indice di avvolgimento si annulla in un punto della componente illimitata. Si consideri a tal scopo un punto P del piano tale che il supporto di

γ sia contenuto nel semipiano alla destra di P. Ma allora è definita in questo semipiano una funzione angolo continua e $W(\gamma, P) = 0$ per la Proposizione 2.1.

$\square$

Possiamo dare una diversa dimostrazione della proposizione come segue:

Dimostrazione 2. Mostriamo innanzitutto che la funzione $P \mapsto W(\gamma, P)$ definita sul complementare di $Supp(\gamma)$ è continua. Ci basta dimostrare che è continua la funzione $P \mapsto W(\gamma([t_{i-1}, t_i]), P)$. Prendiamo allora il triangolo di vertici P, P_{i-1} e P_i. La variazione dell'angolo in P al variare di P stesso è minore della somma delle variazioni degli angoli in P_{i-1} e P_i. Ma poiché esistono due funzioni angolo continue ϑ_1 e ϑ_2 nei settori con vertice in P_{i-1} e P_i allora, fissato $\varepsilon/2 > 0$, esistono due intorni di P di raggi δ_1 e δ_2 tali che $|\vartheta_1(P) - \vartheta_1(Q)| < \varepsilon/2$ se $\|P - Q\| < \delta_1$ e che $|\vartheta_2(P) - \vartheta_2(Q)| < \varepsilon/2$ se $\|P - Q\| < \delta_2$. É ora chiaro che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste un intorno di P di raggio $\delta = \max\{\delta_1; \delta_2\}$ tale che $|W(\gamma([t_{i-1}, t_i]), P) - W(\gamma([t_{i-1}, t_i]), Q)| < \varepsilon$ se $\|P - Q\| < \delta$. Ora facciamo notare che $W(\gamma, P)$ tende a zero per $\|P\|$ che tende ad infinito. Infatti essendo $Supp(\gamma)$ compatto esiste un disco di raggio r centrato nell'origine che lo contiene. $W(\gamma, P)$ per P esterno al disco è minore dell'angolo ϑ sotto il quale P vede il disco. Si ha dunque

$$sin(\vartheta) < \frac{r}{\|P\|}$$

Ora, per il Teorema 2.1, poiché $W(\gamma, P) = n$ con n intero se γ è chiusa e W è una funzione continua, nella componente illimitata si deve avere $W(\gamma, P) = 0$. Mostriamo infine che W è costante su ogni componente connessa di $\mathbb{R}^2 \backslash Supp(\gamma)$. Consideriamo una qualunque curva $\sigma(s)$ con $s \in [c, d]$ contenuta in $\mathbb{R}^2 \backslash Supp(\gamma)$ e la funzione $\Gamma(t, s) = \gamma(t) - \sigma(s)$. Per il Teorema 2.2 si ha

$$W(\gamma, -\sigma(c)) = W(\gamma, -\sigma(d))$$

$\square$

2.4 Gradi e gradi locali

Sia I un qualunque intervallo chiuso e C una circonferenza. Una curva chiusa continua da I in un aperto del piano U è equivalente ad una applicazione continua F da C in U. Questo ragionamento può essere esplicitato nel modo seguente.

Possiamo assumere senza restrizioni $I = [0,1]$, siano inoltre (x_0, y_0) e r rispettivamente il centro e il raggio della circonferenza. Diciamo $\varphi : I \to C$ la funzione che porta I su C:

$$\varphi(t) = (x_0, y_0) + (rcos(2\pi t), rsin(2\pi t)), \qquad t \in [0,1]$$

Quindi, fatta eccezione per $\varphi(0) = \varphi(1)$, questa è una applicazione biunivoca da I in C. Ne consegue che F è una applicazione da C in un aperto U e quindi $\gamma = F \circ \varphi$ è una applicazione da C in U con $\varphi(0) = \varphi(1)$ tale che ogni curva γ di questo tipo può essere realizzata col procedimento appena esposto per mezzo di un'unica F.

Lemma 2.1 *La applicazione γ è continua se e solo se lo è anche F.*

Dimostrazione. Per la discussione fatta nel capitolo introduttivo, essendo φ un'identificazione, la tesi discende direttamente dalla Proposizione 1.6.

□

Per una generica $F : C \to \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ Possiamo definire *l'indice di avvolgimento di F attorno a P*, che indicheremo con $W(F,P)$, come l'indice di avvolgimento $W(\gamma, P)$ della curva $\gamma = F \circ \varphi$.

Notiamo inoltre che se $F : C \to \mathbb{R}^2$ è una funzione continua e $W(F,P) \neq 0$ allora ogni semiretta uscente da P interseca $F(C)$ (questo deriva dal fatto che P deve necessariamente essere interno ad $F(C)$).

Ora identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e consideriamo la applicazione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ che associa ad ogni numero complesso z la sua potenza z^n. Sia inoltre C una qualunque circonferenza centrata nell'origine ed F la restrizione di f a C. Vale allora la seguente

Proposizione 2.9 *Con la notazione suddetta si ha $W(F, 0) = n$. Inoltre se $f(z) = -z$ allora $W(F, 0) = 1$.*

Dimostrazione. Utilizziamo la notazione di Eulero. Fissato il raggio r di C abbiamo per definizione $W(F, 0) = W(\gamma, 0)$ dove

$$\gamma(t) = (F \circ \varphi)(t) = r^n e^{\imath n 2\pi t} \qquad t \in [0, 1]$$

Possiamo scegliere per qualunque suddivisione di $[0, 1]$ e qualunque settore scelto la funzione angolo continua su tutto $\mathbb{C}$: $\vartheta(t) = n2\pi t$. Qualunque sia la suddivisione scelta otteniamo:

$$W(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(P_1) - \vartheta(P_0)) = \frac{1}{2\pi}(2n\pi - 0) = n$$

Analogamente per la seconda parte della proposizione si consideri $\vartheta(t) = 2\pi(t - \frac{1}{2})$ da cui

$$W(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}(\vartheta(P_1) - \vartheta(P_0)) = \frac{1}{2\pi}(\pi - (-\pi)) = 1$$

$\square$

Proposizione 2.10 *Supponiamo che C sia la frontiera di un disco D e che $F : D \to \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ si estenda ad una funzione continua da D in $R^2 \backslash \{P\}$. Allora $W(F, P) = 0$.*

Dimostrazione. Se D è il disco di centro (x_0, y_0) e raggio r, $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ è la curva corrispondente ad F e $\tilde{F} : D \to \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ è un'estensione di F, allora

$$H(t, s) = \tilde{F}((x_0, y_0) + s(rcos(2\pi t), rsin(2\pi t)) \qquad t, s \in [0, 1]$$

è un'omotopia da γ alla curva costante nel punto $\tilde{F}(x_0, y_0)$. Questa omotopia è contenuta in $\mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ e poiché l'indice di avvolgimento di una curva costante è zero, per il Corollario 2.1 si ha $W(F, P) = 0$.

$\square$

Si dice che due funzioni F_0 ed F_1 sono *funzioni omotope* se esiste una funzione continua

$$H : C \times [0,1] \to U$$

tale che $H(P \times 0) = F_0(P)$ e $H(P \times 1) = F_1(P)$ per ogni $P \in C$.

Proposizione 2.11 *Siano F_0 ed F_1 due funzioni dalla circonferenza C in U, corrispondenti a due curve γ_0 e γ_1 da $[0,1]$ in U. F_0 ed F_1 sono funzioni omotope se e solo se γ_0 e γ_1 sono omotope attraverso curve chiuse.*

Dimostrazione. Siano γ_0 e γ_1 omotope attraverso curve chiuse. Esiste quindi un omotopia $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ tale che $H(t,0) = \gamma_0(t)$ e $H(t,1) = \gamma_1(t)$. L'omotopia che cerchiamo è

$$H'(P,s) = H(\varphi^{-1}(P), s).$$

Dove naturalmente si ha

$$H'(P \times 0) = \gamma_0(\varphi^{-1}(P)) = F_0(P) \quad e \quad H'(P \times 1) = \gamma_1(\varphi^{-1}(P)) = F_1(P)$$

Viceversa conoscendo l'omotopia tra F_0 ed F_1, che indichiamo con $H'(P,s)$, possiamo costruire un'omotopia attraverso curve chiuse come

$$H(t,s) = H'(\varphi(t), s).$$

Dove in analogia col caso precedente si ha:

$$H(t,0) = F_0(\varphi(t)) = \gamma_0(t) \quad e \quad H(t,1) = F_1(\varphi(t)) = \gamma_1(t)$$

□

Proposizione 2.12 *Sia $F_0 : S^1 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ una funzione continua. Vale il viceversa della Proposizione 2.10. Cioè se $W(F_0, P) = 0$ allora F_0 può essere estesa con continuità ad una applicazione dal disco D in $\mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$*

Dimostrazione. Poiché $\gamma = F_0 \circ \varphi$ ha lo stesso indice di avvolgimento di una curva costante nel punto P_1 interno a S^1 esiste, per la Proposizione 2.7, un omotopia attraverso curve chiuse da γ in P_1. Queste due curve possono essere realizzate tramite due opportune funzioni F_0 ed F_1 come segue:

$$P_1 = F_1 \circ \varphi \qquad e \qquad \gamma = F_0 \circ \varphi$$

Esisterà quindi per la proposizione precedente un' omotopia $H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ tra F_0 ed F_1. Possiamo quindi costruire una applicazione da D in $\mathbb{R}^2 \backslash \{P\}$ come indicato:

$$\tilde{F}(s(P_1 + Q)) = H(Q, s)$$

$\square$

Proposizione 2.13 *Se* $F : S^1 \to \mathbb{R}^2$ *è una funzione continua tale che* $F(P) \cdot P \neq 0$ *per ogni* $P \in S^1$ *allora* $W(F, 0) = 1$.

Dimostrazione. Per la proposizione 2.11 è sufficiente mostrare che F è omotopa ad una funzione che abbia grado 1. Consideriamo a tal fine le funzioni

$$H_{\pm}(P \times s) = (1 - s)F(P) \pm sP$$

queste sono omotopie da F nell'applicazione identica e da F nell'applicazione antipodale a meno di punti per cui $F(P) = cP$ o $F(Q) = -cQ$ dove c è un qualunque numero reale. Ma non possono esistere due punti con tali caratteristiche perché, se così fosse, per la continuità di F dovrebbe esistere un punto per cui $F(P) \cdot P = 0$. Per cui F deve essere omotopa all'applicazione identica o all'applicazione antipodale.

$\square$

Possiamo definire il *grado* di una applicazione continua F da una circonferenza C ad un'altra C' di centro P', che indicheremo con $deg(F)$, come

$$deg(F) = W(F, P')$$

Intuitivamente possiamo dire che il grado di F misura quante volte la prima circonferenza è avvolta attorno alla seconda attraverso F.

Proposizione 2.14 *Il grado di $F : C \to C'$ non dipende dal punto scelto all'interno di C'.*

Dimostrazione. Diciamo P'_1 un altro punto all'interno di C'. La tesi discende dalla Proposizione 2.8 e dal fatto che P'_1 e P' appartengono alla stessa componente connessa.

$\square$

Proposizione 2.15 *Sia $F : C \to C'$ una funzione tra circonferenze. Se F non è suriettiva allora $deg(F) = 0$.*

Dimostrazione. Per definizione abbiamo $deg(F) = W(F, P') = W(\gamma, P')$. Ma se F non è suriettiva allora P' appartiene alla componente illimitata di $\mathbb{R}^2 \setminus Supp(\gamma)$. Discende quindi dalla Proposizione 2.8 che $deg(F) = 0$.

$\square$

Possiamo facilmente verificare che non vale il viceversa di quest'ultima proposizione. Consideriamo il generico punto di S^1 dato da $(cos(2\pi t), sin(2\pi t))$ con $t \in [0, 1]$ e costruiamo una applicazione suriettiva che abbia grado 0. Si può facilmente verificare che una delle funzioni che cerchiamo è la seguente:

$$F(t) = (cos(4\pi t), sin(4\pi t)) \qquad t \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$F(t) = (cos(4\pi(1-t)), sin(4\pi(1-t))) \quad t \in [\frac{1}{2}, 1]$$

Proposizione 2.16 *Se $F, G : C \to C'$ sono due funzioni omotope allora hanno lo stesso grado.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.11 le due curve $\gamma = F \circ \varphi$ e $\delta = G \circ \varphi$ sono omotope e quindi hanno lo stesso indice di avvolgimento.

$\square$

Proposizione 2.17 *Sia C il bordo di un disco D.*
La applicazione $F : C \to C'$ ammette un'estensione da D in C' se e solo se F è omotopa ad una applicazione costante da C in C'.

Dimostrazione. La seconda implicazione deriva dalla Proposizione 2.12. Mentre invece se F ammette un'estensione per la Proposizione 2.10 si ha $deg(F) = 0$. Ma allora per la Proposizione 2.7, dato che il grado di una applicazione costante è nullo, si ha la tesi.

□

Proposizione 2.18 *Siano F_0 ed F_1 applicazioni tra due circonferenze C e C'. F_0 è omotopa ad F_1 se e solo se $deg(F_0) = deg(F_1)$.*

Dimostrazione. La prima implicazione deriva dalla Proposizione 2.16. La seconda discende invece dalla Proposizione 2.7.

□

Dalle proposizioni che abbiamo appena esposto deriva che due funzioni $F, G : C \to C'$ hanno lo stesso grado se e solo se sono omotope. Da questo discende che una qualunque applicazione $F : S^1 \to S^1$ avente grado n è omotopa all'applicazione, già vista precedentemente come $z \mapsto z^n$, che associa al punto $(cos(\vartheta), sin(\vartheta))$ il punto $(cos(n\vartheta), sin(n\vartheta))$. Deriva inoltre dalla proposizione precedente e dalla Proposizione 2.17 che se una applicazione F ha grado zero ammette un estensione al disco D.

Proposizione 2.19 *Se $F : C \to C'$ e $G : C' \to C''$ sono due funzioni tra circonferenze di grado rispettivamente n ed m allora il grado di $G \circ F$ è nm.*

Dimostrazione. Per quanto appena detto le funzioni F e G sono omotope alle funzioni $z \mapsto z^n$ e $z \mapsto z^m$. La loro composizione è quindi omotopa alla composizione di queste due funzioni. Ma quest'ultima applicazione manda il punto $(cos(\vartheta), sin(\vartheta))$ nel punto $(cos(m(n\vartheta)), sin(m(n\vartheta)))$.

□

Possiamo inoltre, in analogia col concetto di grado, definire il *grado locale* di una funzione in un punto.
Consideriamo una applicazione continua $F : U \to V$, dove U e V sono due

aperti del piano, e un punto P appartenente a U. Supponiamo che P abbia un intorno tale che $F(Q) \neq F(P)$ per ogni $Q \neq P$ nell'intorno. Scegliamo quindi un numero positivo r tale che non esistano punti a distanza r da P aventi la stessa immagine di P. Indichiamo dunque con $C_r(P)$ la circonferenza di raggio r centrata in P. Possiamo quindi restringere F ad una applicazione continua da $C_r(P)$ in $\mathbb{R}^2 \backslash \{F(P)\}$. Definiamo dunque il *grado locale di F in P*, che indichiamo con $deg_P(F)$, come

$$deg_P(F) = W(\gamma_r, F(P))$$

dove

$$\gamma_r(t) = F(P + (rcos(2\pi t), rsin(2\pi t)) \qquad t \in [0, 1]$$

Per assicurarci che il grado locale sia ben definito abbiamo bisogno di dimostrare il

Lemma 2.2 *Il grado locale è indipendente dalla scelta del raggio r.*

Dimostrazione. Se r' è un'altro raggio allora

$$H(t, s) = F(P + ((1 - s)r - sr')(cos(2\pi t), sin(2\pi t))) \qquad s, t \in [0, 1]$$

fornisce un'omotopia da γ_r in $\gamma_{r'}$. Si ha dunque per il Corollario 2.1
$W(\gamma_r, F(P)) = W(\gamma_{r'}, F(P))$

$\square$

Possiamo definire equivalentemente il grado locale di F in P come il grado dell'applicazione $G : S^1 \to S^1$ così definita

$$G(Q) = \frac{F(P + rQ) - F(P)}{\|F(P + rQ) - F(P)\|}$$

Proposizione 2.20 *Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare esprimibile come matrice quadrata A di ordine 2 a determinante non nullo. Allora il grado locale di F è 1 se il determinante di A è maggiore di 0, oppure -1 se il determinante è minore di 0.*

Dimostrazione. Notiamo che ogni applicazione F sopra descritta è un elemento del gruppo $GL_2(\mathbb{R})$. Questo gruppo ha due componenti connesse: quella delle matrici a determinante positivo e quella delle matrici a determinante negativo. Per cui se il determinante di A è positivo esiste una curva continua in $GL_2(\mathbb{R})$ che parte da A e arriva alla matrice identità I. Poiché questa curva determina un'omotopia tra A ed I si ha

$$1 = deg_0(I) = deg_0(F)$$

Allo stesso modo se $det(A) < 0$ esiste una curva da A alla matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si ha analogamente

$$-1 = deg_0(B) = deg_0(F)$$

.

□

La proposizione può essere estesa anche al caso in cui $F : U \to V$ sia una funzione C^∞, dove U e V sono aperti di $\mathbb{R}^2$. Basta infatti considerare la matrice Jacobiana della trasformazione come approssimazione lineare di F. Naturalmente si ha $deg_0(F) = 1$ se il determinante della matrice Jacobiana è positivo e $deg_0(F) = -1$ se il determinante è negativo.

Proposizione 2.21 *Se $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è un polinomio a coefficienti complessi allora il grado locale di F in $z \in \mathbb{C}$ è la molteplicità di z come radice del polinomio $F(T) - F(z)$.*

Dimostrazione. Consideriamo il grado locale nella forma alternativa $deg_z(F) = deg(G)$ dove $G : S^1 \to S^1$ è così definita

$$G(Q) = \frac{F(z + rQ) - F(z)}{\|F(z + rQ) - F(z)\|}.$$

Fattorizzando il polinomio al numeratore possiamo riscrivere G nella forma

$$G(Q) = \frac{(T-z)^n R(T)}{\|(T-z)^n R(T)\|}.$$

dove $T = z + rQ$, $n \in \mathbb{N}$ e $R(T)$ è un polinomio tale che $R(z) \neq 0$. Notiamo che esiste un'omotopia H tra G e l'applicazione così definita:

$$Q \mapsto \frac{(T-z)^n}{\|(T-z)^n\|}.$$

L'omotopia $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ cercata è:

$$H(Q,t) = \frac{(T-z)^n R(T)}{\|(T-z)^n R(T)\|} \cdot \frac{\|(1-t) + tR(T)\|}{(1-t) + tR(T)}$$

Per cui G ha lo stesso grado dell'applicazione su S^1 $Q \mapsto Q^n$ e cioè n.

$\square$

Siano $P = (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$ e $Q = (cos(2\pi s), sin(2\pi s))$ due punti di S^1 con $s, t \in [0,1]$. Definiamo l'intevallo tra P e Q come $[P,Q] = \varphi([t,s])$ se $t < s$ oppure $[P,Q] = \varphi([t,1] \cup [0,s])$ se $t > s$.
Ricordiamo che φ è la funzione così definita: $\varphi(t) = (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$ per ogni $t \in [0,1]$.
Sia ora $F : S^1 \to S^1$ una funzione tra circonferenze e $P = (cos(2\pi t), sin(2\pi t))$ un punto di S^1 tale che $F(Q) \neq F(P)$ per ogni Q in un certo intorno $I_P = \varphi((t', t''))$ di P dove chiaramente $t \in (t', t'')$. Consideriamo $[P_1, P_2] \subset I_P$ tale che $P \in [P_1, P_2]$. Possiamo definire il *grado locale* di F in P, che indichiamo con $deg_P(F)$ come segue:
$deg_P(F) = 1$ se $W(F([P_1, P]), 0) > 0$ e $W(F([P, P_2]), 0) > 0$
$deg_P(F) = -1$ se $W(F([P_1, P]), 0) < 0$ e $W(F([P, P_2]), 0) < 0$
$deg_P(F) = 0$ se $W(F([P_1, P]), 0) \cdot W(F([P, P_2]), 0) < 0$

Proposizione 2.22 *Sia $F : S^1 \to S^1$ una funzione tra circonferenze. Se*

$P' \in S^1$ è un punto tale che F^{-1} è un insieme finito allora

$$deg(F) = \sum_{i=1}^{n} deg_{P_i}(F)$$

dove $P_i \in F^{-1}(P')$.

Dimostrazione. Diciamo $P_{i,i+1}$ un qualunque punto appartenente a (P_i, P_{i+1}) e $P_{n,n+1}$ un qualunque punto appartenente a (P_n, P_1). Si avrà

$$deg(F) = \sum_{i=1}^{n} (W(F([P_i, P_{i,i+1}]), 0) + W(F([P_{i,i+1}, P_{i+1}]), 0))$$

dove $P_1 = P_{n+1}$.
Ogni termine della sommatoria può assumere come valori solamente 1,-1, oppure 0. In particolare assumerà il valore 0 se i due addendi hanno segno discorde, il valore 1 se hanno segno concorde positivo e il valore -1 se hanno segno concorde negativo. per dimostrare la tesi basta raggruppare diversamente i termini nella sommatoria:

$$deg(F) = \sum_{i=1}^{n} (W(F([P_{i-1,i}, P_i]), 0) + W(F([P_i, P_{i,i+1}]), 0))$$

dove $P_{0,1} = P_{n,n+1}$. La tesi discende ora direttamente dalla definizione di grado locale.

$\square$

Capitolo 3

Applicazioni

3.1 Teorema fondamentale dell'algebra

Lo scopo di questa sezione è quello di utilizzare i concetti esposti nel primo capitolo per dimostrare il ben noto teorema fondamentale dell'algebra. Identifichiamo l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ con il piano reale $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.1 (fondamentale dell'algebra) *Il polinomio a coefficienti complessi*

$$g(T) = a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0 \qquad a_n \neq 0, n > 0$$

ammette almeno una radice.

Dimostrazione. Innanzitutto consideriamo di dividere il polinomio per a_n in modo da avere $a_n = 1$. Dalla continuità della somma e del prodotto nei numeri complessi deriva la continuità di $g(T)$. Possiamo quindi considerare $g(T)$ una applicazione continua da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ supponendo per assurdo che non abbia radici. Indichiamo con g_r la restrizione di g da C_r, circonferenza centrata nell'origine e di raggio r, a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Poiché g_r può essere estesa ad una applicazione continua del disco D_r su $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, deve aversi, per la Proposizione , $W(g_r, 0) = 0$. Quello che vogliamo fare è trovare una curva il cui indice di avvolgimento debba essere lo stesso di g_r ma diverso da 0 ottenendo così una contraddizione. Consideriamo a tal scopo l'applicazione f_r ottenuta con lo stesso procedimento di g_r a partire dal polinomio $f(T) = T^n$. Per la Proposizione 2.9 si ha $W(f_r, 0) = n$. Dobbiamo ora mostrare che possiamo applicare il Teorema 2.3 alle curve g_r e f_r per un r abbastanza grande. A tal fine è sufficiente mostrare che per un certo r otteniamo

$$|f_r(z) - g_r(z)| < |f_r(z) - 0| \qquad z \in C_r$$

Ma $|f_r(z) - 0| = |z^n| = r^n$ e
$|f_r(z) - g_r(z)| = |a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0| \leq |a_{n-1}|r^{n-1} + \ldots + |a_0|$
il quale è sicuramente minore di r^n se $|a_i| < r^i/n$ per ogni $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

□

Riportiamo ora alcune conseguenze di questo teorema.

Corollario 3.1 *Un qualunque polinomio $g(T)$ di grado n è fattorizzabile come*

$$g(T) = a_n \prod_{i=1}^{n} (T - z_i)$$

Dimostrazione. Sia z_1 una radice di g, allora possiamo scrivere $g(T) = (T - z_1)h(T)$ dove $h(T)$ è un polinomio di grado $n - 1$. Applicando ad $h(T)$ il teorema precedente si ottiene la tesi per induzione.

□

Proposizione 3.1 *Se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ è una funzione continua tale che per qualche $R > 0$ si ha $|f(z)| < |z|^n$ con $|z| = R$ allora esiste un numero complesso z con $|z| < R$ tale che $F(z) = z^n + f(z) = 0$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Teorema fondamentale dell'algebra Chiamiamo C_R la circonferenza di raggio R, bordo del disco D. Supponiamo per assurdo che $F(z)$ non abbia zeri in D_R. Indichiamo con $F_R(z)$ la restrizione di F a C_R. Per la Proposizione 2.12 poiché F_R può essere estesa su tutto D_R allora si deve avere $W(F_R, 0) = 0$. Ma le ipotesi implicano che

$$|z^n - F_R(z)| < |z^n - 0| \Rightarrow |f(z)| < |z^n| \qquad \forall z \in C_R$$

Per cui per il Teorema 2.3 si dovrebbe avere $0 = W(F_R, 0) = n$.

$\square$

Proposizione 3.2 *Sia $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Se $g(z)/z^n$ tende ad una costante non nulla per $|z| \to \infty$ allora g è suriettiva.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che la funzione $f(z) = g(z) - t$, con $t \in \mathbb{C}$, si annulla in qualche punto. Ma per le ipotesi la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema precedente (sostituendo n con $n + 1$) e quindi $\forall t \in \mathbb{C}$ esiste un punto z tale che $g(z) = t$.

$\square$

3.2 Punti fissi e retrazioni

Una delle più importanti applicazioni dei concetti topologici nel resto della matematica e più in generale nelle scienze è dare dei criteri per stabilire se una applicazione continua f da uno spazio in se stesso debba avere un punto fisso, cioè un punto P tale che $f(P) = P$.
Un semplice esempio è dato dalla seguente

Proposizione 3.3 *Se $f : [a, b] \to [a, b]$ è una funzione continua deve avere un punto fisso.*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g(x) = f(x) - x$ la quale è chiaramente continua in $[a, b]$. Avremo sicuramente $g(a) \geq 0$ e $g(b) \leq 0$. Ora poiché l'immagine di $[a, b]$ attraverso g deve essere connessa (perché g è continua) dovrà contenere l'intervallo $[g(a), g(b)]$ e quindi lo zero.

$\square$

Un'altra proprietà degli intervalli è espressa dalla seguente

Proposizione 3.4 *Non esiste una funzione continua $f : [a, b] \to \{a, b\}$ tale che $f(a) = a$ e $f(b) = b$.*

Dimostrazione. La tesi deriva banalmente dal fatto che l'immagine di $[a, b]$ attraverso una tale f dovrebbe essere connessa ma $\{a, b\}$ non lo è.

$\square$

In generale se Y è un sottospazio di uno spazio topologico X, una *retrazione* è una applicazione continua $r : X \to Y$ tale che $r(P) = P$ per ogni P in Y. Diremo in questo caso che Y è un *retratto* di X.
Esaminiamo ora il caso del disco D. Mostreremo prima che non esiste una retrazione da D in $C = \partial D$ e poi, utilizzando questo risultato, dimostreremo che ogni applicazione dal disco in se stesso deve avere un punto fisso.

Proposizione 3.5 *Non esiste una retrazione dal disco al suo bordo.*

Dimostrazione. Se C è il bordo del disco, allora l'applicazione identica da C in se stesso avrà grado 1. Ma la retrazione sarebbe un'estensione dell'applicazione identità dal disco a C,il che, per la proposizione 2.10, implica che il grado sia zero.

$\square$

Teorema 3.2 (di Brouwer) *Ogni applicazione continua dal disco chiuso in se stesso deve avere un punto fisso.*

Dimostrazione. Possiamo assumere senza restrizioni che D sia il disco unitario centrato nell'origine il cui bordo è la circonferenza di raggio unitario S^1. Supponiamo che esista $f : D \to D$ continua e senza punti fissi e mostriamo che esisterebbe una retrazione di D in S^1. La retrazione cercata è l'applicazione $h : D \to S^1$ che associa ad un punto P l'intersezione tra S^1 e la semiretta passante per P e uscente da $f(P)$. Chiaramente h manda P in se stesso se $P \in S^1$ quindi ci resta da dimostrare che h è continua. Consideriamo dunque la sua forma esplicita:

$$h(P) = P + t \cdot U \quad \textit{dove} \quad U = \frac{P - f(P)}{\|P - f(P)\|}$$

e t è tale che $\|h(P)\| = 1$ ed è quindi dato da

$$t = -P \cdot U + \sqrt{1 - P \cdot P + (P \cdot U)^2}$$

Dunque h è continua perché è definita per mezzo di funzioni continue.

$\square$

Quella appena riportata non è l'unica dimostrazione topologica del Teorema. Ne diamo ora una seconda:

Dimostrazione 2. Sia $f : D \to D$ una funzione senza punti fissi. Definiamo allora $g : D \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ come $g(P) = P - f(P)$. Notiamo che vale

$$g(P) \cdot P = P \cdot P - f(P) \cdot P = 1 - f(P) \cdot P > 0 \qquad \forall P \in S^1$$

dall'ipotesi che $f(P) \neq P$ per ogni P in D. Possiamo quindi restringere g ad S^1 e costruire un'omotopia tra g e l'applicazione identità data esplicitamente da

$$H(P \times s) = (1 - s)P + sg(P)$$

Ma per la Proposizione 2.10 si ha $0 = W(g, 0) = W(P, 0) = 1$

$\square$

Avremmo anche potuto presentare prima il Teorema di Brouwer e poi far discendere da questo la Proposizione 3.5. Infatti assumendo il Teorema 3.2 ma supponendo che esista una retrazione dal disco al suo bordo si otterrebbe una contraddizione. Se r è una retrazione da D in S^1 allora $F(P) = -r(P)$ è una applicazione continua da D in se stesso senza punti fissi.

Diamo ora un'utile definizione:
diremo che uno spazio topologico X possiede la *proprietà del punto fisso* se ogni applicazione continua $f : X \to X$ ha almeno un punto fisso.
Da quanto visto prima deriva che ogni intervallo chiuso ed ogni disco chiuso possiede la proprietà del punto fisso. Dimostriamo ora che la proprietà del punto fisso è una proprietà topologica.

Proposizione 3.6 *Siano X e Y due spazi topologici omeomorfi. Se X possiede la proprietà del punto fisso allora lo stesso vale per Y.*

Dimostrazione. Sia $\varphi : X \to Y$ l'omomorfismo tra X e Y. Supponiamo che esista una funzione continua $f : Y \to Y$ che non abbia punti fissi. Ma allora possiamo costruire una funzione continua $g : X \to X$ che non ha punti fissi. In effetti questa funzione è $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

$\square$

Proposizione 3.7 *Sia X uno spazio topologico e Y un suo retratto. Se X possiede la proprietà del punto fisso allora lo stesso vale per Y.*

Dimostrazione. Indichiamo con r la retrazione da X in Y e con i l'inclusione di Y in X. Se esistesse una funzione continua $f : Y \to Y$ senza punti fissi potremmo costruire una funzione continua $g : X \to X$ che non ne ha. Questa funzione è data da $g = i \circ f \circ r$.

$\square$

Facciamo alcuni esempi tra gli spazi topologici più comuni: solo gli intervalli chiusi e i rettangoli chiusi hanno la proprietà del punto fisso mentre non la possiedono il toro, $\mathbb{R}^2$, un aperto di $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$, S^1 ed S^2.

In seguito sono riportate alcune conseguenze di quanto esposto in questa sezione.

Proposizione 3.8 *Sia D un disco, C la sua frontiera ed $F : D \to \mathbb{R}^2$ una applicazione continua. Sia inoltre P un punto di $\mathbb{R}^2$ tale che $P \notin F(C)$, ed f la restrizione di F a C. Se $W(f, P) \neq 0$ allora $P \in F(D)$.*

Dimostrazione. Se così non fosse per la Proposizione 2.10 si dovrebbe avere $W(f, P) = 0$.

$\square$

Proposizione 3.9 *Siano D e D' due dischi le cui frontiere sono le circonferenze C e C'. Sia inoltre $f : D \to \mathbb{R}^2$ una funzione continua. Se $f(C) = C'$ e il grado di $f|_C$ è diverso da zero allora $D' \subset f(D)$.*

Dimostrazione. Per definizione $deg(f) = W(f, P')$ dove P' è un qualunque punto di D'. Se $P' \in D'$ non appartenesse a $f(D)$ allora per la Proposizione 2.10 si avrebbe $deg(f) = 0$.

$\square$

Proposizione 3.10 *Sia D il disco unitario centrato nell'origine.Se $f : D \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ è una funzione continua allora esistono $P, Q \in S^1$ tali che $f(P) = \lambda P$ e $f(Q) = \mu Q$ per qualche $\lambda > 0$ e qualche $\mu < 0$.*

Dimostrazione. Consideriamo la restrizione di f alla circonferenza S^1 e indichiamola con F. Prendiamo ora in considerazione la funzione

$$H(P \times s) = \frac{sF(P) - (1-s)P}{\|sF(P) - (1-s)P\|} \qquad s \in [0,1]$$

Se non esistesse una coppia (P, s) in cui H non è continua allora H sarebbe un'omotopia tra l'applicazione antipodale ed F. Ma questo è un assurdo perché per la Proposizione 2.10 si ha $W(F, 0) = 0$. Esiste quindi una coppia (P, s) per cui

$$f(P) = \frac{1-s}{s} P$$

Allo stesso modo considerando l'applicazione identità si ottiene che per qualche coppia (Q, t) deve essere

$$f(Q) = \frac{t-1}{t} Q$$

$\square$

Proposizione 3.11 *Sia $X = \{(x, y, z) : x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0;\}$ l'ottante positivo di $\mathbb{R}^3$. Se $F : X \to X$ è una funzione continua allora esiste un vettore unitario P tale che $F(P) = \lambda P$ per qualche $\lambda \geq 0$.*

Dimostrazione. Il sottoinsieme Y di X costituito da tutti i vettori di norma 1 è omeomorfo al disco unitario D e dunque, per la Proposizione 3.6 possiede la proprietà del punto fisso. Il caso in cui uno di questi vettori è mandato nell'origine da F è banale. Consideriamo quindi il caso in cui un tale vettore non esiste. Notiamo che l'applicazione $f : Y \to Y$ definita come

$$f(P) = \frac{F(P)}{\|F(P)\|}$$

dovrebbe avere un punto fisso e quindi $F(P) = \|F(P)\|P$.

$\square$

Questo risultato implica che ogni matrice quadrata di ordine 2 o 3 le cui entrate siano non negative ammette almeno un autovalore non negativo. Per dimostrarlo basta considerare le matrici come applicazioni continue dal primo quadrante in se stesso o da X in X.

Proposizione 3.12 *Se $f : D \to \mathbb{R}^2$ è una funzione continua allora deve valere uno dei due casi seguenti:*

1. *Esiste un punto $Q \in D$ tale che $f(Q) = Q$.*
2. *Esiste qualche punto $P_1 \in S^1$ tale che $f(P_1) = \lambda_1 P_1$ per qualche $\lambda_1 > 1$ e qualche punto $P_2 \in S^1$ tale che $f(P_2) = \lambda_2 P_2$ per qualche $\lambda_2 < 1$.*

Dimostrazione. Prendiamo in considerazione l'applicazione $g(P) = f(P) - P$. Se esiste un punto Q tale che $g(Q) = 0$ allora vale la 1. In caso contrario g soddisfa le condizioni della Proposizione 3.10. Esistono quindi $\lambda > 0$ e $P_1 \in S^1$ tali che $\lambda P_1 = f(P_1) - P_1$ e quindi abbiamo trovato $\lambda_1 = \lambda + 1 > 1$. Sempre per la Proposizione 3.10 esistono $\mu < 0$ e $P_2 \in S^1$ per i quali $f(P_2) = (1 - \mu)P_2$ da cui $\lambda_2 = (1 - \mu) < 1$.

$\square$

Proposizione 3.13 *Se $f : S^1 \to S^1$ è una applicazione continua senza punti fissi allora $deg(f) = 1$.*

Dimostrazione. Possiamo costruire un'omotopia $H : S^1 \times [0,1] \to S^1$ tra l'applicazione antipodale ed f. In effetti questa omotopia è

$$H(P \times s) = \frac{sf(P) - (1-s)P}{\|sf(P) - (1-s)P\|} \qquad s \in [0,1]$$

Ne deduciamo, per la Proposizione 2.11, che $deg(f) = 1$

□

Una conseguenza della precedente Proposizione il fatto che una qualunque funzione continua da S^1 in sé senza punti fissi è necessariamente suriettiva poiché se non lo fosse il suo grado dovrebbe essere 0.

Proposizione 3.14 *Se $f : D \to \mathbb{R}^2$ è una funzione continua e $f(P) \cdot P \neq 0$ per ogni P in S^1 allora esiste qualche $Q \in D$ per cui $f(Q) = 0$.*

Dimostrazione. Detta F la restrizione di f ad S^1 per la Proposizione 2.13 si ha $W(F, 0) = 1$. La tesi discende direttamente dalla Proposizione 3.8.

□

3.3 Antipodi

L'*antipodo o punto antipodale* di un punto P di una circonferenza C (o di una sfera S) è il punto opposto a P, cioè l'altro punto di intersezione tra C (o S) e la retta r, passante per P e per il centro. Indicheremo l'antipodo di P con P^*. Se il centro coincide con l'origine si avrà $P^* = -P$.
Chiameremo *applicazione antipodale* l'applicazione che associa P^* a P. Come conseguenza della seconda parte della Proposizione 2.9 si ha che il grado dell'applicazione antipodale è 1.

Lemma 3.1 (di Borsuk) *Se C e C' sono circonferenze ed $f : C \to C'$ è una applicazione tale che $f(P^*) = f(P)^*$ per ogni P allora il grado di f è dispari.*

Dimostrazione. Possiamo assumere senza restrizioni $C = C' = S^1$.
Sia $\gamma(t) = f(cos(t), sin(t))$ con $t \in [0, \pi]$. Dal momento che $\gamma(\pi) = -\gamma(0)$ la variazione dell'angolo lungo γ deve essere $2\pi n + \pi$ per qualche n intero. Sappiamo quindi che $W(\gamma, 0) = n + \frac{1}{2}$. Consideriamo ora

$$\sigma(t) = f(cos(t+\pi), sin(t+\pi)) = -\gamma(t) \qquad t \in [0, \pi]$$

Discende direttamente dalla definizione di indice di avvolgimento che $W(\gamma, 0) = W(\sigma, 0)$ e quindi $deg(f) = W(\gamma, 0) + W(\sigma, 0) = 2n + 1$.

□

Presentiamo ora il teorema di Borsuk-Ulam, un risultato non intuitivo. Prima di enunciarlo dobbiamo però dimostrare il seguente

Lemma 3.2 *Non esiste una applicazione f da una sfera S ad una circonferenza C tale che $f(P^*) = f(P)^*$ per ogni P in S.*

Dimostrazione. Assumiamo come è solito $S = S^2$ e $C = S^1$ e supponiamo per assurdo che una tale applicazione esista. Consideriamo quindi l'applicazione $g : D \to S^1$, che va dal disco alla circonferenza, definita come:

$$g(x, y) = f((x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}))$$

Notiamo che g è ottenuta come composizione di f e h^{-1} dove h è la proiezione dall'emisfero superiore di S^2 sul disco D. Ora dalla continuità di h^{-1}, in quanto inversa di un omeomorfismo, discende la continuità di g.
Si ha dunque

$$g(P^*) = f(P^*) = f(P)^* = g(P)^*$$

e quindi per il Lemma 3.1 il grado della restrizione di g ad S^1 deve essere dispari. Ma l'applicazione può essere estesa su tutto il disco D e quindi il suo grado deve essere 0 per la Proposizione 2.10.

□

Teorema 3.3 (di Borsuk-Ulam) *Per ogni applicazione continua $f : S \to \mathbb{R}^2$ da una sfera al piano reale esiste un punto $P \in S$ tale che $f(P) = f(P^*)$.*

Dimostrazione. Assumiamo $S = S^2$ e supponiamo che non esista un tale P. Possiamo quindi definire l'applicazione continua $g : S^2 \to S^1$ così definita

$$g(P) = \frac{f(P) - f(-P)}{\|f(P) - f(-P)\|}$$

per cui vale la relazione $g(-P) = -g(P)$ in contraddizione con il Lemma 3.2.

$\square$

Occupiamoci ora di un problema la cui soluzione sembrava ovvia sino al momento in cui non se ne è cercata una dimostrazione rigorosa e cioè del fatto che aperti di diverse dimensioni non possono essere omeomorfi. Il fatto che non possano essere diffeomorfi è più semplice perché può essere ridotto, tramite le matrici Jacobiane, al fatto che spazi vettoriali di diverse dimensioni non possono essere isomorfi. A rendere meno ovvia la soluzione del problema è stata l'esistenza di funzioni continue da intervalli in quadrati. Il primo caso che ci si presenta (da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^n$) è abbastanza semplice. Supponiamo che un tale omeomorfismo da un intervallo aperto ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ esista. Basterebbe togliere un punto per disconnettere l'intervallo ma l'aperto di $\mathbb{R}^n$ rimarrebbe ancora connesso.
Non è invece scontato il seguente

Corollario 3.2 (Invarianza della dimensione) *Un aperto di $\mathbb{R}^2$ non può essere omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^n$ per $n > 2$.*

Dimostrazione. Se esistesse, un tale omeomorfismo dovrebbe portare una bolla D^n sul piano e, poiché $S^2 \subset D^3 \subset D^n$, esisterebbe un embedding dalla sfera al piano in contraddizione con il Teorema 3.3.

$\square$

Presentiamo ora alcune conseguenze di quanto detto.

Proposizione 3.15 *Sia $f : C \to C'$ una funzione continua tra circonferenze. Se $f(P^*) = f(P)$ per ogni P allora il grado di f è pari.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del Lemma 3.1. Assumiamo quindi $C = C' = S^1$ e consideriamo la curva

$$\gamma(t) = f(cos(t), sin(t)) \qquad con \quad t \in [0, \pi]$$

Dal momento che $\gamma(\pi) = \gamma(0)$ la variazione dell'angolo lungo γ deve essere $2\pi n$ per qualche n intero. Sappiamo quindi che $W(\gamma, 0) = n$. Consideriamo ora

$$\sigma(t) = f(cos(t + \pi), sin(t + \pi)) = \gamma(t) \qquad con \quad t \in [0, \pi]$$

Discende direttamente dalla definizione di indice di avvolgimento che $W(\gamma, 0) = W(\sigma, 0)$ e quindi $deg(f) = W(\gamma, 0) + W(\sigma, 0) = 2n$.

□

La seguente è una generalizzazione del Lemma 3.1.

Proposizione 3.16 *Sia $f : C \to \mathbb{R}^2 \backslash \{Q\}$ una funzione continua. Se Q appartiene al segmento tra $f(P^*)$ ed $f(P)$ per ogni $P \in C$ allora l'indice di avvolgimento di f attorno a Q è dispari.*

Dimostrazione. Ancora una volta poniamo $C = S^1$ e consideriamo la curva

$$\gamma(t) = f(cos(t), sin(t)) \qquad con \quad t \in [0, \pi]$$

Per le ipotesi su f si ha che se Q vede $\gamma(0)$ sotto un angolo ϑ allora vedrà $\gamma(\pi)$ sotto un angolo $\vartheta + \pi$ e quindi la variazione dell'angolo lungo γ è di $2n\pi + \pi$. Si ottiene dunque $W(\gamma, Q) = n + \frac{1}{2}$. Prendendo ora in esame la curva

$$\sigma(t) = f(cos(t), sin(t)) \qquad con \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

è facile notare, con lo stesso ragionamento, che vale $W(\sigma, Q) = n + \frac{1}{2}$. Otteniamo quindi $W(f, Q) = W(\gamma, Q) + W(\sigma, Q) = 2n + 1$.

□

Proposizione 3.17 *Sia D un disco e C la sua frontiera. Se $f : D \to \mathbb{R}^2$ è una funzione continua tale che $f(P^*) = -f(P)$ per ogni $P \in C$ allora esiste $Q \in D$ tale che $f(Q) = 0$.*

Dimostrazione. Se tale punto non esistesse per la Proposizione 2.10 si avrebbe $deg(f) = 0$ ma per la proposizione precedente $W(f, 0)$ dovrebbe essere dispari.

$\square$

Proposizione 3.18 *Siano $f, g : S^2 \to \mathbb{R}$ due funzioni continue.*
Se $f(P^*) = -f(P)$ e $g(P^*) = -g(P)$ per ogni $p \in S^2$ allora f e g hanno uno zero in comune.

Dimostrazione. Indichiamo con π^{-1} l'inversa della proiezione dell'emisfero superiore di S^2 sul disco D. Consideriamo la funzione $h : D \to \mathbb{R}^2$ definita come

$$h(Q) = (f(\pi^{-1}(Q), g(\pi^{-1}(Q))$$

Questa funzione è tale che $h(Q^*) = -h(Q)$ per ogni $Q \in S^1$ e quindi per la precedente proposizione esiste un punto $P \in D$ tale che

$$f(\pi^{-1}(P)) = g(\pi^{-1}(P)) = 0$$

$\square$

Proposizione 3.19 *Se $f : S^1 \to \mathbb{R}$ è una funzione continua allora esiste un punto $P \in S^1$ tale che $f(P) = f(-P)$.*

Dimostrazione. Se un tale punto non esistesse potremmo definire una funzione continua g da S^1 in $\mathbb{R}$ tale che $g(S^1) = \{-1, 1\}$. La funzione citata è

$$g(P) = \frac{f(P) - f(-P)}{\|f(P) - f(-P)\|}$$

Ma questo è un assurdo perché l'immagine di un insieme connesso tramite una funzione continua deve essere un insieme connesso.

$\square$

Proposizione 3.20 *Se $f : C \to C'$ è una funzione continua tale che $f(P^*) \neq f(P)$ per ogni P allora $deg(f) \neq 0$.*

Dimostrazione. Per le ipotesi su f è ben definita la funzione $F : S^1 \to S^1$ data da
$$F(P) = \frac{f(P) - f(P^*)}{\|f(P) - f(P^*)\|}$$
Questa funzione verifica le ipotesi del Lemma 3.1 cioè $F(P^*) = F(P)^*$ per ogni $P \in S^1$ e quindi $deg(F) \neq 0$. Ora per concludere la dimostrazione ci basta trovare un'omotopia tra f ed F. In effetti questa omotopia esiste ed è data da
$$H(P \times s) = \frac{f(P) - sf(P^*)}{\|f(P) - sf(P^*)\|}$$
Quindi per la Proposizione 2.18 si ha
$$deg(f) = deg(F) \neq 0$$
$\square$

Proposizione 3.21 *Sia $f : S \to S'$ una funzione continua tra due sfere. Se $f(P) \neq f(P^*)$ per ogni P allora f è suriettiva.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un punto Q di S' tale che $Q \notin f(S)$. Indichiamo con p_Q la proiezione stereografica da Q su $\mathbb{R}^2$. Allora per assurdo $p_Q \circ f$ sarebbe una funzione da S in $\mathbb{R}^2$ tale che $f(P) \neq f(P^*)$ per ogni P in contraddizione con il Teorema 3.3.

$\square$

Proposizione 3.22 *Sia $f : C \to C$ una funzione continua. Se $deg(f) \neq 1$ allora esistono due punti P e Q tali che $f(P) = P$ ed $f(Q) = Q^*$.*

Dimostrazione. Se un tale P non esistesse allora f sarebbe omotopa all'applicazione antipodale tramite l'omotopia
$$H(P \times s) = \frac{(1-s)f(P) - sP}{\|(1-s)f(P) - sP\|}$$
e quindi per la Proposizione 2.11 avremmo $deg(f) = 1$.
Allo stesso modo se non esistesse un tale Q allora f sarebbe omotopa all'ap-

plicazione antipodale tramite l'omotopia

$$H(P \times s) = \frac{(1-s)f(P) + sP}{\|(1-s)f(P) + sP\|}$$

e quindi sempre per la Proposizione 2.11 avremmo $deg(f) = 1$.

$\square$

3.4 Teorema del panino

Un interessante applicazione del Teorema 3.3 è il cosiddetto problema del panino al prosciutto: si possono tagliare entrambe le fette di pane e una fetta di prosciutto a metà con un solo taglio del coltello?
Prima di risolvere il problema dobbiamo dimostrare due importanti proprietà. Sia X un insieme aperto, connesso e limitato di $\mathbb{R}^3$ ed S una sfera di raggio r che lo contiene. Diciamo l_P il segmento che unisce Q e Q^*.
Vale allora il seguente

Lemma 3.3 *Esiste un unico punto $z = P_{l(Q),X} \in l(Q)$ tale che il piano R_z passante per z perpendicolare a $l(Q)$ divide X a metà per volume.*

Dimostrazione. Per ogni punto $x \in l(Q)$ diciamo R_x il piano passante per x e perpendicolare ad $l(Q)$, e hx il volume della parte di X che sta nello stesso semispazio di Q. Quando x varia da Q a Q^* hx varia tra 0 e il volume di X. Scelti quindi due punti x_1 e x_2 su $l(Q)$ si avrà in ogni caso

$$|hx_1 - hx_2| < \pi r^2 |x_1 - x_2|$$

e questo garantisce che h varia con continuità al variare di $x \in l(Q)$. Quindi per la Proposizione 1.3 esiste almeno un punto $z \in l(Q)$ tale che hz sia metà del volume di X. Dobbiamo ancora dimostrare l'unicità di z. Supponiamo quindi che esista z' tale che $hz' = hz$. Esisteranno quindi due piani paralleli P_1 e P_2 che dividono a metà X. Chiamiamo Y lo spazio tra i due piani. Deve esistere sicuramente un punto $p \in X \cap Y$ perché X è connesso. Ora poiché sia X che Y sono aperti deve esistere un intorno U_p di p di volume non nullo contenuto in $X \cap Y$. Ma allora muovendoci da z a z' il volume varia almeno del volume di U_p e quindi P_1 e P_2 non possono dividere entrambi X a metà.

$\square$

Dimostriamo inoltre il seguente

Lemma 3.4 *La funzione $f_X : S \to \mathbb{R}$ che associa al punto Q la distanza del punto $P_{l(Q),X}$ da Q è continua.*

Dimostrazione. Sia c un punto generico della sfera e R_c il piano individuato dal punto $P_{l(c),X}$. Sia inoltre x un punto vicino a c e R_x il piano definito analogamente a R_c. Siano ora u e v i punti nei quali R_c interseca la circonferenza massima passante per x e c. Diciamo R' ed R'' i piani perpendicolari ad $l(x)$ passanti rispettivamente per u e v. Il volume di X dalla stessa parte di c rispetto a R' sarà al più la metà del volume totale e lo stesso ragionamento vale per R'' ma considerando la parte in cui non è contenuto c. Per cui il piano R_x deve essere tra R' ed R''. Si avrà dunque

$$|P_{l(c),X} - P_{l(x),X}| < d(R', R'') = w$$

Denotando con e la proiezione di x su $l(c)$ si ottiene per la similitudine dei due triangoli:

$$\frac{w}{d(u,v)} = \frac{d(e,x)}{r}$$

Notando inoltre che $d(u,v) \leq 2r$ e $d(e,x) < d(c,x)$ si ottiene

$$w < 2d(c,x)$$

In definitiva fissato $\varepsilon > 0$ basta scegliere $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ per avere $|P_{l(c),X} - P_{l(x),X}| < \varepsilon$ per ogni x nell'intorno di c di raggio δ.

$\square$

Abbiamo ora le conoscenze per dimostrare il

Teorema 3.4 (di Stone-Tukey) *Dati tre sottoinsiemi aperti A, B e C di $\mathbb{R}^3$ limitati e connessi esiste un piano che divide ognuno dei tre a metà per volume.*

Dimostrazione. Notiamo innanzitutto che per la funzione f_X sopra definita vale la relazione $f_X(Q^*) = 2r - f_X(Q)$. Consideriamo ora una sfera S' che contenga tutti e tre i sottoinsiemi e la funzione $g : S' \to \mathbb{R}^2$ data da:

$$g(Q) = (f_A(Q) - f_C(Q), f_B(Q) - f_C(Q))$$

Questa funzione è continua perché ogni componente è sottrazione tra funzioni continue ed inoltre soddisfa la relazione $g(Q^*) = -g(Q)$. Discende quindi dal Teorema 3.3 che esiste un punto Q per cui $P_{l(Q),A} = P_{l(Q),B} = P_{l(Q),C}$ da cui la tesi.

□

Questo risultato è abbastanza intuitivo se si pensa che il piano passante per i baricentri dei tre sottoinsiemi si avvicina molto al piano desiderato. Non è altrettanto intuitivo il prossimo teorema, al quale anteponiamo il

Lemma 3.5 *Se K è un insieme compatto in $\mathbb{R}^n$ ed $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è la funzione che associa al punto P la sua distanza da K allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia P un punto dello spazio. Si noti che fissato P possiamo considerare la funzione che associa ad ogni punto di K la sua distanza da P. Come facilmente si verifica questa funzione è continua e quindi, essendo definita su un compatto, ammette minimo. Possiamo quindi scrivere f nella forma

$$f(P) = \min_{x \in K} d(x, P)$$

Sia ora R un punto tale che $d(R, P) = f(P)$. Osserviamo che per la disuguaglianza triangolare abbiamo

$$f(Q) \leq d(Q, R) + \delta \leq d(Q, P) + d(P, r) + \delta < f(P) + 2\delta$$

Da cui

$$|f(Q) - f(P)| < 2\delta$$

Quindi fissato $\varepsilon > 0$ si ha $|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$ per ogni Q in $I_\delta(P)$ dove $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

□

Possiamo ora dimostrare il

Teorema 3.5 (di Lusternik-Schnirelman-Borsuk) *É impossibile coprire una sfera con tre insiemi chiusi tali che nessuno dei tre contenga una coppia di punti antipodali.*

Dimostrazione. Supponiamo che la sfera S sia coperta da tre insiemi chiusi K_1, K_2 e K_3. Definiamo le funzioni f_i da S in $\mathbb{R}$ come nel lemma precedente per $i = 1, 2, 3$. Consideriamo ora l'applicazione $g : S \to \mathbb{R}^2$ data da

$$g(P) = (f_1(P) - f_3(P), f_2(P) - f_3(P))$$

Per il Teorema 3.3 esiste un punto P tale che $g(P) = g(P^*)$ da cui discende $f_i(P) - f_j(P) = f_i(P^*) - f_j(P^*)$ per ogni i e j.
Ma se $p \in K_i$ allora $P^* \in K_j$ con $i \neq j$ per ipotesi e quindi

$$0 > -f_j(P) = f_i(P) - f_j(P) = f_i(P^*) - f_j(P^*) = f_i(P^*) > 0$$

□

Facciamo notare che da questo Teorema possiamo far discendere il Lemma 3.2 e quindi il Teorema di Borsuk-Ulam:
Consideriamo tre insiemi chiusi che ricoprono la circonferenza. Se potessimo definire una funzione f dalla sfera S alla circonferenza C tale che $f(P^*) = f(P)^*$ per ogni P in S allora le controimmagini dei tre insiemi attraverso f sarebbe un ricoprimento della sfera in contraddizione con il teorema appena dimostrato.
Mostriamo inoltre che è possibile ricoprire la sfera con quattro insiemi chiusi tali che nessuno di questi contenga una coppia di punti antipodali. Consideriamo la parametrizzazione della sfera data in coordinate sferiche cioè

$$P = (sin(\vartheta)cos(\varphi), sin(\vartheta)sin(\varphi), cos(\vartheta))$$

Utilizzando questa notazione una possibile scelta dei quattro sottoinsiemi è:
$K_1 = \{P \in S^2 : \vartheta \in [\frac{2}{3}\pi, \pi]; \varphi \in [0, 2\pi]\}$
$K_2 = \{P \in S^2 : \vartheta \in [0, \frac{2}{3}\pi]; \varphi \in [0, \frac{2}{3}\pi]\}$
$K_3 = \{P \in S^2 : \vartheta \in [0, \frac{2}{3}\pi]; \varphi \in [\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi]\}$
$K_4 = \{P \in S^2 : \vartheta \in [0, \frac{2}{3}\pi]; \varphi \in [\frac{4}{3}\pi, 2\pi]\}$

Vediamo ora alcuni risultati che derivano da quanto esposto in questa sezione.

Proposizione 3.23 *La palla tridimensionale $D^3 = \{P \in \mathbb{R}^3 : \|P\| \leq 1\}$ non può essere realizzata come unione di tre insiemi chiusi K_1, K_2 e K_3 di diametro minore di 2.*

Dimostrazione. Se così fosse l'unione delle intersezioni dei tre insiemi con la sfera S^1 sarebbe una realizzazione di S^1 come unione di tre insiemi chiusi tali che nessuno dei tre contenga una coppia di punti antipodali cioè

$$\bigcup_{i=1}^{3}(K_i \cap S^1) = S^1$$

□

Proposizione 3.24 *É impossibile ricoprire una circonferenza S^1 con due insiemi chiusi tali che nessuno dei due contenga una coppia di punti antipodali.*

Dimostrazione. Supponiamo che due insiemi così fatti esistano. Analogamente a quanto detto per il Teorema 3.5 definiamo le funzioni f_i da S^1 in $\mathbb{R}$ come nel lemma precedente per $i = 1, 2$. Consideriamo ora l'applicazione $g : S \to \mathbb{R}$ data da

$$g(P) = f_1(P) - f_2(P)$$

Per la Proposizione 3.19 esiste un punto P tale che $g(P) = g(P^*)$ da cui discende $f_1(P) - f_2(P) = f_1(P^*) - f_2(P^*)$. Ma allora se $P \in K_1$ si ha

$$0 > -f_2(P) = f_1(P^*) > 0$$

e se $P \in K_2$ si ha

$$0 < f_1(P) = -f_2(P^*) < 0$$

$\square$

Dato un insieme X in S^n indicheremo con X^* l'insieme

$$X^* = \{P^* : P \in S^n\}$$

Proposizione 3.25 *Siano A, B e C tre sottoinsiemi chiusi e disgiunti di S^2. Se ognuno dei tre sottoinsiemi non contiene punti antipodali allora i sei sottoinsiemi A, B, C, A^*, B^* e C^* non possono ricoprire la sfera.*

Dimostrazione. Se così fosse allora i tre sottoinsiemi $A \cup B^*$, $B \cup C^*$ e $C \cup A^*$ sarebbero tali che nessuno dei tre contenga una coppia di punti antipodali e ricoprirebbero la sfera in contraddizione con il Teorema 3.5.

$\square$

Bibliografia

[1] William Fulton; Algebraic Topology, a first course; Springer-Verlag; 1995

[2] Andrea Loi; Appunti di topologia generale; 2010

[3] W.G.Chinn e N.E.Steenrod; First concepts of topology; The mathematical association of america; 1966

[4] John L. Kelley; General Topology; Ishi Press International; 1955