Il Teorema di Gauss-Bonnet

Relatore: Prof. Andrea Loi   Candidato: Francesco Falqui

Università degli Studi di Cagliari

28 Novembre 2016

Teorema di Gauss-Bonnet

Sia M^2 *una varietà differenziabile, bidimensionale ,compatta e orientata. Sia* X *un campo di vettori differenziabile su* M *con punti singolari isolati* $p_1, ..., p_k$*, di indici rispettivamente* $I_1, ..., I_k$*. Allora, per ogni metrica Riemanniana su* M*,*

$$\int_M K d\sigma = 2\pi \sum_{i=1}^{N} I_i$$

Per le varietà bidimensionali con bordo ∂M avente spigoli $s_1, ..., s_n$, di angoli esterni rispettivamente $\alpha_1, ..., \alpha_n$, vale un risultato più generale

$$\int_M K d\sigma + \int_{\partial M} k_g ds + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 2\pi \sum_{i=1}^{N} I_i = 2\pi \chi(M)$$

Dove $\chi(M)$ è la Caratteristica di Eulero-Poincare.

Per ogni punto $\boldsymbol{p}$ appartenente a una varietà Riemaniana $\boldsymbol{M^2}$, possiamo scegliere un intorno $\boldsymbol{U \subset M}$ in cui possiamo definire due campi di vettori ortonormali $\boldsymbol{\{e_1, e_2\}}$, detto riferimento.
Ad ogni frame possiamo associare due 1-forme $\boldsymbol{\{\omega_1, \omega_2\}}$ attraverso la condizione $\boldsymbol{\omega_i(e_j) = \delta_i j}$, detto riferimento duale.

Teorema di Levi-Civita

Sia $\boldsymbol{M^2}$ *una varietà Riemanniana. Sia* $\boldsymbol{U \subset M}$ *un aperto in cui è definito un riferimento* $\boldsymbol{\{e_1, e_2\}}$*, e sia* $\boldsymbol{\{\omega_1, \omega_2\}}$ *il riferimento duale associato. Allora esiste una 1-forma univoca* $\boldsymbol{\omega_{12} = -\omega_{21}}$*, tale che*

$$\boldsymbol{dw_1 = \omega_{12} \wedge \omega_2} \qquad \boldsymbol{d\omega_2 = \omega_{21} \wedge \omega_2}$$

Prop. 1 (Curvatura Gaussiana)

Sia M^2 *una varietà Riemanniana. Per ogni* $p \in M$*, possiamo definire il numero* $K(p)$ *scegliendo un riferimento* e_1, e_2 *in un intorno di* p *e ponendo*

$$d\omega_{12}(p) = -K(p)(\omega_1 \wedge \omega_2)(p) = -K\sigma$$

Allora $K(p)$ *non dipende dal riferimento scelto, ed è chiamato Curvatura Gaussiana di* M *in* p*.*

Prop. 2 (Differenziale funzione angolo)

Sia $\gamma : I \to U \subset M$ *una curva su una varietà Riemanniana. Siano* $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, $\{e_1, e_2\}$ *due riferimenti, aventi la stessa orientazione, definiti in* U*.*
Sia $\varphi(t)$, $t \in I$, *l'angolo tra* $\bar{e}_1$ *ed* e_1, *allora*

$$\bar{\omega}_{12} = \omega_{12} + d\varphi$$

Indice di un campo di vettori

Dato un campo $\boldsymbol{X}$ definito sulla superficie, diciamo che $\boldsymbol{p}$ è un punto singolare se $\boldsymbol{X(p) = 0}$, se inoltre esiste un intorno $\boldsymbol{U \subset M}$ contenente $\boldsymbol{p}$ e che non contiene altri punti singolari, allora diciamo che $\boldsymbol{p}$ è un punto singolare isolato.

Def. 1

Sia $\boldsymbol{X}$ un campo di vettori su una varietà $\boldsymbol{M^2}$, e sia $\boldsymbol{p}$ un punto singolare isolato, consideriamo una curva semplice e chiusa $\boldsymbol{C}$, tale che sia il bordo di una ragione compatta che contiene $\boldsymbol{p}$ e nessun altro punto singolare. Siano $\boldsymbol{\{\bar{e}_1 = X/|X|, \bar{e}_2\}}$, $\boldsymbol{\{e_1, e_2\}}$ due riferimenti. Allora

$$\int_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{d\varphi = 2\pi I}$$

L'intero $\boldsymbol{I}$ è detto indice di $\boldsymbol{X}$ in $\boldsymbol{p}$.

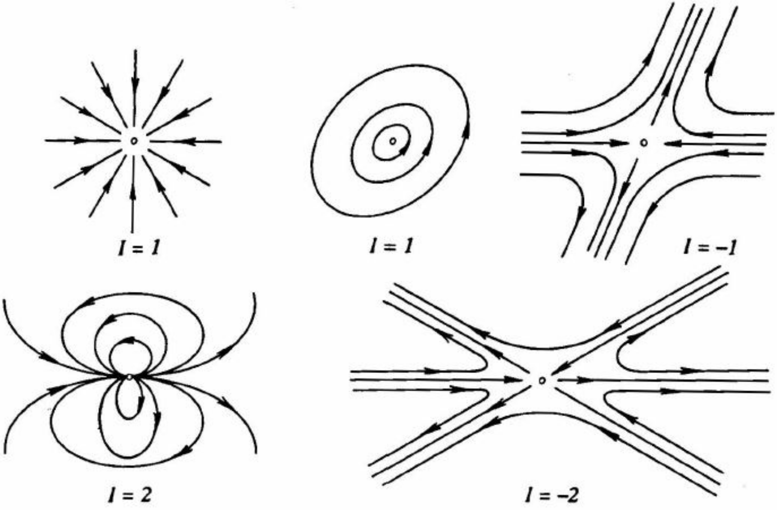

Figura: Indici campi vettoriali piani

Applicazioni Teorema di Gauss-Bonnet

1 **Esempio.**

Non esiste una metrica Riemanniana sul toro $\boldsymbol{T}$, tale che $\boldsymbol{K}$ sia non nullo e non cambi segno.

Se infatti consideriamo il toro immerso in $\mathbf{R^3}$, con la parametrizzazione

$$\boldsymbol{X(u,v) = \{(R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u\}}$$

il campo di vettori $\boldsymbol{X_u = \{-r\cos v\sin u, -r\sin u\sin v, r\cos u\}}$ non ha nessun punto singolare. Quindi

$$\boldsymbol{\int_T K d\sigma = \sum_i^3 I_i = 0}$$

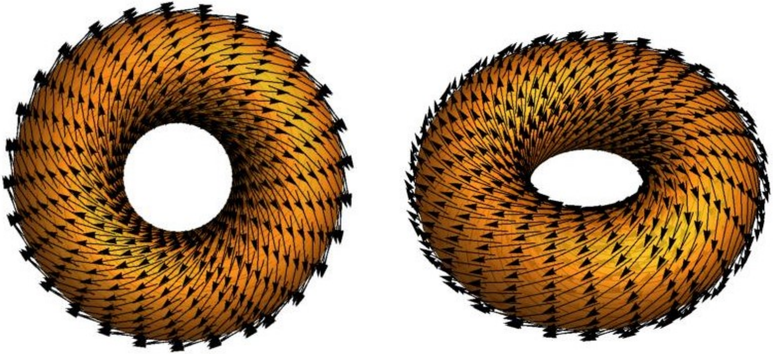

Figura: Campo $\boldsymbol{X_u}$ sul Toro

Applicazioni Teorema di Gauss-Bonnet

2 **Esempio.**

La somma degli angoli interni di un triangolo geodetico $\boldsymbol{T}$ *è:*

1. *Uguale a* $\boldsymbol{\pi}$ *se* $\boldsymbol{K = 0}$.
2. *Maggiore di* $\boldsymbol{\pi}$ *se* $\boldsymbol{K > 0}$.
3. *Minore di* $\boldsymbol{\pi}$ *se* $\boldsymbol{K < 0}$.

Applicando Gauss-Bonnet su un triangolo geodetico si ottiene

$$\boldsymbol{\int_T K d\sigma + \sum_i^3 \theta_i = 2\pi}$$

Siano $\boldsymbol{\phi_1 = \pi - \theta_1}$, $\boldsymbol{\phi_2 = \pi - \theta_2}$, $\boldsymbol{\phi_3 = \pi - \theta_3}$ gli angoli interni. Quindi,

$$\boldsymbol{\int_T K d\sigma = 2\pi - \sum_i^3 (\pi - \theta_i) = -\pi + \sum_i^3 \phi_i}$$

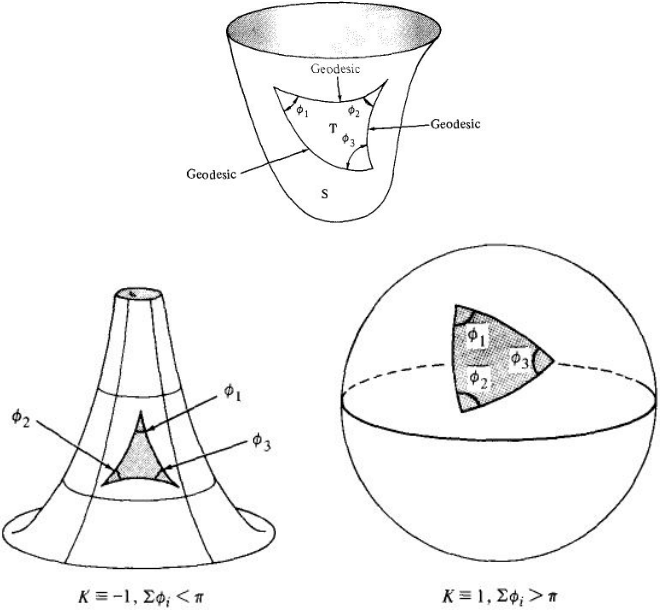

Figura: Esempi triangoli geodetici

Ingredienti per la dimostrazione

Lemma. 1
$\boldsymbol{I}$ *non dipende dalla curva* $\boldsymbol{C}$.

Lemma. 2
$\boldsymbol{I}$ *non dipende dalla scelta dell'orientamento* $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\}$. *Inoltre, sia* $\boldsymbol{S_r = \partial B_r}$ *il bordo di una palla di raggio* $\boldsymbol{r}$ *centrato in* $\boldsymbol{p}$. *Allora, il limite*

$$\lim_{r \to 0} \int_{S_r} \boldsymbol{\omega_{12}} = 2\pi \bar{\boldsymbol{I}}$$

esiste, e $\bar{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I}$.

Lemma. 3
I non dipende dalla metrica.

Dimostrazione Teorema di Gauss-Bonnet

Consideriamo in $\boldsymbol{M \ \setminus \bigcup_i \{p_i\}}$ il riferimento $\boldsymbol{\{\bar{e}_1 = X/|X|, \bar{e}_2\}}$ orientato secondo M. Indichiamo con $\boldsymbol{B_i}$ una palla centrata in $\boldsymbol{p_i}$ tale che non contenga altri punti singolari oltre $\boldsymbol{p_i}$.
Considero l'integrale

$$\int_{\boldsymbol{M \ \setminus \bigcup_i \{B_i\}}} \boldsymbol{K\omega_1 \wedge \omega_2} = -\int_{\boldsymbol{M \ \setminus \bigcup_i \{B_i\}}} \boldsymbol{d\omega_{12}}$$

Dal teorema di Stokes, abbiamo che

$$-\int_{\boldsymbol{M \ \setminus \bigcup_i \{B_i\}}} \boldsymbol{d\omega_{12}} = \int_{\boldsymbol{\bigcup_i \{\partial B_i\}}} \boldsymbol{\omega_{12}} = \sum_{\boldsymbol{i}} \int_{\boldsymbol{\partial B_i}} \boldsymbol{\omega_{12}}$$

Facendo tendere i raggi $\boldsymbol{r_i}$ a $\mathbf{0}$, e applicando il Lemma 2 otteniamo la tesi

$$\int_{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{K\omega_1 \wedge \omega_2 = 2\pi \sum_i I_i}$$

Q.E.D.