Università degli studi di Cagliari
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Classificazione dei gruppi abeliani finiti

Federica Serra

Relatore: Prof. Andrea Loi

In questa tesi ci proponiamo di classificare i gruppi abeliani finiti attraverso il

Teorema di Frobenius-Stickelberger.

Teorema

Ogni gruppo abeliano finito è prodotto diretto di gruppi ciclici

Gruppi ciclici

Un gruppo è detto *ciclico* se è generato da uno dei suoi elementi.
I gruppi cilici sono completamente classificati dal seguente:

Teorema

Sia $(G, \cdot)$ *un gruppo ciclico. Allora:*

i. $G \cong \mathbb{Z}$, *se* G *è infinito, e* $\mathbb{Z}$ *ha due generatori; oppure*

ii. G *è isomorfo a* $\mathbb{Z}_m$ *per qualche* $m \in \mathbb{Z}_+$ *se* G *è finito con* m *elementi, e* $\mathbb{Z}_m$ *ha* $\varphi(m)$ *generatori, per* $m \in \mathbb{N}_+$.

Per provare il Teorema F-S sono necessari alcuni lemmi.

Lemma 1

Sia $(G, +)$ *un gruppo abeliano e sia* m *un intero positivo tale che* $mx = 0$ *per ogni* $x \in G$. *Allora* $|G|$ *divide qualche potenza di* m.

Per provare il Teorema F-S sono necessari alcuni lemmi.

Lemma 1

Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano e sia m un intero positivo tale che $mx = 0$ per ogni $x \in G$. Allora $|G|$ divide qualche potenza di m.

Lemma 2

Siano m e n due interi positivi coprimi e G un gruppo abeliano di ordine mn. Allora:

a) $H = \{x \in G : nx = 0\}$ *è un sottogruppo di G di ordine n;*

b) $K = \{x \in G : mx = 0\}$ *è un sottogruppo di G di ordine m;*

c) $G \cong H \times K$.

Dimostrazione Lemma 2

a) Per prima cosa proviamo che H è un sottogruppo di G. Ricordando la definizione abbiamo che $nx = 0$, quindi se $x = 0$ allora $n \cdot 0 = 0$ e dunque $0 \in H$. Ora prendiamo $x, y \in H$, dato che $nx = 0$ e $ny = 0$ si ha

$$n(x - y) = nx - ny = 0 \tag{1}$$

e ciò dimostra che H è un sottogruppo di G.

b) In modo analogo si dimostra che K è un sottogruppo di G.

Dimostrazione Lemma 2

c) Ci rimane da far vedere che $G \cong H \times K$. Quali sono le condizioni affinché G sia prodotto diretto di due sottogruppi H e K?
   i. I due sottogruppi devono essere **normali**, cioè H e K devono essere entrambi sottogruppi normali di G;
   ii. $H \cap K = \{0\}$;
   iii. $G \cong H \times K$.

La prima condizione è verificata in quanto G è un gruppo abeliano e qualunque suo sottogruppo è sempre normale.

Dimostrazione Lemma 2

Per quanto riguarda la *ii*. sia $x \in H \cap K$, questo implica che $nx = 0$ e $mx = 0$; ma n e m sono primi primo fra loro, quindi esistono $u, v \in \mathbb{Z}$ tali che

$$1 = um + vn \tag{2}$$

moltiplicando per x, otteniamo

$$x = x(um) + x(vn) = 0 \Rightarrow x = 0 \tag{3}$$

Dimostrazione Lemma 2

Per quanto riguarda la *iii.*, $G \cong H \times K$, ci ricordiamo che stiamo considerando gruppi additivi, quindi possiamo scrivere che $G = H + K$. Dobbiamo verificare che ogni elemento di G può essere scritto come somma di un elemento di H e di uno di K. Sia $y \in G$ e siano $u, v \in \mathbb{Z}$ tali che $1 = um + vn$, se moltiplichiamo membro a membro per y otteniamo

$$y \cdot 1 = y(um) + y(vn) = u(my) + v(ny) = y \tag{4}$$

Quindi consideriamo gli elementi my e ny, poiché $y \in G$ allora l'ordine di $|G| = mn$, e quindi $(my)n = 0$ per costruzione di H, in quanto H è costituito da tutti quegli elementi che moltiplicati per n sono uguali a zero, quindi $my \in H$. Un ragionamento analogo può essere effettuato per $(ny)m = 0$ e quindi $ny \in K$. Abbiamo quindi scritto l'elemento $y \in G$ come somma di un elemento $my \in H$ e di un elemento $ny \in K$.

Dimostrazione Lemma 2

A questo punto non ci resta che provare che H e K hanno rispettivamente ordine n e m. Dal Lemma 1 sappiamo che l'ordine di H divide qualche potenza di n, cioè

$$\forall x \in H, \quad xn = 0, \tag{5}$$

quindi otteniamo che l'ordine di H è coprimo con m. Ora dato che H è un sottogruppo di G, l'ordine di H divide l'ordine di G che è mn, e quindi l'ordine di H divide n. In modo analogo otteniamo che l'ordine di K che divide m. Quindi da $G \cong H \times K$, segue che

$$|H| \cdot |K| = mn, \quad |H| = n \text{ e } |K| = m. \tag{6}$$

Dimostrazione del Teorema di Frobenius-Stickelberger

Teorema

Ogni gruppo abeliano finito è prodotto diretto di gruppi ciclici.

Teorema 1

Sia G un gruppo abeliano finito di ordine n, $n \in \mathbb{N}_+$ e sia $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$, con p_i primo e $\alpha_i \in \mathbb{N}_+$ per ogni $i = 1, \cdots, t$, la decomposizione di n in un prodotto di primi distinti. Allora esistono t sottogruppi $P_1, P_2, \cdots, P_t$ di ordini rispettivamente $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$, tali che

$$G \cong P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t \tag{7}$$

Dimostrazione del Teorema di Frobenius-Stickelberger

Teorema

Ogni gruppo abeliano finito è prodotto diretto di gruppi ciclici.

Teorema 1

Sia G un gruppo abeliano finito di ordine n, $n \in \mathbb{N}_+$ e sia $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$, con p_i primo e $\alpha_i \in \mathbb{N}_+$ per ogni $i = 1, \cdots, t$, la decomposizione di n in un prodotto di primi distinti. Allora esistono t sottogruppi $P_1, P_2, \cdots, P_t$ di ordini rispettivamente $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t}$, tali che

$$G \cong P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_t \tag{7}$$

Teorema 2

Sia p un numero primo, n un intero positivo e G un gruppo abeliano di ordine p^n. Allora G è isomorfo a un prodotto diretto di gruppi ciclici.

Dimostrazione Teorema 1

La dimostrazione è per induzione su t. Per $t = 1$ si ha che G ha ordine $p_1^{\alpha_1}$ e quindi il sottogruppo è $p_1^{\alpha_1}$ stesso. Supponiamo quindi per ipotesi induttiva che sia vero per $t - 1$ e scriviamo l'ordine di G come:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}} \cdot p_t^{\alpha_t} = m \cdot p_t^{\alpha_t} \tag{8}$$

dove m e $p_t^{\alpha_t}$ sono coprimi. Dal Lemma 2 possiamo scrivere $G \cong H \times P_t$ dove H e P_t sono due sottogruppi di G in cui l'ordine di H è $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_{t-1}^{\alpha_{t-1}}$, e l'ordine di P_t é proprio $p_t^{\alpha_t}$. Ma dall'ipotesi induttiva sappiamo che H si può scrivere come prodotto di sottogruppi che hanno ordine $p_j^{\alpha_j}$, quindi da questo segue che possiamo scrivere G come:

$$G \cong H \times P_t \cong P_1 \times \cdots \times P_{t-1} \times P_t \tag{9}$$

dove i P_j hanno ordine $p_j^{\alpha_j}$, con $j = 1, \cdots, t-1$, e questo conclude la dimostrazione del Teorema 1.