



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

La congettura di Poincaré in dimensioni alte

Relatore
Prof. A. Loi

Tesi di Laurea di
Filippo Salis

ANNO ACCADEMICO 2012/2013

INTRODUZIONE

Nel 1904 il matematico francese J. H. Poincaré nel “Cinquième complément à l’analysis situs” si domanda: “Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?”. Dal contesto si evince che con V indica una generica varietà topologica tridimensionale chiusa e lui stesso, alcune pagine prima, chiarisce “simplement connexe au sens propre du mot, c’est-à-dire homéomorphe à l’hypersphere”. Dalla generalizzazione di tale problema nasce quella a cui sarà successivamente dato il nome di

Congettura di Poincaré. *Ogni varietà topologica chiusa con lo stesso tipo di omotopia di S^n è omeomorfa ad S^n .*

Poco tempo prima, la formulazione del concetto di omologia aveva permesso allo stesso Poincaré di classificare le superfici, e quindi di dimostrare la validità della congettura in dimensione 2, anzi era stato proprio questo risultato a spingerlo verso tali domande sulle 3-varietà. Dovrà tuttavia

passare parecchio tempo prima di compiere qualche altro passo in avanti nella dimostrazione della congettura negli altri casi. È infatti il 1961 quando il matematico statunitense S. Smale pubblica sul “*The Annals of Mathematics*” l’articolo “*Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four*”, nel quale dimostra la congettura in dimensioni alte (maggiori o uguali a 5). Riesce ad ottenere questo risultato, che gli varrà la medaglia Fields cinque anni dopo, sviluppando dei metodi originali nell’ambito della topologia differenziale che stanno alla base di quella che sarà successivamente chiamata teoria dei manici. Gli stessi metodi saranno ripresi da M. H. Freedman e sviluppati in maniera particolarmente originale nel caso delle 4-varietà, consentendogli di dimostrare la congettura in dimensione 4 a circa venti anni di distanza dalla pubblicazione di Smale e di vincere la medaglia Fields nel 1986. Dovranno passare altri venti anni perché la domanda iniziale di Poincaré trovi risposta. Usando argomentazioni di geometria riemanniana (in particolare grazie al concetto di flusso di Ricci sviluppato da R. S. Hamilton negli ottanta), quindi in maniera completamente diversa rispetto alle precedenti dimostrazioni, G. J. Perelman riesce a dimostrare la validità della congettura anche in questo caso.

Scopo di questa tesi è esporre la dimostrazione di Smale della congettura di Poincaré in dimensioni alte come conseguenza del teorema dell’ h -cobordismo (capitolo 3). La dimostrazione del teorema delineata nel capitolo 2 non sarà però quella originariamente data da Smale, ma è invece una dimostrazione che non fa uso della teoria dei manici, formulata da J. W. Milnor traendo ispirazione da alcuni risultati ottenuti negli anni sessanta da M. Morse.

SIMBOLI E NOTAZIONI

\sqcup	Unione disgiunta
\mathbb{Z}, \mathbb{R}	Insieme dei numeri interi e reali
\mathbb{Z}_p	Classi di resto modulo p
\mathbb{H}^n	Semispaio superiore chiuso di dimensione n
\mathcal{D}^n	Disco unitario centrato nell'origine di dimensione n
\mathcal{B}^n	$\mathcal{D}^n \setminus \partial \mathcal{D}^n$
\mathbb{S}^n	$\partial \mathcal{D}^{n+1}$
$\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$	Insieme delle funzioni differenziabili sulla varietà M a valori reali
$\text{Crit } f$	Insieme dei punti critici della funzione differenziabile f
$f \equiv k$	f identicamente uguale alla costante k
$\text{supp}(\zeta)$	Supporto del campo vettoriale ζ
\bar{U}	Chiusura di U
∂M	Frontiera della varietà M
$\dim(M)$	Dimensione della varietà M
$T(M)$	Fibrato tangente di M
$\nu(M)$	Fibrato normale di M rispetto ad una sottovarietà precisata nel contesto
$N \cdot M$	Numero d'intersezione di N ed M
$\theta^p(t)$	Curva integrale di un dato campo vettoriale uscente da p
$\Theta(t, p)$	Flusso associato ad un dato campo vettoriale
\cong	Isomorfo
\oplus	Somma diretta
π_1	Gruppo fondamentale
H_*, H^*	Gruppi di omologia e coomologia

Introduzione	iii
Simboli e Notazioni	v
1 Cobordismi, funzioni di Morse e campi di tipo gradiente	1
1.1 Cobordismi	1
1.2 Funzioni di Morse	2
1.3 Composizione di cobordismi	5
1.4 Campi vettoriali di tipo gradiente	7
2 Il teorema dell'h-cobordismo	9
2.1 Enunciato	9
2.2 Funzioni di Morse auto-indicizzanti	11
2.3 Eliminazione di punti critici	15
2.4 Dimostrazione	22
2.4.1 Indice 0	23
2.4.2 Indice 1	23
2.4.3 Indice n ed $n - 1$	24
2.4.4 Indici intermedi	25
3 Conclusione	27
A Chirurgia su varietà	29
Bibliografia	33

CAPITOLO 1

COBORDISMI, FUNZIONI DI MORSE E CAMPI DI TIPO GRADIENTE

1.1 Cobordismi

Alla luce degli obiettivi fissati nell'introduzione, si ritiene necessario iniziare la trattazione dedicando questo capitolo al concetto di cobordismo e a quegli altri concetti ad esso strettamente collegati, che in seguito saranno coinvolti dal teorema dell' h -cobordismo.

Definizione 1. Sia W una n -varietà differenziabile¹ compatta e siano V_0, V_1 due sue sottovarietà aperte e chiuse tali che $\partial W = V_0 \sqcup V_1$, allora la terna (W, V_0, V_1) costituisce una triade di varietà differenziabili.

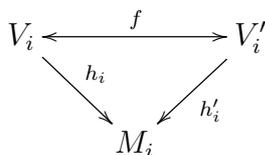
Definizione 2. Date due varietà compatte e senza bordo della stessa dimensione M_0, M_1 , si definisce cobordismo da M_0 a M_1 una cinquina (W, V_0, V_1, h_0, h_1) , dove i primi tre elementi individuano una triade di varietà, mentre $h_i : V_i \rightarrow M_i, i = 0, 1$, sono diffeomorfismi².

Due cobordismi (W, V_0, V_1, h_0, h_1) e $(W', V'_0, V'_1, h'_0, h'_1)$ si dicono equivalenti se esiste un diffeomorfismo f tra W e W' tale da rendere commutativi i

¹Se non specificato diversamente, il termine "differenziabile" sottintende di classe \mathcal{C}^∞ .

²Nel corso della trattazione identificheremo spesso la triade (W, V_0, V_1) con il cobordismo $(W, V_0, V_1, id_{V_0}, id_{V_1})$.

seguenti diagrammi ($i = 0, 1$):



Concludiamo questo breve paragrafo presentando un esempio molto semplice di cobordismo, la cui importanza sarà chiarita successivamente.

Esempio 1. Il cilindro $S^1 \times [0, 1]$ può essere pensato come un cobordismo da S^1 a S^1 . Generalizzando, possiamo considerare la varietà $M \times [0, 1]$ come cobordismo da M_0 a M_1 , dove entrambe le varietà risultano essere diffeomorfe a M .

1.2 Funzioni di Morse

Uno strumento che di rivelerà indispensabile nello studio dei cobordismi sono le funzioni Morse.

Definizione 3. Una funzione di Morse associata alla triade (W, V_0, V_1) è una funzione differenziabile $f : W \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ tale che

- $f^{-1}(a) = V_0, \quad f^{-1}(b) = V_1$;
- tutti i punti critici sono non degeneri ³;
- esiste un intorno di ∂W privo di punti critici.

Perché questo strumento sia realmente efficace, è indispensabile dimostrare che ad ogni triade sia associata effettivamente almeno una funzione di questo tipo. In questa operazione non vengono sviluppate tecniche o concetti che verranno ripresi in seguito, al fine di non appesantire la trattazione daremo solo una traccia di tale dimostrazione.

Considerando che la varietà W in esame è compatta, è possibile individuare un ricoprimento finito di W costituito da carte locali, che indichiamo con $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ (⁴). Su ciascuna U_α si definisce una funzione differenziabile f_α a valori nell'intervallo $[0, 1]$ in modo che

³Si ricordi che i punti critici della funzione differenziabile $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sono i punti p della varietà M dove risulta $df_p = 0$. Tali punti si dicono non degeneri se il determinante di $(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f)$ valutato nel punto in esame è diverso da zero.

⁴Non è riduttivo supporre che nessuna U_α interseca contemporaneamente V_0 e V_1 e che ψ_α mandi U_α in S^n .

- $f_\alpha = \pi \circ \psi_\alpha$ ⁽⁵⁾, se U_α interseca V_0 ;
- $f_\alpha = 1 - \pi \circ \psi_\alpha$, se U_α interseca V_1 ;
- $f_\alpha \equiv 1/2$, se U_α non interseca ∂W .

Per mezzo di una partizione dell'unità subordinata a tale ricoprimento, si ottiene una funzione globalmente definita su W a valori in $[0, 1]$, priva di punti critici in un intorno di ∂W e tale che $f^{-1}(0) = V_0$, $f^{-1}(1) = V_1$. A questo punto è necessario passare da questa funzione ad un'altra che risulti priva di punti critici degeneri, ovviamente senza perdere le proprietà di cui f già gode. A tale scopo costruiamo preliminarmente una struttura di gruppo⁶ topologico su $\mathcal{F}(M, \mathbb{R})$, che chiameremo topologia \mathcal{C}^2 . Indicato con $\{C_\alpha\}$ un raffinamento compatto di $\{U_\alpha\}$, gli insiemi della forma $N(\delta)$ risultano essere costituiti da tutte le funzioni g che verificano le condizioni $|g\psi_\alpha^{-1}| < \delta$, $|\frac{\partial(g\psi_\alpha^{-1})}{\partial x_i}| < \delta$ e $|\frac{\partial^2(g\psi_\alpha^{-1})}{\partial x_i \partial x_j}| < \delta$ in ogni punto di $\psi_\alpha(C_\alpha)$ e per ogni possibile valore degli indici α , i e j . Tali insiemi descrivono al variare di δ una base locale della topologia \mathcal{C}^2 nel punto della funzione nulla.

Riprendiamo la funzione f precedentemente costruita, sappiamo che questa è priva di punti critici in un intorno di ∂W , che chiamiamo U . In quanto paracompatto, W è anche normale, allora esiste un aperto V , contenente ∂W , tale che $\bar{V} \subset U$. Non è quindi riduttivo supporre che ogni elemento del ricoprimento finito U_α sia contenuto in U oppure in $W \setminus \bar{V}$. Se chiamiamo C l'unione di tutti gli elementi del raffinamento contenuti in U , fondamentale grazie al seguente lemma è possibile individuare un aperto N di f nella topologia \mathcal{C}^2 , dove ciascuna funzione è priva di punti critici degeneri in C e coincide con f se ristretta a V .

Lemma 1.1. *Sia $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile di classe \mathcal{C}^2 , dove U è aperto e che ha solo punti critici non degeneri nel compatto K , allora ogni altra funzione $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile di classe \mathcal{C}^2 , che verifica le seguenti condizioni in ogni punto di K per una opportuna costante $\delta \in \mathbb{R}$,*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| < \delta, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \delta, \quad \forall i, j$$

non può avere punti critici degeneri in K .

Osservando che $0 \leq f \leq 1$, possiamo restringere N ad un altro aperto N_0 , affinché ogni funzione $g \in N_0$ verifichi la condizione $0 \leq g \leq 1$ su tutto W

⁵ π indica la proiezione sull'ultima coordinata.

⁶Gruppo rispetto all'usuale addizione definita in \mathbb{R} .

e, poiché $N_0 \subseteq N$, $g|_V = f|_V$, cioè neppure g presenta punti critici in U . Sia U_α una delle carte che ricoprono $W \setminus \bar{V}$ e C_α il corrispondente elemento del raffinamento. Partendo da f , si cerca di costruire un aperto contenuto in N_0 , che chiameremo N_1 , contenente funzioni prive di punti degeneri in C_α , avendo cura che tutte coincidano perfettamente con f in un intorno di $W \setminus U_\alpha$. Senza entrare nei dettagli, osserviamo solamente che è questa operazione è resa possibile soprattutto dal seguente risultato.

Lemma 1.2 (Morse). *Sia $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile di classe \mathcal{C}^2 , con U aperto, allora, se $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare, l'insieme delle funzioni della forma $f + L$ con punti critici degeneri è di misura nulla⁷.*

Iterando ragionamento appena effettuato, dopo un numero finito di passi si individua un aperto $N_k \subseteq \dots \subseteq N_1 \subseteq N_0$, dove ciascuna funzione in esso contenuta è priva di punti critici degeneri in assoluto, in quanto ne risulta priva su ciascun elemento del raffinamento. Si mostra in questo modo che *ad ogni triade è associato un aperto denso della topologia \mathcal{C}^2 di funzioni di Morse.*

Per concludere questo paragrafo dedicato alle funzioni Morse definiamo il concetto di indice. Tale concetto permette una classificazione dei punti critici non degeneri, che si rivelerà fondamentale nel corso della dimostrazione del teorema dell' h -cobordismo affrontata nel prossimo capitolo.

Data una funzione differenziabile $f : W \rightarrow \mathbb{R}$, una volta fissato un punto $p \in W$ è possibile individuare una forma bilineare $f_{**} : T_p W \times T_p W \rightarrow \mathbb{R}$, definita come $f_{**}(u^i \partial_i, v^j \partial_j) = u^i v^j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f|_p$ (⁸).

Definizione 4. Si definisce come indice di f nel punto p la massima dimensione del sottospazio di $T_p W$ sul quale la forma bilineare f_{**} risulta definita negativa.

Nel caso di punti critici non degeneri la funzione f risulta localmente univocamente individuata, infatti vale il seguente lemma.

Lemma 1.3 (Morse). *Sia p un punto critico non degenero della funzione $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ e sia λ l'indice di f in p , allora esistono delle coordinate locali (x_1, \dots, x_n) centrate in p che permettono di rappresentare f in forma standard, cioè nella forma*

$$f(p) - x_1^2 - \dots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$$

⁷In $\text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$

⁸È immediato constatare come f_{**} non dipenda dalla scelta delle coordinate locali.

Dimostrazione. È immediato dimostrare che una funzione che viene rappresentata localmente in tale modo abbia p come unico punto critico dell'intorno. È facile poi calcolarne l'indice.

Viceversa osserviamo che un punto critico non è degenere se e solo se la nullità di f_{**} è 0, cioè se il sottospazio di $T_p W$ di dimensione massima sul quale f_{**} risulta nulla ha dimensione 0. Pertanto diagonalizzando tale forma bilineare si ha la tesi. \square

In seguito faremo spesso uso degli intorni standard delle funzioni di Morse, possiamo però evidenziare subito una conseguenza di questo lemma di notevole importanza: ogni punto critico non degenere è isolato. Pertanto, poiché avremo a che fare con funzioni definite su compatti, tali punti si presenteranno in numero finito. Vediamo una semplice applicazione di questa proprietà, che utilizzeremo alla fine del capitolo.

Lemma 1.4. *Sia f una funzione di Morse associata ad una certa triade, la quale ha con punti critici p_1, \dots, p_k , allora esiste un'altra funzione di Morse con i medesimi punti critici, ma ad ogni livello è presente al massimo un solo punto critico.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f(p_1) = f(p_2)$. Scegliamo due aperti U e N tali che $p_1 \in U \subset N \subset \bar{N} \subset W \setminus \partial W$ e $p_i \notin \bar{N} \forall i \neq 1$. Consideriamo quindi una funzione differenziabile $\lambda : W \rightarrow [0, 1]$ tale che $\lambda \equiv 1$ in U e $\lambda \equiv 0$ in $W \setminus N$. Posto $K = \overline{\{p \in W \mid 0 < \lambda(p) < 1\}}$, definiamo una metrica Riemanniana su W e fissiamo due costanti $c, c' \in \mathbb{R}$ tali che $0 < c \leq |\text{grad } f|$ in K e $|\text{grad } \lambda| \leq c'$ in W . Sia $\epsilon \leq \frac{c}{c'}$ una costante sufficientemente piccola affinché $f_1 = f + \epsilon\lambda$ abbia valori $[0, 1]$. Dalla costruzione di f_1 si evince immediatamente che $f_1(p_1) \neq f_1(p_i) = f(p_i)$. Se poi osserviamo che per i punti di K si verifica che $|\text{grad } f_1| \geq |\text{grad } f| - |\text{grad } (\epsilon\lambda)| > c - \epsilon c' > 0$, quindi f_1 non può avere altri punti critici oltre p_1 in K . Poiché all'esterno di K $f_1 = f$, possiamo affermare che i punti critici di f_1 sono esattamente gli stessi di f . Visto che i punti critici sono finiti, iterando questo procedimento si costruisce la funzione cercata. \square

1.3 Composizione di cobordismi

Dobbiamo a questo punto chiarire in che modo possono risultare utili le funzioni di Morse nello studio dei cobordismi, o, per meglio dire, illustreremo uno dei possibili impieghi (forse il più semplice) nel loro studio. Per poter rispondere a questa domanda dobbiamo però fare un passo indietro e mostrare come sia possibile comporre i cobordismi.

Dati due triadi (W, V_0, V_1) e (W', V'_0, V'_1) , supponendo che esista un diffeomorfismo h tra V_1 e V'_0 , posso costruire una nuova triade $(W \cup_h W', V_0, V'_1)$, dove $W \cup_h W'$ è ottenuta da $W \sqcup W'$ identificando tramite h i punti V_1 con quelli di V'_0 . Verifichiamo quindi che tale costruzione sia effettivamente una triade di varietà.

Teorema 1.5. *Su $W \cup_h W'$ è definita una struttura differenziabile compatibile con quelle definite su W e W' . Tale struttura risulta inoltre unica a meno di diffeomorfismi che lasciano invariati V_0, V'_0 e V'_1 .*

Dimostrazione. Per dimostrarne esistenza mostriamo che dalla semplice giustapposizione delle strutture definite su W e W' se ne ottiene una nuova, globalmente definita su $W \cup_h W'$. Il fondamento di questa costruzione è costituita dal teorema del collare⁹. Tale teorema garantisce infatti l'esistenza dei diffeomorfismi $g : V_1 \times [0, 1) \rightarrow U_1 \subset W$ e $g' : V'_0 \times [0, 1) \rightarrow U'_1 \subset W'$. Se indichiamo con j (j' risp.) le inclusioni di W (W' risp.) in $W \cup_h W'$, possiamo costruire una funzione differenziabile $G : V_1 \times (0, 2) \rightarrow W \cup_h W'$, dove

$$G(x, t) = \begin{cases} (j \circ g)(x, 1 - t) & \text{se } t \in (0, 1] \\ (j' \circ g')(h(x), t - 1) & \text{se } t \in [1, 2) \end{cases}$$

Proprio perché G è differenziabile, si ha la certezza che le due strutture differenziabili siano tra loro compatibili in intorni di V_1 .

Per quanto riguarda la seconda parte della dimostrazione, cioè l'unicità, useremo il teorema del doppio collare. Infatti V_1 è un'ipersuperficie contenuta in $W \cup_h W'$ non intersecante il bordo, compatta¹⁰ e a due facce¹¹. Risultando verificate tutte le ipotesi del teorema, in virtù dello stesso è possibile individuare un diffeomorfismo $f : V_1 \times (-1, 1) \rightarrow U_2 \subset W \cup_h W'$. Se spezziamo $V_1 \times (-1, 1)$ in $j^{-1}(U_2 \cap j(W))$ e $j'^{-1}(U_2 \cap j'(W))$, ricordando che per ipotesi la struttura differenziabile definita su $W \cup_h W'$ è compatibile con quelle definite su W e W' e che lo stesso teorema sostiene che $f(V_1, 0) = V_1$, otteniamo due collari di V_1 in W e W' rispettivamente. Quindi su $W \cup_h W'$ è definita una struttura differenziabile dello stesso tipo costruito nella prima parte del teorema. \square

Appare evidente come dalla precedente costruzione discenda il concetto di composizione di cobordismi, come questa risulti associativa, ma non commutativa (si pensi ad esempio a varietà non connesse) e come i cobordismi

⁹“Ogni varietà W differenziabile compatta con bordo contiene un intorno del bordo diffeomorfo a $\partial W \times [0, 1)$ ”.

¹⁰Chiusa contenuta nella varietà compatta W , è pertanto essa stessa compatta.

¹¹Se U è un intorno aperto di $W \cup_h W'$ che contiene V_1 , allora discende direttamente dalla costruzione di $W \cup_h W'$ che $U \setminus V_1$ sia spezzato in due componenti.

presentati nell'esempio 1 fungano da elemento neutro.

Adesso possiamo rispondere alla domanda che ci siamo posti all'inizio di questo paragrafo. Ricordiamo che nel precedente abbiamo dimostrato come sia sempre possibile individuare una funzione di Morse f prive di più punti critici allo stesso livello e come tali punti siano presenti in numero finito. Possiamo allora suddividere $[0, 1]$ in modo che tra due punti successivi della partizione a_i e a_{i+1} cada uno ed un solo valore critico¹². Considerato l'intorno standard U del punto critico p che cade in $[a_i, a_{i+1}]$, possiamo eventualmente restringerlo sufficientemente perché $f(U)$ sia contenuto in $[a_i, a_{i+1}]$. Grazie al teorema della funzione inversa, possiamo affermare che $f^{-1}([a_i, a_{i+1}])$ privata dei punti critici di f è una sottovarietà di W e per questo motivo le carte locali relative a punti di $f^{-1}([a_i, a_{i+1}]) \setminus \text{Crit} f$ che cadono in U devono risultare compatibili con la carta locale definita su U . Pertanto $f^{-1}([a_i, a_{i+1}])$ corrisponde ad una varietà compatta con bordo e deduciamo che le funzioni di Morse permettono di scomporre un dato cobordismo in altri più "semplici" caratterizzati da numero di Morse¹³ 1, che d'ora in poi chiameremo cobordismi elementari.

1.4 Campi vettoriali di tipo gradiente

Le funzioni di Morse trovano altri possibili impieghi nello studio cobordismi. Infatti in talune circostanze si dimostra che un cobordismo gode di certe proprietà se si riesce a trovare una funzione di Morse ad esso associata con le particolari caratteristiche. In quest'ottica risulterà indispensabile il concetto di campo vettoriale di tipo gradiente come strumento di ricerca della "giusta" funzione di Morse tra tutte quelle possibili.

Definizione 5. Data una triade (W, V_0, V_1) ed una funzione di Morse f ad esso associata, un campo vettoriale ξ su W si dice di tipo gradiente se $\xi(f) > 0$ in tutti i punti non critici di f e se, nell'intorno di ogni punto critico p dove f assume la forma standard, nell'ipotesi che questo sia di indice λ , ξ è rappresentabile in coordinate locali come $(-x_1, \dots, -x_\lambda, x_{\lambda+1}, \dots, x_n)$.

Teorema 1.6. *Esiste sempre un campo vettoriale di tipo gradiente ξ associato ad una funzione di Morse f .*

Dimostrazione. Di seguito supporremo che f abbia un solo punto critico, se così non fosse l'intero ragionamento che segue può essere facilmente riadattato. Sia U_0 l'intorno del punto critico in cui f assume la forma

¹²Immagine di un punto critico.

¹³Il minor numero di punti critici che si possono presentare in una funzione di Morse.

standard, la sua esistenza è garantita dal lemma 1.3. Poiché tutti i rimanenti punti appartenenti a $W \setminus U_0$ non sono critici, usando il teorema della funzione implicita è possibile affermare che per ogni $q \in W \setminus U_0$, $f^{-1}(q)$ è un'ipervarietà immersa in W . Pertanto scelto un aperto della forma $(f(q) - \delta, f(q) + \delta)$ non contenente il valore critico, risulta che nella sotto-varietà $f^{-1}((f(q) - \delta, f(q) + \delta))$ è possibile individuare delle carte locali (x_1, \dots, x_n) rispetto alle quali f è rappresentata come $f(q) + x_1$ e le ultime x_2, \dots, x_n coordinate rappresentano una carta locale di $f^{-1}(f(q) + x_1)$. In virtù del fatto che $W \setminus U_0$ è compatto, esistono un numero finito di aperti U_i del tipo precedente, tali da ricoprirlo. Definiamo ξ localmente: in U_0 come $-\sum_{j=1}^{\lambda} x^j \partial_j^0 + \sum_{j=\lambda+1}^n x^j \partial_j^0$, mentre in U_i come ∂_1^i . Traverso una partizione dell'unità subordinata a questo ricoprimento otteniamo un campo vettoriale ξ definito globalmente su W , nel quale è facile individuare tutte le caratteristiche richieste dalla definizione di campo di tipo gradiente. \square

Anche in questo caso è opportuno osservare come ad una stessa funzione di Morse siano associati più campi vettoriali di tipo gradiente.

CAPITOLO 2

IL TEOREMA DELL' H -COBORDISMO

2.1 Enunciato

Iniziamo questo capitolo enunciando il teorema dell' h -cobordismo, perché, essendo la sua dimostrazione l'obiettivo principale del capitolo, risulti chiaro quale sia il punto di arrivo delle argomentazioni sviluppate nei successivi paragrafi.

Teorema dell' h -cobordismo. *Un h -cobordismo¹ rappresentato da una triade (W, V_0, V_1) , dove ognuna delle tre varietà è semplicemente connessa e $\dim(W) \geq 6$ è un prodotto di cobordismi².*

In particolare osserviamo come le funzioni di Morse associate a prodotti di cobordismi siano caratterizzate dalla seguente proprietà.

Teorema 2.1. *Un cobordismo è un prodotto di cobordismi se e solo se il suo numero di Morse è zero.*

Dimostrazione. Supponiamo che il cobordismo esaminato ammetta una funzione di Morse $f : W \rightarrow [0, 1]$ priva di punti critici (l'altra dimostrazione è banale). A tale funzione è associato un campo vettoriale di tipo gradiente ξ' , da cui posso ricavarne un altro $\xi = \frac{\xi'}{\xi'(f)}$, il quale avrà la proprietà

¹Un cobordismo è detto h -cobordismo se viene rappresentato da triadi del tipo (W, V_0, V_1) , dove sia V_0 che V_1 sono retratti di deformazione di W .

²Un cobordismo è un prodotto di cobordismi se può essere rappresentato da una triade del tipo $(V_0 \times [0, 1], V_0 \times 0, V_0 \times 1)$.

$\xi(f) \equiv 1$. Sia $\theta^p(t)$ la curva integrale massimale di ξ passante per p , poiché $\frac{d}{dt}(f \circ \theta^p)|_{t_0} = \xi(f)(\theta^p(t_0)) \equiv 1$, è possibile riparametrizzarla in modo che

$$f(\theta^p(s)) = s.$$

Considerato che le carte locali relative a punti di ∂W sono definite su aperti di \mathbb{H}^n , i quali possono essere pensati come contenuti in un aperto di \mathbb{R}^n , possiamo quindi estendere il campo vettoriale ξ . Per ogni punto della varietà possiamo individuare un aperto U che lo contiene ed un intervallo I_U della forma $(-\delta, \delta)$ tali che $\theta^p(t)$ è definita per ogni $p \in U$ e $t \in I_U$. Visto che W è compatta esistono un numero finito di aperti U che la ricoprono e di conseguenza, se indichiamo con δ_0 il minimo delle ampiezze degli intervalli ad essi correlati, tale quantità è necessariamente positiva. Per ogni $p \in W$, posto $1 - f(p) = s_1 \frac{\delta_0}{4} + r_1$ risulta quindi ben definita $\theta^p(s_1 \frac{\delta_0}{4} + r_1) = \theta_{\frac{\delta_0}{4} + \dots + \frac{\delta_0}{4} + r_1}^p(p) = \theta_{\frac{\delta_0}{4}} \circ \dots \circ \theta_{\frac{\delta_0}{4}} \circ \theta_{r_1}(p)$. Analogamente posto $f(p) = s_2 \frac{\delta_0}{4} + r_2$ possiamo sostenere l'esistenza di $\theta^p(-s_2 \frac{\delta_0}{4} - r_2) = \theta_{-\frac{\delta_0}{4}} \circ \dots \circ \theta_{-\frac{\delta_0}{4}} \circ \theta_{-r_2}(p)$. Deduciamo pertanto quindi ogni curva integrale interseca una ed una sola volta tutte le ipersuperfici di livello. In particolare, inizia in V_0 e termina in V_1 . In virtù del teorema della funzione implicita, è definibile una funzione differenziabile $\tau_0(q)$ che ci fornisce l'opposto dell'istante in cui la curva integrale si trovava in V_0 ⁽³⁾. Sapendo che $\Theta(t, p) = \theta^p(t)$ è differenziabile in entrambe le variabili, siamo in grado di costruire un diffeomorfismo che cercavamo

$$\Psi : V_0 \times [0, 1] \rightarrow W$$

definito come $\Psi(p, s) = \theta^p(s)$, la cui inversa avrà la forma $\Psi^{-1}(p) = (\theta^p(-\tau_0(p)), \tau_0(p))$. □

Il resto del capitolo si delinea pertanto come una ricerca di funzioni di Morse prive di punti critici tra tutte quelle associate a un particolare cobordismo con le caratteristiche descritte nell'enunciato del teorema.

³Con questo ragionamento si può mostrare come, più in generale, l'esistenza di un campo vettoriale X non nullo, le cui curve integrali vanno da V_0 a V_1 , implichi che il cobordismo su cui è definito sia un cobordismo prodotto. Definiamo la funzione differenziabile $\tau_1(q)$ come quella funzione che fornisce l'istante in cui la curva integrale passante per q raggiunge V_1 e applichiamo il ragionamento che segue al campo $\tau_1(\theta^p(-\tau_0(p)))X(p)$.

2.2 Funzioni di Morse auto-indicizzanti

In questo paragrafo introdurremo il particolare tipo di funzioni di Morse che fungeranno da punto di partenza della nostra ricerca della funzione di Morse priva di punti critici. Partendo da una qualsiasi funzione di Morse se ne può ottenere un'altra di questo tipo particolare a seguito di un processo di "riordinamento" dei suoi punti critici. Per fare ciò è però necessario il seguente concetto ed una sua proprietà illustrata nel successivo lemma.

Definizione 6. Un aperto di V è detto intorno prodotto per la sottovarietà $M \subset V$, se tale aperto risulta diffeomorfo a $M \times \mathbb{R}^{\dim(V)-\dim(M)}$ e in particolare a M corrisponde $M \times 0$ mediante tale diffeomorfismo.

Esempio 2. \mathbb{S}^n ha un intorno prodotto in \mathbb{R}^{n+1} . Infatti l'applicazione che associa ad ogni punto x dell'aperto $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ il punto $(\frac{x}{\|x\|}, \log \|x\|)$ di $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ risulta essere un diffeomorfismo. Evidentemente \mathbb{S}^n è diffeomorfo a $\mathbb{S}^n \times 0$.

Lemma 2.2. *Siano M ed N due sottovarietà di V , di dimensione m ed n rispettivamente, tali che $m + n < \dim(V) = v$. Se M possiede un intorno prodotto in V , allora esiste un diffeomorfismo $h : V \rightarrow V$ isotopo⁴ all'identità tale che $h(V) \cap N = \emptyset$.*

Dimostrazione. Sia $k : M \times \mathbb{R}^{v-m} \rightarrow U \subset V$ il diffeomorfismo previsto dalla definizione di intorno prodotto. Posto $N_0 = U \cap N$ e $g = \pi \circ k^{-1}$, dove π indica la proiezione su \mathbb{R}^{v-m} , osserviamo che $k(M \times x)$ interseca N se e solo se $x \in g(N_0)$. Il teorema di Sard⁵ garantisce l'esistenza di $u \in \mathbb{R}^{v-m} \setminus g(N_0)$. Utilizzeremo tale punto u per costruire il diffeomorfismo previsto dalla tesi. Inizialmente definiamo un campo vettoriale ζ su \mathbb{R}^{v-m} ,

$$\zeta(x) = \begin{cases} u & \text{se } \|x\| \leq \|u\| \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq 2\|u\| \end{cases}$$

Il teorema di esistenza e unicità della soluzione dei problemi di Cauchy garantisce l'esistenza di aperti di \mathbb{R}^{v-m+1} della forma $(-\epsilon, \epsilon) \times U$ dove risulta definito il flusso del campo vettoriale in questione. Evidentemente si può realizzare un ricoprimento di \mathbb{R}^{v-m+1} con aperti di questo tipo, tuttavia, poiché $K = \text{supp}(\zeta)$ è compatto, un numero finito di questi ricopre

⁴Si sottintende sempre isotopia liscia.

⁵"L'insieme dei valori critici di una funzione differenziabile ha misura nulla sul codominio."

Nel nostro caso, poiché per ipotesi $v - m > n$, è evidente come $g(N_0)$ costituisca un insieme di punti critici, i quali possono essere definiti come i punti in cui il differenziale della funzione non è suriettivo.

$K \times 0$. Possiamo individuare il minimo che valori degli ϵ associati agli aperti che costituiscono il sottoricoprimento finito, il quale sarà indicato con ϵ_0 e risulterà positivo, proprio perché il sottoricoprimento è finito. Possiamo quindi affermare che $\theta^x(t)$ è definito per qualsiasi valore di x e per $|t| < \epsilon_0$, considerato banalmente si ha che $\theta^x(t) \equiv x$ se $x \notin K$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Se fosse $x \in K$ e $t \geq \epsilon_0$, possiamo dividere t per $\epsilon/2$ e, usando le proprietà delle curve integrali, affermare che $\theta^p(t) = \theta^p(|k| \frac{\text{sgn}(k)\epsilon_0}{2} + r) = \theta_{\frac{\text{sgn}(k)\epsilon_0}{2} + \dots + \frac{\text{sgn}(k)\epsilon_0}{2} + r}(p) = (\theta_{\frac{\text{sgn}(k)\epsilon_0}{2}} \circ \dots \circ \theta_{\frac{\text{sgn}(k)\epsilon_0}{2}} \circ \theta_r)(p)$. Questo garantisce che le curve integrali di ζ sono parametrizzate su l'intera retta reale. Adesso possiamo usare il flusso di ζ per costruire la diffeotopia

$$H : V \times [0, 1] \rightarrow V$$

$$H(p, t) = \begin{cases} k(q, \Theta(t, x)) & \text{se } p = k(q, x) \in U \\ p & \text{se } p \notin U \end{cases}$$

Poiché θ_{-t} è l'inversa del gruppo ad un parametro θ_t e tenendo a mente come è stata costruita ζ , possiamo affermare che, fissato un qualsiasi valore di t , $H(-, t)$ è un diffeomorfismo da V a V . Infine è facile calcolare che $\Theta(t, 0) = u$ per $0 \leq t \leq 1$, quindi $h(M) = H(1, M) = k(M \times u)$ è disgiunto da M . \square

Consideriamo adesso una funzione di Morse f che abbia p come punto critico e fissiamo due valori reali $c_0 < f(p) = c < c_1$, in modo che $f(p)$ sia l'unico valore critico contenuto in questo intervallo. Indichiamo con U l'intorno di p in cui f assume la forma standard, sul quale è definita la carta locale $g : U \rightarrow \mathcal{B}_{2\epsilon}^n$, dove ϵ è scelto sufficientemente piccolo affinché, se

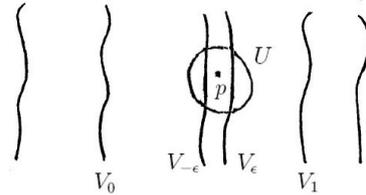


Figura 2.1: Posizione delle ipersuperfici e intorno standard.

chiamiamo $V_{-\epsilon} = f^{-1}(c - \epsilon^2)$ e $V_{\epsilon} = f^{-1}(c + \epsilon^2)$, $V_{-\epsilon}$ risulti compreso tra $V_0 = f^{-1}(c_0)$ e $f^{-1}(c)$ e perché V_{ϵ} si compreso tra $f^{-1}(c)$ e $V_1 = f^{-1}(c_1)$ ⁶. Definiamo un embedding $\varphi : \mathbb{S}^{\lambda-1} \times \mathcal{B}^{n-\lambda} \rightarrow V_{-\epsilon}$ nel seguente modo $\varphi(u, \theta v) = g^{-1}(\epsilon u \cosh \theta, \epsilon v \sinh \theta)$, dove $u \in \mathbb{S}^{\lambda-1}$, $v \in \mathbb{S}^{n-\lambda-1}$ e $\theta \in [0, 1)$. Lo usiamo per definirne un altro, che prende il nome di embedding caratteristico: $\varphi_L : \mathbb{S}^{\lambda-1} \times \mathcal{B}^{n-\lambda} \rightarrow V_0$. Considerato che tra V_0 e $V_{-\epsilon}$ non sono presenti punti punti critici, esiste una curva integrale associata ad un campo

⁶Ad esempio si può scegliere $4\epsilon^2 < \min\{|c - c_0|, |c - c_1|\}$.

vettoriale di tipo gradiente congiungente un punto del tipo $\varphi(u, \theta v)$ con un altro appartenente a V_0 (Cfr. con la dimostrazione del teorema 2.1).

Tale punto sarà esattamente $\varphi_L(u, \theta v)$.

Risulta in questo modo definita la sfera sinistra \mathbb{S}_L come $\varphi_L(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0)$.

Con l'aiuto di un altro embedding

$\psi : \mathcal{B}^\lambda \times \mathbb{S}^{n-\lambda-1} \rightarrow V_\epsilon$, $\psi(\theta u, v) = g^{-1}(\epsilon u \sinh \theta, \epsilon v \cosh \theta)$, si definisce

similmente la sfera destra \mathbb{S}_R su V_1 .

Supponiamo adesso che f abbia

due punti critici (p e p'), considerato che ogni cobordismo può essere scomposto in cobordismi elementari, non è riduttivo supporre che $f(p) < 1/2 < f(p')$. Se

$V = f^{-1}(\frac{1}{2})$, possiamo costruire la sfera sinistra di p' su V (che chiamiamo \mathbb{S}'_L) e la sfera destra di p su V (che chiameremo \mathbb{S}_R).

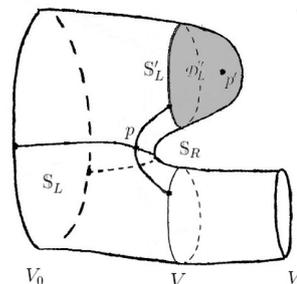


Figura 2.2: Esempi di sfere destre e sinistre relative ai punti critici p e p' .

Teorema 2.3. *Data una funzione di Morse associata con due punti critici p e p' , tali che $\lambda = \text{index}(p) \leq \text{index}(p') = \lambda'$, è possibile alterare il campo vettoriale di tipo gradiente ad esso associata in intorno sufficientemente piccolo di V affinché risulti $\mathbb{S}_R \cap \mathbb{S}'_L = \emptyset$.*

La dimostrazione che segue risulta essere particolarmente importante per il modo in cui viene usato un diffeomorfismo isotopo all'identità per alterare localmente un campo vettoriale. Tale procedimento sarà più volte usato nel seguito della trattazione.

Dimostrazione. Dalle costruzioni precedenti si evince che $\varphi_R(\mathcal{B}^\lambda \times \mathbb{S}^{n-\lambda-1})$ è un intorno prodotto di \mathbb{S}_R in V ⁽⁷⁾. Osservando che $\dim(\mathbb{S}_R) + \dim(\mathbb{S}'_L) = n - \lambda - 1 + \lambda' - 1 < n - 1$, in quando $\lambda \leq \lambda'$, in virtù del lemma precedente esiste un diffeomorfismo $h : V \rightarrow V$ isotopo all'identità tale che $h(\mathbb{S}_R) \cap \mathbb{S}'_L = \emptyset$. Scelto un valore reale $a < 1/2$ sufficientemente piccolo affinché $[a, 1/2]$ non contenga valori critici di f e considerato un campo vettoriale ξ di tipo gradiente associato a f , definiamo un altro campo vettoriale in $f^{-1}([a, 1/2])$ come $\hat{\xi} = \frac{\xi}{\xi(f)}$. Definiamo un diffeomorfismo $G' : [a, 1/2] \times V \rightarrow [a, 1/2] \times V$ come $G'(t, p) = (t, H((\frac{t-a}{1/2-a}, p))$, dove H è la diffeotopia di h . Usando una funzione monotona crescente $\lambda : [a, 1/2] \rightarrow [a, 1/2]$, identicamente uguale

⁷Si noti che un'immersione tra varietà della stessa dimensione è un diffeomorfismo locale.

ad a in un intorno di a e identicamente uguale ad $1/2$ in un intorno di $1/2$, possiamo alterare G' definendo $G(t, p) = G'(\lambda(t), p)$. Usiamo il diffeomorfismo Ψ (definito alla fine del teor. 2.1) relativo al campo vettoriale $\hat{\xi}$ e G per definire il altro campo vettoriale $\xi' = d(\Psi \circ G \circ \Psi^{-1})\hat{\xi}$.

Visto che $G \equiv id$ in un intorno destro di a , $\xi' \equiv \hat{\xi}$ sulla controimmagine di tale intorno rispetto f . Considerato che $G \equiv h$ in un intorno sinistro di $1/2$, possiamo affermare che nella controimmagine di tale intorno rispetto f risulta $\xi' \equiv \hat{\xi}$. Infatti, essendo h un diffeomorfismo, in ogni punto di questo insieme si verifica che $\xi'_{h(q)} = d(\Psi \circ G \circ \Psi^{-1})_q \hat{\xi} = d(\Psi)_{(f(q), h(q))} \hat{\xi}$, poiché Ψ è una riparametizzazione del flusso di $\hat{\xi}$, si ha che $\xi'_{h(q)} = \hat{\xi}_{h(q)}$.

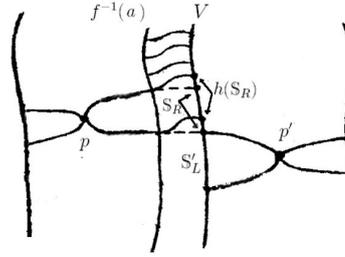


Figura 2.3: Alterazione delle curve integrali.

Pertanto risulta definito un campo vettoriale $\tilde{\xi}$ su tutta la varietà, il quale coincide in $f^{-1}([a, 1/2])$ con $\xi(f)\xi'$, mentre esternamente coincide con $\xi(f)\hat{\xi} = \xi$. Risulta quindi che $\tilde{\xi}$ è ancora un campo vettoriale di tipo gradiente per f , ma in questo caso la sfera destra su V coincide per costruzione con $h(S_R)$, la quale è disgiunta da S'_L . \square

Il precedente teorema ci pone nella condizione di poter affermare dell'esistenza di un campo vettoriale di tipo gradiente associato ad una assegnata funzione di Morse le cui curve integrali non passano contemporaneamente per entrambi i punti critici. Il verificarsi di questa condizione ci permette di individuare quel tipo di funzioni di Morse che cercavamo.

Teorema 2.4. *Data una funzione di Morse f con due punti critici p e p' , a cui è associato un campo vettoriale di tipo gradiente ξ , e siano K_p ($K_{p'}$) la totalità delle traiettorie uscenti oppure entranti in p (p' rispettivamente). Se $K_p \cap K_{p'} = \emptyset$, è possibile trovare una nuova funzione di Morse g tale che*

1. ξ è un campo di tipo gradiente anche per g ;
2. i punti critici sono gli stessi di f , ma i rispettivi valori possono essere arbitrariamente scelti in $(0, 1)$;
3. f coincide con g in un intorno di ∂W , mentre differisce per una costante in un intorno di V .

Dimostrazione. Prediamo una funzione differenziabile $\mu : V_0 \rightarrow [0, 1]$ che risulti nulla in un intorno di $K_p \cap V_0$ e identicamente uguale ad 1 in un intorno di $K_{p'} \cap V_0$. Estendiamo tale funzione su tutta la varietà W in modo che risulti costante sulle curve integrali, chiamiamola $\bar{\mu}$. La nuova funzione di Morse g con le caratteristi può essere ottenuta come $G(f(q), \bar{\mu}(q))$, dove $G : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ è una funzione differenziabile con le seguenti caratteristiche:

- $\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) > 0, \forall x, y$;
- $G(x, y)$ è limitata in $[0, 1]$ ed è una funzione crescente risp. x ;
- $G(f(p), 0) = a, G(f(p'), 1) = a'$ con $a > a'$ scelti arbitrariamente;
- $G(x, y) = x$ con x in un opportuno intorno di 0 oppure di 1 e y qualsiasi;
- $\frac{\partial G}{\partial x}(x, 0) = 1$ con x in un opportuno intorno di $f(p)$;
- $\frac{\partial G}{\partial x}(x, 1) = 1$ con x in un opportuno intorno di $f(p')$.

□

I precedenti teoremi sono stati dimostrati nel caso cui vi siano un solo punto critico di indice λ e un solo punto critico di indice λ' , ma possono essere facilmente generalizzati al caso in cui si presenti più di due punti critici con stesso indice.

Teorema 2.5 (Smale, Wallace). *Data una qualsiasi funzione di Morse definita su una varietà di dimensione n , esiste un'altra funzione di Morse f associata alla medesima triade e con gli stessi punti critici p tale che $f(p) = \frac{\text{index}(p)+1/2}{n+1}$. Tale funzioni sono chiamate auto-indicizzanti.*

2.3 Eliminazione di punti critici

In questo paragrafo chiariremo come in particolari circostanze si possa operare sulla funzione ricavata nel precedente paragrafo al fine di passare da questa funzione di Morse a quella priva di punti critici. Nel successivo, quando sarà presentata la dimostrazione del teorema, sarà illustrato il modo in cui i risultati qui ottenuti si possano applicare al caso dei cobordismi descritti dal teorema dell' h -cobordismo.

Definizione 7. Due sottovarietà M ed N di V si intersecano trasversalmente in $p \in M \cap N$ se e solo se $T_p V = T_p M \oplus T_p N$.

Osserviamo che se la varietà V è compatta, come d'altro canto accadrà sempre nel nostro caso, le sottovarietà si intersecano trasversalmente in un numero finito di punti. Infatti se supponiamo che $p \in M \cap N$ sia un punto d'intersezione trasversa, allora sarà possibile individuare un aperto U di V contenente p su cui sono definite le coordinate locali $(x_1, \dots, x_{\dim(N)}, x_{\dim(N)+1}, \dots, x_{\dim(M)+\dim(N)})$, dove risulti che $q \in U$ appartiene ad N se e solo se $x_{\dim(N)+1}(q) = 0, \dots, x_{\dim(M)+\dim(N)}(q) = 0$ oppure appartiene ad M se e solo se $x_1(q) = 0, \dots, x_{\dim(N)}(q) = 0$. Per cui si evince che $M \cap N \cap U = \{p\}$. L'affermazione iniziale segue dalla compattezza di V .

Supponiamo che M e $\nu(N)$, il fibrato normale di N , siano varietà orientate e che M ed N si intersechino trasversalmente in ogni punto di $M \cap N$, in questi punti possiamo pertanto identificare $T_p M$ con $\nu_p N$.

Definizione 8. Il numero d'intersezione di N e M in p è uguale ad 1 se, scelta arbitrariamente una base orientata positivamente per $T_p M$, una volta fissata un'orientazione su M , questa risulta essere positiva anche per $\nu_p N$, viceversa sarà uguale a -1 . Il numero d'intersezione $N \cdot M$ di N ed M è dato dalla somma di tutti i numeri d'intersezione relativi ad ogni punto in $N \cap M$.

Ciò premesso, supponiamo che si assegnata una triade (W, V_0, V_1) a cui è associata una funzione di Morse f , la quale presenta due punti critici, che chiamiamo p e p' , rispettivamente di indice λ e $\lambda + 1$. Supponendo che $f(p) < 1/2 < f(p')$, indichiamo con \mathbb{S}_R la sfera destra di p su $V = f^{-1}(1/2)$ e con \mathbb{S}'_L la sfera sinistra di p' rispetto ad un certo campo vettoriale di tipo gradiente ξ . Si fissi arbitrariamente un'orientazione su \mathbb{S}_R e su $\nu(\mathbb{S}_L)$.

Teorema 2.6 (di cancellazione). *Siano W, V_0, V_1 semplicemente connessi e $1 < \lambda < n - 3$. Se $\mathbb{S}_R \cdot \mathbb{S}'_L = \pm 1$ è possibile individuare un altro campo vettoriale di tipo gradiente associato a f tale che le nuove sfere si intersechino in un solo punto e trasversalmente. Questo implica a sua volta l'esistenza di una funzione di Morse associata al cobordismo priva di punti critici.*

Per affrontare la dimostrazione è necessario ricorrere al seguente teorema di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 2.7 (Whitney). *Siano M ed N due sottovarietà chiuse di V , che si intersecano trasversalmente. Supponiamo che M e $\nu(N)$ siano orientati e che $\dim(V) \geq 5$ e $\dim(N) \geq 3$. Ammettiamo che $p, q \in M \cap N$ sia punti con numero d'intersezione opposto, tali che siano contenuti in un laccio contraibile in V , scomponibile come concatenazione di un arco da p a q*

contenuto in M e di un altro da q a p contenuto in N , entrambi non passanti per punti di $M \cap N$ diversi da p e q . Solo nel caso in cui $\dim(M) = 1$ oppure 2 si ipotizzi inoltre che l'inclusione induca un isomorfismo sui gruppi fondamentali $\pi_1(V \setminus N)$ e $\pi_1(V)$. Queste ipotesi garantiscono l'esistenza di una diffeotopia del diffeomorfismo h , tale da fissare i punti appartenenti ad un certo intorno di $M \cap N \setminus \{p, q\}$ e tale che $h(M) \cap N = M \cap N \setminus \{p, q\}$.

Dimostrazione del teorema di cancellazione. Inizialmente possiamo alterare il campo ξ in modo che \mathbb{S}_R e \mathbb{S}'_L si intersechino trasversalmente. Questa operazione può essere effettuata riadattando il ragionamento esposto nelle dimostrazioni del lemma 2.2 e del teorema 2.3. Considerato che $\mathbb{S}_R \cdot \mathbb{S}'_L = \pm 1$, è possibile individuare una coppia di punti p , q con numeri d'intersezione opposti. Indichiamo con \mathcal{D}_R (e con \mathcal{D}'_L) l'unione di tutti segmenti di curve integrali che congiungono p (p' risp.) con \mathbb{S}_R (\mathbb{S}'_L risp.). Mostriamo adesso che se $\lambda \geq 2$ sono verificate tutte le ipotesi del teorema 2.7. Usando il teorema di Seifert-Van Kampen possiamo affermare che $\pi_1(\mathcal{D}_R \cup \mathcal{D}'_L) = 1$, visto che $\pi_1(\mathcal{D}_R) = \pi_1(\mathcal{D}'_L) = 1$ e che $\mathcal{D}_R \cap \mathcal{D}'_L = \mathbb{S}^\lambda$, ma questo, in virtù dello stesso teorema, implica che $\pi_1(V) \cong \pi_1(\mathcal{D}_R \cup \mathcal{D}'_L \cup V)$. Però $\mathcal{D}_R \cup \mathcal{D}'_L \cup V$ è un retratto di deformazione della varietà W (Cfr. appendice), la quale è per ipotesi semplicemente connessa, quindi $\pi_1(V) = 1$, cioè ogni laccio è contraibile in V . Le altre ipotesi richieste dal teorema di Whitney sono evidentemente verificate. Inoltre, se fosse $\lambda = 2$ dobbiamo inoltre dimostrare che $\pi_1(V \setminus \mathbb{S}_R) = 1$. Iniziamo con l'osservare che le traiettorie del campo di tipo gradiente determinano un diffeomorfismo da $V \setminus \mathbb{S}_R$ a $V_0 \setminus \mathbb{S}_L$, quindi i loro gruppi fondamentali saranno isomorfi. Poi indichiamo con N un intorno prodotto di \mathbb{S}_L in V_0 . Poiché $\dim(\mathbb{S}_L) = n - \lambda - 1 = n - 3 \geq 3$, possiamo affermare che $\pi_1(\mathbb{S}_L) = 1$, quindi $\pi_1(N) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}_L) = \pi_1(\mathbb{R}^2) \times \pi_1(\mathbb{S}_L) = 1$ e $\pi_1(V_0 \setminus \mathbb{S}_L \cap N) = \pi_1(N \setminus \mathbb{S}_L) \cong \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus O) = \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi_1(V_0 \setminus \mathbb{S}_L) & \\
 \nearrow & & \searrow \\
 \pi_1(N \setminus \mathbb{S}_L) \cong \mathbb{Z} & & \pi_1(V_0) \cong 1 \\
 \searrow & & \nearrow \\
 & \pi_1(N) \cong 1 &
 \end{array}$$

Il teorema di Seifert-Van Kampen garantisce che $\pi_1(V_0 \setminus \mathbb{S}_L) = 1$. Infatti, essendo N semplicemente connesso, $\pi_1(V_0)$ è isomorfo a $\frac{\pi_1(V_0 \setminus \mathbb{S}_L)}{K}$, dove K è la chiusura normale in $\pi_1(V_0) = 1$ di $\phi(\pi_1(N \setminus \mathbb{S}_L))$, con ϕ morfismo indotto sui gruppi fondamentali dall'inclusione.

Il teorema 2.7 ci fornisce una diffeotopia che possiamo usare come nella

dimostrazione del teorema 2.3 per individuare un nuovo campo vettoriale di tipo gradiente associato alla stessa funzione di Morse tale che le nuove sfere hanno lo stesso numero d'intersezione delle precedenti e si intersecano in $\mathbb{S}_r \cap \mathbb{S}'_L \setminus \{p, q\}$. Iterando tale operazione si trova il campo di tipo gradiente previsto dalla prima del teorema.

Per poter dimostrare la seconda parte del teorema dobbiamo dapprima mostrare l'esistenza di un campo vettoriale di tipo gradiente e di un intorno U_T , contenente la curva integrale compresa tra i punti critici, su cui è definita una carta locale g che manda i punti critici p e p' rispettivamente in $(0, \dots, 0)$ e in $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, che verifica $dg(\xi)(q) = \eta(g(q)) = (v(x_1), -x_2, \dots, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n)$, dove $g(q) = x = (x_1, \dots, x_n)$ e dove $v(x_1)$ è una funzione differenziabile che

- si annulla in 0 e in 1,
- in un intorno di 0 e in un altro di 1 verifica $|\frac{dv}{dx_1}| \equiv 1$,
- risulta positiva solo nell'intervallo $(0, 1)$.

Iniziamo costruendo su \mathbb{R}^n il campo vettoriale

$$\eta(x) = (v(x_1), -x_2, \dots, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n),$$

dove v gode delle proprietà citate precedentemente. Possiamo pensare η come campo vettoriale di tipo gradiente associato alla funzione di Morse su \mathbb{R}^n

$$F(x) = f(p) + 2 \int_0^{x_1} v(t) dt - \sum_{i=1}^{\lambda+1} x_i^2 + \sum_{i=\lambda+2}^n x_i^2.$$

Visto che si dispone di una certa libertà nella scelta della funzione v , affinché risulti $F(e_1) = f(p')$, possiamo richiedere che v verifichi l'ulteriore condizione $2 \int_0^1 v(t) dt = f(p') - f(p)$. Osserviamo a questo punto, visto che nel capitolo 1 è stata dimostrata l'esistenza di intorni standard per funzioni di Morse e per campi di tipo gradiente, componendo opportunamente le carte locali definite su tali intorni, possiamo individuare due diffeomorfismi g_1 e g_2 , definiti su chiusi disgiunti $L_1 \ni 0$ ed $L_2 \ni e_1$ rispettivamente, tali da mandare il campo η in ξ (per praticità continuiamo a chiamare così il campo di tipo gradiente ottenuto al termine della prima parte della dimostrazione), il segmento congiungente 0 con e_1 (o per meglio dire la sua porzione dove è definito il diffeomorfismo) nella traiettoria T e tali che $g_1(0) = p$ e $g_2(e_1) = p'$. Siano b_1 e b_2 le immagini attraverso la funzione di Morse F delle intersezioni del segmento $0e_1$ con ∂L_1 ed ∂L_2 rispettivamente,

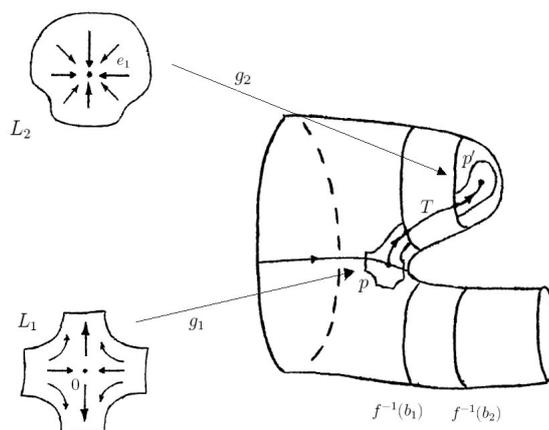


Figura 2.4: Diffeomorfismi g_1 e g_2 .

che chiamiamo p_1 e p_2 . Per costruzione dei diffeomorfismi g_1 e g_2 , possiamo restringere L_1 e L_2 affinché siano rispettivamente intorno in $F^{-1}([f(p), b_1])$ ed in $F^{-1}([b_2, f(p')])$ di una porzione del segmento $0e_1$. Per ragioni simili, non è riduttivo supporre che in ∂L_1 sia contenuto U_1 un intorno in $f^{-1}(b_1)$ di p_1 . Possiamo inoltre supporre l'esistenza di $U_2 \subset L_2$ similmente definito. Perché l'intervallo $[b_1, b_2]$ è privo di punti critici di F , le curve integrali del campo η definiscono un diffeomorfismo da U_1 a U_2 (eventualmente dopo averli entrambi ristretti). Rimane pertanto individuato un insieme diffeomorfo a $U_1 \times [0, 1]$ (cfr. dimostrazione del teor. 2.1), che chiamiamo L_0 . Dalla stessa costruzione, si evince che g_1 ammette un'unica estensione \bar{g}_1 , embedding differenziabile definito su $L_1 \cup L_0$, tale da mandare traiettorie del campo η in traiettoria del campo ξ e ipersuperfici di livello di F in ipersuperfici di livello di f .

Per ragioni già esposte, il campo vettoriale ξ individua un diffeomorfismo h tra $f^{-1}(b_1)$ e $f^{-1}(b_2)$, mentre il campo vettoriale η ne definisce un altro, h' , tra U_1 e U_2 . Se $U_1 \cap T = \{p_1\}$ e $h_0 = g_2 h' g_1^{-1}$, le proprietà individuate nella precedente sezione divengono fondamentali nell'individuazione di una diffeotopia di $h_0^{-1}h$, dove entrambe sono ristrette ad un intorno opportunamente piccolo di p_1 . Tralasciamo i dettagli di questa non immediata dimostrazione. Informiamo solo della presenza in essa di numerose analogie con la dimostrazione del teorema dell'estensione dell'isotopia di Thom ([2]). Poiché la restrizione di h e h_0 sono isotope, con un procedimento simile a quello visto nella dimostrazione del teorema 2.3, alteriamo allora il campo ξ in $f^{-1}((b_1, b_2))$ cosicché, se ripetiamo tutto il ragionamento esposto

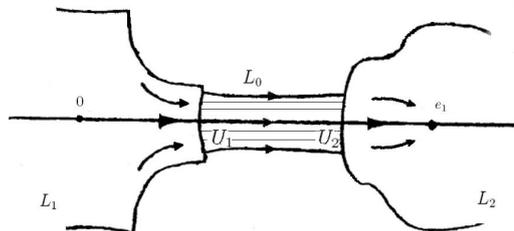


Figura 2.5: Intorno cilindrico L_0 .

prima con il campo modificato ξ' , otterremo che \bar{g}_1 e g_2 coincidono in un aperto di $g_2(U_2)$ contenente $p_2 = U_2 \cap T$. Eventualmente restringendo $L_0 \cup L_1 \cup L_2$, possiamo estendere \bar{g}_1 e g_2 a \bar{g} , diffeomorfismo che manda traiettorie del campo η in traiettorie del campo ξ' e ipersuperfici di livello di F in ipersuperfici di livello di f . Risulterà quindi

$$d\bar{g}(\eta) = k\xi',$$

con k definita positiva. Possiamo imporre $k \equiv 1$ all'esterno di U_T , pertanto $k\xi'$ è il campo vettoriale di tipo gradiente che stavamo cercando.

Di seguito mostreremo come sia possibile modificare il campo di tipo gradiente appena trovato in un campo vettoriale non nullo. Inizialmente dimostriamo che per ogni aperto U contenente la traiettoria T esiste sempre un altro aperto $U' \subset U$ tale che l'intersezione di una curva integrale passante per un qualsiasi punto di U' con lo stesso aperto è costituito da un'unica componente connessa. Supponiamo per assurdo che ciò non accada, allora, definita una arbitraria metrica sulla varietà, è possibile individuare una successione di punti $r_n \in U$ convergente ad un punto di T tale che la curva integrale per r_n passa per un punto $s_n \in W \setminus U$ e poi "ritorna" in punto di U . Tuttavia $W \setminus U$ è sequenzialmente compatto, in quanto compatto, allora $\{s_n\}$ converge ad $s \in W \setminus U$ e quindi, poiché il flusso di un campo vettoriale è una funzione continua e per unicità della curva integrale, si ha che la curva T passa per $s \in W \setminus U$ (contro le ipotesi iniziali).

A questo punto, per individuare il campo vettoriale non nullo, entrano in gioco le proprietà del campo di tipo gradiente trovato. A tale scopo sostituiamo il campo $\eta(x) = (v(x_1), -x_2, \dots, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n)$ con il

campo $\eta'(x) = (v'(x_1, \rho), -x_2, \dots, -x_{\lambda+1}, x_{\lambda+2}, \dots, x_n)$, dove ρ indica la funzione $\sqrt{\sum_{i=2}^n x_i^2}$, la funzione differenziabile v' coincide con v all'esterno di un compatto K contenente U' e $v'(x_1, 0)$ è negativa. Evidentemente dg manda η' in un campo vettoriale non nullo, che può essere visto come alterazione del campo gradiente, limitata ad un compatto contenente T . Osserviamo che ogni curva integrale associata al campo vettoriale non nullo, che al tempo t si trova all'interno di U' , allora al tempo $t' < t$ si trovava esternamente, così come si troverà ad un certo tempo $t'' > t$. Studiamo solo il caso $t'' > t$ perché l'altro caso è del tutto analogo. Supponiamo che $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ sia una curva integrale in coordinate locali, sono allora verificate le equazioni differenziali

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= v'(x_1, \rho), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -x_2, \dots, \frac{dx_{\lambda+1}}{dt} = -x_{\lambda+1}, \\ \frac{dx_{\lambda+2}}{dt} &= x_{\lambda+2}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = x_n. \end{aligned}$$

Quindi se una curva integrale ha valore iniziale (x_1^0, \dots, x_n^0) con almeno uno tra $x_{\lambda+2}, \dots, x_n$ diverso da 0, che supponiamo essere x_i , dalla risoluzione del problema di Cauchy si ha che $|x_i(t)| = |x_i^0 e^t|$. Poiché K è limitato, in quanto compatto, allora necessariamente esiste un istante t'' nel quale la curva integrale si trova al di fuori di K e quindi di U' . Se non fossero verificate le precedenti condizioni allora, risolvendo il problema di Cauchy, si avrebbe $\rho = \sqrt{(x_2^0)^2 + \dots + (x_{\lambda+1}^0)^2} e^{-t}$. Per costruzione di v' esiste però un valore $\delta > 0$ tale che $v'(x_1, \rho)$ è negativa sul compatto $K_\delta = \{x \in U \mid \rho(x) \leq \delta\}$, ma essendo v' continua risulta limitata su tale K_δ da un valore negativo $-\alpha$. Quindi poiché la condizione $\rho < \delta$ è sicuramente verificata per t che tende a $+\infty$, risulta che $\frac{dx_1}{dt} \leq -\alpha$, cioè $x_1 \leq -\alpha t$. Pertanto anche in questo caso esiste un istante t'' nel quale la curva integrale si ritrova all'esterno di U' .

Quanto affermato finora è sufficiente a sostenere *tutte le traiettorie del campo vettoriale non nullo partono da V_0 e terminano in V_1* . Se la curva non passa per U' , evidentemente gode delle proprietà richieste (cfr. dimostrazione teor. 2.1). Se invece passa per U' , prima di "arrivare" ad U' si trovava esternamente ad U , e qui, per costruzione del campo vettoriale, la curva integrale deve coincidere con la una traiettoria del campo di tipo gradiente e quindi tale traiettoria deve partire da V_0 . Similmente la curva dovrà trovarsi in futuro all'esterno U e qui non potrà "ritornarvi". Per ragioni analoghe al precedente caso, dovrà raggiungere V_1 . L'esistenza un campo

vettoriale non nullo con queste caratteristiche implica che il cobordismo sul quale è definito debba necessariamente essere un cobordismo prodotto (cfr. dimostrazione 2.1). \square

Osservazione. Per poter sfruttare al meglio il precedente teorema, cioè per poterlo utilizzare in seguito nel caso in cui la funzione di Morse iniziale presenti più di due punti critici, è necessario evidenziare come sia possibile trovare una funzione di Morse g sul cobordismo prodotto, priva di punti critici che coincide in un intorno di $V \times 0 \cup V \times 1$ con $h = f \circ \Phi$, dove Φ rappresenta l'equivalenza tra il cobordismo prodotto e il cobordismo assegnato. Poiché f ha due punti critici che, per definizione di cobordismo, non stanno nel suo bordo, è possibile trovare un valore δ tale $\frac{\partial h}{\partial t} > 0$ se $t < \delta$ oppure se $t > 1 - \delta$. Posto che $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ sia una funzione differenziabile identicamente nulla in $[\delta, 1 - \delta]$ e uguale ad 1 in un intorno di 0 e in un altro intorno di 1. Definendo g come

$$g(u, q) = \int_0^u (\lambda(t) \frac{\partial h}{\partial t}(t, q) + (1 - \lambda(t))k(q))dt,$$

dove $k(q) = \frac{1 - \int_0^1 \lambda(t) \frac{\partial h}{\partial t}(t, q) dt}{\int_0^1 (1 - \lambda(t)) dt}$. Se si sceglie δ sufficientemente piccolo, $k > 0$ in V_0 e quindi g gode delle proprietà richieste.

2.4 Dimostrazione

Quest'ultimo paragrafo è dedicato alla dimostrazione del teorema dell' h -cobordismo. Pertanto di seguito supporremo sempre di riferirci ad un h -cobordismo (W, V, V') , dove le tre varietà sono semplicemente connesse e $\dim(W) > 5$. Ci sarà molto utile osservare che, nel caso in cui valgano le queste due ulteriori ipotesi, (W, V, V') è un h -cobordismo se e solo se è $H_*(W, V) = 0$ (si rimanda a [1] cap. 9).

La dimostrazione sarà suddivisa in sezioni, in ciascuna di queste, dedicata ai punti critici di determinato indice, verrà mostrato come il caso preso in esame soddisfi le condizioni del teorema di cancellazione e quindi elimineremo tutti i punti critici con questo indice.

Iniziamo prendendo in considerazione una funzione di Morse auto-indicizzante.

2.4.1 Indice 0

Sia \mathbb{S}_L la sfera destra associata ad un punto critico di indice 0 ⁽⁸⁾. Poiché $H_0(W, V) = 0$, è sempre possibile individuare una sfera sinistra relativa ad un punto di indice 1 che si interseca con la precedente in un solo punto e trasversalmente. Infatti, l'ipotesi che $H_0(W, V) = 0$ garantisce che sia ben definito l'operatore di bordo $\partial : H_1(W_1, W_0; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_0(W_0, V; \mathbb{Z}_2)$ ([1] teor. 7.4), il quale, una volta fissati i dischi del tipo \mathcal{D}_L come basi dei gruppi di omologia, è individuato dalla matrice le cui entrate coincidono con i numeri d'intersezione $\mathbb{S}_R(p_i) \cdot \mathbb{S}_L(q_j)$ modulo 2, dove p_i e q_j variano rispettivamente tra tutti i punti critici di indice 1 e di indice 0 ([1] cor. 7.3). Considerato che in questo caso l'operatore è suriettivo, si dovrà poter individuare almeno un'entrata della matrice diversa da 0 ⁽⁹⁾. Poiché $\dim(\mathbb{S}_L) = 0$, tale sfera è costituita da due punti e quindi se il numero d'intersezione tra una certa \mathbb{S}_L ed una \mathbb{S}_R è dispari significa che s'intersecano necessariamente in un solo punto. Per la stessa ragione l'intersezione, cioè perchè $\dim(\mathbb{S}_L) = 0$, è banalmente trasversa.

La seconda parte del teorema di cancellazione ci permette di individuare un'altra funzione di Morse priva dei due punti precedentemente citati. Ripetendo questa operazione un sufficiente numero di volte otteniamo una funzione di Morse priva di punti critici di indice 0.

2.4.2 Indice 1

Lavoriamo ora sui rimanenti punti critici di indice 1. Costruiamo preliminarmente per ogni sfera destra \mathbb{S}_R relativa a questi punti una sfera \mathbb{S}^1 embedded in V_1 , che la interseca una sola volta e trasversalmente, tale da non intersecare altre sfere destre¹⁰.

Poi introduciamo due punti critici ausiliari. In particolare è possibile introdurre in un collare destro di V_2 , sul quale la funzione di Morse può essere localmente vista come proiezione sull'ultima coordinata, due punti critici q ed r , rispettivamente di indice 2 e 3 e tali da verificare la condizione $f(q) < f(r)$ (Cfr. [1] lemma 8.2).

Costruiamo quindi un diffeomorfismo che mandi la sfera \mathbb{S}_L relativa a q (che d'ora in poi indicheremo con S_2) in S_1 e che risulti isotopo

⁸Le sfere $\mathbb{S}_R^{n-\lambda}$ e \mathbb{S}_L^λ , relative ad un punto critico di indice λ , sono da intendere immerse nelle ipersuperficie $V_{\lambda-1} = f^{-1}(\frac{\lambda}{n+1})$, dove evidentemente identifichiamo con V_{-1} con V e V_n con V' .

⁹ $H_0(W_0, V; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_2$ (tanti fattori quanti sono i punti critici di indice 0). Si confronti con l'appendice.

¹⁰Per i dettagli si rimanda a [1] lemma 8.3.

all'identità. Un teorema dovuto a Whitney che afferma: “*Due embedding tra la varietà M e quella N , se sono omotope e se $\dim(N) \geq 2\dim(M) + 2$, allora sono anche isotope*¹¹” (cfr. [4], pg. 645 - 680). Nel nostro caso possiamo pensare sia S_1 che S_2 come una sfera \mathbb{S}^1 embedded in V_2 . Considerato che V_2 è semplicemente connesso¹², S_1 ed S_2 debbono essere necessariamente omotopi, quindi l'inclusione di S_1 in V_2 e l'embedding correlato al diffeorfismo tra S_1 e S_2 sono omotopi, pertanto sono isotopi. Visto che V_2 è priva di bordo e che \mathbb{S}^1 è compatta, il teorema dell'estensione dell'isotopia di Thom (cfr. [2]) garantisce che tale isotopia sia la restrizione una diffeotopia di un diffeomorfismo su V_2 , che manda S_2 in S_1 . Usiamo tale diffeotopia nel modo descritto nella dimostrazione del teorema 2.3 per alterare il campo di tipo gradiente affinché S_2 coincida con S_1 .

Alteriamo poi, nel modo descritto nel teorema 2.4, la funzione di Morse stessa, mantenendo inalterato il campo vettoriale di tipo gradiente così modificato, affinché p risulti in una ipersuperficie di livello compresa tra quella dei punti critici di indice 1 e V_1 e affinché q risulti in una ipersuperficie di livello compresa tra V_1 e quella dei punti critici di indice 2. Per costruzione di S possiamo usare il teorema di cancellazione. Con procedimento simile, spostiamo r nell'ipersuperficie dei punti critici di indice 3.

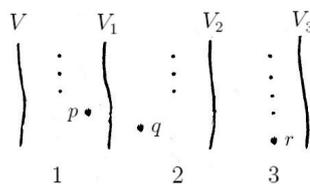


Figura 2.6: Riposizionamento dei punti critici.

Iterando tutto il procedimento un sufficiente numero di volte, si ottiene una funzione di Morse f priva di punti critici di indice 1, in quanto tutti quelli rimasti dalla precedente sezione sono stati rimpiazzati da altri di indice 3.

2.4.3 Indice n ed $n - 1$

La funzione $-f$ è una funzione di Morse auto-indicizzante per l' h -cobordismo (W, V', V) , possiamo quindi eliminare i suoi punti critici di indice 0 e 1 seguendo le procedure illustrate prima. L'opposto della funzione di Morse ottenuta è una funzione di Morse auto-indicizzante per l' h -cobordismo (W, V, V') , i cui punti critici possono solamente avere indice compreso tra 2 ed $n - 2$. Si osservi infatti che, in virtù della stessa definizione di indice, ad un punto critico di indice λ corrisponde un punto critico per la funzione $-f$ di indice $n - \lambda$.

¹¹Isotopia liscia.

¹²Si veda appendice e si usi il teorema di Seifert-van Kampen.

2.4.4 Indici intermedi

Indichiamo ancora una volta con f la funzione di Morse ottenuta al termine della precedente sezione. Sia W_i la porzione del cobordismo W compresa tra le ipersuperfici V_{-1} e V_i , chiamiamo con C_λ il gruppo di omologia $H_\lambda(W_\lambda, W_{\lambda-1})$ e con $\partial : C_\lambda \rightarrow C_{\lambda-1}$ l'operatore di bordo per le varietà $W_{\lambda-2} \subset W_{\lambda-1} \subset W$. È facile quindi constatare che $C_* = \{C_\lambda, \partial\}$ è un complesso di catene. Se chiamiamo $z_1^\lambda, \dots, z_{k_\lambda}^\lambda \in C_\lambda$ una base arbitrariamente scelta di $\mathcal{Ker}(\partial)$, per ognuno di questi elementi è possibile trovare un elemento $b_i^{\lambda+1} \in C_{\lambda+1}$ tale che $\partial(b_i^{\lambda+1}) = z_i^\lambda$, in quanto risulta che $H_\lambda(C_*) \cong H_\lambda(W, V) = 0$ (Cfr. [1] teor. 7.4). Per le stesse ragioni, si ha che

$$0 \rightarrow C_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow C_2 \rightarrow 0$$

è una sequenza esatta. Dalla giustapposizione di $z_1^\lambda, \dots, z_{k_\lambda}^\lambda$ con $b_1^\lambda, \dots, b_{k_{\lambda-1}}^\lambda$ si ottiene una base di C_λ . Adesso possiamo quindi alterare la funzione di Morse ed il campo di tipo gradiente nel modo descritto dal seguente teorema, di cui si omette la dimostrazione.

Teorema 2.8 (delle basi). *Sia una funzione di Morse f definita su una varietà connessa di dimensione n , i cui punti critici sono tutti di indice λ (con $2 \leq \lambda \leq n - 2$) e appartenenti alla stessa ipersuperficie di livello. Allora è possibile trovare una nuova funzione di Morse f' , che coincide con f in un intorno contenente il bordo di W , e un campo vettoriale di tipo gradiente ξ' ad essa associato, tale che la totalità dei dischi \mathcal{D}_L associati a ξ' (opportunamente orientati) corrispondono ad una base arbitrariamente scelta di $H_\lambda(W, V)$.*

In questo modo si va a creare una corrispondenza tra i punti critici della funzione di Morse e gli elementi delle fissate basi dei vari C_λ . Se supponiamo di che p e q siano i punti critici rispettivamente associati ad elementi di C_λ e $C_{\lambda+1}$, possiamo alterare la precedente funzione di Morse in un intorno di questi punti al fine di scorporare tali punti delle ipersuperfici di livello (si veda il punto 2 del teor. 2.4). In particolare possiamo riuscire a scomporre la porzione di cobordismo studiato in $c_\lambda c_p c_q c_{\lambda+1}$, dove la funzione di Morse ottenuta dal teorema ha solo p come punto critico in c_p e solo q in c_q , c_λ e $c_{\lambda+1}$ contengono tutti i rimanenti punti critici di indice λ e rispettivamente $\lambda + 1$. Considerato che, così facendo, l'operatore di bordo viene individuato dalla matrice dei numeri d'intersezione $\mathbb{S}_R \cdot \mathbb{S}_L$ ⁽¹³⁾, dove le sfere sono associate ad ogni possibile punto critico di indice λ e indice $\lambda + 1$ rispettivamente, e considerato che possiamo supporre che p sia associato

¹³cfr. corollario 7.3 [1].

a z_i^λ e q sia associato a $b_i^{\lambda+1}$, poiché per costruzione $\partial(b_i^{\lambda+1}) = z_i^\lambda$, allora dobbiamo concludere che $\mathbb{S}_R(p) \cdot \mathbb{S}_L(q) = \pm 1$. Si verifica, analogamente a come fatto nella dimostrazione del teorema di cancellazione, che le componenti del bordo di $c_p c_q$ sono semplicemente connesse e, poiché ognuna di esse è retratto di deformazione dello stesso $c_p c_q$, possiamo quindi applicare il teorema di cancellazione e affermare che $c_p c_q$ equivale ad un cobordismo prodotto. Il fatto che la sequenza dei C_λ sia esatta, garantisce che questo ragionamento si possa iterare finché tutti i punti critici della funzione di Morse siano stati eliminati.

CAPITOLO 3

CONCLUSIONE

Utilizziamo i risultati ottenuti nei precedenti capitoli per raggiungere l'obiettivo fissato nell'introduzione, cioè dimostrare la congettura di Poincaré in dimensioni alte. Consideriamo quindi una varietà M con le caratteristiche previste dalla congettura, cioè chiusa¹ e con lo stesso tipo di omotopia della sfera S^n , e indichiamo con \mathcal{D} un disco di dimensione $n = \dim(M)$ contenuto nella varietà M . In virtù del principio di dualità di Poincaré-Lefschetz², per $0 \leq i \leq n$, risulta che $H_i(M \setminus \text{Int}(\mathcal{D})) \cong H^{n-i}(M \setminus \text{Int}(\mathcal{D}), \partial\mathcal{D})$. Il teorema di escissione³ ci permette di affermare che quest'ultimo gruppo è isomorfo $H^{n-i}(M, \mathcal{D})$. Allora, ricordando che i gruppi di coomologia sono omotopicamente invarianti, che per ogni varietà $H^i(M) = 0$ se $i > \dim(M)$ e che la seguente sequenza è esatta

$$\dots \longrightarrow H^i(\mathcal{D}) \longrightarrow H^i(M) \longrightarrow H^i(M, \mathcal{D}) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{D}) \longrightarrow \dots$$

possiamo affermare che

$$H_i(M \setminus \text{Int}(\mathcal{D})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \neq 0 \end{cases}$$

¹Compatta e senza bordo.

²“Per ogni varietà M compatta, orientabile, di dimensione n e con bordo N esiste un isomorfismo tra $H_i(M)$ e $H^{n-i}(M, N)$ ” (Cfr. [3] teor. 6.25).

Si noti poi che M è priva di bordo in quanto chiusa e pertanto il bordo di $M \setminus \text{Int}(\mathcal{D})$ coincide con il bordo di \mathcal{D} . Inoltre ricordiamo che una varietà W di dimensione n è orientabile se e solo se l' n -esimo gruppo di omologia relativa a coefficienti interi $H_n(W, \partial W)$ è isomorfo a \mathbb{Z} .

³Si che osservi che \mathcal{D} è una varietà differenziabile con bordo

Se supponessimo che $n \geq 6$, saremmo in grado di dimostrare agevolmente che $M \setminus \text{Int}(\mathcal{D})$ è diffeomorfo ad un disco di dimensione n . Infatti se si considera un altro disco \mathcal{D}_1 di dimensione n contenuto in $\text{Int}(M \setminus \mathcal{D})$, risulta che il cobordismo $(M \setminus \text{Int}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_1), \partial\mathcal{D}, \partial\mathcal{D}_1)$ soddisfa tutte le condizioni del teorema dell' h -cobordismo⁴. Quindi $(M \setminus \text{Int}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_1), \partial\mathcal{D}, \partial\mathcal{D}_1)$ è un prodotto di cobordismi e, poiché il cobordismo $(M \setminus \text{Int}(\mathcal{D}), \partial\mathcal{D}, \emptyset)$ può essere pensato come composizione di $(M \setminus \text{Int}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_1), \partial\mathcal{D}, \partial\mathcal{D}_1)$ con $(\mathcal{D}_1, \partial\mathcal{D}_1, \emptyset)$, tale composizione equivale proprio a $(\mathcal{D}_1, \partial\mathcal{D}_1, \emptyset)$ ⁵. Pertanto la varietà M è una sfera ritorta, cioè è ottenibile da due dischi della stessa dimensione mediante un'identificazione dei loro bordi. Concludiamo mostrando che tutte le sfere ritorte di dimensione n sono omeomorfe a \mathbb{S}^n . Sia h l'identificazione dei bordi dei dischi, che chiamiamo \mathcal{D}_1 e \mathcal{D}_2 , e sia g un embedding di \mathcal{D}_1 nella semisfera inferiore contenuta in \mathbb{S}^n . Considerato che ogni punto di \mathcal{D}_2 può essere rappresentato come tv , dove $v \in \partial\mathcal{D}_1$ e $0 \leq t \leq 1$, risulta definito un omeomorfismo dalla sfera ritorta a \mathbb{S}^n che coincide con g su \mathcal{D}_1 , mentre è uguale a $\sin(\frac{\pi t}{2})g(h^{-1}(v)) + \cos(\frac{\pi t}{2})(0, \dots, 0, 1)$ su \mathcal{D}_2 .

Supponiamo ora la dimensione della varietà M sia 5. Il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, garantisce l'esistenza di una varietà W di cui M è il bordo.

Teorema 3.1 (Kervaire, Milnor, Wall). *Una varietà differenziabile M chiusa, semplicemente connessa e di dimensione 4, 5 oppure 6 con omologia della sfera risulta essere bordo di una varietà compatta e contraibile.*

Poiché $\dim(W) = 6$, ragionando similmente al caso precedente⁶, possiamo applicare il teorema dell' h -cobordismo per dimostrare che W è omeomorfo a \mathcal{D}^6 , pertanto ne consegue che $\partial W = M$ è omeomorfo $\partial\mathcal{D}^6 = \mathbb{S}^5$.

⁴Per il teorema di escissione $H_*(M \setminus \text{Int}(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}_1), \partial\mathcal{D}_1) \cong H_*(M \setminus \text{Int}(\mathcal{D}), \mathcal{D}_1) = 0$.

⁵In virtù della stessa definizione di equivalenza di cobordismi (cfr. § 1.3).

⁶Se $\mathcal{D}^n \subset \text{Int}(W)$ allora $(W, M, \emptyset) = (W \setminus \mathcal{D}^n, M, \partial\mathcal{D}^n) \cup_h (\mathcal{D}^n, \partial\mathcal{D}^n, \emptyset)$. $(W \setminus \mathcal{D}^n, M, \partial\mathcal{D}^n)$ soddisfa le condizioni del teorema dell' h -cobordismo.

APPENDICE A

CHIRURGIA SU VARIETÀ

Lo scopo di questa appendice è dimostrare come la varietà $V_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_k$ sia un retratto di deformazione di W , dove sul cobordismo (W, V_0, V_1) è definita una funzione di Morse con k punti critici e \mathcal{D}_i denota il disco sinistro relativo al punto critico p_i^1 . Per poter raggiungere quest'obiettivo è indispensabile ricorrere alla chirurgia sulle varietà.

Definizione 9. Una varietà può essere ottenuta da una varietà V_0 mediante chirurgia del tipo $(\lambda, n - \lambda)$ se risulta essere diffeomorfa a $\chi(V_0, \varphi)$. Se $\varphi : \mathbb{S}^{\lambda-1} \times \mathcal{B}^{n-\lambda} \rightarrow V_0$ è un embedding differenziabile, $\chi(V_0, \varphi)$ è ottenuta da $V_0 \setminus \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0) \sqcup \mathcal{B}^\lambda \times \mathbb{S}^{n-\lambda-1}$ identificando i punti $\varphi(u, \theta v)$ con $(\theta u, v)$, dove $u \in \mathbb{S}^{\lambda-1}$, $v \in \mathbb{S}^{n-\lambda-1}$, $0 < \theta < 1$.

Indichiamo con L_λ la sottovarietà di $\mathbb{R}^\lambda \times \mathbb{R}^{n-\lambda}$ costituita dai punti che soddisfano le due disuguaglianze che seguono

$$-1 \leq -|x|^2 + |y|^2 \leq 1$$

$$|xy| < \sinh(1)\cosh(1)$$

Tale costruzione è necessaria per definire la varietà $\omega(V_0, \varphi)$, ottenuta da $V_0 \setminus \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0) \times \mathcal{D}^1 \sqcup L_\lambda$ mediante l'identificazione del punto $(\varphi(u, v\theta), c)$ del primo fattore della somma disgiunta, dove $u \in \mathbb{S}^{\lambda-1}$, $v \in \mathbb{S}^{n-\lambda-1}$, $0 < \theta < 1$,

¹Di seguito faremo implicitamente riferimento alla costruzione e notazione relativa al embedding caratteristico illustrata a pag. 12.

con il punto del secondo fattore rappresentabile come intersezione dell'ipersuperficie $-|x|^2 + |y|^2 = c$ e la curva, passante per $(u \cosh(\theta), v \sinh(\theta))$, ortogonale a tutte leipersuperfici della forma $-|x|^2 + |y|^2 = \text{costante}$, la quale può essere parametrizzata come $(tu \cosh(\theta), t^{-1}v \sinh(\theta))$. È immediato constatare che la precedente identificazione definisce un diffeomorfismo tra $\varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \mathcal{B}^{n-\lambda} \setminus O) \times \mathcal{D}^1$ e $L_\lambda \cap (\mathbb{R}^\lambda \setminus 0) \times (\mathbb{R}^{n-\lambda} \setminus 0)$, da cui consegue che $\omega(V_0, \varphi)$ è ben definito come varietà differenziabile. Possiamo individuare nella frontiera di $\omega(V_0, \varphi)$ una porzione identificabile con V_0 , tramite $g : V_0 \rightarrow \omega(V_0, \varphi)$ definita come

$$g(z) = \begin{cases} (z, -1) \in V_0 \setminus \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0) \times \mathcal{D}^1 & \text{se } z \notin \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0) \\ (u \cosh(\theta), v \sinh(\theta)) \in L_\lambda & \text{se } z = \varphi(u, \theta v) \end{cases}$$

La rimanente parte del bordo², invece può essere identificata con $\chi(V_0, \varphi)$ mediante $h : \chi(V_0, \varphi) \rightarrow \omega(V_0, \varphi)$ definita come

$$h(z) = \begin{cases} (z, 1) \in V_0 \setminus \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0) \times \mathcal{D}^1 & \text{se } z \in V_0 \setminus \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0) \\ (u \sinh(\theta), v \cosh(\theta)) \in L_\lambda & \text{se } z = (\theta u, v) \in \mathcal{B}^\lambda \times \mathbb{S}^{n-\lambda-1} \end{cases}$$

In definitiva, partendo da una varietà V_0 , abbiamo costruito un cobordismo elementare rappresentato da una triade la cui frontiera è costituita da V_0 e da un'altra varietà ottenibile da questa mediante chirurgia. Infatti se $f : \omega(V_0, \varphi) \rightarrow \mathbb{R}$ è definita come

$$\begin{cases} f(z, c) = c & \text{se } (z, c) \in V_0 \setminus \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0) \times \mathcal{D}^1 \\ f(x, y) = -|x|^2 + |y|^2 & \text{se } (x, y) \in L_\lambda \end{cases}$$

la funzione $(f + 1)/2$, anche alla luce delle precedenti osservazioni riguardanti il bordo, risulta essere una funzione di Morse con un solo punto critico. In realtà ogni cobordismo elementare (W, V, V') può essere sempre rappresentato da una triade di questo tipo. Infatti se riprendiamo la costruzione vista a pag. 12 è immediato constatare che il cobordismo (W, V, V') equivale a $(W_\epsilon = f'^{-1}([c - \epsilon^2, c + \epsilon^2]), V_{-\epsilon}, V_\epsilon)$, dove f' è una funzione di Morse con un solo punto critico. Supponiamo inoltre che sia fissato un campo vettoriale di tipo gradiente associato a f' , siano allora φ_L l'embedding caratteristico e φ l'embedding usato nella sua definizione. Definiamo adesso un'equivalenza tra $(W_\epsilon, V_{-\epsilon}, V_\epsilon)$ e $(\omega(V_{-\epsilon}, \varphi), V_{-\epsilon}, \chi(V_{-\epsilon}, \varphi))$. Per fare questo costruiamo il

²È possibile scomporre il bordo di L_λ in due regioni: $-|x|^2 + |y|^2 = -1$ e $-|x|^2 + |y|^2 = 1$. Pertanto, per costruzione, il bordo di $\omega(V_0, \varphi)$ è esclusivamente costituita da tali regioni.

diffeomorfismo $k : \omega(V_{-\epsilon}, \varphi) \rightarrow W_\epsilon$ nel modo seguente

- Se $(z, t) \in V_{-\epsilon} \setminus \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times 0) \times \mathcal{D}^1$
 $k(z, t)$ è il punto sulla curva integrale del campo di tipo gradiente passante per z tale che $f'(k(z, t)) = \epsilon^2 t + c$.
- Se $(x, y) \in L_\lambda$
 $k(x, y) = g(\epsilon x, \epsilon y)$, dove g è la carta locale su W , usata per definire l'embedding caratteristico.

Quello appena definito è effettivamente un'applicazione differenziabile, in quanto discende dalla stessa definizione di φ che le traiettorie ortogonali alle ipersuperfici $-|x|^2 + |y|^2 = c$ in L_λ sono mandate da k , in W_ϵ , nelle curve integrali del campo di tipo gradiente, quindi k costituisce l'equivalenza cercata. Se adesso consideriamo che le curve integrali del campo vettoriale di tipo gradiente definiscono un diffeomorfismo tra $V_{-\epsilon}$ e V e componendo tale diffeomorfismo con φ si ottiene φ_L , possiamo affermare che $(\omega(V_{-\epsilon}, \varphi), V_{-\epsilon}, \chi(V_{-\epsilon}, \varphi))$ equivale a $(\omega(V, \varphi_L), V, \chi(V, \varphi_L))$.

A questo punto possiamo sfruttare le costruzioni precedenti per dimostrare che, se (W, V, V') è un cobordismo elementare, allora $V \cup \mathcal{D}_L$ è un retratto di deformazione di W . Iniziamo con l'identificare la varietà W con la varietà $\omega(V, \varphi_L)$ tramite il diffeomorfismo sopra descritto e notiamo che in questa operazione \mathcal{D}_L è identificato con l'insieme $\{(x, 0) \in L_\lambda\}$. Definiamo quindi l'intorno cilindrico di \mathcal{D}_L come

$$C = \{(x, y) \in L_\lambda \mid |y| \leq \frac{1}{10}\}$$

per poter costruire la retrazione R^1 da W a $V \cup C$

$$\begin{cases} R_t^1(z, c) = (z, c - t(c + 1)) & \text{se } (z, c) \in V \setminus \varphi(\mathbb{S}^{\lambda-1} \times \mathcal{B}^{n-\lambda}) \times \mathcal{D}^1 \\ R_t^1(x, y) = (x, y) & \text{se } (x, y) \in C \\ R_t^1(x, y) = (\frac{x}{\rho}, \rho y) & \text{se } (x, y) \in L_\lambda \setminus C \end{cases}$$

dove $\rho(x, y, t)$ coincide con il massimo tra il valore $\frac{1}{10|y|}$ e le soluzioni reali dell'equazione in ρ : $-\frac{|x|^2}{\rho^2} + \rho^2|y|^2 = (|y|^2 - |x|^2)(1 - t) - t$.

Costruiamo quindi la retrazione R^2 da $V \cup C$ a $V \cup \mathcal{D}_L$

$$\begin{cases} R_t^2(x, y) = (x, y) & \text{se } (x, y) \in V \setminus C \\ R_t^2(x, y) = (x, (1 - t)y) & \text{se } (x, y) \in C \wedge |x|^2 \leq 1 \\ R_t^2(x, y) = (x, \alpha y) & \text{se } (x, y) \in C \wedge 1 \leq |x|^2 \leq 1 + 1/100 \end{cases}$$

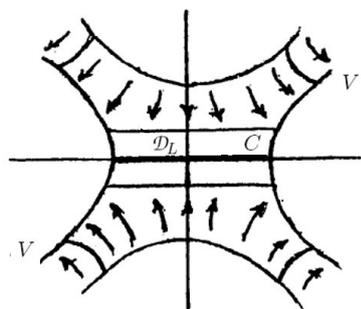


Figura A.1: Retrazione R_1 .

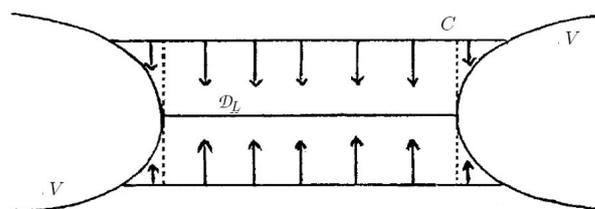


Figura A.2: Retrazione R_2 .

dove $\alpha(x, y, t) = 1 - t + t\sqrt{\frac{|x|^2 - 1}{|y|^2}}$. In questo modo si conclude la dimostrazione nel caso dei cobordismi elementari. Se invece fossero presenti più punti critici, una volta trovata la funzione di Morse nella quale tutti i punti critici giacciono sulla stessa ipersuperficie di livello (cfr. §2.2), possiamo riadattare tutto il precedente ragionamento e aggiungere in questo modo l'obiettivo di questa appendice.

Concludiamo osservando che possiamo dimostrare che una funzione di Morse definita sul cobordismo (W, V, V') possiede k punti critici con indice λ allora $H_*(W, V) \cong H_*(V_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_k, V) \cong H_*(\mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_k, \mathcal{S}_1 \cup \dots \cup \mathcal{S}_k) \cong \bigoplus_{i=1}^k H_*(\mathcal{D}_i, \mathcal{S}_i) \cong \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}$ (l'ultimo isomorfismo vale perché tutti i punti critici hanno lo stesso indice).

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Milnor. *Lectures on the h-cobordism theorem*. Princeton University Press, 1965.
- [2] R. Thom. *La classification des immersion*. Séminaire Bourbaki, 1957.
- [3] J. W. Vick. *Homology theory*. Springer - Verlag, second edition, 1994.
- [4] H. Whitney. Differentiable manifolds. *Annals of Mathematics*, vol. 37, 1936.