Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Scienze
Corso di Laurea in Matematica

Il Teorema del Punto Fisso di Brouwer: una Dimostrazione Combinatoria

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di
Fabrizio Zucca

Anno Accademico 2012-2013

Indice

Elenco delle figure

Introduzione

Il teorema del punto fisso enunciato per la prima volta da Luitzen Egbertus Jan Brouwer, è uno dei teoremi principi della topologia algebrica, nella versione classica esso afferma che il disco $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ gode della proprietà del punto fisso topologico, ossia qualsiasi funzione continua dal disco in se stesso possiede un punto fisso. Per quanto il teorema sia facile da enunciare è notoriamente complicato da dimostrare, nel caso più generale richiede sofisticati strumenti topologici. In questa tesi quello che faremo è presentare una dimostrazione del teorema basata su un risultato di combinatoria noto come lemma di Sperner. Per quanto riguarda il caso tridimensionale, la prima dimostrazione del teorema fu data da Piers Bohl nel 1904 e poi dallo stesso Brouwer nel 1909, un anno più tardi fu Hadamard a trovare una prova per il caso generale e solo due anni dopo Brouwer ne pubblicò una differente.

La tesi è strutturata in due capitoli, nel primo dei quali vengono richiamati alcuni concetti di analisi e combinatoria necessari per la dimostrazione del teorema quali la proprietà topologica del punto fisso, la nozione di simplesso, la definizione di coordinate baricentriche di un insieme, di triangolazione e labelling associato. Nel Capitolo 2 viene trattato il caso in dimensione due e in dimensione qualsiasi del teorema di Brouwer, con enunciazione e dimostrazione anche del Lemma di Sperner sul quale si baserà la prova.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Proprietà Topologica del Punto Fisso

Che cos'è un punto fisso? Il punto di avvio di questa dissertazione non può che essere la risposta a questa domanda. Intuitivamente è possibile descrivere il significato di punto fisso con un oggetto familiare a tutti, una carta geografica. Supponiamo di prendere una mappa della Sardegna e di stenderla al suolo in una qualsiasi zona dell'isola, se ci pensiamo bene ci deve essere un punto della cartina che è esattamente sovrapposto al punto reale che esso rappresenta sulla mappa, quello è il punto che stavamo cercando. Elemento imprescindibile

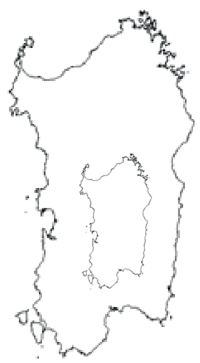

Figura 1.1: Rappresentazione dell'esempio sulla cartina della Sardegna.

per la definizione di punto fisso è una funzione continua, diciamola f, che vada da uno spazio X in se stesso. Quello che una funzione compie quando viene applicata ad uno spazio è trasformare ogni punto in uno e solo un altro punto. Già ora si è in grado di intuire cosa significa punto fisso, effettivamente viene chiamato così un punto che tramite una funzione continua viene inviato in se stesso.

Definizione 1.1. Sia X uno spazio topologico e $f : X \to X$ una funzione continua. x punto di X di dice fisso se $f(x) = x$.

Esempio 1.1. Consideriamo la funzione identità sull'intervallo unitario $[0, 1]$. $id : [0, 1] \to [0, 1]$ definita da $x \mapsto id(x) = x$, è una funzione particolare per la quale ogni punto è fisso.

Esempio 1.2. Consideriamo la funzione

$$\sin x : [-\pi, \pi] \to [-\pi, \pi],$$

la quale ha come punto fisso l'origine degli assi.

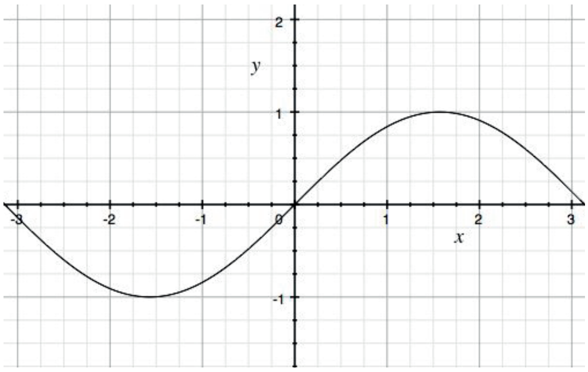

Figura 1.2: Grafico della funzione $\sin(x)$.

Teorema 1.1 (del punto fisso di Brouwer)**.** *Sia $f : D^n \to D^n$ una funzione continua. Allora esiste x in D^n tale che $f(x) = x$.*

Ora che abbiamo chiarito il concetto cardine del teorema ed enunciato lo stesso possiamo procedere, dopo aver presentato un importante lemma, con la dimostrazione nel caso più semplice, quello in dimensione 1. Osserviamo che in questa dimensione il disco coincide con l'intervallo $[-1, 1]$.

Lemma 1.2 (degli zeri)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua e risulti $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste (almeno) un punto c compreso tra a e b tale che $f(c) = 0$.*

Teorema 1.3 (del punto fisso di Brouwer in dimensione 1)**.** *Sia f una funzione continua da $[-1, 1]$ in se stesso. Esiste c di $[-1, 1]$ punto fisso per f.*

Dimostrazione. Definiamo una funzione $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ con $g(x) = f(x) - x$. La continuità di f ci garantisce che la g è una funzione continua. Osserviamo che $f(-1) \geq -1$ e allora $g(-1) \geq 0$. In modo analogo $g(1) \leq 0$. Se valesse una delle due uguaglianze allora avremmo già il punto fisso cercato, supponiamo che non sia così. Possiamo allora applicare il Lemma 1.2, per cui esiste $c \in [-1, 1]$ tale che $g(c) = 0$ che implica, per come è definita la g che

$$f(c) - c = 0.$$

Dunque c è un punto fisso per la f. $\square$

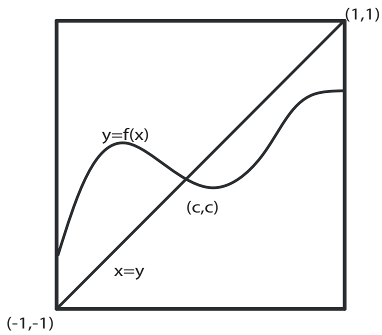

Figura 1.3: Un punto fisso di f è il punto dove il grafico di f interseca la retta $y = x$.

L'oggetto del nostro interesse non sono i punti fissi per se stessi, ma il fatto che uno spazio goda o meno della proprietà del punto fisso.

Definizione 1.2. Sia X uno spazio topologico. Diciamo che X gode della proprietà del punto fisso se per qualsiasi funzione continua f da X esiste un x di X tale che $f(x) = x$.

Caratteristica da sottolineare di questa proprietà è il fatto che costituisca un invariante topologico, questo è provato dal risultato che segue

Teorema 1.4. *Sia X uno spazio topologico nel quale è soddisfatta la proprietà del punto fisso topologico. Se Y è omeomorfo ad X allora gode della medesima proprietà.*

Dimostrazione. Sia $\phi : X \to Y$ un omeomorfismo. Si consideri $f : Y \to Y$ una funzione continua, in quanto composizione di funzioni continue anche $\phi^{-1} \circ f \circ \phi : X \to X$ risulta essere continua. Poiché X gode della proprietà del punto fisso esiste $x \in X$ tale che $\phi^{-1} \circ f \circ \phi(x) = x$, applicando la funzione ϕ ad ambo i membri si ottiene

$$f(\phi(x)) = \phi(x).$$

Allora Y ha la proprietà del punto fisso topologico. □

Il quesito che ci poniamo è quello di capire quali siano le proprietà che uno spazio debba avere affinché possegga la proprietà del punto fisso; la prima richiesta lecita da fare è sicuramente la compattezza, la quale ci garantisce la limitatezza del dominio e che esso contenga i suoi punti di accumulazione. Se così non fosse una funzione continua potrebbe essere in grado di inviare ciascun punto di X vicino ad un mancante punto di accumulazione per lo spazio. Presentiamo ora una definizione rigorosa di compattezza e i risultati che ci garantiscono la validità di quello detto in precedenza.

Definizione 1.3. Sia X uno spazio topologico si dice compatto se da ogni suo ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ è possibile estrarre un sottoricoprimento finito di X.

Teorema 1.5 (Heine-Borel)**.** *Un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Proposizione 1.6. *Se X è un chiuso di $\mathbb{R}^n$ allora*

$$X = \overline{X},$$

dove $\overline{X}$ è la chiusura di X.

Proposizione 1.7. *Sia $\overline{X}$ la chiusura di X, sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$\overline{X} = X \cup D(X),$$

dove $D(X)$ indica il derivato di X, l'insieme dei suoi punti di accumulazione.

Tuttavia, la compattezza non è sufficiente per avere la proprietà del punto fisso, per esempio l'insieme $[0,1] \cup [2,3]$ è compatto, ma non gode della proprietà. Per vederlo è sufficiente prendere la funzione f dall'insieme in se stesso definita da $f(x) = 3 - x$. Un'altra richiesta lecita è dunque il fatto che non abbiano buchi, per andare sul sicuro possiamo considerare insiemi contraibili, ossia quelli che possono essere deformati in un solo punto. Ma caratteristica da sola non garantisce la proprietà basti considerare che $(0,1)$ è contraibile. Il prossimo passaggio è di considerare compattezza e contraibilità insieme, questa questione rimase aperta per vent'anni fino a quando negli anni 50' Kinoshita non diede una risposta in negativo, presentò infatti un esempio di compatto contraibile, ma senza la proprietà topologica del punto fisso, per approfondire questo controesempio consultare [4]. Definiamo ora rigorosamente cosa vuol dire che un insieme è contraibile.

Definizione 1.4. Un insieme X si dice contraibile se esiste un punto p di X e una funzione continua $H : X \times I \to X$, con $I = [0,1]$, tale che

$$H(x,0) = x \quad \text{per ogni} \quad x \in X; \qquad\qquad H(x,1) = p \quad \text{per ogni} \quad x \in X.$$

Quello di cui abbiamo bisogno è una condizione che sia più forte della contraibilità, ma che allo stesso tempo non ci neghi i vantaggi di quest'ultima. La scelta ricade sugli spazi convessi, infatti come vedremo nel prossimo risultato la convessità implica la contraibilità, e proprio con il teorema di Brouwer si arriva a dimostrare che uno spazio convesso e compatto ha questa proprietà.

Definizione 1.5. Uno spazio X di dice convesso se comunque si prenda una coppia di punti x e y in X il segmento che li congiunge $\overline{xy} = \{(1 - t(x + ty)|t \in I\}$ è interamente contenuto in X.

Proposizione 1.8. *Sia X uno spazio convesso. Allora X è anche contraibile.*

Tuttavia esistono degli esempi patologici di spazi che non sono convessi o compatti che hanno la proprietà del punto fisso topologico. Presentiamo ora un esempio sufficientemente patologico in un sottoinsieme del piano reale non compatto e non convesso che per qualsiasi funzione continua ha un punto fisso.

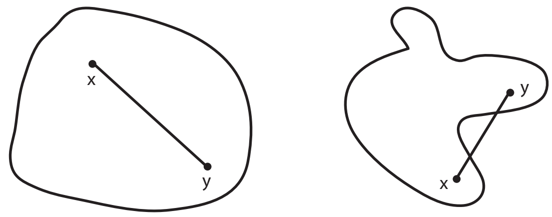

Figura 1.4: Insieme convesso e insieme non convesso.

Definizione 1.6. Per contrazione di X in Y con $Y \subset X$ si intende una funzione continua $r : X \to Y$ se la restrizione di r a Y è la funzione identità di Y. Equivalentemente se $r \circ \iota_Y = idY$, dove ι_Y è l'applicazione inclusione.

Esempio 1.3. L'insieme X, quello in Figura 1.5, consiste di un segmento di base $X_0 = [0, 1]$ sull'asse delle ascisse, con dei segmenti verticali X_n che partono nel punto $(\frac{1}{n}, 0)$ e che si estendono fino a $(\frac{1}{n}, n)$. Questo insieme non è ne chiuso ne limitato, e quindi non può essere compatto. Per vedere che X possiede la proprietà del punto fisso, sia $f : X \to X$ una funzione continua. Identifichiamo con x_n il punto $(\frac{1}{n}, 0)$. Dobbiamo considerare tre casi distinti. Primo, se esiste un numero n intero positivo tale che $f(x_n) = x_n$ abbiamo fatto e la dimostrazione è conclusa. Diversamente, supponiamo che ci sia un n tale che $f(x_n) \in X_n - \{x_n\}$. Sia ora r una contrazione di X in X_n. Allora $r \circ f : X_n \to X_n$ è continua, in quanto X_n è un segmento compatto vale il teorema di Brouwer in una dimensione, per cui esiste x_0 fisso per f. Per quanto supposto prima x_0 è distinto da x_n, e si deve avere anche

$$x_0 = r(f(x_0)) = f(x_0).$$

L'ultimo caso da considerare è che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n)$ non è in X_n. Sia allora r una contrazione di X in X_0 e con un argomento simile al caso precedente si arriva ad un punto fisso per f.

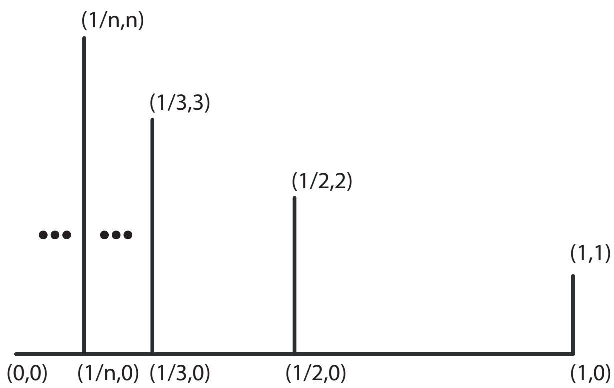

Figura 1.5: L'insieme X dell'Esempio 1.3.

1.2 Simplessi

Nella sezione precedente si è giunti alla conclusione che un insieme convesso e compatto è il candidato ideale per possedere la proprietà del punto fisso, con la dimostrazione del teorema si verifica che questo è vero. Finora abbiamo enunciato il teorema di Brouwer per il disco D^n che è chiaramente convesso e compatto. In questa tesi si vuole provare il risultato per uno spazio più generale che abbia le caratteristiche cercate, questo fatto non genera alcun problema grazie al seguente risultato.

Teorema 1.9. *Sia K un sottoinsieme compatto e convesso di $\mathbb{R}^n$ con interno non vuoto. Allora $D^n = \overline{B_1(0)}$ e K sono omeomorfi tramite un omeomorfismo $G : D^n \to K$ che manda $S^{n-1} = Fr(D^n)$ in $Fr(K)$.*

Questo risultato non verrà dimostrato qui per maggiori informazioni a riguardo consultare [3].

L'insieme in cui lavoreremo è un guscio chiuso e convesso di un sottoinsieme di punti $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^n$ allineati a due a due è l'insieme $\overline{conv}(A) = \{\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i | \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} = 1\}$.

Definizione 1.7. Un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^n$ è detto n-simplesso se esiste un insieme $V = \{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ tale che i vettori $(v_2 - v_1), (v_3 - v_1), \dots, (v_{n+1} - v_1)$ sono linearmente indipendenti, e $S = \overline{conv}\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$. Inoltre gli elementi di V sono detti vertici di S.

Esempio 1.4. Andiamo vedere a quali figure corrispondo i simplessi nelle dimensioni reali.

1. In $\mathbb{R}$, un *1*-simplesso è un segmento tra due punti della retta, in generale lo si identifica con l'intervallo unitario $I = [0, 1]$.
2. In $\mathbb{R}^2$, un *2*-simplesso è un triangolo.
3. In $\mathbb{R}^3$, un *3*-simplesso è un tetraedro.

Seguendo lo schema dell'esempio precedente viene naturale immaginare che un n-simplesso sia un ipertetraedro n-dimensionale.

Focalizzandoci sui sottoinsiemi dei simplessi quelli di maggiore rilevanza sono quelli che vanno a comporre la frontiera dell'insieme. Ripercorrendo l'esempio precedente, nel caso tridimensionale erano le facce triangolari del tetraedro, nel piano invece questo ruolo era giocato dai lati del triangolo e infine sulla retta reale gli estremi del segmento. Definiamoli ora in maniera rigorosa

Definizione 1.8. Sia S un n-simplex. Una p-faccia di S è un p-simplex contenuto nella frontiera di S.

1.3 Coordinate Baricentriche

Per esprimere i punti di un triangolo in coordinate baricentriche dobbiamo descrivere un punto $x \in T$ come combinazione lineare dei tre vertici. Vale a dire consideriamo i vertici del triangolo v_1, v_2, v_3 come i vettori applicati nell'origine del sistema di riferimento che terminano, rispettivamente, in corrispondenza di ogni vertice, allora possiamo univocamente determinare il generico punto $x \in T$, o meglio il suo vettore corrispondente, come

$$x = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3,$$

dove gli a_i sono i coefficienti della combinazione e soddisfano le seguenti relazioni

$$0 \leq a_i \leq 1 \quad i = 1, 2, 3$$

e

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 1.$$

Dunque in termini di coordinate baricentriche ciascun punto è descritto dalla terna di coefficienti (a_1, a_2, a_3).

Esempio 1.5. Consideriamo il triangolo T avente vertici nei punti $v_1 = (0, 2)$, $v_2 = (1, -1)$ e $v_3 = (-2, 1)$. Vogliamo esprime in coordinate baricentriche il punto $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Per ricavare i coefficienti dobbiamo sfruttare le relazioni che questi devono necessariamente soddisfare dalle quali si ricava facilmente il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ 2a_1 - a_2 + a_3 = \frac{1}{4} \\ a_2 - 2a_3 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Il quale ha per soluzione unica $(\frac{9}{28}, \frac{15}{28}, \frac{1}{7})$ che è la terna che rappresenta il punto considerato.

Se si considera un generico n-simplesso S anche i suoi punti con un ragionamento simile a quello fatto per il triangolo possono essere espressi in coordinate baricentriche. In questo caso i punti saranno descritti da una combinazione lineare dei vertici di S $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}\}$. Se $x \in S$

$$x = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_{n+1}v_{n+1}.$$

Con i coefficienti che hanno le stesse caratteristiche di quelli nel caso bidimensionale.

1.4 Triangolazioni e Labelling

Generalmente in combinatoria per triangolazione si intende suddividere un insieme nel piano in triangoli contenuti nel poligono di partenza.

Nel caso più generico la triangolazione di un n-simplesso è la suddivisione dell'insieme in una famiglia di n-simplessi più piccoli.

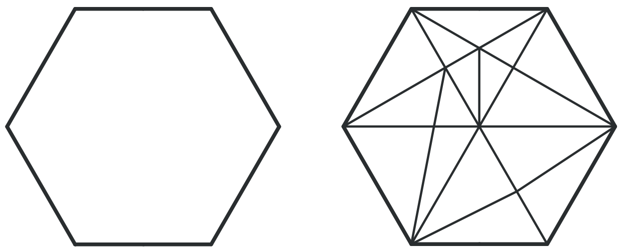

Figura 1.6: Un esempio di triangolazione di un esagono.

Definizione 1.9. Una triangolazione di un n-simplesso S è una collezione $\{S_j\}$ con $j \in J$ di n-simpelssi più piccoli tali che $\bigcup_{j \in J} S_j = S$ e $S_i \cap S_j$ per $i \neq j$ o è nulla o è una p-faccia con $p < n$. Gli n-simplessi interni sono detti elementari, e i loro vertici sono chiamati vertici della triangolazione.

Definizione 1.10. Si dice diametro di una triangolazione la distanza massima tra due vertici adiacenti.

Ad una triangolazione è possibile associare un *labelling*, si tratta di una funzione che assegna un peso o label per ciascun vertice che la compone.

Definizione 1.11. Un *labelling* di una triangolazione di un n-simplesso S è un'applicazione μ dall'insieme dei vertici della triangolazione V ad un insieme di interi $\{0, 1, 2, \dots, m\}$.

1.5 Richiami di Analisi Matematica

Uno strumento molto importante per lo studio dei teoremi del punto fisso sono le successione facciamo qui un excursus sui concetti e risultati basilari di analisi.

Definizione 1.12. Una funzione f definito sull'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali è detta successione e la indichiamo con (a_n).

Come per le funzioni in generale risulta essere di particolare interesse anche per le successioni il concetto di limite. Poiché nell'insieme dei numeri naturali l'unico punto di accumulazione è $+\infty$ le cose si semplificano in confronto al caso generale, si hanno di fatto solo i seguenti casi:

Definizione 1.13. Sia (a_n) una successione a valori reali:

i)

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R},$$

che significa che: fissato $\epsilon > 0$, in modo arbitrario, esiste un N, dipendente da $\epsilon : N = N(\epsilon)$, tale che se $n \geq N$ risulta $|a_n - l| < \epsilon$. In questo si dice che la successione è convergente.

ii)

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty, -\infty, \infty.$$

Nel primo sottocaso significa che: fissato $k > 0$, in modo arbitrario, esiste un $N = N(k)$ tale che se $n \geq N$ risulta $a_n > k$. In questi casi diremo che la successione è divergente.

iii)

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \text{ non esiste.}$$

Chiaramente il limite non è definito, quando questo accade la successione è detta irregolare o indeterminata.

Supponiamo di avere una successione (a_n) e di volere selezionare, seguendo una certa legge, alcuni termini della successione (a_n) in maniera tale che gli stessi si succedano secondo l'ordine che avevano nella successione di partenza. Quello che si ottiene è una sottosuccessione o estratta dalla (a_n). Rigorosamente, si ha

Definizione 1.14. Si chiama sottosuccessione della successione (a_n) una successione (b_n) tale che:

$$b_n = a_{k_n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dove (k_n) è una successione crescente di interi positivi.

Ora che abbiamo definito i concetti base occupiamoci di presentare alcuni dei risultati che utilizzeremo. Il primo è noto come teorema di *Bolzano-Weierstrass* ed è fondamentale per lo studio degli spazi euclidei in $\mathbb{R}$.

Teorema 1.10 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Ogni $E \subset \mathbb{R}^n$, limitato e con infiniti punti, possiede almeno un punto di accumulazione.*

Vediamo ora tramite quali altri risultati il teorema di *Bolzano-Weierstress* viene utilizzato nella teoria delle successioni convergenti.

Teorema 1.11. *Sia (x_n) una successione di numeri reali. Se l'insieme $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ possiede un punto di accumulazione x_0, allora (x_n) ammette una sottosuccessione (x_{k_n}) convergente a x_0.*

Corollario 1.12. *Ogni successione di numeri reali limitata contiene una sottosuccessione convergente.*

Capitolo 2

Il Teorema del punto fisso di Brouwer

2.1 Sperner Labelling in Dimensione 2

Una particolare maniera di assegnare i label in una triangolazione di un triangolo è quella chiamata *Sperner labelling*, essa utilizza solo i pesi 1-2-3 e soddisfa le due seguenti regole:

i) I tre vertici del triangolo T, quello iniziale, devono avere label 1-2-3.

ii) I vertici appartenenti al lato del triangolo T delimitato da vertici con label i, j, rispettivamente, devono avere come label o i o j.

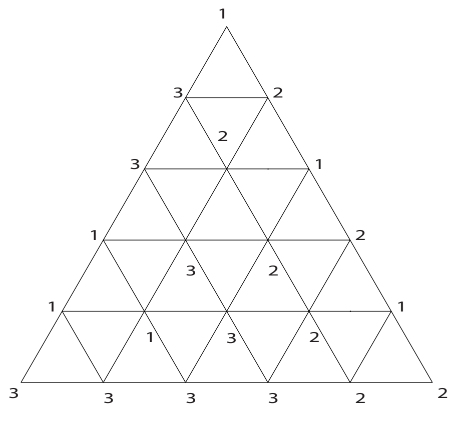

Figura 2.1: Triangolazione con *Sperner labelling*.

Lemma 2.1. *Si consideri una triangolazione di un triangolo T con uno Sperner labelling. Nel lato 1-2 del triangolo sono presenti un numero dispari di segmenti con label 1-2.*

Dimostrazione. Consideriamo i segmenti appartenenti a quel lato con label 1-1, questi sono a. Mentre quelli con label 1-2 sono b. Sia c il numero totale di vertici con label 1 in quel lato, dai segmenti ricaviamo che i vertici con label 1 sono $2a + b$, ma in questo conteggio ciascun vertice interno è stato contato due volte, in quanto punto finale di due segmenti. Da cui è vera la seguente uguaglianza

$$2a + b = 2c + 1$$

dalla quale si ricava facilmente che

$$b = 2(c - a) + 1.$$

Dunque b è dispari e il lemma è dimostrato. □

Teorema 2.2 (Lemma di Sperner)**.** *Ogni triangolo T con uno Sperner labelling contiene almeno un sotto triangolo completo, ossia che ha i vertici con label 1-2-3.*

Dimostrazione. Consideriamo il triangolo T di partenza come un'abitazione e i sottotriangoli sono le stanze che la compongono. I lati con label 1-2 sono le porte delle stanze, e consideriamo i cammini attraverso le stanze partendo dall'esterno del triangolo. Osserviamo che un percorso di questo tipo può terminare solo fuori dal triangolo o in un sottotriangolo con label 1-2-3. Possiamo osservare anche che una volta scelta la porta d'ingresso il cammino è univocamente determinato, in quanto ciascun triangolino ha al massimo due porte, questo implica anche che due cammini non si possono intersecare. Consideriamo tutti i possibili percorsi di questo tipo. Un cammino che finisce uscendo dal triangolo identifica una coppia di segmenti 1-2, ma per il Lemma 2.1 ci sono un numero dispari di segmenti con quel particolare label. Questo implica che ci deve essere almeno un percorso che termina all'interno di un triangolo 1-2-3. Il teorema è provato. □

2.2 Il Teorema del Punto Fisso di Brouwer per D^2

Teorema 2.3 (Brouwer)**.** *Sia $f : D^2 \to D^2$ una funzione continua. Allora esiste un x di D^2 tale che $f(x) = x$.*

Per il Teorema 1.9 possiamo però enunciare il teorema per un qualsiasi insieme convesso e compatto del piano, lo facciamo per un triangolo T.

Teorema 2.4. *Siano T un triangolo e $f : T \to T$ una funzione continua. Esiste un punto x di T tale che $f(x) = x$.*

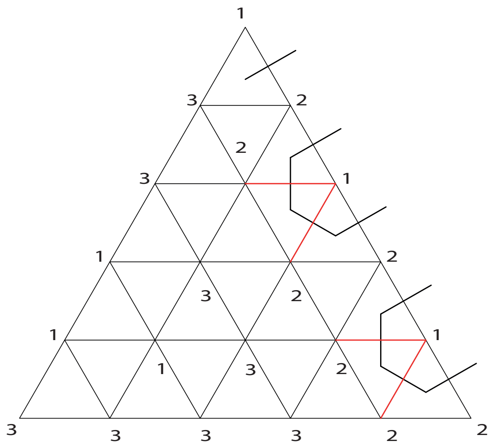

Figura 2.2: L'immagine descrive il metodo di dimostrazione del lemma di Sperner.

Dimostrazione. Definiamo un label sul triangolo dove è definita la funzione. Quello che noi vogliamo fare è dare un label a ciascun punto del triangolo in modo tale che questo risulti uno *Sperner labelling*. Per farlo sfruttiamo le caratteristiche della funzione f, l'applicazione è definita tramite le coordinate baricentriche come segue:

$$f : T \longrightarrow T, \qquad (a, b, c) \longmapsto (a', b', c').$$

Definiamo il label

1. Se $a' \leq a$ allora (a, b, c) ha come label 1.

2. Se $a' \geq a$ e $b' \leq b$ allora (a, b, c) ha come label 2.

3. Se $a' \geq a$, $b' \geq b$ e $c' \leq c$ allora (a, b, c) ha come label 3.

Se non è possibile dare un label al punto (a, b, c), allora $a' \geq a$, $b' \geq b$ e $c' \geq c$, ma dalla definizione di coordinate baricentriche si ha $(a, b, c) = (a', b', c')$, ossia un punto fisso. Devono essere verificate le relazioni $a + b + c = 1$ e $a' + b' + c' = 1$, dunque l'unica possibilità è l'uguaglianza. Se un punto $(a, b, c) \in T$ non può avere un label allora è fisso. Per dimostrare il teorema quel che verrà fatto intuitivamente è considerare triangolazioni successive di T, in ognuna di queste è presente un sottotriangolo con vertici aventi label 1-2-3 per il lemma di Sperner. Si prende una successione di sottotriangoli 1-2-3 convergente ad un punto (x, y, z). Se questo punto non fosse fisso, per la continuità della f come i triangoli si avvicinano al punto tutti i vertici dovrebbero avere lo stesso label, quello di (x, y, z). Nel senso che prendendo un piccolo intorno sferico B centrato in (x, y, z) di raggio molto piccolo ϵ, oltre un certo indice N per la convergenza della successione alcuni triangoli devono essere contenuti nell'intorno, ma per la continuità della f all'interno della bolla i punti dovrebbero avere lo stesso label per come questo è definito. Dunque la continuità ci assicura che il limite delle successioni è esattamente il punto fisso che noi cerchiamo. Il prossimo passo è quello di dimostrare che il label così definito sul triangolo è effettivamente uno Sperner labelling, in modo tale da poter applicare il lemma di Sperner. La prima cosa è verificare che i vertici del triangolo T abbiamo label 1-2-3. Osserviamo che in coordinate baricentriche i tre vertici di T sono espressi da $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

1. Se $(1, 0, 0) \mapsto (d, e, f)$, allora $d < 1$. Se così non fosse, per la definizione di coordinate baricentriche, $(1, 0, 0)$ sarebbe un punto fisso. Dunque ha label 1.

2. Se $(0, 1, 0) \mapsto (d, e, f)$, allora $d \geq 0$, ma $b < 1$. Se così non fosse, per la definizione di coordinate baricentriche, $(0, 1, 0)$ sarebbe un punto fisso. Dunque ha label 2.

3. Se $(0, 0, 1) \mapsto (d, e, f)$, allora $d \geq 0, e \geq 0$ ma $f < 1$. Se così non fosse, per la definizione di coordinate baricentriche, $(0, 0, 1)$ sarebbe un punto fisso. Dunque ha label 3.

La seconda cosa da verificare è che i punti che appartengono al segmento esterno congiungente i vertici con label i e j, hanno come label o i o j. Iniziamo considerando il segmento tra i vertici $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$, un punto (a, b, c) appartenente a questo segmento ha coordinate baricentriche della forma $(a, b, 0)$; se $(a, b, 0) \mapsto (d, e, f)$ allora $a < d$ o $b < e$ dunque avrà label 1 o 2, infatti se così non fosse si avrebbe che $a \geq d$ e $b \geq e$ e di conseguenza $a = d$, $b = e$ e $f = 0$ e dunque il punto sarebbe fisso, per la definizione di coordinate baricentriche. Facciamo lo stesso discorso anche per gli altri lati. Un punto del segmento congiungente i vertici $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ è della forma $(a, 0, c)$, consideriamo $f(a, 0, c) = (d, e, f)$ esattamente con lo stesso ragionamento fatto in precedenza si ha che $d < a$ e quindi label 1 oppure $c < f$ e dunque il suo label è 3, diversamente il punto $(a, 0, c)$ è fisso. L'ultimo segmento rimasto è quello tra $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, i suoi punti hanno coordinate del tipo $(0, b, c)$ con immagine tramite f (d, e, f), ancora una volta si ha che $e < b$ o $c < f$ con label 2 o 3, rispettivamente; nel caso in cui questo non fosse verificato il punto è fisso. Questo prova che se assegnamo ad una triangolazione il nostro label abbiamo uno *Sperner labelling.* Consideriamo ora una successione di triangolazioni tali che il diametro tenda a 0. Per il lemma di Sperner ciascuna di queste ha almeno un sottotriangolo 1-2-3. I vertici di questo particolare triangolo nella n-esima triangolazione sono

$$
\begin{gathered}
(x_{n,1}, y_{n,1}, z_{n,1}), \\
(x_{n,2}, y_{n,2}, z_{n,2}), \\
(x_{n,3}, y_{n,3}, z_{n,3}),
\end{gathered}
$$

i quali hanno rispettivamente, come indicato dalla notazione, label 1, 2 e 3. Possiamo ora applicare alle successioni dei vertici il teorema di Bolzano-Weierstrass trovando le sottosuccessioni convergenti

$$(x_{n,i}, y_{n,i}, z_{n,i}) \longrightarrow (x, y, z),$$

per $n \to \infty$ e $i = 1, 2, 3$. Tutte le sottosuccessioni convegpono allo stesso punto (x, y, z) perché sono i vertici di un triangolo con diametro che tende a 0. Abbiamo così dimostrato il teorema. $\square$

2.3 Sperner Labelling in Dimensione n

Anche per il caso in dimensione n vogliamo definire sul simplesso un particolare labelling. Si numerino ora le facce di S con i numeri $1, 2, \ldots, n+1$. Data una triangolazione dell'ipertetraedro S si consideri un labelling che rispetti le seguenti regole

i) Ciascun vertice della triangolazione ha per label il numero della faccia che non lo contiene.

ii) Nessuno dei vertici della faccia j ha come label j e ad ogni punto appartenente ad una k-faccia viene assegnato un label tra quelli dei suoi k vertici, mentre i vertici interni possono avere per label uno qualsiasi dei numeri utilizzati per le facce.

Definizione 2.1. Un labelling che segue le direttive dei punti i) e ii) è detto *Sperner labelling.*

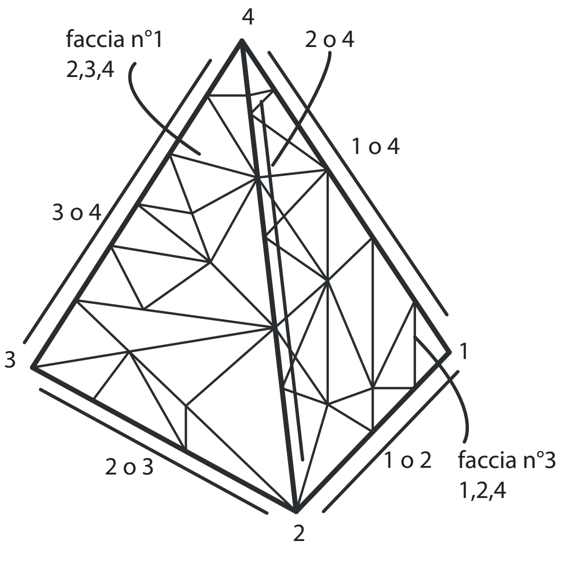

Figura 2.3: Una triangolazione di un tetraedro con uno *Sperner labelling.*

Teorema 2.5 (Lemma di Sperner)**.** *Ogni triangolazione di un* n*-simplesso S con uno* Sperner labelling *ha un numero dispari di simplessi elementari completi, ossia i loro vertici hanno tutti un label diverso. In particolare ne contiene almeno uno.*

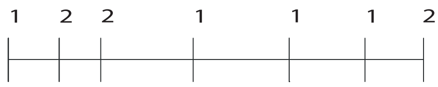

Figura 2.4: Una triangolazione di una linea con uno *Sperner labelling*.

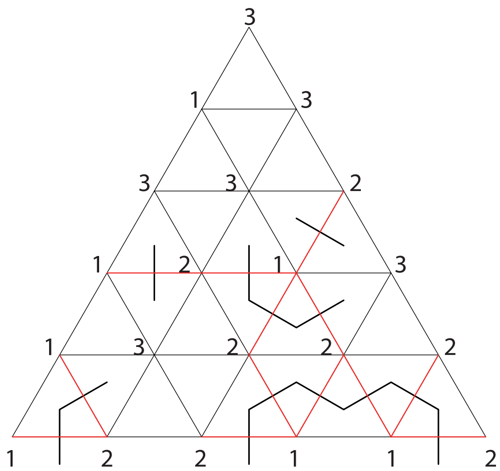

Figura 2.5: Percorsi attraverso le porte.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n dimensione dello spazio. Quando n=1, una triangolazione di un *1*-simplesso è una segmento suddiviso in altri segmenti più piccoli, gli estremi del tratto di linea hanno per label 1-2. Così muovendosi dall'estremo 1 al 2 il label dovrà necessariamente cambiare un numero dispari di volte, quindi ci saranno un numero dispari di sottosegmenti con label 1-2, quindi almeno uno. Supponiamo ora che il teorema sia valido in dimensione $n-1$. Mostriamo ora che il teorema è vero per una triangolazione di un n-simplesso S con uno *Sperner labelling* tramite i valori $1, \ldots, n+1$. Immaginiamo ora che S sia una casa triangolata in molte stanze, le quali sono i simplessi elementari. Una faccia di una stanza è chiamata porta se ha come label i primi n degli $n+1$. Richiediamo che il numero di porte esterne, quelle nella frontiera di S, sia dispari. Infatti le porte esterne possono essere contenute solo nella $n+1$-esima faccia per come è definito lo *Sperner labelling*. Ma questa faccia è come se avesse uno *Sperner labelling* usando però solo $1, \ldots, n$; applicando l'ipotesi induttiva la faccia dovrà avere un numero dispari di *(n-1)*-simplessi completi, che considerati in S sono porte esterne. Queste porte sulla frontiera possono essere utilizzate per localizzare i sottoipertetraedri completi tramite un argomento detto della porta trappola.

Osserviamo che ogni stanza ha al massimo due porte, e ha una porta se solo se è completo. Per mostrarlo consideriamo le stanze che hanno almeno una porta, queste o non hanno label ripetuti e quindi sono n-simplessi elementari completi, oppure hanno due vertici con lo stesso label, questo genera due porte distinte, una per ciascun label ripetuto. Percorriamo ora i cammini attraverso le stanze partendo dalle porte sulla frontiera, utilizziamo questi cammini per localizzare gli n-simplessi completi. Superata la prima porta ci ritroveremo in una stanza che o è completa o ha un'altra porta, la cosiddetta porta trappola, che noi possiamo nuovamente attraversare. Ripetiamo questa operazione passando sempre attraverso le porte fin quando questo è possibile. Osserviamo che nessuno di questi cammini può intersecarsi o tornare sui suoi passi in quanto ciascuna stanza, come abbiamo visto, ha al massimo due porte. Per la finitezza del numero delle stanze i percorsi sono necessariamente finiti e possono terminare o all'interno di una stanza completa o di nuovo all'esterno di S. Ogni cammino che termina con l'uscita da S individua due porte sulla frontiera, ma dall'ipotesi induttiva sappiamo che queste sono dispari dunque ci sarà un numero dispari di cammini che conducono a stanze complete. Inoltre, nel caso in cui siano presenti delle stanze che non sono raggiungibili dai cammini che partono dall'esterno, queste devono sempre a coppie unite dai rispettivi percorsi interni, per quest'ultimo caso è esplicativa la Figura 2.5 che mostra questa situazione nel caso bidimensionale. Ciò è sempre vero, consideriamo un n-simplesso elementare completo che non sia raggiungibile tramite un cammino che parte da una delle porte sulla frontiera, in quanto completo ha una ed una sola porta. Supponiamo dunque di far partire un cammino da questa stanza attraverso la sua unica porta, passandola ci ritroveremo in un'altra stanza, se in questa non ci sono altre porte allora anche questa è completa ed abbiamo la coppia cercata; se così non fosse dovrà avere una porta trappola, possiamo dunque pensare ad un percorso attraverso tutte le porte incontrate fin quando possibile, poiché il numero delle stanze è finito anche il cammino dovrà esserlo, avendo supposto che non può terminare con l'uscita da S deve necessariamente trovato un altro n-simplesso elementare completo, che per l'impossibilità di intersezione tra cammini di questo tipo deve essere non collegato da un percorso con una porta nella frontiera. Dunque il numero totale delle stanze complete in S è dispari. □

2.4 Il Teorema del Punto Fisso di Brouwer per D^n

Teorema 2.6 (Brouwer)**.** *Sia $f : D^n \to D^n$ un funzione continua. Allora esiste x di D^n tale che $f(x) = x$.*

Richiamando come nel caso in due dimensioni il Teorema 1.9 possiamo enunciare il teorema di Brouwer per un qualsiasi sottoinsieme compatto e convesso, in particolare per un n-simplesso.

Teorema 2.7. *Sia S un* n*-simplesso e sia $f : S \to S$ una funzione continua. Allora esiste x appartenente ad S tale che sia verificato $f(x) = x$.*

Dimostrazione. Consideriamo $f : S \to S$ una funzione continua. Definiamo ora per ciascun punto del dominio un label in base alle caratteristiche della f definita da

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \longmapsto (a'_1, a'_2, \dots, a'_{n+1}).$$

- $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \mapsto (a'_1, a'_2, \dots, a'_{n+1})$, se $a'_1 < a_1$ allora il punto ha label 1.
- $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \mapsto (a'_1, a'_2, \dots, a'_{n+1})$, se $a'_1 \geq a_1$ e $a'_2 < a_2$ allora il punto ha label 2.

$$\vdots$$

- $(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n+1}) \mapsto (a'_1, a'_2, \dots, a'_{i-1}, a'_i, a'_{i+1}, \dots, a'_{n+1})$ se $a'_j \geq a_j$ per $j = 1, 2, \dots, i-1$. e $a'_i < a_i$ allora il punto ha label i.

$$\vdots$$

- $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) \mapsto (a'_1, a'_2, \dots, a_n, a'_{n+1})$ se $a'_i \geq a_i$ per $i = 1, \dots, n$ allora si ha che $a'_{n+1} < a_{n+1}$. Il punto con queste caratteristiche ha label $n+1$.

Nell'ultimo punto si deve avere necessariamente avere $a'_{n+1} < a_{n+1}$ per le coordinate baricentriche, se infatti fosse $a'_{n+1} \geq a_{n+1}$, tenendo conto che si deve avere

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n+1} a'_i = 1,$$

si ricava che $a'_i = a_i$ per $i = 1, \dots, n+1$. Dunque un punto è fisso se ad esso non può essere dato un label. Intuitivamente si vuole procedere effettuando delle triangolazioni successive del dominio della funzione f, applicando poi il lemma di Sperner per creare delle successioni di n-simplessi elementari completi convergenti ad un punto. Questo deve essere necessariamente fisso per la continuità della f con un ragionamento analogo a quello fatto per il caso bidimensionale. Bisogna ora dimostrare che quello definito è uno *Sperner labelling*. Tutti i vertici di S sono rappresentati da una $n+1$-upla del tipo $(0, 0, 0, \dots, 0, 1_i, 0, \dots, 0, 0)$, dove l'indice i indica la posizione dell'unica componente diversa da zero, ciò vale per $i = 1, 2, \dots, n+1$. Innanzitutto mostriamo che ciascun vertici ha un label differente. Consideriamo il j-esimo vertice v_j, ossia quello con coordinate $(0, 0, 0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0, 0)$, si ha

$$f(v_j) = f((0, 0, 0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0, 0)) = (a'_1, a'_2, \dots, a'_{j-1}, a'_j, a'_{j+1}, \dots, a'_{n+1}).$$

È chiaro che deve essere $a'_j < a_j = 1$, perché diversamente il punto sarebbe fisso, in quanto dalla definizione di coordinate baricentriche se fosse $a'_j \geq a_j = 1$ si avrebbe $a'_j = 1$ e conseguentemente $f(v_j) = (0, 0, 0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0, 0) = v_j$. Essendo inoltre $a_i = 0$ per $i = 1, \dots, j-1$ chiaramente si ha $a'_i \geq a_i$ per $i = 1, \dots, j-1$. Dunque il j-esimo vertice ha come label j. Abbiamo dunque mostrato che è verificata la prima condizione richiesta affinché questo sia uno *Sperner labelling*. Osserviamo che i punti di S che appartengo ad una faccia dell'ipertetraedro sono descritti, sempre tramite le coordinate baricentriche, da una $n+1$-upla dove almeno una componente è nulla. Chiamiamo j-esima la faccia che ha per generico punto quello di coordinate $(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \dots, a_{n+1})$. Mostriamo ora che i punti di questa faccia possono avere come label uno qualsiasi degli $n+1$ tranne che j. Si consideri il generico punto della j-esima faccia, tramite la f si ha

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, 0, a_{j+1}, \ldots, a_{n+1}) \longmapsto (a'_1, a'_2, \ldots, a'_{j-1}, a'_j, a'_{j+1}, \ldots, a'_{n+1}),$$

allora deve esistere un indice s, sicuramente diverso da j, tale che $a'_s < a_s$ dunque al punto viene assegnato il label s. Se così non fosse, ossia se non esistesse un indice s con tali proprietà, allora $\forall i = 1, \ldots, n+1$ si ha che $a'_i \geq a_i$ e quindi il punto sarebbe fisso. Questo discorso può essere ripetuto per ogni j, dunque questo label è sicuramente uno *Sperner labelling*. Si consideri ora una sequenza di triangolazioni dell'n-simplesso tale che il loro diametro tenda a zero. Per il lemma di Sperner ciascuna triangolazione contiene almeno un n-simplesso elementare completo. Questi hanno vertici

$$(a^k_{1,1}, a^k_{2,1}, \ldots, a^k_{n+1,1}),$$

$$(a^k_{1,2}, a^k_{2,2}, \ldots, a^k_{n+1,2}),$$

$$\vdots$$

$$(a^k_{1,n+1}, a^k_{2,n+1}, \ldots, a^k_{n+1,n+1}),$$

dove il secondo pedice indica il label assegnato al vertice e il k rappresenta la k-esima triangolazione. Possiamo ora applicare a queste successioni il teorema di Bolzano-Weierstrass per trarne una sottosuccessione convergente

$$(a^{k_h}_{1,i}, a^{k_h}_{2,i}, \ldots, a^{k_h}_{n+1,i}) \longrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}),$$

per $i = 1, \ldots, n+1$. Possiamo fare tutte le successioni contemporaneamente in quanto sono vertici di n-simplesso con diametro che tende a 0. Per quanto detto in precedenza il punto $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ è un punto fisso ed il teorema è dimostrato.

$\square$

Bibliografia

[1] Adams, Colin e Franzosa, Robert (2008), *Introduction to topology. Pure and applied*, Pearson education.

[2] Henle, Michael (1979), *A combinatorial introduction to topology*, W. H. Freeman and Company, San Francisco.

[3] Chillotti, Ilaria (2011), *Un solido convesso e compatto è omeomorfo al disco*, Università di Cagliari.

[4] Kinoshita, Shinichi (1953), *On some contractible continua without fixed point theorem*, Fund. Math. 40, 96-98.

[5] Lee, John M. (2011), *Introducation to topological manifolds*, Springer, GTM 202.

[6] Loi, Andrea (2013), *Introduzione alla topologia generale*, Aracne.

[7] Pagani, C.D. e Salsa, S. (1995), *Analisi matematica volume 1*, Masson.

[8] Stuckless, Tara (2003), *Brouwer's fixed point theorem: methods of proof and generalizations*, Simon Fraser University.

[9] Su, Edward Francis (1999), *Rental harmony: Sperner's lemma in fair division*, American Math Monthly, 106, 930-942.

[10] Wright, Alex, *Sperner's lemma and Brouwer fixed point theorem.*