UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CAGLIARI

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Algebre di Lie semisemplici, sistemi di radici e loro classificazione

Relatore
Prof. Andrea Loi

Tesi di Laurea Magistrale di
Federico Pintore

ANNO ACCADEMICO 2010–2011

Introduzione

Una delle principali peculiaritá della Matematica é la tendenza alla generalizzazione : i singoli problemi vengono affrontati attribuendogli un piú largo respiro, tentando di inserirli in una teoria generale. Fra gli interpreti principe di questa caratteristica troviamo le strutture algebriche astratte. Basti pensare agli spazi vettoriali, nei quali, una volta fissata una base, le operazioni di somma e prodotto per scalare introdotte possono essere ricondotte alle operazioni di somma e prodotto del campo in cui lo spazio vettoriale é definito.
Nonostante le strutture astratte possano sembrare un mero esercizio dei formalismi matematici, esse trovano innumerevoli applicazioni in svariati rami della Matematica e della scienza in generale. Il loro studio non é quindi di interesse esclusivo dell'Algebra ma fornisce un valido contributo nei piú disparati settori della ricerca scientifica.
In quest'ottica si inseriscono le Algebre di Lie e i Sistemi di Radici, argomento della presente tesi. Nel nostro lavoro ci siamo prefissati di introdurre questi due concetti da un punto di vista prettamente algebrico, ben consci, peró, che lo studio svolto sarebbe stato propedeutico ad un successivo utilizzo delle Algebre di Lie e dei Sistemi di Radici come potenti strumenti in altri settori di ricerca.
Valga come esempio il fatto che ad ogni gruppo di Lie é possibile associare un'algebra di Lie, la quale fornisce numerose informazioni sulla varietá differenziabile da cui siamo partiti. É ben noto che i gruppi di Lie sono un argomento portante non solo della Geometria Differenziale ma anche della Fisica Teorica.
Nelle successive pagine, partendo dai rudimenti della Teoria delle Algebre di Lie, vedremo come ad un Algebra di Lie semisemplice sia possibile associare, una volta fissata una sottoalgebra toroidale massimale, un sistema di radici. A partire dal terzo capitolo ci occuperemo nel dettaglio dei sistemi di radici, di come essi possano essere caratterizzati, a meno di isomorfismi, dai diagrammi di Dynkin, per poi concludere con la classificazione dei diagrammi di Dynkin connessi.
In particolare :
- nel primo capitolo sono contenuti alcuni richiami di algebra lineare relativi agli endomorfismi, la decomposizione di Jordan, le matrici e le forme bilineari ;
- nel capitolo 2, dopo aver dato la definizione di Algebra di Lie, di sottoalgebra e di ideale, trattiamo

le algebre di Lie risolubili, nilpotenti e semisemplici ;
- il capitolo 3 comincia con una caratterizzazione delle Algebre di Lie nilpotenti (Teorema di Engel), prosegue con la rappresentazione aggiunta, la forma di Killing e gli L-moduli, per poi concludersi con la decomposizione di Cartan delle algebre di Lie semisemplici. Quest'ultima parte, pur valendo su ogni campo F algebricamente chiuso e con caratteristica nulla, si é scelto di studiarla, per semplificare la trattazione, lavorando sul campo dei complessi.
Fissando una sottoalgebra toroidale massimale, possiamo associare ad un'algebra di Lie semisemplice un sistema di radici. Nonostante non sia stato oggetto di questa tesi, é importante sottolineare che la scelta della sottoalgebra toroidale massimale non é essenziale per la costruzione del sistema di radici ;
- la conclusione del capitolo precedente ci conduce agli argomenti del capitolo 4 : si parte dalla definizione di sistema di radice per arrivare, attraverso le basi dei sistemi di radici, alla caratterizzazione dei sistemi di radici, a meno di isomorfismi, mediante le matrici di Cartan e i diagrammi di Dynkin ;
- nel capitolo conclusivo, il quinto, dimostriamo l'importante teorema di classificazione dei diagrammi di Dynkin connessi.

Nonostante un appassionato lavoro, non si esclude che, sparse nel corpo del testo, possano essere presenti errori e mancanze. Chiedo venia di eventuali imperfezioni ed ingenuitá, ricordando lo spirito con cui questa tesi é stata scritta : avere un primo assaggio della teoria delle Algebre di Lie.

Indice

Capitolo 1

Richiami di Algebra Lineare

1.1 Endomorfismi

Sia V uno spazio vettoriale su un campo F, con $dim(V) = n$.
Denotiamo con $End(V)$ l'insieme di tutti gli endomorfismi di V, ossia tutte le applicazioni lineari da V in V. Esso é un F-spazio vettoriale (poiché, in generale, dati due F-spazi vettoriali W e W', l'insieme di tutte le applicazioni lineari da W in W' ha la struttura di F-spazio vettoriale).
Vogliamo mostrare che $dim(End(V)) = n^2$.
Fissiamo una base $B = \{b_1, ..., b_n\}$ in V e consideriamo gli endomorfismi :

$$f_{ij} : V \to V \qquad i, j \in \{1, ..., n\} \tag{1.1}$$

tali che a b_i associano b_j e a tutti gli altri vettori di base associano il vettore nullo (osserviamo che, per costruzione, consideriamo gli f_{ij} endomorfismi : un'applicazione lineare risulta completamente determinata quando si conosce come essa agisce su una base).
Tali endomorfismi sono n^2 (dato chi i vettori di base sono n e ad ogni vettore di base corrispondono n endomorfismi) e costituiscono una base per $End(V)$.
Partiamo col mostrare che sono linearmente indipendenti.
Consideriamo una loro combinazione lineare che ci dia l'endomorfismo nullo :

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} f_{ij} = 0 \tag{1.2}$$

con gli α_{ij} scalari del campo F. L'endomorfismo nullo associa il vettore nullo ad ogni vettore di V, per cui :

$$\sum_{i,j=i}^{n} (\alpha_{ij} f_{ij})(b_1) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{1j} f_{1j})(b_1) = \sum_{j=i}^{n} \alpha_{1j} b_j = 0 \tag{1.3}$$

da cui consegue $\alpha_{1j} = 0 \quad \forall j \in \{1, ..., n\}$ per l'indipendenza dei vettori di B.
Applicando l'endomorfismo nullo anche a $b_2, ..., b_n$ otteniamo $\alpha_{ij} = 0 \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$ e dunque gli

endomorfismi f_{ij} sono linearmente indipendenti.
Rimane da mostrare che essi formano un sistema di generatori. Prendiamo un generico endomorfismo $f \in End(V)$, del quale sappiamo come agisce sugli elementi della base B :

$$f(b_1) = \sum_{j=i}^{n} a_{1j} b_j \quad ; \quad f(b_2) = \sum_{j=i}^{n} a_{2j} b_j \quad ; \quad ... \quad ; \quad f(b_n) = \sum_{j=i}^{n} a_{nj} b_j \tag{1.4}$$

Consideriamo allora l'endomorfismo $g = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}$. Se g ed f associano ad ogni vettore di base la stessa immagine, allora essi sono uguali. Si ha :

$$g(b_k) = \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} f_{ij})(b_k) = \sum_{j=1}^{n} (a_{kj} f_{kj})(b_k) = \sum_{j=i}^{n} a_{kj} b_j = f(b_k) \tag{1.5}$$

per ogni k appartenente a $\{1, ..., n\}$.

Su $End(V)$ è possibile definire anche un prodotto che lo dota della struttura di anello non commutativo. L'operazione binaria in questione è la composizione funzionale : la composizione di due endomorfismi di V è ancora un endomorfismo di V, l'identità di V è un endomorfismo e funge da elemento neutro, la composizione funzionale è associativa.
Rimangono da dimostrare la distribuitività a destra e a sinistra rispetto alla somma. Esse conseguono da un risultato generale : dati tre endomorfismi $f, g, h \in End(V)$ e uno scalare $a \in F$, abbiamo

$$(f \circ (g+h))(v) = f((g+h)(v)) = f(g(v) + h(v)) = f(g(v)) + f(h(v)) = (f \circ g + f \circ h)(v) \tag{1.6}$$

$$((f+g) \circ h)(v) = (f+g)(h(v)) = f(h(v)) + g(h(v)) = (f \circ h + g \circ h)(v) \tag{1.7}$$

$$(af \circ g)(v) = (af)(g(v)) = a(f(g(v))) = a((f \circ g)(v))) = (a(f \circ g))(v) = f(a\,g(v)) = (f \circ ag)(v) \tag{1.8}$$

per ogni vettore $v \in V$.

Definiamo su $End(V)$ un'altra operazione binaria nel modo seguente :

$$\begin{array}{ccc} End(V) \times End(V) & \rightarrow & End(V) \\ (f, g) & \mapsto & [f, g] = f \circ g - g \circ f \end{array}$$

La composizione e la combinazione lineare di endomorfismi di V è ancora un endomorfismo di V, dunque tale operazione è ben definita.
Vediamo alcune proprietà di cui essa gode.
Innanzitutto è bilineare dato che, presi $f, g, h \in End(V)$ e $a, b \in F$ si ha :

$$[af + bg, h] = (af + bg) \circ h - h \circ (af + bg) = af \circ h + bg \circ h - h \circ af - h \circ bg = \tag{1.9}$$

$$= a(f \circ h) + b(g \circ h) - a(h \circ f) - b(h \circ g) = a(f \circ h - h \circ f) + b(g \circ h - h \circ g) = a[f, h] + b[g, h]$$

$$[f, ag + bh] = f \circ (ag + bh) - (ag + bh) \circ f = f \circ ag + f \circ bh - ag \circ f - bh \circ f = \tag{1.10}$$

$$= a(f \circ g) + b(f \circ h) - a(g \circ f) - b(h \circ f) = a(f \circ g - g \circ f) + b(f \circ h - h \circ f) = a[f, g] + b[f, h]$$

Inoltre vale la relazione

$$[f, f] = f \circ f - f \circ f = 0 \qquad \forall f \in End(V) \tag{1.11}$$

e quella che comunemente prende il nome di identità di Jacobi

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = [f, g \circ h - h \circ g] + [g, h \circ f - f \circ h] + [h, f \circ g - g \circ f] = \tag{1.12}$$

$$= f \circ (g \circ h - h \circ g) - (g \circ h - h \circ g) \circ f + g \circ (h \circ f - f \circ h) - (h \circ f - f \circ h) \circ g + h \circ (f \circ g - g \circ f) - (f \circ g - g \circ f) \circ h =$$

$$= f \circ (g \circ h) - f \circ (h \circ g) - (g \circ h) \circ f + (h \circ g) \circ f + g \circ (h \circ f) - g \circ (f \circ h) -$$

$$-(h \circ f) \circ g + (f \circ h) \circ g + h \circ (f \circ g) - h \circ (g \circ f) - (f \circ g) \circ h + (g \circ f) \circ h = 0$$

Definizione 1.1.1. *Sia V un F-spazio vettoriale ed f un suo endomorfismo. Diremo che f é nilpotente se esiste un naturale non nullo k tale che f^k é l'endomorfismo nullo. Chiamiamo indice di nilpotenza di f il naturale non nullo k tale che $f^k = 0$ ma $f^{k-1} \neq 0$. Esso é unico poiché, se $f^k = 0$ é ovvio che anche f^{k+i}, con $i \geq 0$, é l'endomorfismo nullo in quanto la composizione di un endomorfismo con quello nullo da sempre l'endomorfismo nullo.*

Sia f un endomorfismo nilpotente di un F-spazio vettoriale V avente k come indice di nilpotenza. L'endomorfismo f non ammette autovalori diversi da quello nullo.
Supponiamo che λ sia un autovalore di f, dunque esiste un vettore non nullo $v \in V$ tale che $f(v) = \lambda v$. Ne consegue $f^k(v) = f(f^{k-1}(v)) = f(\lambda^{k-1}v) = \lambda^k v = 0$ (si osservi che nell'ultima relazione é presente la dimostrazione, per induzione su k, che $f^k(v) = \lambda^k v$). Dato che v é diverso dal vettore nullo deve necessariamente aversi $\lambda^k = 0$ e quindi, essendo F un campo, otteniamo $\lambda = 0$.

Supponiamo che l'F-spazio vettoriale V abbia dimensione finita n. Come vedremo anche sul finire del paragrafo successivo, ad ogni endomorfismo f di V possiamo associare la traccia : essa é la somma dei suoi autovalori. Il polinomio caratteristico di f ha grado n e sappiamo che il suo termine di grado $n-1$ é della forma : $-tr(f)(\lambda)^{n-1}$. Ma sappiamo anche che il polinomio caratteristico é $(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ e le formule di Vieta ci dicono che il termine di grado $n-1$ é $-(\lambda_1 + ... + \lambda_n)(\lambda^{n-1})$ e dunque $tr(f) = (\lambda_1 + ... + \lambda_n)$.
La correttezza della formula usata la possiamo dimostrare per induzione su n.
Se $n = 2$ abbiamo $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + (\lambda_1)(\lambda_2)$ e quindi vale quanto detto. Supponiamo che la nostra affermazione sia vera per $n-1$ e consideriamo$(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n)$. Utilizzando l'ipotesi induttiva il termine di grado $n-1$ é : $-(\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1})(\lambda^{n-2})(\lambda) - (\lambda_n)(\lambda^{n-1}) =$

$-(\lambda_1 + ... + \lambda_{n-1})(\lambda^{n-1}) - (\lambda_n)(\lambda^{n-1}) = -(\lambda_1 + ... + \lambda_n)(\lambda^{n-1})$ dato che il polinomio considerato é ovviamente monico.
Una conseguenza di quanto appena dimostrato é che ogni endomorfismo nilpotente ha traccia nulla.

Proposizione 1.1.2. *Sia V uno spazio vettoriale e f, g due suoi endomorfismi nilpotenti che commutano. Allora anche ogni loro combinazione lineare é nilpotente.*

1.2 Decomposizione di Jordan-Chevalley

Sia V un F-spazio vettoriale di dimensione n ed $f : V \to V$ un endomorfismo di V.
Dato un polinomio $p(T) \in F[T]$ (ossia un polinomio in una indeterminata T e a coefficienti in F) possiamo calcolare $p(f)$ ottenendo ancora un endomorfismo di V. Infatti $p(f)$ é una combinazione lineare, a coefficienti in F, di composizioni di f : queste composizioni sono endomorfismi e la combinazione lineare di essi é un endomorfismo ricordando la struttura di spazio vettoriale di $End(V)$.
Dato che $dim(End(V)) = n^2$, se scegliamo $k \geq n^2$ i $k + 1$ endomorfismi $id_V, f, f^2, ..., f^k$ sono linearmente dipendenti e quindi esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli uguale all'endomorfismo nullo :

$$a_0 f^k + a_1 f^{k-1} + a_2 f^{k-2} + ... + a_{k-1} f + a_k(id_V) = 0 \quad con \quad (a_0, a_1, ..., a_k) \neq (0, 0, ..., 0) \qquad (1.13)$$

In altre parole, esiste un polinomio non nullo, $p(T) \in F[T]$, tale che $p(f) = 0$.
Osserviamo che, nel sostituire T con f si deve moltiplicare il termine noto del polinomio per l'endomorfismo identico.
A meno di moltiplicare $p(T)$ per uno scalare non nullo (il coefficiente del termine di grado massimo, che é ovviamente non nullo : non tutti i termini possono avere coefficienti uguale a zero altrimenti il polinomio, contrariamente a quanto detto, sarebbe quello nullo) possiamo assumere che $p(T)$ sia monico, ossia il coefficiente del suo termine di grado massimo sia 1. Per cui :

$$p(T) = T^h + a_1 T^{h-1} + ... + a_h \qquad (1.14)$$

Tra tutti i polinomi monici (dunque non nulli) di $F[T]$ che restituiscono l'endomorfismo nullo se sostituiamo f a T, consideriamo quello di grado minimo (quanto osservato nelle righe precedenti ci dice che almeno un polinomio del tipo detto esiste). Tale polinomio é unico poiché se, per assurdo, ne esistessero due :

$$p(T) = T^h + a_1 T^{h-1} + ... + a_h \qquad ; \qquad q(T) = T^h + b_1 T^{h-1} + ... + b_h \qquad (1.15)$$

allora $r(T) = p(T) - q(T)$ ha grado strettamente minore di $p(T)$ e $q(T)$ (poiché facendo la differenza fra i due polinomi i termini di grado h sia annullano avendo entrambi coefficiente uguale ad 1) e

ovviamente si annulla per $T = f$, in quanto si annullano sia p che q. Se $r(T)$ fosse diverso dal polinomio nullo potremmo considerarlo monico e verrebbe contraddetta la minimalitá del grado di $p(T)$ e $q(T)$, dunque $r(T) = 0$ ossia $p(T) = q(T)$.
Denotiamo con $p_f(T)$ il polinomio monico di $F[T]$ di grado minimo che si annulla per $T = f$, e lo chiamiamo polinomio minimo di f sopra F.
Osserviamo che se lo spazio vettoriale V non é costituito dal solo vettore nullo, allora il grado del polinomio minimale di ogni endomorfismo f di V é maggiore di 1 in quanto l'unico polinomio monico di grado zero é 1. Esso, sostituendo T con f, restituisce l'endomorfismo identitá che é quello nullo se e solo se $V = 0$.
Considerando fissati V e un suo generico endomorfismo f possiamo enunciare i risultati seguenti :

Teorema (di Cayley - Hamilton) 1.2.1. *Il polinomio caratteristico dell'endomorfismo f si annulla se calcolato in f.*

Proposizione 1.2.2. *Sia $q(T)$ un polinomio di $F[T]$ tale che $q(f) = 0$. Allora il polinomo minimo $p_f(T)$ di f divide $q(T)$*

Dimostrazione. Per la divisione euclidea tra polinomi esistono, e sono unici, due polinomi $h(T), r(T)$ di $F[T]$ tali che:

$$q(T) = h(T)p_f(T) + r(T) \qquad con \quad deg(r(T)) < deg(p_f(T)) \tag{1.16}$$

Dato che $q(f) = 0 = h(f)p_f(f)+r(f) = r(f)$, per la minimalitá del grado del polinomio minimo segue $r(T) = 0$, ossia il resto della divisione euclidea é il polinomio nullo. □

Corollario 1.2.3. *Il polinomio minimo di f divide il suo polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione precedente al polinomio caratteristico di f : esso si annulla in f grazie al teorema di Cayley-Hamilton. □

Se f é nilpotente con indice di nilpotenza k allora il suo polinomio minimo é $p_f(T) = T^k$. Infatti l'ultimo corollario ci dice che $p_f(T)$ deve avere come unica radice quella nulla (in quanto abbiamo visto che f ammette solo l'autovalore nullo) e quindi esso non puó che essere della forma T^h. Ma $h = k$ per le definizione di indice di nilpotenza e per la minimalitá del grado di p_f (in quanto T^k é monico ed inoltre $f^k = 0$).

Proposizione 1.2.4. *L'endomorfismo f é diagonalizzabile se e solo se il suo polinomio minimo ha tutte le radici in F ed esse sono tutte distinte.*

Se il polinomio minimo dell'endomorfismo f ha tutte le radici distinte, chiamiamo f semisemplice. L'ultimo teorema ci dice che gli endomorfismi di uno spazio vettoriale su un campo algebricamente chiuso sono diagonalizzabili se e solo se semisemplici.

Propisizione 1.2.5. *Siano f_1 ed f_2 due endomorfismi diagonalizzabili di V.*

- *(i) f_1 ed f_2 sono simultaneamente diagonalizzabili (ossia esiste una base di V tale che le matrici associate ad f_1 ed f_2 rispetto ad essa sono entrambe diagonali) se e solo se commutano, cioé $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$. In particolare, ogni loro combinazione lineare é diagonalizzabile.*

- *(ii) Se W é un sottospazio vettoriale di V tale che $f_1(W) \subseteq W$, ossia W é un sottospazio f_1-invariante, allora la restrizione di f_1 a W é ancora diagonalizzabile.*

Proposizione 1.2.6. *Se il campo F su cui é definito lo spazio vettoriale V é algebricamente chiuso, allora, dato un endomorfismo f di V, si ha che :*
(i) esistono, e sono unici, due endomorfismi $f_s, f_n \in End(V)$ tali che $f = f_s + f_n$, f_s é diagonalizzabile, f_n é nilpotente, f_s ed f_n commutano ;
(ii) esistono due polinomi $p(T), q(T) \in F[T]$, privi di termine noto, tali che $f_s = p(f), f_n = q(f)$.
In particolare f_s e f_n commutano con qualsiasi endomorfismo che commuta con f ;
(iii) se $A \subset B \subset V$ sono sottospazi vettoriali e $f(B) \subset A$, allora f_s e f_n mandano B in A.

La decomposizione $f = f_s + f_n$ prende il nome di "decomposizione (additiva) di Jordan-Chevalley di f" o semplicemente "decomposizione di Jordan di f". Inoltre gli endomorfismi f_s, f_n li chiamiamo, rispettivamente, la parte semisemplice (o diagonalizzabile) e la parte nilpotente dell'endomorfismo f.

1.3 Matrici

Dato un campo F, denotiamo con $gl(n, F)$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n a entrate in F. Definiamo in $gl(n, F)$ le usuali operazioni di somma e di prodotto per scalare.
Se $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ sono due generiche matrici di $gl(n, F)$ e $a \in F$ un arbitrario scalare poniamo :

- $A + B = D = (d_{ij})$ con $d_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$

- $aA = E = (e_{ij})$ con $e_{ij} := a\, a_{ij}$

Prendendo le matrici $A, B, C \in gl(n, F)$ e gli scalari $a, b \in F$, mostriamo che queste operazioni dotano $gl(n, F)$ della struttura di spazio vettoriale :

- $(A+B)+C = D = (d_{ij}) = ((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}) = (a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})) = A+(B+C)$

- $A+B = D = (d_{ij}) = (a_{ij}+b_{ij}) = (b_{ij}+a_{ij}) = B+A$

- L'elemento neutro della somma é la matrice costituita da soli zero, che denotiamo con 0 : $0+A = D = (d_{ij}) = (0+a_{ij}) = (a_{ij}) = A$

- L'opposto di $A = (a_{ij})$ é la matrice $-A = D = (d_{ij}) = (-a_{ij})$ dato che $A+(-A) = D = (d_{ij}) = (a_{ij}-a_{ij}) = (0) = 0$

- $(a+b)A = D = (d_{ij}) = ((a+b)a_{ij}) = (a\,a_{ij}+b\,a_{ij}) = aA+bA$

- $a(A+B) = D = (d_{ij}) = (a(a_{ij}+b_{ij})) = (a\,a_{ij}+a\,b_{ij}) = aA+aB$

- $a(b\,A) = D = (d_{ij}) = (a(b\,a_{ij}) = ((a\,b)a_{ij}) = (a\,b)A$

- $1\,A = D = (d_{ij}) = (1\,a_{ij}) = (a_{ij}) = A$

- $0\,A = D = (d_{ij}) = (0\,a_{ij}) = (0) = 0$

Introduciamo anche il prodotto matriciale

$$A, B \in gl(n,F) \qquad \Rightarrow \qquad A\,B = D = (d_{ij}) := (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}) \tag{1.17}$$

il quale gode delle seguenti proprietá:

- $(A\,B)C = D = (d_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n}(\sum_{h=1}^{n} a_{ih}b_{hk})c_{kj}) = (\sum_{k,h=1}^{n}(a_{ih}b_{hk})c_{kj}) = (\sum_{k,h=1}^{n} a_{ih}(b_{hk}c_{kj})) = (\sum_{h=1}^{n} a_{ih}(\sum_{k=1}^{n} b_{hk}c_{kj})) = A(B\,C)$

- $(A+B)C = D = (d_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}+b_{ik}c_{kj}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}) = A\,C+B\,C$

- $A(B+C) = D = (d_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}) = A\,B + A\,C$

- $(a\,A)B = D = (d_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n}(a\,a_{ik})b_{kj}) = (a\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}) = a(A\,B)$

- $A(b\,B) = D = (d_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b\,b_{kj})) = (b\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}) = b(A\,B)$

per ogni $A, B, C \in gl(n, F)$ e $a, b \in F$.

Definiamo infine la seguente applicazione :

$$[,] : gl(n,F) \times gl(n,F) \to gl(n,F) \tag{1.18}$$

$$(A,B) \to [A,B] = A\,B - B\,A \tag{1.19}$$

Essa é bilineare dato che, per ogni $A, B, C \in gl(n, F)$ e $a, b, c \in F$, si ha :

$$[a\,A + b\,B, C] = (a\,A + b\,B)C - C(a\,A + b\,B) = a(A\,C) + b(B\,C) - a(C\,A) - b(C\,B) = \tag{1.20}$$

$$= a(A\,C - C\,A) + b(B\,C - C\,B) = a[A,C] + b[B,C]$$

$$[A, b\,B + c\,C] = A(b\,B + c\,C) - (b\,B + c\,C)A = b(A\,B) + c(A\,C) - b(B\,A) - c(C\,A) = \tag{1.21}$$

$$= b(A\,B - B\,A) + c(A\,C - C\,A) = b[A,B] + c[A,C]$$

Inoltre vale la relazione

$$[A,A] = A\,A - A\,A = 0 \qquad \forall A \in gl(n,F)$$

e quella che comunemente prende il nome di identitá di Jacobi

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = [A, B\,C - C\,B] + [B, C\,A - A\,C] + [C, A\,B - B\,A] = \tag{1.22}$$

$$A(B\,C - C\,B) - (B\,C - C\,B)A + B(C\,A - A\,C) - (C\,A - A\,C)B + C(A\,B - B\,A) - (A\,B - B\,A)C =$$

$$A\,B\,C - A\,C\,B - B\,C\,A + C\,B\,A + B\,C\,A - B\,A\,C - C\,A\,B + A\,C\,B + C\,A\,B - C\,B\,A - A\,B\,C + B\,A\,C = 0$$

La base canonica di $gl(n, F)$ é:

$$\mathcal{B} = \{e_{ij} \in gl(n,F) \mid i,j = 1,..,n\} \tag{1.23}$$

dove con e_{ij} denotiamo la matrice avente 1 nella riga i e colonna j e nulle tutte le altre entrate.

Che $\mathcal{B}$ generi $gl(n, F)$ e che sia un insieme di matrici linearmente indipendenti é ovvio : se $A = (a_{ij})$ é una matrice di $gl(n, F)$ allora abbiamo $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,e_{ij}$ mentre la combinazione lineare $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\,e_{ij} = 0$

determina le relazioni $b_{ij} = 0$ per ogni i, j.
Il prodotto di due matrici e_{ij}, e_{kl} di $\mathcal{B}$ é :

$$e_{ij}\, e_{kl} = \delta_{jk}\, e_{il} \tag{1.24}$$

in quanto non si ha la matrice nulla solo se l'unitá della matrice a sinistra ha indice di colonna uguale all'indice di riga dell'unitá nella matrice a destra. In questo caso il prodotto ha entrate tutte nulle tranne quella della riga i e colonna j. Inoltre l'immagine di e_{ij}, e_{kl} tramite l'applicazione $[,]$ é :

$$[e_{ij}, e_{hl}] = e_{ij}\, e_{kl} - e_{kl}\, e_{ij} = \delta_{jk}\, e_{il} - \delta_{li}\, e_{kj} \tag{1.25}$$

Denotiamo con $d(n, F)$ l'insieme delle matrici diagonali di $gl(n, F)$, ossia quelle della forma:

$$A = (a_{ij}) \qquad con \qquad a_{ij} = 0 \;\; se \;\; i \neq j \tag{1.26}$$

Il prodotto di una matrice diagonale A per uno scalare $a \in F$ da ancora una matrice diagonale :

$$a\, A = D = (d_{ij}) \qquad \Rightarrow \qquad (d_{ij}) = (a\, a_{ij}) \tag{1.27}$$

per cui se $i \neq j$ abbiamo $d_{ij} = a\, 0 = 0$.
Lo stesso vale se si sommano due matrici diagonali A, B :

$$A + B = D = (d_{ij}) \qquad \Rightarrow \qquad (d_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{1.28}$$

e quindi se $i \neq j$ si ha $d_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$.
Dunque le matrici diagonali costituiscono un sottospazio vettoriale di $gl(n, F)$.
Inoltre anche il prodotto di due matrici diagonali A, B é una matrice diagonale :

$$A\, B = D = (d_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}) \tag{1.29}$$

e dunque, se $i \neq j$, il fattore a sinistra é non nullo solo per $i = k$, ma in questo caso il fattore a destra é nullo e, viceversa, il fattore a destra é diverso da 0 solo quando $k = j$ ma in questo caso si annulla il fattore a sinistra. Quindi se $i \neq j$ l'elemento d_{ij} é sempre nullo.

Introduciamo un secondo sottoinsieme $t(n, F)$ di $gl(n, F)$, quello delle matrici triangolari superiori, ossia quelle della forma :

$$A = (a_{ij}) \qquad con \qquad a_{ij} = 0 \;\; se \;\; i > j \tag{1.30}$$

Anche questo insieme é chiuso rispetto alla somma, al prodotto per scalare ed al prodotto matriciale. Infatti, se A, B, C sono matrici triangolari superiori e a uno scalare di F, si ha :

- $aA = B = (b_{ij}) = (a \cdot a_{ij})$ se $i > j$ allora $a \cdot a_{ij} = a \cdot 0 = 0 = b_{ij}$

- $A + B = C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ se $i > j$ allora $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$

- $AB = C = (c_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj})$ dunque i fattori a sinistra sono non nulli solo quando $i \leq k$ mentre quelli a destra sono diversi da 0 solo per $k \leq j$. Ma se $i > j$ allora $\{k \geq i\} \cap \{k \leq j\} = 0$.

Infine consideriamo il sottoinsieme $\eta(n, F) \subset gl(n, F)$ costituito dalle matrici strettamente triangolari superiori, ossia le matrici $A \in gl(n, F)$ della forma :

$$A = (a_{ij}) \qquad con \qquad a_{ij} = 0 \;\; se \;\; i \geq j \tag{1.31}$$

Anche in questo caso abbiamo la chiusura rispetto al prodotto per scalare, la somma ed il prodotto matriciale. Infatti, se A, B, C sono matrici strettamente triangolari superiori e a uno scalare di F, abbiamo :

- $aA = B = (b_{ij}) = (a\, a_{ij})$ se $i \geq j$ allora $b_{ij} = a \cdot a_{ij} = a \cdot 0 = 0$

- $A + B = C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$ se $i \geq j$ allora $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$

- $AB = C = (c_{ij}) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj})$ solo quando $k > i$ i fattori a sinistra non sono nulli, solo per $k < j$ i fattori a destra non sono nulli. Se $i \geq j$ allora $\{k > i\} \cap \{k < j\} = 0$

Avendo giá mostrato una base di $gl(n, F)$, vorremmo trovare una base per ognuno dei 3 sottospazi vettoriali di $gl(n, F)$ introdotti.
Una base di $t(n, F)$ é:

$$\mathcal{B}_1 = \{e_{ij} \mid i \leq j\} \tag{1.32}$$

Le matrici che costituiscono quest'insieme sono sicuramente triangolari superiori perché hanno termini nulli per $i > j$. Esse sono indipendenti (perché sottoinsiemi di un insieme linearmente indipendente) e generano $t(n, F)$:

$$A = (a_{kl}) = a_{ij}\, e_{ij} \qquad con \qquad i \leq j \tag{1.33}$$

Calcoliamo la dimensione di $t(n, F)$ sommando il numero di vettori di $\mathcal{B}_1$:

- j=1 ⇒ i=1 1 +
- j=2 ⇒ i=1,2 2 +
- j=3 ⇒ i=1,2,3 3 +
- ... ...
- j=n ⇒ i=1,2,...,n n

$\frac{n(n+1)}{2}$

Come base di $\eta(n, F)$ possiamo prendere :

$$\mathcal{B}_2 = \{e_{ij} \mid i < j\} \tag{1.34}$$

Tale insieme é costituito da matrici triangolari superiori dato che esse hanno entrate nulle nulle quando l'indice di riga é maggiore dell' indice di colonna. Inoltre queste matrici sono linearmente indipendenti (appartengono alla base canonica di $gl(n, F)$) e generano $\eta(n, F)$:

$$A = (a_{kl}) = a_{ij}\, e_{ij} \qquad con \qquad i < j \tag{1.35}$$

Per la dimensione procediamo come nel caso precedente :

- j=1 ⇒ / 0 +
- j=2 ⇒ i=1 1 +
- j=3 ⇒ i=1,2 2 +
- ... ...
- j=n ⇒ i=1,2,...,n-1 n-1

$\frac{n(n-1)}{2}$

Infine mostriamo una base di $d(n, F)$:

$$\mathcal{B}_3 = \{e_{ii} \mid i = 1, ..., n\} \tag{1.36}$$

Le matrici di $\mathcal{B}_3$ sono diagonali (se l'indice di colonna é diverso da quello di riga l'entrata é nulla), sono linearmente indipendenti e generano $d(n, F)$:

$$A = (a_{kl}) = a_{ii}\, e_{ii} \qquad i = 1, ..., n \tag{1.37}$$

In questo caso é facile osservare che la dimensione é n.

L'intersezione fra $d(n, F)$ e $\eta(n, F)$ é 0, in quanto le matrici di $\eta(n, F)$ hanno diagonale nulla e quindi fra esse appartiene a $\delta(n, F)$ solo la matrice nulla.
Possiamo allora considerare :

$$d(n, F) \oplus \eta(n, F) \tag{1.38}$$

Una matrice di questo sottospazio vettoriale appartiene a $t(n, F)$. Infatti se A é una matrice diagonale e B una strettamente triangolare superiore abbiamo :

$$A + B = C = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \tag{1.39}$$

e quindi per $i > j$ si ha $a_{ij} + b_{ij} = 0 + 0 = 0$. Dunque $d(n, F) \oplus \eta(n, F) \subseteq t(n, F)$.
Viceversa una matrice A di $t(n, F)$

$$A = (a_{kl}) = a_{ij}\, e_{ij} \qquad e_{ij} \in \mathcal{B}_1. \tag{1.40}$$

si puó scrivere come somma di una matrice diagonale e una strettamente triangolare superiore :

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, e_{ii} + \sum_{i<j} a_{ij} e_{ij} \tag{1.41}$$

Ne consegue:

$$\delta(n, F) \oplus \eta(n, F) = t(n, F) \tag{1.42}$$

Concludiamo il paragrafo mettendo in relazione gli endomorfismi e le matrici.
Sia V un F-spazio vettoriale di dimensione finita. Se fissiamo una base $\mathcal{B}$ in V, ogni elemento di $End(V)$ puó essere rappresentato con una matrice di $gl(n, F)$ e, viceversa, ad ogni matrice di $gl(n, F)$ rimane associato un endomorfismo di V.
Ció definisce una bigezione fra $End(V)$ e $gl(n, F)$ che é anche un'applicazione lineare, cioé un isomorfismo di spazi vettoriali. Infatti se due endomorfismi sono rappresentati dalla stessa matrice sono uguali ed inoltre :

- $f + g \to A_{f+g} = A_f + A_g$

- $a\, f \to A_{a\, f} = a\, A_f$

Inoltre, dati $f, g \in End(V)$, l'endomorfismo $[f, g]$ é rappresentato dalla matrice :

$$A_{[f,g]} = A_f\, A_g - A_g\, A_f = [A_f, A_g] \tag{1.43}$$

Ad ogni endomorfismo di V associamo la traccia. La traccia di una matrice di $gl(n, F)$ é definita come la somma degli elementi della diagonale principale. Dato che le matrici che rappresentano un endomorfismo rispetto a due diverse basi di V sono simili e matrici simili hanno la stessa traccia, allora é ben definita la traccia di un endomorfismo di V.
Date due matrici $A, B \in gl(n, F)$ abbiamo :

- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(A\,B) = tr(B\,A)$
- $tr([A, B]) = tr(A\,B - B\,A) = tr(A\,B) - tr(B\,A) = tr(A\,B) - tr(B\,A) = 0$

Valendo le seguenti proprietá, in $End(V)$ consideriamo l'insieme $sl(V)$ degli endomorfismi con traccia nulla. Siano f e g due elementi di $sl(V)$, A_f e A_g le loro matrici associate rispetto ad una base e $a \in F$ uno scalare. Allora :

$$f + g \to A_{f+g} = A_f + A_g \qquad \Rightarrow \qquad tr(f + g) = tr(A_f + A_g) = 0 \tag{1.44}$$

$$a\,f \to A_{a\,f} = A_f \qquad \Rightarrow \qquad tr(a\,f) = tr(a\,A_f) = 0 \tag{1.45}$$

ossia $f + g$ e $a\,f$ hanno traccia nulla e perció $sl(V)$ é un sottospazio vettoriale di $End(V)$.
Inoltre abbiamo :

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f \qquad \to \qquad A_f\,A_g - A_g\,A_f \qquad \to \qquad tr([f, g]) = 0 \tag{1.46}$$

Ci chiediamo quale sia la dimensione di $sl(V)$.
Innanzitutto osserviamo che $sl(V)$ é isomorfa (attraverso l'isomorfismo fra $End(V)$ e $gl(n, F)$ sopra esibito) al sottospazio vettoriale di $gl(n, F)$ costituito dalle matrici con traccia nulla, che denotiamo con $sl(n, F)$. Allora ci basta capire qual é la dimensione di tale sottospazio di $gl(n, F)$. Non tutte le matrici di $gl(n, F)$ hanno traccia nulla (basti pensare a e_{11}) per cui $sl(n, F)$ non coincide con $gl(n, F)$, ossia é un sottospazio vettoriale proprio e dunque di dimensione minore o uguale a $n^2 - 1$.
Possiamo esibire $n^2 - 1$ matrici con traccia zero e linearmente indipendenti, per cui dim $sl(n, F)$ é

proprio $n^2 - 1$.

Prendiamo tutte le matrici e_{ij} con $i \neq j$ insieme con:

$$h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1} \qquad (1 \leq i \leq n-1) \tag{1.47}$$

Tutte queste matrici hanno traccia nulla e sono esattamente $n^2 - 1$.

Vorremmo far vedere che esse sono indipendenti, dunque costituiscono una base di $sl(n, F)$ che chiameremo base standard di $sl(n, F)$. Prendiamo una combinazione lineare delle matrici dette che ci dia la matrice nulla:

$$\sum_{i \neq j} \alpha_{ij}\, e_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i\, h_i = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}\, e_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i (e_{ii} - e_{i+1,e_{i+1}}) = 0 \tag{1.48}$$

Pertanto si ha :

- $\alpha_{ij} = 0 \qquad \forall i, j$ con $i \neq j$
- $\beta_1 = 0 \qquad$ (solo h_1 ha un elemento non nullo nella posizione $(1, 1)$)
- $\beta_2 \qquad$ (grazie al punto precedente solo h_2 ha un elemento non nullo nella posizione $(2, 2)$)
- $\vdots$
- $\beta_{n-1} = 0$

1.4 Forme bilineari

Sia V uno spazio vettoriale sul campo F. Una forma bilineare su V è un'applicazione $g : V \times V \to F$ tale che :

$$g(av + bw, z) = ag(v, z) + bg(w, z) \tag{1.49}$$

$$g(v, aw + bz) = ag(v, w) + bg(v, z) \tag{1.50}$$

per ogni $v, w, z \in V$ e $a, b \in F$.

Se $g(v, w) = g(w, v)$ per ogni coppia di vettori $v, w \in V$ diremo che g è una forma bilineare simmetrica, antissimentrica se $g(v, w) = -g(w, v) \ \ \forall v, w \in V$.

Se g è simmetrica, possiamo definirne il nucleo :

$$V^{\perp} = \{v \in V \mid g(v, w) = 0 \ \ \forall w \in V\} \tag{1.51}$$

Esso è un sottospazio vettoriale di V. Infatti, se v_1, v_2 sono due elementi del nucleo e a è uno scalare di F, abbiamo :

$$g(v_1 + v_2, w) = g(v_1, w) + g(v_2, w) = 0 + 0 = 0 \tag{1.52}$$

$$g(av_1, w) = a\, g(v_1, w) = 0 \tag{1.53}$$

per ogni $w \in V$, dunque $V^{\perp}$ è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalare.
Diremo che una forma bilineare simmetrica è non degenere se il suo nucleo è costituito dal solo vettore nullo, degenere in caso contrario.

Come è ben noto, data un'applicazione lineare, fissando una base nel dominio e una nel codominio essa può essere rappresentata mediante una matrice. Qualcosa di analogo lo si fa anche per le forme bilineari.
Consideriamo una forma bilineare g su un F-spazio vettoriale V (di dimensione n) e fissiamo una base $B = \{b_1, ..., b_n\}$ in V. Dati due vettori $v, w \in V$, abbiamo:

$$g(v, w) = g(\sum_{k=1}^{n} x_k b_k, \sum_{h=1}^{n} y_h b_h) = \sum_{h,k=1}^{n} x_k y_h g(b_k, b_h) \tag{1.54}$$

Allora, se introduciamo la matrice quadrata di ordine n

$$S = (s_{hk}) \quad con \;\; s_{hk} = g(b_k, b_h) \tag{1.55}$$

abbiamo

$$g(v, w) = \sum_{h,k=1}^{n} y_h\, g(b_k, b_h)\, x_k = \sum_{h,k=1}^{n} (y_h\, s_{hk})\, x_k = y^T S x \tag{1.56}$$

Chiamiamo S la matrice associata a g rispetto alla base B fissata.

La forma bilineare g è simmetrica se e solo se lo è su una base $B = \{b_1, ..., b_n\}$ di V.
In un senso l'implicazione è ovvia. Supponiaèmo allora che g sia simmetrica sulla base B. Dati due generici vettori $v, w \in V$ abbiamo :

$$g(v, w) = g(\sum_{k=1}^{n} x_k b_k, \sum_{h=1}^{n} y_h b_h) = \sum_{h,k=1}^{n} x_k y_h\, g(b_k, b_h) = \sum_{h,k=1}^{n} x_k y_h g(b_h, b_k) = \sum_{h,k=1}^{n} g(y_h b_h, x_k b_k) = g(w, v)$$

Lo stesso vale se invece della simmetria consideriamo l'antisimmetria poichè in un senso l'implicazione è sempre ovvia ed inoltre :

$$g(v, w) = g(\sum_{k=1}^{n} x_k b_k, \sum_{h=1}^{n} y_h b_h) = \sum_{h,k=1}^{n} x_k y_h g(b_k, b_h) = \sum_{h,k=1}^{n} -(x_k y_h)\, g(b_h, b_k) = \tag{1.57}$$

$$= \sum_{h,k=1}^{n} -g(y_h b_h, x_k b_k) = -g(w, v)$$

Da quanto osservato risulta ovvio che una forma bilineare è simmetrica (antisimmetrica) se e solo se lo è la sua matrice associata rispetto ad una qualsiasi base B fissata in V.

Proposizione 1.4.1. *Sia $g : V \times V \to F$ una forma bilineare sull' F-spazio vettoriale V. Siano B e B' due basi di V e C la matrice di cambiamento di base da B a B'. Allora, se S ed S' sono le matrici che rappresentano g rispetto a B e B', abbiamo $S' = B^T S B$.*

Proposizione 1.4.2. *Sia $g : V \times V \to F$ una forma bilineare simmetrica sull' F-spazio vettoriale V. Se S è la matrice che rappresenta g rispetto alla base B di V, abbiamo che g è non degenere se e solo se S è non singolare.*

Capitolo 2

Algebre di Lie

2.1 Prime definizioni

Sia L uno spazio vettoriale su un campo F. Diremo che L è un' algebra di Lie su F se in L è definita un'operazione binaria

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & L \times L & \to & L \\ & (x,y) & \mapsto & \varphi(x,y) \end{array}$$

che soddisfa le seguenti condizioni:

- L1) φ è bilineare, ossia $\varphi(ax+by,z) = a\varphi(x,z) + b\varphi(y,z)$ e $\varphi(x,ay+bz) = a\varphi(x,y) + b\varphi(x,z)$ qualsiasi siano i vettori x, y, z di L e gli scalari a, b di F

- L2) $\varphi(x,x) = 0$ per ogni vettore x di L

- L3) $\varphi(x,\varphi(y,z)) + \varphi(y,\varphi(z,x)) + \varphi(z,\varphi(x,y)) = 0$ per ogni terna di vettori x, y, z di L

Chiamiamo φ commutatore, la denotiamo col simbolo $[,]$ e, di conseguenza, indichiamo con $[x,y]$ l'immagine di un generico elemento del suo dominio ; la condizione (L3) prende il nome di identità di Jacobi.

A meno di indicazioni contrarie, nel corso del nostro lavoro considereremo sempre algebre di Lie aventi dimensione finita in qualità di spazi vettoriali.

Dalle condizioni (L1) e (L2) segue che il commutatore è antisimmetrico. Infatti, presi due vettori $x, y \in L$, per la (L2) si ha $[x+y,x+y] = 0$ e dalla bilinearità del commutatore segue $0 = [x+y,x+y] = [x,x+y] + [y,x+y] = [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y]$. Riapplicando (L2) otteniamo $0 = [x,x] + [x,y] + [y,x] + [y,y] = [x,y] + [y,x]$ ossia $[x,y] = -[y,x]$.
Denotiamo con (L2)' questa condizione di antisimmetria.
Viceversa, se l'operazione binaria φ soddisfa (L2)' allora non è difficile mostrare che verifica anche

(L2), a patto che il campo F abbia caratteristica[1] diversa da 2.
Dato un generico vettore $x \in L$ consideriamo $\varphi(x,x)$. Per (L2)' abbiamo $\varphi(x,x) = -\varphi(x,x)$ ossia $\varphi(x,x) + \varphi(x,x) = 2\varphi(x,x) = 0$. Se $2 \neq 0$ allora 2 ammette inverso che, moltiplicato ad entrambi i membri, conduce alla relazione $\varphi(x,x) = 0$, cioè la condizione (L2).

Risulta utile osservare che in un'algebra di Lie L su un campo F, il commutatore di un elemento $(x,y) \in L \times L$ è il vettore nullo se uno dei uno dei suoi argomenti è il vettore nullo (se lo sono entrambi, per la (L2), è ovvio). Supponendo $x = 0$ ed y qualsiasi, abbiamo $[0,y] = [0+0,y] = [0,y] + [0,y] = 2[0,y]$. Sottraendo $[0,y]$ ad entrambi i termini otteniamo $[0,y] = 0$, e quindi $[y,0] = -[0,y] = 0$.

Se V è un F-spazio vettoriale, allora $End(V)$ è un'algebra di Lie con commutatore :

$$
\begin{array}{llll}
[,] & End(V) \times End(V) & \rightarrow & End(V) \\
& (f,g) & \mapsto & [f,g] = f \circ g - g \circ f
\end{array}
$$

il quale soddisfa le condizioni L1, L2 ed L3 per quanto visto nel primo capitolo.
Questa algebra di Lie prende il nome di algebra lineare generale e la si suole denotare anche col simbolo $gl(V)$. Chiamiamo algebra di Lie lineare ogni sottoalgebra di $gl(V)$.
Lo stesso possiamo dire per lo spazio vettoriale $gl(n,F)$ costituito dalla matrici quadrate di ordine n a coefficienti in un campo F. In questo caso il commutatore è :

$$
\begin{array}{llll}
[,] & gl(n,F) \times gl(n,F) & \rightarrow & gl(n,F) \\
& (A,B) & \mapsto & [A,B] = AB - BA
\end{array}
$$

Definizione 2.1.1. *Siano L, L' due algebre di Lie su un campo F. Un'applicazione lineare $\phi : L \to L'$ è detta omomorfismo di algebre di Lie se conserva il commutatore, ossia*

$$\phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)]' \quad \forall x,y \in L \tag{2.1}$$

dove con $[,]$ denotiamo il commutatore di L e con $[,]'$ quello di L'.
Un omomorfismo ϕ di algebre di Lie è detto monomorfismo se iniettivo, epimorfismo se suriettivo, isomorfismo se bigettivo. Due algebre di Lie L, L' su uno stesso campo F si dicono isomorfe se esiste un isomorfismo di algebre di Lie $\phi : L \to L'$.

Sottolineiamo che affinchè esista un omomorfismo fra due algebre di Lie L, L' esse devono necessariamente essere definite sullo stesso campo F altrimenti non avrebbe senso parlare di applicazione lineare fra le due.
Gli isomorfismi di spazi vettoriali, $End(V) \to gl(n,F)$ e $sl(V) \to sl(n,F)$, visti nel paragrafo 1.3 sono degli isomorfismi di algebre di Lie.

[1] La caratteristica di una campo F, che denotiamo con $char(F)$, è il più piccolo intero positivo m per il quale $m \cdot 1 = 0$. Se m non esiste finito, si dice che la caratteristica di F è zero o infinito.

Definizione 2.1.2. *Diremo che un'algebra di Lie L è abeliana (o commutativa) se $[x, y] = [y, x]$ per ogni coppia di elementi x, y di L. Dato che $[x, y] = -[y, x]$ la condizione di abelianità implica $[x, y] = 0$, purchè il campo F su cui L è definito non abbia caratteristica uguale a 2.*

Introduciamo la nozione di un'algebra di Lie L. Esso lo denotiamo col simbolo $Z(L)$ ed è così definito :

$$Z(L) = \{z \in L \mid [x, z] = 0 \quad \forall x \in L\} \tag{2.2}$$

Tale sottoinsieme di L è un sottospazio vettoriale in quanto chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare. Infatti, se z_1, z_2 appartengono al centro di L e a è uno scalare del campo F su cui L è definito si ha :

$$[x, z_1 + z_2] = [x, z_1] + [x, z_2] = 0 + 0 = 0 \quad \forall x \in L \quad \Rightarrow \quad z_1 + z_2 \in Z(L) \tag{2.3}$$

$$[x, az_1] = a[x, z_1] = a\,0 = 0 \quad \forall x \in L \quad \Rightarrow \quad az_1 \in Z(L) \tag{2.4}$$

Se $Z(L) = L$ allora L è un'algebra di Lie abeliana in quanto $[x, y] = 0$ per ogni coppia di vettori x, y di L. Viceversa, se L è abeliana, dato un suo generico elemento x abbiamo :

$$[x, y] = 0 \quad \forall y \in L \tag{2.5}$$

e quindi x appartiene a $Z(L)$.

Definizione 2.1.3. *Sia L un' algebra di Lie su un campo F e K un sottospazio vettoriale di L. Se*

$$[x, y] \in K \quad \forall x, y \in K \tag{2.6}$$

diremo che K è una sottoalgebra di Lie di F. Si osservi che K è un'algebra di Lie su F con la restrizione a K del commutatore di L.

Fissiamo un algebra di Lie L su un campo F e facciamo alcuni esempi di sottoalgebre di Lie. Consideriamo un generico vettore $x \in L$, allora l'insieme $K = \{ax \mid a \in F\}$ è un sottospazio vettoriale di L. Se $x \neq 0$ allora K ha dimensione 1 e x è una sua base. Dati due sue generici elementi ax, bx con $a, b \in F$ abbiamo $[ax, bx] = ab[x, x] = 0$. Ma K contiene il vettore nullo in quanto sottospazio vettoriale di L, perciò K è una sottoalgebra di L. Se poi x è il vettore nullo, K è una sottoagebra banale di L, ossia quella costituita dal solo vettore nullo.
Sia X un generico sottoinsieme di L. Il centralizzatore di X lo definiamo come :

$$C_L(X) = \{x \in L \mid [x, X] = 0\} \tag{2.7}$$

Esso è una sottoalgebra di L in quanto, presi $x, y \in C_L(X)$ e lo scalare $a \in F$ abbiamo :

$$[x + y, X] = [x, X] + [y, X] = 0 + 0 = 0 \tag{2.8}$$

$$[ax, X] = a[x, X] = a0 = 0 \tag{2.9}$$

$$[[x, y], X] = -[[y, X], x] - [[X, x], y] = -[0, x] - [0, y] = 0 + 0 = 0 \tag{2.10}$$

Inoltre possiamo osservare che :

$$C_L(L) = \{x \in L \mid [x, L] = 0\} = \{x \in L \mid [x, y] = 0 \quad \forall y \in L\} = Z(L) \tag{2.11}$$

Sia K una sottoalgebra di L (o semplicemente un suo sottospazio vettoriale). Il normalizzatore di K, che denotiamo col simbolo $N_L(K)$, è definito come :

$$N_L(K) = \{x \in L \mid [x, K] \subset K\} \tag{2.12}$$

Tale insieme è chiuso rispetto alla somma ed al prodotto per scalare (in quanto lo è K) ed inoltre, se x, y sono due suoi elementi, abbiamo :

$$[[x, y], K] = -[K, [x, y]] = [x, [y, K]] + [y, [K, x]] = [x, [y, K]] - [y, [x, K]] \subset K \tag{2.13}$$

dunque è una sottoalgebra di L.
Il paragrafo 1.3 ci fornisce specifici esempi di sottoalgebre di Lie : dato che $t(n, F)$, $d(n, F)$, $\eta(n, F)$ sono sottoinsiemi di $gl(n, F)$ chiusi rispetto alla somma, al prodotto per scalare ed al prodotto essi sono sottoalgebre di $gl(n, F)$.

Definizione 2.1.4. *Un sottospazio vettoriale di un'algebra di Lie L è detto ideale di L se, per ogni $x \in L$ e $y \in I$, si ha che $[x, y]$ appartiene ad I.*

Dato che $[x, y] = -[y, x]$, allora $[x, y]$ appartiene a I se e solo se $[y, x]$ vi appartiene. Non ha dunque senso parlare di ideali destri o sinistri come si fa negli anelli non commutativi. Osserviamo anche che ogni ideale è un sottospazio vettoriale che, per definizione è chiuso rispetto al commutatore : ogni ideale è una sottoalgebra di Lie.
Abbiamo già incontrato un ideale nelle righe precedenti : il centro di L.
Di seguito riportiamo alcuni semplici esempi di ideali di un'algebra di Lie L.
Il sottospazio vettoriale costituito dal solo vettore nullo è un ideale poichè $[x, 0] = 0$ qualsiasi sia il vettore x di L. Anche L è un sottospazio vettoriale di L che ovviamente verifica la definizione di ideale. Questi due ideali sono detti banali.

Sia $\phi : L \to L'$ un omomorfismo di algebre di Lie. Allora $ker(\phi)$ è un ideale di L, $Im(L')$ una sottoalgebra di Lie di L'. Dato che ϕ è prima di tutto un applicazione lineare fra spazi vettoriali, dall'algebra lineare sappiamo che $ker(\phi)$ e $Im(\phi)$ sono sottospazi vettoriali di L e L' rispettivamente. Sia x un generico elemento di L e y un vettore di $ker(\phi)$. Allora abbiamo :

$$\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)] = [\phi(x), 0] = 0 \tag{2.14}$$

e dunque $[x, y]$ appartiene al nucleo di ϕ.
Se x, y sono due generici elementi di $Im(\phi)$ abbiamo $x = \phi(x')$, $y = \phi(y')$ con $x', y' \in L$. Allora :

$$[x, y] = [\phi(x'), \phi(y')] = \phi([x', y']) \tag{2.15}$$

perciò pure $[x, y]$ è immagine, tramite ϕ, di un elemento del dominio L.

Si possono costruire ideali di un'algebra di Lie L a partire da altri suoi ideali . Dati due ideali $I, J \subset L$ tutti e tre gli insiemi seguenti sono ideali di L :

- i) $I \cap J$
- ii) $I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$
- iii) $[I, J] = \{\sum \alpha_i [x_i, y_i] \mid x_i \in I, y_i \in J, \alpha_i \in F\}$

dove l'ultimo insieme è costituito da tutte le combinazioni lineari finite dei commutatori $[x_i, y_i]$.
Partiamo da $I \cap J$. L'algebra lineare ci dice che l'intersezione di sottospazi vettoriali è ancora un sottospazio vettoriale ed inoltre, se $x \in L$ e $y \in I \cap J$ allora $[x, y]$ appartiene sia ad I che a J.
Passiamo a $I + J$: esso è la somma di due sottospazi vettoriali di L dunque ancora un sottospazio vettoriale di L. Inoltre se x è un generico elemento di L e $y + z$ appartiene a $I + J$, dato che I, J sono ideali, si ha :

$$[x, y + z] = [x, y] + [x, z] \in I + J \tag{2.16}$$

Infine $[I, J]$: la somma di due combinazioni lineari finite di elementi della forma $[x_i, y_i]$, con $x_i \in I$ e $y_i \in L$, è ancora una combinazione lineare finita di elementi di questa forma. Lo stesso vale se un elemento di $[I, J]$ lo moltiplichiamo per uno scalare. Inoltre, dato un vettore $x \in L$ e un elemento $[y, z]$, con $y \in I$ e $x \in J$, dall'identità di Jacobi segue :

$$[x, [y, z]] = -[y, [z, x]] - [z, [x, y]] = -[y, [z, x]] + [[x, y], z] \tag{2.17}$$

ossia $[x, [y, z]]$ appartiene a $[I, J]$ dato che $[z, x]$ è contenuto in J e $[x, y]$ in I. Pertanto si ha che :

$$[x, \sum_i \alpha_i [y_i, z_i]] = \sum_i \alpha_i [x, [y_i, z_i]] \tag{2.18}$$

è una combinazione lineare di elementi di $[I, J]$, dunque un suo elemento. Deduciamo allora che anche $[I, J]$ è un ideale di L.
Ponendo $I = J = L$ otteniamo l'ideale $[L, L]$ che prende il nome di algebra derivata di L.
Osserviamo che L è abeliana se e solo se $[L, L] = 0$. Infatti $[L, L] = 0$ implica $Z(L) = L$ e viceversa.

Se L è un'algebra di Lie abeliana, allora tutti i commutatori sono nulli e dunque ogni sottospazio vettoriale di L è un suo ideale.

Definizione 2.1.5. *Se L è un' algebra di Lie non abeliana e priva di ideali diversi da quelli banali (L e 0) la chiameremo semplice.*

Se L è un'algebra di Lie semplice abbiamo $[L, L] = L$ (in quanto $[L, L]$ è un suo ideale) ed $Z(L) = 0$ poichè L non è abeliana.
In un'algebra di Lie di dimensione 1 gli unici due sottospazi vettoriali sono $\{0\}$ ed L. Inoltre $[L, L] = 0$ poichè, fissata una base $x \in L$, il commutatore di due generici vettori $\alpha x, \beta x \in L$ è $[\alpha\, x, \beta\, x] = 0$.
Se $L \neq 0$ è un'algebra di Lie priva di ideali non banali si possono avere due casi : $[L, L] = 0$ oppure $[L, L] = L$. Nel secondo caso L è non abeliana e quindi semplice, nel primo L è abeliana e ogni sottospazio vettoriale di L è un ideale. Dunque L ha come sottospazi vettoriali solo quelli banali e quindi non può che avere dimensione 1.

2.2 Algebra di Lie quoziente e teorema di isomorfismo

Sia L è un'algebra di Lie su un campo F. Se essa non ha dimensione 1 e non è semplice allora ammette ideali non banali. Attraverso quest'ultimi possiamo ottenere delle algebre di Lie di dimensione più piccola di quella di L : le algebre di Lie quoziente.
Sia I un ideale di L.
Partiamo con l'osservare che L/I è uno spazio vettoriale. Dato che I è un sottospazio vettoriale di L, è anche un suo sottogruppo normale dunque L/I è un gruppo. Inoltre il prodotto per scalare $\alpha[x] = [\alpha x]$, con $x \in L$ e $\alpha \in F$, è ben definito. Infatti se due vettori $x, y \in L$ sono equivalenti, ossia $x - y \in I$, allora pure αx e αy sono equivalenti in quanto $\alpha x - \alpha y = \alpha(x - y) \in I$. Non è complicato verificare che il prodotto per scalare soddisfa tutte le condizioni richieste da uno spazio vettoriale. Prendendo $x, y \in L$ e gli scalari $\alpha, \beta \in F$ otteniamo :

- $\alpha(\beta[x]) = \alpha[\beta x] = [\alpha(\beta x)] = [(\alpha\beta)x] = (\alpha\beta)[x]$
- $(\alpha + \beta)[x] = [(\alpha + \beta)x] = [\alpha x + \beta x] = [\alpha x] + [\beta y] = \alpha[x] + \beta[x]$
- $\alpha([x] + [y]) = \alpha[x + y] = [\alpha(x + y)] = [\alpha x + \alpha y] = [\alpha x] + [\alpha y] = \alpha[x] + \alpha[y]$
- $1[x] = [x]$
- $0[x] = [0] = I$

Nello spazio vettoriale quoziente L/I definiamo la seguente operazione :

$$\begin{array}{rcl} L/I \times L/I & \to & L/I \\ (x + I = [x], y + I = [y]) & \mapsto & [[x], [y]] = [[x, y]] = [x, y] + I \end{array}$$

Dobbiamo verificare che essa è ben definita. Se x è equivalente a x' e y è equivalente a y' allora :

$$x + I = x' + I \qquad ; \qquad y + I = y' + I \tag{2.19}$$

e dunque

$$x' = x + u \qquad ; \qquad y' = y + v \tag{2.20}$$

con u, v vettori di I. Allora il vettore

$$[x', y'] = [x + u, y + v] = [x, y] + [x, v] + [u, y] + [u, v] \ \in [x, y] + I \tag{2.21}$$

appartien a $[x, y] + I$, cioè $[x, y]$ e $[x', y']$ sono equivalenti. Vorremmo che questa operazione binaria fosse un commutatore. Ed infatti, dati $x, y, z \in L$ e $\alpha, \beta \in F$, si ha :

- $[\alpha[x] + \beta[y], [z]] = [[\alpha x] + [\beta y], [z]] = [[\alpha x + \beta y], [z]] = [[\alpha x + \beta y, z]] = [\alpha[x, z] + \beta[y, z]] = \alpha[[x, z]] + \beta[[y, z]] = \alpha[[x], [z]] + \beta[[y], [z]]$
- $[[x], \alpha[y] + \beta[z]] = [[x], [\alpha y + \beta z]] = [[x, \alpha y + \beta z]] = [\alpha[x, y] + \beta[x, z]] = \alpha[[x, y]] + \beta[[x, z]] = \alpha[[x], [y]] + \beta[[x], [z]]$
- $[[x], [x]] = [[x, x]] = [0] = I$
- $[[x], [[y], [z]]] + [[y], [[z], [x]]] + [[z], [[x], [y]]] = [[x], [[y, z]]] + [[z], [[x, y]]] + [[y], [[z, x]]] = [[x, [y, z]]] + [[z, [x, y]]] + [[y, [z, x]]] = [[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]]] = [0] = I$

per cui possiamo concludere che L/I è un'algebra di Lie : l'algebra di Lie quoziente.
La dimensione di L/I ci è suggerita dall'algebra lineare :

$$dim(L) = dim(L/I) + dim(I) \tag{2.22}$$

per cui è ovvio che se I è un ideale diverso da 0, allora l'algebra quoziente ha dimensione inferiore di quella di L.

Analogamente ad altre strutture astratte, anche per le algebre di Lie quoziente vale un teorema di isomorfismo :

Teorema 2.2.1. *Sia $\phi : L \to L'$ un isomorfismo di algebre di Lie. Allora $Im(\phi)$ e $L/ker(\phi)$ sono isomorfe. Inoltre, se I, J sono ideali di L allora esiste un isomorfismo naturale tra $(I + J)/J$ e $I/(I \cap J)$.*

Dimostrazione. Dimostreremo solo la prima parte del teorema.
Consideriamo l'applicazione :

$$\begin{array}{cccc} f: & L/ker(\phi) & \to & Im(\phi) \\ & [x] & \mapsto & \phi(x) \end{array}$$

Come sempre, come prima cosa dobbiamo verificare che f sia ben definita : se $x, y \in L$ sono equivalenti allora $x - y \in ker(\phi)$, quindi $\phi(x-y) = 0 = \phi(x) - \phi(y)$ ossia $\phi(x) = \phi(y)$.
Inoltre f è un'applicazione lineare :

$$f(\alpha[x]+\beta[y]) = f([\alpha x+\beta y]) = \phi(\alpha x+\beta y) = \alpha\phi(x)+\beta\phi(y) = \alpha f([x])+\beta f([y]) \qquad \forall\, x, y \in L; \alpha, \beta \in F$$

ed è bigettiva. Per l'iniettività abbiamo :

$$f([x]) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \in ker(\phi) \qquad \Leftrightarrow \qquad [x] = ker(\phi) \tag{2.23}$$

mentre se y appartiene a $Im(f)$ allora esso dovrà essere della forma $\phi(x) = y$, con $x \in L$. Dunque come controimmagine di y rispetto ad f abbiamo $[x]$.
Ci rimane da dimostrare che ϕ preserva il commutatore :

$$f([x],[y]) = f([[x,y]]) = \phi([x,y]) = [\phi(x), \phi(y)] = [f([x]), f([y])] \tag{2.24}$$

□

2.3 Nilpotenza e risolubilità delle algebre di Lie

Sia L un'algebra di Lie. Le sequenze di ideali

$$L^{(0)} = L \;\; ; \;\; L^{(1)} = [L, L] \;\; ; \;\; L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] \;\; ; \; ... \; ; \;\; L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}] \;\; ; ... \tag{2.25}$$

$$L^0 = L \;\; ; \;\; L^1 = [L, L] = L^{(1)} \;\; ; \;\; L^2 = [L, L^1] \;\; ; \; ... \; ; \;\; L^i = [L, L^{i-1}] \;\; ; ... \tag{2.26}$$

prendono il nome, rispettivamente, di serie derivata e serie centrale discendente (o inferiore) di L.
Osserviamo che $L^{(i)} \subseteq L^i$. Ragioniamo per induzione su i : per $i = 1$ abbiamo $L^{(1)} = L^1$; se $L^{(i)} \subseteq L^i$ allora $L^{(i+1)} = [L^{(i)}, L^{(i)}] \subseteq L^{i+1} = [L, L^i]$ per l'ipotesi induttiva e in quanto è ovvio che ogni ideale della serie centrale discendente è contenuto (o al più coincidente) in L.

Definizione 2.3.1. *Un'algebra di Lie L si dice risolubile se $L^{(n)} = 0$ per qualche n. Ovviamente se $L^{(n)} = 0$ allora $L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}] = [0,0] = 0$, $L^{(n+2)} = [L^{(n+1)}, L^{(n+1)}] = [0,0] = 0$ e così via : ogni elemento della serie derivata che segue $L^{(n)} = 0$ è a sua volta nullo.*

Ogni algebra di Lie abeliana è risolubile in quanto $L^{(1)} = [L, L] = 0$. Se $L \neq 0$ è un'algebra di Lie semplice allora $[L, L] = L = L^{(1)} = L^{(0)}$ e dunque :

$$L^{(0)} = L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = ... \tag{2.27}$$

ossia L non è risolubile.

Proposizione 2.3.2. *Se L è un'algebra di Lie allora valgono le seguenti affermazioni :*

- *1) se L è risolubile allora lo sono anche tutte le sue sottoalgebre e le immagine di L tramite omomorfismi ;*
- *2) se I è un ideale risolubile di L (risolubile in quanto sottoalgebra di L) tale che L/I è risolubile, allora anche L è risolubile ;*
- *3) se I, J sono ideali risolubili di L , allora anche $I + J$ è risolubile.*

Dimostrazione. (1) Se K è una sottoalgebra di Lie di L allora abbiamo $K^{(i+1)} \subseteq L^{(i+1)}$. Questa relazione possiamo dimostrarla per induzione su i. Per $i = 1$ è banale in quanto $K \subseteq L$ e dunque $K^{(1)} = [K, K] \subseteq [L, L] = L^{(1)}$. Se poi $K^{(i)} \subseteq L^{(i)}$ allora $K^{(i+1)} = [K^{(i)}, K^{(i)}] \subseteq [L^{(i)}, L^{(i)}] = L^{(i+1)}$.
Se L è risolubile per un certo n abbiamo $L^{(n)} = 0$. Ma dato che $K^{(n)} \subseteq L^{(n)}$ segue banalmente $K^{(n)} = 0$ e quindi la risolubilità di K.
Sia $\phi : L \to M$ un epimorfismo (un omomorfismo suriettivo) di algebre di Lie. Per induzione su i si dimostra che $\phi(L^{(i+1)}) = M^{(i+1)}$. Per $i = 0$ abbiamo $\phi(L^{(0)}) = \phi(L) = M = M^{(0)}$. Inoltre, dall'ipotesi induttiva $\phi(L^{(i)}) = M^{(i)}$ consegue :

$$\phi(L^{(i+1)}) = \phi([L^{(i)}, L^{(i)}]) = [\phi(L^{(i)}), \phi(L^{(i)})] = [M^{(i)}, M^{(i)}] = M^{(i+1)} \tag{2.28}$$

Per cui, se $L^{(n)} = 0$ allora $M^{(n)} = \phi(L^{(n)}) = \phi(0) = 0$ e dunque anche M è risolubile.
(2) Supponiamo che (L/I) sia risolubile e quindi esista un n tale che $(L/I)^{(n)} = 0$. Applichiamo il punto 1 alla proiezione naturale $\pi : L \to L/I$ (sappiamo che è un'applicazione lineare suriettiva e preserva il commutatore in quanto $\pi([x, y]) = [[x, y]] = [[x], [y]]$. Pertanto si ha $\pi(L^{(n)}) = (L/I)^{(n)} = 0$ che comporta $L^{(n)} \subseteq I = ker(\pi)$. Essendo I risolubile possiamo supporre $I^{(m)} = 0$. Ragionando per induzione su j si può dimostrare che $(L^{(i)})^{(j)} = L^{(i+j)}$: se $j = 0$ si ha banalmente $L^{(i)} = L^{(i+0)}$, se poi $(L^{(i)})^{(j)} = L^{(i+j)}$ si deduce $(L^{(i)})^{(j+i)} = [(L^{(i)})^{(j)}, (L^{(i)})^{(j)}] = [L^{(j+i)}, L^{(j+i)}]) = L^{(j+i+1)}$. Da questa relazione otteniamo $L^{(n+m)} = (L^{(n)})^{(m)} \subseteq I^{(m)}$. Dunque $L^{(n+m)} = 0$ dato che $L^{(n)}$ è una sottoalgebra di I a cui applichiamo quanto visto nel punto 1.
(3) Per quanto visto nel teorema 2.2.1 esiste un isomorfismo fra $(I + J)/J$ e $(I + J)/(J$. Per il punto 1 $I/(I \cap J)$ e $I/(I \cap J)$ sono risolubili. Applicando il punto 2 anche $I + J$ è risolubile. □

Sia L un'algebra di Lie ed S un suo ideale risolubile massimale, ossia non contenuto propriamente in nessun altro ideale risolubile. Se I è un altro ideale risolubile di L, allora per il punto 3 della proposizione precedente, anche $I + S$ è un ideale risolubile. Dato che ogni ideale contiene anche il vettore nullo, abbiamo $S \subseteq S + I$ e, per la massimalità di S, segue $S = S + I$, ossia $I \subseteq S$ (basta sommare il vettore nullo con i vettori di I).
Un'ideale risolubile massimale se esiste è unico per quanto appena osservato (se S_1, S_2 sono due ideali

massimali allora $S_1 \subseteq S_2$ e per l'ipotesi di massimalità segue $S_1 = S_2$). Inoltre, stante l'ipotesi della dimensione finita di L, esiste sempre un ideale risolubile massimale : $\{0\}$ è banalmente risolubile, se non è massimale esiste un ideale risolubile I_1 che lo contiene propriamente e quindi ha dimensione strettamente maggiore, se I_1 non è massimale esiste un ideale risolubile I_2 che contiene propriamente I_1 e ha dimensione maggiore. Il regionamento detto non può essere iterato indefinitamente dato che L ha dimensione finita.
Chiamiamo radicale di L, e lo denotiamo con il simbolo $rad(L)$, l'ideale risolubile massimale di L.
Nel caso in cui $rad(L) = 0$ diciamo che L è semisemplice.
Un'algebra di Lie semplice ha solo due ideali : L, che non è risolubile come già osservato, e $\{0\}$. Allora è ovvio che un'algebra di Lie semplice è anche semisemplice.

Definizione 2.3.3. *Un'algebra di Lie L si dice nilpotente se $L^n = 0$ per qualche n. Se $L^n = 0$ allora $L^{n+1} = [L, L^n] = [L, 0] = 0$, $L^{n+2} = [L, L^{n+1}] = [L, 0] = 0$ e così via : ogni elemento della serie centrale discendente che segue $L^n = 0$ è a sua volta nullo.*

Ogni algebra di Lie abeliana è nilpotente in quanto $L^1 = [L, L] = 0$. Dato che $L^{(i)} \subseteq L^i$ per ogni i, se $L^n = 0$ per un qualche n, ossia L è nilpotente, allora $L^{(n)} = 0$: nilpotenza implica risolubilità.
Osservazione : non è vero il viceversa, ossia che un'algebra di Lie risolubile è sempre nilpotente.

Proposizione 2.3.4. *Se L è un'algebra di Lie allora valgono le seguenti affermazioni :*

- *1) se L è nilpotente allora lo sono anche tutte le sue sottoalgebre e le immagine di L tramite omomorfismi ;*
- *2) se $L/Z(L)$ è nilpotente allora lo è anche L ;*
- *3) se L è nilpotente ma non nulla, allora $Z(L) \neq \{0\}$.*

Dimostrazione. (1) Se K è una sottoalgebra di Lie di L allora abbiamo $K^{i+1} \subseteq L^{i+1}$. Questa relazione possiamo dimostrarla per induzione su i. Per $i = 1$ è banale in quanto $K \subseteq L$ e dunque $K^1 = [K, K] \subseteq [L, L] = L^1$. Se poi $K^i \subseteq L^i$ allora $K^{i+1} = [K, K^i] \subseteq [L, L^i] = L^{i+1}$.
Dunque, se per un certo n abbiamo $L^n = 0$, allora $K^n \subseteq L^n = 0$, ossia $K^n = 0$ e quindi anche K è nilpotente.
Sia $\phi : L \to M$ un epimorfismo (un omomorfismo suriettivo) di algebre di Lie. Per induzione su i si dimostra che $\phi(L^{i+1}) = M^{i+1}$. Per $i = 0$ abbiamo $\phi(L^0) = \phi(L) = M = M^0$. Inoltre, dall'ipotesi induttiva $\phi(L^i) = M^i$, consegue :

$$\phi(L^{i+1}) = \phi([L, L^i]) = [\phi(L), \phi(L^i)] = [M, M^i] = M^{i+1} \tag{2.29}$$

Per cui, se $L^n = 0$ allora $M^n = \phi(L^n) = \phi(0) = 0$ e dunque anche M è nilpotente.
(2) Consideriamo la proiezione naturale $\pi : L \to L/Z(L)$. Per quanto visto nel punto precedente

abbiamo $\pi(L^i) = (L/Z(L))^i$. Se, per un certo n, si ha $(L/Z(L))^n = 0$ allora $\pi(L^n) = \{0\}$, ossia $L^n \subseteq Z(L)$. Pertanto, per come abbiamo definito $Z(L)$ segue :

$$L^{n+1} = [L, L^n] \subseteq [L, Z(L)] = 0 \tag{2.30}$$

(3) Supponendo che L sia nilpontente, sia I l'ultimo termine non nullo della serie centrale discendente. Dato che $L \neq 0$ al più avremo $I = L$, in generale invece, abbiamo $I = L^{n-1}$. Allora da $L^n = [L, L^{n-1}] = 0$ segue $L^{n-1} = I \subseteq Z(L)$ e dunque $Z(L)$ è ovviamente non nullo. □

Concludiamo osservando che se un'algebra di Lie L è contemporaneamente semisemplice e nilpotente allora è nulla. Infatti la nilpotenza implica che L è risolubile, dunque, essendo L semisemplice, abbiamo $rad(L) = L = 0$.

Capitolo 3

Algebre di Lie semisemplici

In questo capitolo, a meno di indicazioni contrarie, con F denoteremo un campo di caratteristica zero ed algebricamente chiuso, ossia ogni polinomio in una variabile a coefficienti in F ha tutte le sue radici contenute in F.

3.1 Rappresentazione aggiunta

Definizione 3.1.1. *Sia L un'algebra di Lie su un campo F. Una rappresentazione di L é un omomorfismo di algebre di Lie :*

$$\phi : L \to gl(V) \tag{3.1}$$

dove V è un F-spazio vettoriale di dimensione finita.

L'esempio classico di rappresentazione di un'algebra di Lie L è la rappresentazione aggiunta :

$$\begin{array}{rccl} ad: & L & \to & End(L) \\ & x & \mapsto & ad(x) = ad\,x \end{array}$$

con $ad\,x$ che ad un generico vettore $v \in L$ associa $[x, v]$.
Dalla bilinearitá del commutatore segue facilmente che le immagini dell'applicazione sono endomorfismi di L. Verifichiamo inoltre che ad é un omomorfismo di algebre di Lie, ossia é un'applicazione lineare che conserva il commutatore. Per ogni $x, y, v \in L$ e $a, b \in F$ abbiamo :

$$(ad(ax+by))(v) = [ax+by, v] = a[x, v]+b[y, v] = (a\cdot ad\,x)(v)+(b\cdot ad\,y)(v) = (a\cdot ad\,x+b\cdot ad\,y)(v) \tag{3.2}$$

$$[ad\,x, ad\,y](v) = ad\,x(ad\,y(v)) - ad\,y(ad\,x(v)) = ad\,x([y, v]) - ad\,y([x, v]) = \tag{3.3}$$

$$[x, [y, v]] - [y, [x, v]] = [x, [y, v]] + [[x, v], y] = [[x, y], v] = ad\,[x, y](v)$$

Osserviamo che nella seconda relazione si è fatto uso dell'identità di Jacobi, ossia :

$$[x, [y, v]] + [y, [v, x]] + [v, [x, y]] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad [x, [y, v]] + [[x, v], y] = [[x, y], v] \tag{3.4}$$

Il nucleo della rappresentazione aggiunta é costituito da tutti i vettori $x \in L$ tali che $ad\,x = 0$, ossia $[x, y] = 0$ per ogni elemento y di L. Ció comporta $ker(ad) = Z(L)$.
Se L é semplice, allora $Z(L) = 0$ e dunque la rappresentazione aggiunta é iniettiva. Perció ogni algebra di Lie semplice é isomorfa ad un'algebra di Lie lineare (basta restringere il codominio ad $ad(L)$ che é una sottoalgebra di $End(L)$).
Può capitare che $ad\,x$ sia l'endomorfismo nullo anche se x non è il vettore nullo. Quanto detto succede, ad esempio, per tutti gli elementi di algebre di Lie abeliane.
Se K è una sottoalgebra di Lie di L ed $x \in K$, per denotare l'immagine di x rispetto alla rappresentazione aggiunta di K usiamo il simbolo $ad_K\,x$, (rispetto ad $ad\,x$, questa applicazione agisce solo sugli elementi di K).

Sia F un campo. Per F-algebra intendiamo un F-spazio vettoriale U dotato di un'applicazione bilineare da $U \times U$ in U, le cui immagini le denotiamo semplicemente con la giustapposiozione degli argomenti. Una derivazione dell' F-algebra U è un suo endomorfismo δ tale che :

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b \quad \forall a, b \in U \tag{3.5}$$

L'insieme di tutte le derivazioni di U lo denotiamo con $Der(U)$: esso è un sottospazio vettoriale di $End(U)$.
Siano f, g due derivazioni, allora la loro somma è ancora un endomorfismo di U ed anche una derivazione :

- $(f + g)(ab) = f(ab) + g(ab) = af(b) + f(a)b + ag(b) + g(a)b$
- $a((f + g)(b)) + ((f + g)(a))b = a(f(b) + g(b)) + (f(a) + g(a))b = af(b) + ag(b) + f(a)b + g(a)b$

in quanto con a e b abbiamo indicato due generici elementi di U.
Analogo risultato lo si ha se consideriamo αf, con f derivazione di U e α scalare di F.
Oltre ad essere ancora un endomorfismo di U, αf soddisfa la definizione di derivazione :

- $(\alpha f)(ab) = \alpha(f(ab)) = \alpha(af(b) + f(a)b) = \alpha(af(b)) + \alpha(f(a)b)$
- $a((\alpha f)(b)) + ((\alpha f)(a))b = a(\alpha f(b)) + (\alpha f(a))b = \alpha(af(b)) + \alpha(f(a)b)$

con a, b ancora generici elementi di U. Ma U non è solo un sottospazio vettoriale di $End(U)$, è una sua sottoalgebra di Lie.
Date due derivazioni f, g, il loro commutatore è ancora un endomorfismo di U ed inoltre, prendendo $a, b \in U$, abbiamo :

- $[f, g](ab) = (f \circ g - g \circ f)(ab) = f(g(ab)) - g(f(ab)) = f(ag(b) + g(a)b) - g(af(b) - f(a)b) = a(f(g(b))) + f(a)g(b) + g(a)f(b) + (f(g(a)))b - a(g(f(b))) - g(a)f(b) - f(a)g(b) - (g(f(a)))b = a(f(g(b))) + (f(g(a)))b - a(g(f(b))) - (g(f(a)))b$

- $a([f,g](b))+([f,g](a))b = a(f(g(b))-g(f(b)))+(f(g(a))-g(f(a)))b = a(f(g(b)))-a(g(f(b)))+(f(g(a)))b-(g(f(a)))b = a(f(g(b)))+(f(g(a)))b-a(g(f(b)))-(g(f(a)))b$

Se prendiamo un'algebra di Lie L su un campo F, allora L è una F-algebra (la forma bilineare è il commutatore) e risulta definito $Der(L)$: esso è l'insieme degli endomorosfmi f di L tali che $f([x,y]) = [x,f(y)]+[f(x),y]$. Fissato un elemento $x \in L$, consideriamo la sua immagine tramite la rappresentazione aggiunta :

$$\begin{array}{rccc} ad\,x: & L & \to & L \\ & y & \mapsto & [x,y] \end{array}$$

Essa è una derivazione di L. Infatti prima di tutto è un endomorfismo di L, ed inoltre, utilizzando l'identità di Jacobi si ha :

$$ad\,x([y,z]) = [x,[y,z]] = -[y,[z,x]]-[z,[x,y]] = [y,[x,z]]+[[x,y],z] = [y,ad\,x(z)]+[ad\,x(y),z] \quad (3.6)$$

Una derivazione di L di questa forma si dice interna ; le altre le diciamo esterne.

3.2 Teorema di Engel

Sia L un'algebra di Lie ed x un suo elemento. Diremo che x è ad-nilpotente se l'endomorismo $ad\,x$ è nilpotente.
Se L un'algebra di Lie nilpotente, ossia $L^n = 0$ per un certo n, allora, per ogni $x_1, x_2, ..., x_n, y \in L$ abbiamo :

$$ad\,x_1(ad\,x_2(\cdots(ad\,x_n(y))\cdots)) = 0 \quad (3.7)$$

Infatti $ad\,x_n(y) = [x_n, y] \in L^1$, $ad\,x_{n-1}(ad\,x_n(y)) = [x_{n-1}, ad\,x_n(y)] \in L^2$ e così via fino ad arrivare all'applicazione di $ad\,x_1$ che restituisce un elemento di L^n, che deve essere nullo.
In particolare si ha $(ad\,x)^n = 0$ per ogni elemento x di L. Dunque ogni elemento di un'algebra di Lie nilpotente è ad-nilpotente.
Viceversa, se in un'algebra di Lie L vale la relazione $ad\,x_1(ad\,x_2(\cdots(ad\,x_n(y))\cdots)) = 0$ per ogni scelta di $x_1, x_2, ..., x_n, y \in L$, allora L è nilpotente poichè riusciamo ad ottenere tutti gli elementi di L^n i quali risultano nulli.

Vediamo ora il Teorema di Engel, il quale dice che se tutti gli elementi di un'algebra di Lie L sono ad-nilpontenti, allora L è nilpotente.
Per la dimostrazione del Teorema di Engel ci è necessario premettere due risultati.

Lemma 3.2.1. *Dato uno spazio vettoriale V e un suo endomorfismo nilpotente x, $ad\,x$ è nilpotente.*

Dimostrazione. Ad x possiamo associare due endomorfismi di V :

$$\begin{array}{rccc} \lambda_x : & End(V) & \to & End(V) \\ & y & \mapsto & \lambda_x(y) = x \circ y \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \rho_x : & End(V) & \to & End(V) \\ & y & \mapsto & \rho_x(y) = y \circ x \end{array}$$

che chiamiamo, rispettivamente, traslazione a sinistra e traslazione a destra. Esse risultano ben definite in quanto la composizione di elementi di $End(V)$ è ancora un endomorfismo di V. Sia λ_x che ρ_x sono applicazioni lineari (ma non omomorfismi di algebre di Lie). Dati $y, z \in End(V)$ e lo scalare $a \in F$ abbiamo :

$$\lambda_x(ay) = x \circ ay = (x \circ ay) = (a \cdot (x \circ y)) = a\lambda_x(y) \tag{3.8}$$

$$\lambda_x(y+z) = x \circ (y+z) = x \circ y + x \circ z = \lambda_x(y) + \lambda_x(z) \tag{3.9}$$

In maniera analoga si dimostra la linearità di ρ_x.
Per ipotesi x è un endomorfismo nilpotente quindi possiamo supporre che k sia il suo indice di nilpotenza. Allora :

$$\lambda_x^k(y) = x^k \circ y = 0 \circ y = 0 \qquad \forall y \in End(V) \tag{3.10}$$

$$\rho_x^k(y) = y \circ x^k = y \circ 0 = 0 \qquad \forall y \in End(V) \tag{3.11}$$

ossia anche le traslazioni a destra e a sinistra sono nilpotenti. Dato che esse commutano :

$$\lambda_x(\rho_x(y)) = x \circ (y \circ x) \qquad ; \qquad \rho_x(\lambda_x(y)) = (x \circ y) \circ x \qquad \forall y \in End(V) \tag{3.12}$$

anche una loro combinazione lineare è nilpotente.
Ne consegue che $\lambda_x - \rho_x = ad\,x$ è nilpotente. □

Teorema 3.2.2. *Sia L una sottoalgebra di Lie di $End(V)$, con V spazio vettoriale di dimensione finita. Se gli endomorfismi di L sono nilpotenti e $V \neq 0$, esiste un vettore non nullo $v \in V$ che viene mandato in 0 da ogni endomorfismo di L.*

Teorema (di Engel) 3.2.3. *Se tutti gli elementi di un'algebra di Lie L sono ad-nilpotenti allora L è nilpotente.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione di L.
Se $dim(L) = 0$, allora $ad(L)$ contiene solo l'endomorfismo nullo e quindi è banale osservare che gli elementi di L sono ad-nilpotenti. In questo caso L è ovviamente nilpotente.
Supponiamo ora che L abbia dimensione k. Per ipotesi, $ad(L)$ è una sottoalgebra di $End(L)$ costituita da endomorfismi nilpotenti. Per il teorema precedente esiste un vettore non nullo $x \in L$ che viene mandato in 0 da tutti gli elementi di $ad(L)$, ossia $[L, x] = 0$ e dunque $x \in Z(L)$. Dato che $Z(L)$ non

ha dimensione nulla, l'algebra di Lie quoziente $L/Z(L)$ ha dimensione minore di L. Essa è costituita da elementi ad-nilpotenti. Infatti, dato un elemento $x \in L$, sappiamo che $ad\,x$ è nilpotente con indice di nilpotenza n. Allora :

$$(ad\,[x])^n([y]) = [(ad\,x)^n(y)] = [0] \qquad \forall y \in L \tag{3.13}$$

in quanto

$$ad\,[x]([y]) = [[x],[y]] = [[x,y]] \tag{3.14}$$

ed inoltre

$$ad\,[x]([ad\,x)^{n-1}(y)]) = [[x],[(ad\,x)^{n-1}(y)]] = [[x,(ad\,x)^{n-1}(y)]] = [(ad\,x)^n(y)] \tag{3.15}$$

Allora, per l'ipotesi induttiva, $L/Z(L)$ è nilpotente e quindi, per la Proposizione 2.3.4, anche L è nilpotente. □

Concludiamo il paragrafo con due risultati che si ricollegano alla decompozione di Jordan-Chevalley vista nel primo capitolo. Essa può essere applicata per la premessa sul campo F con cui abbiamo inziato questo capitolo.

Proposizione 3.2.4. *Sia V un F-spazio vettoriale di dimensione finita, x un endomorfismo di V e $x = x_s + x_n$ la sua decomposizione di Jordan. Allora $ad\,x = ad\,x_s + ad\,x_n$ è la decomposizione di Jordan di $ad\,x$*

Dimostrazione. Per il Lemma 3.2.1, dato che x_n è nilpotente, anche $ad\,x_n$ lo è.
Vogliamo mostrare che $ad\,x_s$ è invece diagonalizzabile (o, equivalentemente, semisemplice).
Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di autovettori di x_s (la matrice di x_s associata a B è diagonale).
In $End(V)$ consideriamo la base D associata a B :

$$D = \{e_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\} \tag{3.16}$$

con $e_{ij}(v_k) = \delta_{jk}v_i$. Se denotiamo con a_k l'autovalore relativo all'autovettore v_k abbiamo :

$$x_s = \sum_{k=1}^{n} a_k e_{kk} \tag{3.17}$$

in quanto un endomorfismo è completamente determinato dai valori che assume su una base.
Pertanto :

$$ad\,x_s(e_{ij}) = [x_s, e_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} a_k e_{kk}, e_{ij}] = \sum_{k=1}^{n} a_k[e_{kk}, e_{ij}] = \tag{3.18}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(e_{kk} \circ e_{ij} - e_{ij} \circ e_{kk}) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\delta_{ki}e_{kj} - \delta_{jk}e_{ik} = a_i e_{ij} - a_j e_{ij} = (a_i - a_j)e_{ij}$$

ossia D è una base di autovettori di $ad\,x_s$ che quindi risulta diagonaliazzabile. Rimane da dimostrare che $ad\,x = ad\,x_s + ad\,x_n$ e che $ad\,x_s$ e $ad\,x_n$ commutano. Per ogni $y \in End(V)$ abbiamo :

$$ad\,x(y) = [x, y] = [x_s + x_n, y] = [x_s, y] + [x_n, y] = ad\,x_s(y) + ad\,x_n(y) = (ad\,x_s + ad\,x_n)(y) \quad (3.19)$$

ed inoltre

$$[ad\,x_s, ad\,x_n] = ad\,[x_s, x_n] = ad\,0 = 0 \quad (3.20)$$

in quanto x_s e $\mathrm{d}x_n$ commutano. Per l'unicità della parte semisemplice e della parte nilpotente, segue che $ad\,x = ad\,x_s + ad\,x_n$ è la decomposizione di Jordan di $ad\,x$. □

Proposizione 3.2.5. *Sia U una F-algebra di dimensione finita (in qualità di spazio vettoriale). Allora $Der(U)$ contiene la parte semisemplice e nilpotente di ogni suo elemento.*

3.3 Il criterio di Cartan

In questo paragrafo introduciamo un'utile condizione sufficiente, detta "Criterio di Cartan", per la risolubilitá di un'algebra di Lie.

Dato che nelle prossime pagine ci serviremo di un importante concetto di Algebra, quello di "primo campo" di un campo F avente caratteristica nulla, risulta opportuno richiamarne la sua costruzione.

Ogni sottocampo di F contiene 0 e 1, gli elementi neutri rispetto alla somma ed al prodotto, in quanto i sottocampi devono essere sottogruppi additivi e, privati dello zero, dei sottogruppi moltiplicativi. Il piú piccolo sottocampo di F prende il nome di primo campo : esso é il sottocampo generato da 0 ed 1 e lo denotiamo col simbolo Q.

I suoi elementi sono tutti e soli quelli della forma m/n, dove con m indichiamo la somma di m addendi, tutti uguali all'elemnto neutro moltiplicativo 1.

Il primo campo Q é isomorfo al campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$. Infatti le funzioni :

$$\begin{array}{ccc} Q & \to & \mathbb{Q} \\ m/n & \mapsto & m/n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \to & Q \\ m/n & \mapsto & m/n \end{array}$$

sono una l'inversa dell'altra. Entrambe conservano la somma e il prodotto. Per mostrarlo consideriamo la prima funzione, essendo analogo il ragionamento sulla seconda.

L'elemento neutro del prodotto 1_Q viene mandato, per costruzione, nell'elemento $1_{\mathbb{Q}}$. Consideriamo poi la somma $m/n + m'/n'$ di due generici elementi del dominio. Per la distributivitá della somma rispetto al prodotto abbiamo :

$$\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'} \in Q \quad \Rightarrow \quad (mn' + m'n)(nn')^{-1} = (m)(n^-1) + (m')(n')^{-1} = \frac{m}{n} + \frac{m'}{n'} \quad (3.21)$$

dunque $m/n + m'/n'$ coincide col razionale $(mn' + m'n)(nn')^{-1}$ il quale, anche in $\mathbb{Q}$, corrisponde a $\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}$, ossia la somma delle immagini. Lo stesso vale per il prodotto di elementi di Q.

Lemma 3.3.1. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n finita e A, B due sottospazi vettoriali di $gl(V)$ tali che $A \subseteq B$. Sia M l'insieme cosí definito :*

$$M = \{x \in gl(V) \mid [x, B] \subset A\} \tag{3.22}$$

Se x é un endomorfismo di M tale che $tr(x \circ y) = 0$ per ogni $y \in M$, allora x é un endomorfismo nilpotente.

Dimostrazione. Consideriamo l'endomorfismo $x \in M$ dell'enunciato.
Ne prendiamo la decomposizione di Jordan :

$$x = s + n \tag{3.23}$$

e fissiamo una base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ di V rispetto alla quale s é rappresentata da una matrice diagonale, ossia B é una base di autovettori di s.
Sia F il campo su cui V é definito e Q il primo campo di F.
Il campo F é allora uno spazio vettoriale su Q (il fatto che F sia un gruppo rispetto alla somma non subisce variazioni, le proprietá del prodotto per scalare sono banalmente verificate). In esso consideriamo il sottospazio vettoriale E generato dagli autovalori $a_1, ..., a_n$ di V (non é detto siano tutti distinti).
Per dimostrare che x é nilpotente é sufficiente mostrare che la parte semisemplice s della sua decomposizione di Jordan é l'endomorfismo nullo. Ma $s = 0$ se e solo se tutti i suoi autovalori sono nulli. Infatti se $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ é un generico elemento di V allora abbiamo :

$$s(v) = \alpha_1 s(v_1) + ... + \alpha_n s(v_n) = (\alpha_1 a_1)v_1 + ... + (\alpha_n a_n)v_n \tag{3.24}$$

e quindi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$ implica $s(v) = 0$; viceversa, se $s(v) = 0$, per l'indipendenza dei vettori della base, segue $\alpha_1 a_1 = \alpha_1 a_2 = ... = \alpha_n a_n = 0$ per ogni scelta di $\alpha_1, ..., \alpha_n$, dunque $a_1 = ... = a_n = 0$.
Richiedere che gli autovalori di E siano tutti nulli equivale a richiedere che E sia costituito solo dallo zero : se gli autovalori sono tutti nulli allora $E = \{0\}$ e vale anche il viceversa poiché se uno degli autovalori fosse non nullo allora E conterebbe degli elementi diversi da zero.
Dato che la dimensione di E coincide con quella del suo duale E^*, possiamo ricondurci a dimostrare che E^* ha dimensione nulla, cioé ogni applicazione lineare

$$f : E \to Q \tag{3.25}$$

é nulla.
Data la forma lineare $f \in E^*$ sia y quell'elemento di $gl(V)$ tale che $y(v_i) = f(a_i)v_i$ (stiamo costruendo

un endomorfismo di $gl(V)$ a partire dalla determinazione di come agisce su una base). Allora y, rispetto alla base B, é rappresentato dalla matrice diagonale $diag(f(a_1), ..., f(a_n))$. Denotiamo con e_{ij} gli elementi della base standard di $gl(V)$ associata alla base B di V, con $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.
Dato che y ed s sono entrambe diagonalizzate da B, si ha :

$$ad\, s(e_{ij}) = (a_i - a_j)e_{ij}$$

$$ad\, y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$$

Consideriamo ora il polinomio $r(T) \in F[T]$, privo di termine noto e tale che $r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$ per ogni coppia di i, j. L'esistenza di un tale polinomio é garantita dall'interpolazione di Lagrange. Potrebbe peró esserci qualche ambiguitá nell'assegnazione dei valori : vorremmo che se $a_i - a_j = a_k - a_l$ al polinomio sia richiesto di sostituire lo stesso valore, cioé $f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l)$. Infatti, dato che f é un'applicazione lineare, abbiamo che :

$$f(a_i - a_j) = f(a_k - a_l) \;\; \Leftrightarrow f(a_i) - f(a_j) = f(a_k) - f(a_l) \tag{3.26}$$

Se calcoliamo $r(ad\, s)$ otteniamo un endomorfismo di $gl(V)$ che coincide con $ad\, y$. Affinché i due endomorfismi siano uguali é necessario e sufficiente che agiscano allo stesso modo sui vettori di base :

$$ad\, y(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$$

$$(r(ad\, s))(e_{ij}) = (f(a_i) - f(a_j))e_{ij}$$

in quanto nella seconda relazione si é sfruttato il fatto che $(ad\, s)^k(e_{ij}) = (a_i - a_j)^k e_{ij}$, che r é privo di termine noto e quindi ogni addendo é multiplo di e_{ij} e, raccogliendo quest'ultimo, rimane
$r(a_i - a_j) = f(a_i) - f(a_j)$. La decomposizione di Jordan di $ad\, x$ é $ad\, x = ad\, s + ad\, n$ ed inoltre, per il punto b della Proposizione 1.2.6, $ad\, s$ puó essere scritto come $p(ad\, x)$, con p polinomio di $F[T]$ e privo di termine noto.
Per ipotesi abbiamo $[x, B] \subset A$, dunque $ad\, x$ manda B in A. Di conseguenza $ad\, y$ manda B in A, ossia $y \in M$. Abbiamo infatti detto che $ad\, y = r(p(ad\, x))$ e quindi, dato $b \in B$ abbiamo che $(ad\, x)^k(b) = (ad\, x)^{k-}((ad\, x)(b)$. Ma $ad\, x(b)$ appartiene ad $A \subseteq B$, perció, iterando il ragionamento concludiamo che $(ad\, x)((ad\, x)^{k-1}(b)$ appartiene ad A. Dunque $ad\, y(b)$ é una combinazione lineare a coefficienti in F di elementi di A, quindi ancora un elemento di A.
Allora, sempre per ipotesi, abbiamo $tr(x \circ y) = 0$. Ma rispetto alla base B, x e y hanno matrici associate:

$$x = diag(a_1, ..., a_n)$$

$$y = diag(f(a_1), ..., f(a_n))$$

per cui la traccia di $x \circ y$ é la traccia del prodotto di queste due matrici :

$$xy = diag(a_1 f(a_1), ..., a_n f(a_n))$$

$$tr(x \circ y) = tr(xy) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)a_i$$

Il termine a destra dell'ultima relazione é una combinazione lineare, con coefficienti in Q, degli autovalori : esso é un elemento di E. Applicandogli f abbiamo :

$$f(\sum_{i=1}^{n} f(a_i)a_i) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)f(a_i) = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)^2 = 0$$

Dato che gli $f(a_i)$ sono appartengono a Q, segue $f(a_1) = f(a_2) = ... = f(a_n) = 0$. Infatti possiamo considerare la somma di questi quadrati in $\mathbb{Q}$, che é isomorfo a Q e dunque $\sum_{i=1}^{n} f(a_i)^2 = 0$ anche in $\mathbb{Q}$. Ragionando sui numeri reali é banale dedurre che gli $f(a_i) \in \mathbb{Q}$ sono nulli e dunque otteniamo la relazione detta anche per gli elementi di Q (sfruttiamo il fatto che nella bigezione fra $\mathbb{Q}$ e Q a 0_Q rimanga associato $0_{\mathbb{Q}}$).
Quindi f associa 0 a tutti gli elementi della base e, ovviamente, é identicamente nulla. Avendo scelto una forma lineare $f \in E^*$ arbitraria il teorema risulta dimostrato.

□

Sfruttando il Lemma appena dimostrato risulta semplice la verifica del Criterio di Cartan. Premettiamo all'enunciato di quest'ultimo due risultati di cui ci serviremo nel corso della dimostrazione. La prima osservazione che facciamo é la seguente : se L é un'algebra di Lie con $[L, L]$ nilpotente, allora L é risolubile.
Abbiamo visto che un'algebra di Lie nilpotente é anche risolubile, dunque $[L, L]$ é risolubile. Inoltre $L/[L, L]$, come giá verificato in precedenza, é abeliana. Per il punto b della proposizione relativa alle algebre di Lie risolubili abbiamo che L é risolubile.
Ricordiamo inoltre che il teorema di Engel ci dice che $[L, L]$ é nilpotente se e solo se ogni $ad_{[L,L]}x$, con $x \in [L, L]$, é un endomorfismo nilpotente.
Il secondo risultato riguarda invece gli endomorfismi e la loro traccai.
Se V é un F-spazio vettoriale di dimensione finita e f, g, h tre suoi endomorfismi abbiamo :

$$[f, g] \circ h = (f \circ g - g \circ f) \circ h = f \circ g \circ h - g \circ f \circ h \tag{3.27}$$

$$f \circ [g, h] = f \circ (g \circ h - h \circ g) = f \circ g \circ h - f \circ h \circ g \tag{3.28}$$

da cui consegue :

$$tr([f, g] \circ h) = tr(f \circ g \circ h) - tr(g \circ f \circ h) \tag{3.29}$$

$$tr(f \circ [g, h]) = tr(f \circ g \circ h) - tr((f \circ h) \circ g) = tr(f \circ g \circ h) - tr(g \circ (f \circ h)) = tr([f, g] \circ h) \tag{3.30}$$

Quindi abbiamo ottenuto $tr(f \circ [g, h]) = tr([f, g] \circ h)$

Teorema 3.3.2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita ed L una sottoalgebra di Lie di $gl(V)$. Se $tr(x \circ y) = 0$ per ogni $x \in [L, L], y \in L$ allora L é risolubile*

Dimostrazione. Per quanto osservato all'inizio del paragrafo, ci é sufficiente mostrare che $[L, L]$ é nilpotente. Ricordando che :

- se $x \in gl(V)$ é un endomorfismo nilpotente, allora anche $ad\, x$ lo é ;
- se tutti gli elementi di un'algebra di Lie sono ad-nilpotenti allora anche l'algebra di Lie in questione é nilpotente

basta dimostrare che ogni endomorfismo di $[L, L] \subset gl(V)$ é nilpotente.
Applichiamo il lemma precedente al caso seguente :

- V é lo spazio vettoriale dato ;
- $A = [L, L]$
- $B = L$ e quindi $A \subseteq B$

Allora M é l'insieme :

$$M = \{x \in gl(V) \mid [x, L] \subset [L, L]\}$$

ed é ovvio che $L \subseteq M$. Per ipotesi abbiamo $tr(x \circ y) = 0$ per ogni $x \in [L, L] = A, y \in L = B$ mentre, per poter dire che gli endomorfismi di $[L, L]$ sono nilpotenti sfruttando il lemma, avremmo bisogno che $tr(x \circ y) = 0$ per ogni $x \in [L, L] = A, y \in M$ (L é contenuto in M).
Considerando un elemento $[x, y] \in [L, L]$ e un generico $z \in M$, per quanto osservato prima del teorema, abbiamo :

$$tr([x, y] \circ z) = tr(x \circ [y, z]) = tr([y, z] \circ x) \tag{3.31}$$

e, per come abbiamo definito M, $[y, z]$, e quindi anche $[z, y]$, appartiene a $[L, L]$. Allora $tr([y, z] \circ x) = 0$ per ipotesi dunque

$$tr([x, y] \circ z) \tag{3.32}$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Corollario 3.3.3. *Sia L un'algebra di Lie tale che $tr(ad\, x \circ ad\, y) = 0$ per ogni $x \in [L, L], y \in L$. Allora L é risolubile.*

Dimostrazione. Dato che la rappresentazione aggiunta preserva il commutatore, abbiamo che $ad([L, L]) = [ad(L), ad(L)]$. Inoltre $ad(L)$ é una sottoagebra di Lie di $gl(L)$ e $tr(ad\, x \circ ad\, y) = 0$ per ogni $ad\, x \in [ad(L), ad(L)], ad\, y \in ad(L)$. Per il teorema precedente abbiamo che $ad(L)$ é risolubile.
Il nucleo della rappresentazione aggiunta é $Z(L)$, il quale é un ideale risolubile di L. Sappiamo che $L/Z(L)$ é isomorfo ad $ad(L)$ perció anche $L/Z(L)$ e L sono risolubili. □

3.4 La forma di Killing

Sia L un'algebra di Lie sul campo F. Definiamo l'applicazione :

$$\begin{array}{rccc} k: & L \times L & \rightarrow & F \\ & (x,y) & \mapsto & tr(ad\,x \circ ad\,y) \end{array}$$

Osserviamo che $ad\,x$ e $ad\,y$ sono endomorfismi di L, perció pure la loro composizione lo é ed inoltre, come giá visto, ad ogni endomorfismo risulta associata univocamente la sua traccia, la quale é uno scalare di F.
Mostriamo che k é una forma bilineare sfruttando la linearitá della traccia e della rappresentazione aggiunta, le proprietá della composizione di endomorfismi viste nel paragarafo 1.1 :

$$k(ax+by,z) = tr(ad(ax+by) \circ ad\,z) = tr((a \cdot ad\,x + b \cdot ad\,y) \circ ad\,z) = \tag{3.33}$$

$$tr(a \cdot (ad\,x \circ ad\,z) + b \cdot (ad\,y \circ ad\,z)) = a \cdot tr(ad\,x \circ ad\,z) + b \cdot tr(ad\,y \circ ad\,z) = a \cdot k(x,z) + b \cdot k(y,z)$$

$$k(x,ay+bz) = tr(ad\,x \circ ad(ay+bz)) = tr(ad\,x \circ (a \cdot ad\,y + b \cdot ad\,z)) = \tag{3.34}$$

$$tr(a \cdot (ad\,x \circ ad\,y) + b \cdot (ad\,x \circ ad\,z)) = a \cdot tr(ad\,x \circ ad\,y) + b \cdot tr(ad\,x \circ ad\,z) = a \cdot k(x,y) + b \cdot k(x,z)$$

dove x, y, z sono generici vettori di L e a, b scalari di F.
Chiamiamo questa forma bilineare forma di Killing relativa ad L. Essa risulta simmetrica :

$$k(x,y) = tr(ad\,x \circ ad\,y) = tr(ad\,y \circ ad\,x) = k(y,x) \qquad \forall x,y \in L \tag{3.35}$$

ed anche associativa, ossia :

$$k([x,y],z) = k(x,[y,z]) \qquad \forall x,y,z \in L \tag{3.36}$$

Infatti si ha $k([x,y],z) = tr(ad[x,y] \circ adz) = tr([ad\,x, ad\,y] \circ ad\,z) = tr(ad\,x \circ [ad\,y, ad\,z]) = tr(ad\,x \circ ad[y,z]) = k(x,[y,z])$, dove si é sfruttata la relazione $tr(ad\,x \circ [ad\,y, ad\,z]) = tr(ad\,x \circ ad[y,z])$ (giá incontrata nelle pagi e il fatto che la rappresentazione aggiunta ad conserva il commutatore.

Lemma 3.4.1. *Sia I un ideale dell'algebra di Lie L. Se k é la forma di Killing relativa ad L e k_I la forma di Killing relativa ad I (visto come algebra di Lie), allora $k_I = k_{|I \times I}$*

Dimostrazione. Per la dimostrazione ci serviamo di un risultato di algebra lineare. Sia V uno spazio vettoriale avente dimensione finita, W un suo sottospazio di dimensione m e codimensione n, ϕ un endomorfismo di V con immagine contenuta in W. Prendiamo una base $B = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$ di W, la completiamo con una base di V ottenendo la base $C = \{v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_m\}$. Consideriamo la matrice associata a ϕ rispetto alla base C : le sue prime n righe sono nulle in quanto l'immagine di

ϕ é contenuta in W, quindi i suoi elementi si scrivono in modo unico come combinazione lineare dei vettori di B.
L'immagine tramite ϕ di un vettore v_j $(j = 1, \ldots, n)$, scritto rispetto alla base C, é : $\phi(v_j) = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_n + c_{1j} \cdot w_1 + ... + c_{mj} \cdot w_m$ mentre l'immagine di un vettore w_i $(i = 1, \ldots, m)$, sempre in componenti rispetto alla base C, la scriviamo come : $\phi(w_i) = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_n + b_{1i} \cdot w_1 + ... + b_{mi} \cdot w_m$.
Pertanto la matrice associata a ϕ rispetto alla base C é della forma :

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ c_{11} & ... & c_{1n} & b_{11} & ... & b_{1m} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ c_{m1} & ... & c_{mn} & b_{m1} & ... & b_{mm} \end{pmatrix}$$

mentre la matrice associata a ϕ_W é :

$$\begin{pmatrix} b_{11} & ... & b_{1m} \\ ... & ... & ... \\ b_{m1} & ... & b_{mm} \end{pmatrix}$$

Dunque le due matrici hanno stessa traccia, dato che le righe che la prima ha in piú rispetto alla seconda sono tutte nulle e non danno nessun contributo per il calcolo della traccia. Quindi abbiamo $tr(\phi) = tr(\phi_{|W})$.
Applichiamo questo risultato al nostro problema.
Le applicazioni k_I e $k_{|I \times I}$ hanno lo stesso dominio. Per dimostrare che sono uguali rimane da dimostrare che agiscono allo stesso modo su ogni elemento $(x, y) \in I \times I$.
Per quanto appena dimostrato segue :

$$k_I(x, y) = tr(ad_I x \circ ad_I y) = tr((adx \circ ady)_{|I}) = tr(adx \circ ady) = k(x, y) \tag{3.37}$$

dato che I é un ideale e perció adx, ady mandano L in I, cosí come la loro composizione. □

Se L é un' algebra di Lie e k la forma di Killing relativa ad L, allora il nucleo della forma di Killing lo chiamiamo radicale e lo denotiamo con S. Come giá visto nel capitolo 1 esso é un sottospazio vettoriale di L ed inoltre é anche un suo ideale. Infatti, se z appartiene ad L e x é un elemento del radicale, per l'associativitá di k abbiamo:

$$k([z, x], y) = -k([x, z], y) = -k(x, [z, y]) = 0 \quad \forall y \in L \tag{3.38}$$

Vediamo ora un esempio di quanto introdotto prendendo $L = sl(2, F)$. Consideriamo la base standard per L, costituita dalle matrici :

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{y=}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{h=}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

in accordo con quanto giá visto nel paragrafo 1.3 ($x = e_12, y = e_21, h = e_11 - e_22$).
Se conosciamo come agisce il commutatore sugli elementi di base, allora il commutatore é completamente determinato (sfruttando la sua bilinearitá, ogni commutatore é la combinazione lineare di commutatori degli elementi di base). Abbiamo:

- $[x,y] = xy - yx = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = h$
- $[h,x] = hx - xh = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2x$
- $[h,y] = hy - yh = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2y$

Ció significa che x, y, h sono autovettori di $ad\,h$ relativamente agli autovalori 2,-2,0 che sono distinti se $char\ F \neq 2$ (altrimenti $2 = -2 = 0$ e gli autovalori sono tutti uguali).
Sia I un ideale di L, diverso dall'ideale banale 0, e sia

$$ax + by + ch \tag{3.39}$$

un suo generico vettore non nullo. Applicandogli due volte $ad\,x$ otteniamo i vettori :

- $[x, ax + bx + ch] = a[x,x] + b[x,y] + c[x,h] = bh - 2cx$

- $[x, bh - 2cx] = b[x,h] - 2c[x,x] = -2bx$

che sono vettori di I per la definizione di ideali.
Analogamente, se applichiamo due volte $ad\,y$, si ottiene :

- $[y, ax + by + ch] = a[y,x] + b[y,y] + c[y,h] = -ah + 2cy$

- $[y, -ah + 2cy] = -a[y,h] + 2c[y,y] = 2ay$

Allora, se a oppure b é non nullo, I contiene x oppure y (in quanto $char(F) \neq 2$ e quindi si ha $2 \neq 0$).
Se I contiene x, allora contiene pure h (in quanto $[y,x] = -h$) e quindi y ($[y,h]] = 2y$), cioé I contiene la base di L e dunque $I = L$.

Lo stesso vale se I contiene y, perché allora contiene anche h ($[x,y]=h$) e quindi x ($[x,h]=-2x$).
Se invece $a=b=0$, allora $ch\neq 0$. Allora $c\neq 0$ e $h\in I$, per cui I contiene x ($[x,h]=-2x$) ed y ($[y,h]=2y$). Segue $I=L$.
Possiamo concludere che L é semplice in quanto $[L,L]\neq 0$, basti prendere l'esempio

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix})$$

Calcoliamo la matrice associata alla forma di Killing di $sl(2,F)$ rispetto alla base standard.
Prima di tutto abbiamo bisogno di trovare le matrici associate ad $ad\,x, ad\,h, ad\,y$, sempre rispetto alla base standard
Partiamo da $ad\,x$ e calcoliamo $ad\,x(x), ad\,x(h), ad\,x(y)$: le loro componenti rispetto a x,h,y saranno le colonne della matrice associata ad $ad\,x$ rispetto alla base fissata. Questi commutatori li abbiamo calcolati, quindi sono noti i risultati :

$$ad\,x(x)=[x,x]=0 \quad ; \quad ad\,x(h)=[x,h]=-2x \quad ; \quad ad\,x(y)=[x,y]=h \tag{3.40}$$

Dunque la matrice cercata risulta :

$$ad\,x=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Allo stesso modo procediamo per quanto riguarda $ad\,h$:

$$ad\,h(x)=[h,x]=2x \quad ; \quad ad\,h(h)=[h,h]=0 \quad ; \quad ad\,h(y)=[h,y]=-2y \tag{3.41}$$

la cui matrice é :

$$ad\,h=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$$

Infine rimane $ad\,y$:

$$ad\,y(x)=[y,x]=-h \quad ; \quad ad\,y(h)=[y,h]=2y \quad ; \quad ad\,y(y)=[y,y]=0 \tag{3.42}$$

con matrice :

$$ad\,y=\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}$$

Per trovare la matrice associata a k ora dobbiamo calcolare :

$$k_{11}=tr(ad\,x\circ ad\,x)=tr\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=0$$

$$k_{12} = tr(ad\,x \circ ad\,h) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$k_{13} = tr(ad\,x \circ ad\,y) = tr \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

$$k_{22} = tr(ad\,h \circ ad\,h) = tr \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 8$$

$$k_{23} = tr(ad\,h \circ ad\,y) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$k_{33} = tr(ad\,y \circ ad\,y) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ricordandoci della simmetria della forma di Killing, e quindi della matrice che la rappresenta, ricaviamo che la matrice associata a k rispetto alla base standard é :

$$k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

il cui determinante é $4(-8)(4) = -128$. Quindi la forma di Killing é non degenere purché la caratteristica di F sia diversa da 2

Lemma 3.4.2. *Un'alegbra di Lie L é semisemplice se e solo se non ammette ideali abeliani non nulli*

Dimostrazione. Ricordiamo che un'algebra di Lie L si dice semisemplice se l'ideale risolubile massimale di L, che denotiamo con $rad(L)$, é nullo. Un ideale abeliano $I \subset L$ é ovviamente risolubile, dunque é contenuto in $rad(L)$ (abbiamo visto che $rad(L)$ contiene ogni ideale risolubile di L).
Dunque, se L é semisemplice non contiene ideali abeliani non nulli.
Viceversa, se L non contiene ideali abeliani non nulli e per assurdo ipotizziamo $rad(L) \neq 0$, allora $[rad(L), rad(L)] \neq 0$ perché altrimenti $rad(L)$ sarebbe abeliano e non nullo. Iterando il ragionamento si arriva all'assurdo che $rad(L)$ non é risolubile. □

Teorema 3.4.3. *Sia L un'algebra di Lie. Essa é semisemplice se e solo se la sua forma di Killing é non degenere, ossia il radicale S é nullo*

3.5 L-moduli

Consideriamo un'algebra di Lie L su un campo F.

Un F-spazio vettoriale V, dotato di un operazione della forma

$$\begin{array}{ccc} L \times V & \to & V \\ (x,v) & \mapsto & x.v \end{array}$$

si dice L-modulo se soddisfa le condizioni seguenti:

- (M1) $(ax+by).v = a(x.v) + b(y.v)$
- (M2) $x.(av+bw) = a(x.v) + b(x.w)$
- (M3) $[x,y].v = x.(y.v) - y.(x.v)$

per ogni $x, y \in L$; $v, w \in V$; $a, b \in F$.

Ad ogni L-modulo corrisponde una rappresentazione di L e viceversa.

Sia $\phi : L \to gl(V)$ una rappresentazione di L. Allora l'F-spazio vettoriale V puó essere visto come un L-modulo attraverso l'applicazione :

$$\begin{array}{ccc} L \times V & \to & V \\ (x,v) & \mapsto & (\phi(x))(v) = x.v \end{array}$$

per la quale si ha:

$$(ax+by).v = (\phi(ax+by))(v) = (a\phi(x)+b\phi(y))(v) = a(\phi(x))(v)+b(\phi(y))(v) = a(x.v)+b(y.v) \tag{3.43}$$

$$x.(av+bw) = (\phi(x))(av+bw) = a(\phi(x))(v) + b(\phi(x))(w) = a(x.v) + b(x.w) \tag{3.44}$$

$$[x,y].v = (\phi[x,y])(v) = [\phi(x),\phi(y)](v) = \phi(x)((\phi(y))(v)) - \phi(y)((\phi(x))(v)) = x.(y.v) - y.(x.v) \tag{3.45}$$

Viceversa, prendiamo un L-modulo V e mostriamo cha ad esso resta associata una raprresentazione di L. Ad ogni elemento $x \in L$, associamo l'applicazione :

$$\begin{array}{cccc} \psi(x) & V & \to & V \\ & v & \mapsto & x.v \end{array}$$

Essa é un applicazione lineare per la condizione (M2), dunque un endomorfismo di V. A partire da questa osservazione consideriamo :

$$\begin{array}{cccc} \psi : & L & \to & gl(V) \\ & x & \mapsto & \psi(x) \end{array}$$

Essa é un omomorfismo di algebre di Lie. Prima di tutto é un'applicazione lineare in quanto si ha :

$$(\psi(ax+by))(v) = (ax+by).v = a(x.v) + b(y.v)$$

$$(a\psi(x) + b\psi(y))(v) = (a\psi(x))(v) + (b\psi(y))(v) = a(x.v) + b(y.v)$$

e quindi gli endomorfismi $(\psi(ax+by))$ e $(a\psi(x)+b\psi(y))$, agendo allo stesso modo su ogni elemento di L, coincidono.

Inoltre, ragionando allo stesso modo, non é difficile mostrare che ψ conserva anche il commutatore :

$$(\psi([x,y]))(v) = [x,y].v = x.(y.v) - y.(x.v)$$

$$[\psi(x), \psi(y)](v) = (\psi(x) \circ \psi(y) - \psi(y) \circ \psi(x))(v) = x.(y.v) - y.(x.v)$$

Un L-sottomodulo di un L-modulo V é un sottospazio vettoriale di $W \subset V$ tale che $L.W \subset W$.

Un omomorfismo di due L-moduli, V e W, é un'applicazione lineare $\varphi : V \to W$ tale che $\varphi(x.v) = x.\varphi(v)$ per ogni $x \in L, v \in V$. Se φ é anche bigettiva (dunque un isomorfismo di spazi vettoriali) allora diremo che é un isomorfismo di L-moduli e che V, W determinano due rappresentazioni equivalenti di L.

Osserviamo che il nucleo dell'omomorfismo di L-moduli φ é un L-sottomodulo di V. Che esso sia un sottospazio vettoriale di V é un risultato elementare dell'algebra lineare per cui rimane da capire se $x.w \in Ker(\varphi)$ per ogni vettore x di L. Abbiamo :

$$\varphi(x.w) = x.\varphi(w) = x.0 = x.(0+0) = x.0 + x.0 = 2(x.0) \Rightarrow x.0 = 0 \tag{3.46}$$

cioé $x.w$ appartiene a $Ker(\varphi)$ come volevamo.

Un L-modulo V si dice irriducibile se esso ha solamente due L-sottomoduli : $\{0\}$ e V stesso. Ogni L-modulo ammette questi due sottomoduli in quanto sia $\{0\}$ che V sono sottospazi vettoriali di V ed inoltre $x.0 = 0\,,\ x.v \in V$ per ogni $x \in L, v \in V$.

Non considereremo irriducibile un L-modulo che é uno spazio vettoriale V di dimensione zero. Questo é un L-modulo banale che ogni algebra di Lie L ammette. Infatti l'applicazione

$$\begin{array}{cccc} \psi & L & \to & gl(V) \\ & x & \mapsto & \psi(x) \end{array}$$

soddisfa le condizioni richieste :

$$(ax+by).0 = 0 = a0 + b0 = a(x.0) + b(y.0) \tag{3.47}$$

$$x.(a0+b0) = x.0 = 0 = a0 + b0 = a(x.0) + b(x.0) \tag{3.48}$$

$$[x,y].0 = 0 = x.(y.0) - y.(x.0) \tag{3.49}$$

Se V é un L-modulo di dimensione 1, esso ammette come unici sottospazi vettoriali quelli banali e quindi risulta irriducibile.
Un L-modulo V si dice completamente riducibile se esso é la somma diretta di L-sottomoduli irriducibili.
Abbiamo visto che ad ogni rappresentazione di L é possibile associare un L-modulo e dunque ha senso parlare, in modo naturale, di rappresentazioni irriducibili o completamente riducibili.

Proposizione 3.5.1. *Sia L un'algebra di Lie su un campo F e V un L-modulo. Esso é completamente riducibile se e solo se ogni L-sottomodulo $W \subset V$ possiede un complemento, cioé un altro L-sottomodulo W' tale che V=$W \oplus W'$.*

Lemma 3.5.2. *Sia $\phi : L \to gl(V)$ una rappresentazione dell'algebra di Lie semisemplice L. Allora $\phi(L) \subset sl(V)$ e l agisce in modo banale su ogni L-modulo di dimensione 1*

Teorema 3.5.3. *Sia $\phi : L \to gl(V)$ una rappresentazione, di dimensione finita, dell'algebra di Lie semisemplice L. Allora ϕ é completamente riducibile.*

Teorema 3.5.4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita ed l un'algebra di Lie semiseplice contenuta in $gl(V)$. Allora L contiene la parte semisemplice e nilpotente di ogni suo elemento. In particolare, la decomposione di Jordan astratta coincide con quella usuale per tutti gli elementi di L.*

Corollario 3.5.5. *Sia L un'algebra di Lie semisemplice e $\phi : L \to gl(V)$ una sua rappresentazione di dimensione finita. Se $x = s + n$ é la decomposizione di Jordan astratta di un vettore x di L, allora $\phi(x) = \phi(s) + \phi(n)$ é la decomposizione di Jordan usuale di $\phi(x)$.*

3.6 Sottoalgebre Toroidali e decomposizione di Cartan

Da questo momento in poi con L denotiamo un algebra di Lie su un campo F, supponendo che L sia semisemplice ma non nulla e che F sia algebricamente chiuso.
Cominciamo con l'osservare che se L consistesse unicamente di elementi nilpotenti (ossia ad-nilpotenti) allora, per il teorema di Engel, L dovrebbe essere nilpotente e dunque risolubile. Abbiamo peró giá visto che un'algebra di Lie risolubile non puó essere anche semisemplice, a meno che essa non sia nulla. Allora esistono in L degli elementi x la cui parte semisemplice x_s, della decomposizione di Jordan astratta, é non nulla. Dunque gli x_s sono elementi di L ad-semisemplici e non nulli.
Ció mostra che L possiede delle sottoalgebre non nulle costituite da elementi semisemplici: le sottoalgebre unidimensionali generate dagli elementi semisemplici detti sopra. Chiamiamo toroidali le sottoalgebre non nulle di L i cui elementi sono tutti ad-semisemplici.

Lemma 3.6.1. *Una sottoalgebra toroidale di L é abeliana*

Dimostrazione. Sia T una sottoalgebra toroidale di L. Per mostrare che T é abeliana basta verificare che $ad_T\, x = 0$ per ogni $x \in T$ (in questo modo $[x, y] = 0$ per ogni coppia x, y di vettori di T). Fissiamo allora un elemento x di T : per ipotesi $ad\, x$ é diagonalizzabile (o, equivalentemente, semisemplice). Dato che T é una sottoalgebra di L si ha $ad\, x(T) \subset T$ e quindi anche la restrizione di $ad\, x$ a T, che denotiamo con il simbolo $ad_T\, x$, é diagonalizzabile. Possiamo allora rappresentare $ad_T\, x$ (rispetto ad una base di T costituita da autovettori di $ad_T\, x$) mediante una matrice diagonale con tutti gli autovalori nella diagonale principale. Dunque, se dimostriamo che $ad_T\, x$ non ha autovalori non nulli, potremmo dedurre $ad_T\, x = 0$ (poiché se un endomorfismo é rappresentato dalla matrice nulla esso é l'endomorfismo nullo).
Supponiamo, per assurdo, che $ad_T\, x$ ammetta un autovalore non nullo, ossia esista un vettore non nullo $y \in T$ tale che

$$ad_T\, x(y) = [x, y] = ay \qquad ; \qquad ad_T\, y(x) = [y, x] = -[x, y] = -ay \tag{3.50}$$

con $a \neq 0$. Come $ad_T\, x$, anche $ad_T\, y$ é diagonalizzabile ed ha y come autovettore. Allora possiamo completare y con una base di T costituita da autovettori di $ad_T\, y$, ottenendo $\{y, t_1, \ldots, t_{m-1}\}$. Scrivendo x rispetto a tale base

$$x = cy + \mu_1 t_1 + \cdots + \mu_{m-1} t_{m-1} \tag{3.51}$$

deduciamo che :

$$ad_T\, y(x) = -ay = \mu_1 ad_T\, y(t_1) + \cdots + \mu_{m-1} ad_T\, y(t_{m-1}) \tag{3.52}$$

Dato che $-ay$ é un vettore non nullo non tutti i vettori dell'ultima combinazione lineare scritta possono essere uguali a 0. Dunque abbiamo ottenuto che un vettore di base si scrive come combinazione lineare dei restanti vettori di base.
Siamo giunti ad un assurdo che prova che $ad_T\, x$ ammette solo autovalori nulli.

□

Una sottoalgebra toroidale si dice massimale se non é propriamente contenuta in nessun'altra sottoalgebra toroidale. Come visto sopra, ogni algebra di Lie semisemplice ammette sottoalgebre toroidali e, dato che stiamo considerando algebre di Lie di dimensione finita, esiste sempre almeno una sottoalgebra toroidale massimale.

Fissiamo una sottoalgebra toroidale massimale $H \subset L$.
Dato che H é abeliana, allora $ad_L\, H$ é una famiglia di endomorfismi di L, diagonalizzabili e commutanti. Che siano diagonalizzabili segue dalla definizione di sottoalgebra toroidale mentre che, per ogni coppia di elementi x, y di H, $ad\, x$ e $ad\, y$ commutano segue dall'abelianitá di H :

$$ad([x, y]) = ad(0) = 0 = [ad\, x, ad\, y] \tag{3.53}$$

Due endomorfismi diagonalizzabili che commutano possono essere diagonalizzati simultaneamente. Dato che tutti gli endomorfismi di $ad_L H$ commutano e sono diagonazziabili, essi possono essere diagonalizzati simultaneamente.
Al variare di α in H^* (duale di H) consideriamo i sottoinsiemi :

$$L_\alpha = \{x \in L \mid [h,x] = \alpha(h)x \qquad \forall h \in H\} \tag{3.54}$$

Essi sono sottospazi vettoriali di L. Prendendo due vettori $x, y \in L_\alpha$ e uno scalare $a \in F$ otteniamo :

- $[h, ax] = a[h,x] = a(\alpha(h)x) = \alpha(h)(ax) \qquad \forall h \in H \qquad \Rightarrow \qquad ax \in L_\alpha$
- $[h, x+y] = [h,x] + [h,y] = \alpha(h)x + \alpha(h)y = \alpha(h)(x+y) \qquad \forall h \in H \qquad \Rightarrow \qquad x+y \in L_\alpha$

Inoltre, se α e β sono due forme lineari differenti, ossia $\alpha, \beta \in H^*$ e $\alpha \neq \beta$, l'intersezione di L_α e L_β é costituita dal solo vettore nullo. Supponiamo che x sia un elemento appartenente all'intersezione, allora :

$$[h,x] = \alpha(h)x = \beta(h)x \qquad \forall h \in H \qquad \Rightarrow \tag{3.55}$$

$$\alpha(h)x - \beta(h)x = 0 \qquad \forall h \in H \qquad \Rightarrow \qquad (\alpha(h) - \beta(h))x = 0 \qquad \forall h \in H$$

Ne consegue $x = 0$ perché, se cosí non fosse, si dovrebbe avere $\alpha(h) - \beta(h) = 0$ per ogni $h \in H$, e quindi $\alpha = \beta$ contro l'ipotesi fatta.
La somma di un numero finito di questi sottospazi é dunque una somma diretta. Di conseguenza che il numero degli L_α non nulli é finito, dato che L ha dimensione finita (se i sottospazi L_α non nulli fossero infiniti potremmo sommarli fino a superare la dimensione di L).
Supponiamo che la dimensione di L sia n. Dato che gli endomorfismi di $ad_L H$ sono tutti simultaneamente digonalizzabili, esiste almeno una base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ di L i cui vettori sono autovettori per ogni endomorfismo di $ad_L H$. Prendiamo un vettore di base e_i e denotiamo con $\gamma(h)$ il suo autovalore rispetto all'endomorfismo $ad_L h$. Al variare di h in H otteniamo un'applicazione γ da H in F che é un'applicazione lineare :

$$[h+k, e_i] = [h,e_i] + [k,e_i] = \gamma(h)e_i + \gamma(k)e_i = (\gamma(h)+\gamma(k))e_i \qquad \Rightarrow \qquad \gamma(h+k) = \gamma(h)+\gamma(k) \qquad \forall h,k \in H$$

$$[ah, e_i] = a[h,e_i] = (a\gamma(h))e_i \qquad \Rightarrow \qquad \gamma(ah) = a\gamma(h) \qquad \forall h \in H, a \in F$$

Dunque ogni e_i, con $i \in \{1, \ldots, n\}$, appartiene ad un L_α : la somma diretta dei sottospazi L_α non nulli coincide con L (per quanto detto sui vettori e_i la somma diretta ha dimensione maggiore o uguale ad n, ma non puó essere maggiore di n).
Se α é la forma lineare nulla abbiamo:

$$L_\alpha = L_0 = \{x \in L \mid [h,x] = \alpha(h)x = 0 \quad \forall h \in H\} = C_L H \tag{3.56}$$

cioé L_0 é il centralizzatore di H in L. Essendo H abeliana, ogni suo elemento é contenuto in L_0. Dunque L_0 non ha dimensione 0 in quanto $H \neq 0$.
Denotiamo con Φ l'insieme delle forme lineari non nulle $\alpha \in H^*$ per le quali L_α ha dimensione maggiore di 0 e chiamiamo radici di L relative ad H i suoi elementi.
La decomposizione di L :

$$L = C_L(H) \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha \tag{3.57}$$

la chiamano decomposizione di Cartan o decomposizione dello spazio delle radici.

Proposizione 3.6.2. *Supponiamo che $\alpha, \beta \in H^*$. Allora :*

- *(i) $[L_\alpha, L_\beta] \subseteq L_{\alpha+\beta}$;*
- *(ii) se $\alpha + \beta \neq 0$ allora $k(L_\alpha, L_\beta) = 0$;*
- *(iii) la restrizione di k ad L_0 é non degenere.*

Dimostrazione. (i) Sia x un elemento di L_α, y uno di L_β e h un generico vettore di H. Allora dall'identitá di Jacobi segue :

$$[h, [x, y]] = -[x, [y, h]] - [y, [h, x]] = [[h, x], y] + [x, [h, y]] = [\alpha(h)x, y] + [x, \beta(h)y] = \tag{3.58}$$

$$\alpha(h)[x, y] + \beta(h)[x, y] = (\alpha + \beta)(h)([x, y]) \qquad \forall h \in H$$

per cui $[x, y]$ appartiene a $L_{\alpha+\beta}$.
(ii) Dato che $\alpha + \beta \neq 0$, esiste almeno un elemento $h \in H$ tale che $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$. Dati i vettori $x \in L_\alpha, y \in L_\beta$, dall'associativitá della forma di Killing segue :

$$\alpha(h)\, k(x, y) = k([h, x], y) = -k([x, h], y) = -k(x, [h, y]) = -\beta(h)\, k(x, y) \tag{3.59}$$

Quindi abbiamo :

$$\alpha(h)k(x, y) = -\beta(h)k(x, y) \qquad \Rightarrow \qquad (\alpha(h) + \beta(h))k(x, y) = 0 \tag{3.60}$$

Per ipotesi si ha $(\alpha + \beta)(h) \neq 0$, e quindi, dato che un campo é un dominio di integritá, dobbiamo avere $k(x, y) = 0 \;\; \forall x \in L_\alpha, y \in L_\beta$ in quanto x e y li avevamo scelti in modo arbitrario.
(iii) Supponiamo che $z \in L_0$ sia ortogonale a L_0, ossia $k(z, L_0) = 0$. Per il punto precedente, sappiamo che L_0 é ortogonale ad ogni L_α, per ogni $\alpha \neq 0$. Se $x \in L$, per la decomposzione di Cartan possiamo scrivere x come :

$$x = x_0 + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha \tag{3.61}$$

con $x_0 \in L_0$ e $x_\alpha \in l_\alpha$, per $\alpha \neq 0$. Per la linearitá della forma di Killing abbiamo $k(x, z) = 0$ per ogni vettore $x \in L$. Ma L é semisemplice e quindi, dal Teorema 3.4.3, segue che la sua forma di Killing K é non degenere. Dato che z appartiene al radicale S di k, abbiamo $z = 0$ come richiesto. □

Proposizione 3.6.3. *Sia H una sottoalgebra toroidale massimale dell'algebra di Lie semisemplice L. Allora $H = C_L(H)$.*

Dimostrazione. Procediamo per passi ponendo, come notazione, $C = C_L(H)$.
(1) Dire che x appartiene a $C_L(H)$ equivale a dire che $ad\,x$ manda H in 0. Applichiamo il punto (iii) della Proposizione 1.2.6 ponendo $B = H$ e $A = 0$. Allora $(ad\,x)_s$ e $(ad\,x)_n$ mandano H in 0.
Ne segue che $x = x_n + x_s$ con :

$$(ad\,x)_s = ad\,x_s \qquad ; \qquad (ad\,x)_n = ad\,x_n \tag{3.62}$$

e sia x_n che x_S appartengono a C_LH.
Perció C contiene la parte semisemplice e la parte nilpotente di ogni suo elemento.
(2) Procediamo mostrando che tutti gli elementi semisemplici di C stanno in H. Se $x \in C$ é semisemplice allora $H + Fx$ é una sottoalgebra toroidale di L. La prima cosa che osserviamo é che H ed Fx sono entrambi sottospazi vettoriali di L : la loro somma, come sappiamo dall'algebra lineare, é ancora un sottospazio vettoriale di L. Il commutatore di due generici elementi di $H + Fx$, $h_1 + a_1x$ e $h_2 + a_2x$, ricordando l'abenialitá di H, é :

$$[h_1 + a_1x, h_2 + a_2x] = [h_1, h_2] + a_2[h_1, x] + a_1[x, h_2] + (a_1a_2)[x, x] = 0 \tag{3.63}$$

Quindi $H + Fx$ é una sottoalgebra abeliana di L. Ci rimane da verificare, affinché sia toroidale, che i suoi elementi sono semisemplici :

$$h + a_x \in H + Fx \qquad \Rightarrow \qquad ad\,(h + ax) = ad\,h + a\,ad\,x \tag{3.64}$$

Ma $ad\,h$ e $a\,ad\,x$ sono entrambi diagonalizzabili e commutano :

$$ad\,[h, ax] = 0 = [ad\,h, ad\,(ax)] = 0 \tag{3.65}$$

e quindi anche la loro somma e diagonalizzabile.
Ovviamente $H \subseteq H + Fx$ e, per la massimalitá di H, si ha necessariamente $H = H + Fx$. Dunque $x \in H$.
(3) La restrizione ad H della forma di Killing k relativa ad L é non degenere (cioé non esistono elementi non nulli $h \in H$ tali che $k(h, H) = 0$).
Sia h un elemento di H tale che $k(h, H) = 0$. Vogliamo mostrare che $h = 0$. Prendiamo un elemento $x \in C$ nilpotente (se non ne esistessero avremmo $C \subseteq H$ per il punto 2, $H \subseteq C$ e dunque $H = C$ con il teorema che sarebbe dimostrato). Per ogni $y \in H$, $ad\,x$ e $ad\,y$ commutano, dato che $ad\,[x, y] = [ad\,x, ad\,x] = 0$. Per l'ultimo lemma dimostrato si ha che $ad\,x \circ ad\,y$ é nilpotente.
Dunque $tr(ad\,x \circ ad\,y) = 0 = k(x, y)$, e per l'arbitrarietá di $y \in H$ si ha $k(x, H) = 0$.
Se x é un generico elemento di C, abbiamo $x = x_s + x_n$ con x_s e x_n appartenenti a C per il passo 1,

mentre il passo 2 ci dice che x_s appartiene ad H. Dunque $k(h,x) = k(h, x_s + x_n) = k(h, x_s) + k(h, x_n) = 0 + 0 = 0$. Ne consegue $k(h, C) = 0$. Ma k ristretta a C é non degenere e quindi, essendo h un elemento di C, si ottiene $h = 0$.
(4) In questo passo verificheremo che C é nilpotente.
Se $x \in C$ é semisemplice, per il passo 2 sappiamo che esso é contenuto in H ed inoltre :

$$ad_C\, x = 0 \tag{3.66}$$

dunque x é nilpotente. Viceversa, se il vettore $x \in C$ é nilpotente allora $ad_L\, x$ é nilpotente e dunque pure $ad_C\, x$ lo é. Infatti $ad_C\, x$ é la restrizione a C di $ad_L\, x$ il quale manda C in se (dato che C é una sottoalgebra di L) e quindi :

$$(ad_L\, x)^k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (ad_C\, x)^k = (ad_L\, x_{|C})^k = 0 \tag{3.67}$$

Sia poi x un arbitrario vettore di C, allora la sua decomposizione di Jordan astratta é $x = x_s + x_n$. Per il passo 1 sia x_s che x_n appartengono a C e dunque :

$$ad_C\, x = ad_C\, x_s + ad_C\, x_n \qquad ; \qquad [ad_C\, x_s, ad_C\, x_n] = ad_C\, [x_s, x_n] = 0 \tag{3.68}$$

in quanto $[x_s, x_c] = 0$ poiché x_s sta in H.
La somma di endomorfismi nilpotenti che commutano é ancora nilpotente. Per il teorema di Engel, C é nilpotente.
Precisiamo che gli elementi di C sono ad_C-nilpotenti, non é detto siano ad_L-nilpotenti.
(5) Mostriamo che $H \cap [C, C] = \{0\}$. Sappiamo che $[H, C] = 0$ ed inoltre, per l'associtivitá della forma di Killing k si ha :

$$k(H, [C, C]) = k([H, C], C) = 0 \tag{3.69}$$

Allora, se $h \in H \cup [C, C]$, dall'ultima relazione segue $k(H, h) = 0$. Per il passo 3 deduciamo $h = 0$.
(6) Verifichiamo che C é abeliana.
Supponiamo per assurdo che C non sia abeliana, dunque $[C, C] \neq 0$. Nel punto 4 abbiamo visto che C é nilpotente e quindi, applicando il Lemma 4.5.4 si ha $Z(C) \cap [C, C] \neq 0$. Sia z un elemento non nullo dell'intersezione : esso non puó essere semisemplice altrimenti apparterrebbe ad H (passo 2) mentre per il passo precedente sappiamo $H \cap [C, C] = \{0\}$. Allora la parte nilpotente di z é non nulla, appartiene a C e quindi a $Z(C)$. Se x é un generico elemento di C si ha $[x, n] = 0$, perció $ad([x, n]) = [ad\, x, ad\, n] = 0$. Dunque $ad\, x$ e $ad\, n$ commutano : dato che $ad\, n$ é nilpotente anche $ad\, x \circ ad\, n$ lo é. Quindi $tr(ad\, x \circ ad\, n) = 0 = k(x, n)$. Per l'arbitrarietá di x segue $k(n, C) = 0$, che contraddice la Proposizione 3.6.2.
(7) Concludiamo supponendo per assurdo che C sia diverso da H, e quindi C non sia contenuto in H (in quanto $H \subseteq C$). Questo implica, per il passo 2, che non tutti gli elementi di C possono essere

semisemplici. Dunque esiste almeno un elemento $x \in C$ tale che la sua parte nilpotente n é non nulla. Dato che C é abeliano, alora, dato un generico vettore $y \in C$ si ha :

$$[y, n] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad ad\,[y, n] = 0 = [ad\,y, ad\,n] \tag{3.70}$$

Quindi $ad\,n$ é nilpotente e commuta con $ad\,n$: $ad\,n \circ ad\,n$ é ancora nilpotente. Ne consegue che la sua traccia é nulla e dunque $k(y, n) = 0$ per ogni $y \in C$. Ma ció contraddice il punto (iii) della proposizione 3.6.2. □

Il risultato appena dimostrato ci dice che ci devono essere radici di L rispetto ad H, altrimenti avremmo $L = H$, con L abeliania e quindi risolubile.

Corollario 3.6.4. *La restrizione ad H della forma di Killing k di L é non degenere*

Dimostrazione. Lo si é dimostrato nel terzo passo della fimostrazione del teorema precedente. □

Lemma 3.6.5. *Sia α una radice di L relativa ad H. Se supponiamo che x é un vettore non nullo di L_α, allora $-\alpha$ é una radice ed esiste $y \in L_{-\alpha}$ tale che il sottospazio vettoriale di L generato da $\{x, y, [x, y]\}$ é una sottoalgebra di L isomorfa ad $sl(2, F)$.*

Grazie al precedente lemma, ad ogni radice α di L relativa ad H possiamo associare una sottoalgebra di L, che denotiamo col simbolo $sl(\alpha)$, isomorfa ad $sl(2, F)$. Indichiamo con $e_\alpha \in L_\alpha$, $f_\alpha \in L_{-\alpha}$, $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha]$ la base di $sl(\alpha)$.

Possiamo utilizzare la forma di Killing per definire un isomorfismo di spazi vettoriali fra H ed H^*. Consideriamo l'applicazione :

$$\begin{array}{rccc} \phi: & H & \to & H^* \\ & h & \mapsto & \phi(h) \end{array}$$

dove $\phi(h)$ va da H in F ed é tale che, ad ogni $z \in H$, associa $k(h, z)$. Che $\phi(h)$ sia un'applicazione lineare segue dalla bilinearitá della forma di Killing. Quindi ϕ risulta ben definita. Vogliamo verificare che ϕ é un isomorfismo di spazi vettoriali : dato che H e H^* hanno la stessa dimensione, ci basta mostrare che ϕ é un'applicazione lineare iniettiva. Siano h_1, h_2 due generici elementi di H e a, b due scalari di F. La forma lineare associata a $a\,h_1 + b\,h_2$ é :

$$(\phi(a\,h_1 + b\,h_2))(z) = k(a\,h_1 + b\,h_2, z) = a\,k(h_1, z) + b\,k(h_2, z) = (a\,\phi(h_1) + b\,\phi(h_2))(z) \qquad \forall z \in H$$

ossia l'immagine di $a\,h_1 + b\,h_2$ attraverso ϕ é $a\,\phi(h_1) + b\,\phi(h_2)$. Quanto visto ci dice che ϕ é un'applicazione lineare. Che essa sia iniettiva segue dal fatto che la forma di Killing ristretta ad H é non degenere. Supponiamo $\phi(h_1) = \phi(h_2)$, dunque queste due forme lineari agiscono allo stesso modo su ogni vettore $z \in H$. Pertanto :

$$k(h_1, z) = h(h_2, z) \qquad \Leftrightarrow \qquad k(h_1, z) - k(h_2, z) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad k(h_1 - h_2, z) = 0 \qquad \forall z \in H \tag{3.71}$$

e quindi, per quanto detto su k, segue $h_1 - h_2 = 0$ ossia $h_1 = h_2$.
Grazie all'isomorfismo ϕ, ad ogni radice $\alpha \in \Phi$ rimane associato un unico elemento $t_\alpha \in H$ tale che :

$$k(t_\alpha, z) = \alpha(z) \qquad \forall z \in H \tag{3.72}$$

Lemma 3.6.6. *Sia α una radice di L relativa ad H. Se $x \in L_\alpha$ e $y \in L_{-\alpha}$ allora $[x, y] = k(x, y)t_\alpha$. In particolare $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha] \in Span\{t_\alpha\}$*

Se $\alpha \in \Phi$, possiamo considerare L come un $sl(\alpha)$-modulo. Dato $a \in sl(\alpha)$ e $y \in L$ poniamo :

$$a.y = (ad\, a)(y) = [a, y] \tag{3.73}$$

Quanto definito verifica le condizioni M1 e M2 per la bilinearitá del commutatore ed inoltre, se b é un secondo elemento di $sl(\alpha)$, per l'idenitá di Jacobi abbiamo :

$$[a, b].y = [[a, b], y] = -[y, [a, b]] = [a, [b, y]] + [b, [y, a]] = [a, [b, y]] - [b, [a, y]] = a.(b.y) - b.(a.y) \tag{3.74}$$

ossia anche la condizione M3 risulta soddisfatta.
Dalla definizione di sottomodulo segue che gli $sl(\alpha)$-sottomoduli di L sono i sottospazi vettoriali M di L tali che $[s, m] \in M$ per ogni $s \in sl(\alpha)$ e $m \in M$. Ovviamente é sufficiente verificare che questo accade quando s é un elemento della base $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}$ di $sl(\alpha)$.

Da questo momento in poi supponiamo che il campo F sia il campo dei complessi $\mathbb{C}$. Questo faciliterá la trattazione, permettendoci di arrivare per via diretta a quanto prefissato, ossia associare ad un'algebra di Lie semisemplice un sistema di radici (la definizione di sistema di radici la vedremo solo nel capitolo 4). Tutti i risultati che seguono valgono per una campo F (algebricamente chiuso e con caratteristica nulla) generico, ma in questo caso avremmo bisogno di un passaggio intermedio non banale che fa uso del prodotto tensoriale (per i dettagli si veda [3], da pagina 35 a pagina 40).

Lemma 3.6.7. *Se M é un $sl(\alpha)$-sottomodulo di L, allora h_α, agendo su M, ha autovalori interi.*

Proposizione 3.6.8. *Sia α una radice di L relativa ad H. Allora L_α e $L_{-\alpha}$ hanno dimensione 1. Inoltre, gli unici multipli di α (elementi della forma $a\,\alpha$, con a scalare di $F = \mathbb{C}$) che appartengono a Φ sono $\pm\alpha$.*

Proposizione 3.6.9. *Siano α e β due radici di L relative ad H, con $\beta \neq \pm\alpha$. Allora :*

- *(i) $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$;*
- *(ii) esistono due interi non negativi, r e q, tali che $\beta + k\alpha$ appartiene a Φ se e solo se k é un intero contenuto in $[-r, q]$. Inoltre $r - q = \beta(h_\alpha)$;*
- *(iii) se $\alpha + \beta$ appartiene a Φ allora $[e_\alpha, e_\beta]$ é un multiplo non nullo di $e_{\alpha+\beta}$;*
- *(iv) $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha$ é una radice di L relativa a d H.*

Lemma 3.6.10. *Se h é un vettore non nullo di H, allora esiste una radice $\alpha \in \Phi$ tale che $\alpha(h) \neq 0$. Inoltre Φ genera H^*.*

Lemma 3.6.11. *Per ogni radice $\alpha \in \Phi$ si ha :*

- *i) $t_\alpha = \frac{h_\alpha}{k(e_\alpha, f_\alpha)}$;*
- *ii) $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{k(t_\alpha, t_\alpha)}$;*
- *iii) $k(t_\alpha, t_\alpha)k(h_\alpha, h_\alpha) = 4$.*

Corollario 3.6.12. *Se α e β sono due radici di Φ, allora $k(h_\alpha, h_\beta)$ é un intero mentre $k(t_\alpha, t_\beta)$ é un razionale.*

Mediante la forma di Killing possiamo definire una forma bilineare su $H*$, che denotiamo col simbolo $(,)$, simmetrica e non degenere. Date le forme lineari $\theta, \varphi \in H^*$ poniamo :

$$(\theta, \varphi) = k(t_\theta, t_\varphi) \tag{3.75}$$

Dall'ultimo corollario segue che se α e β sono radici di Φ abbiamo che $(\alpha, \beta) = k(t_\alpha, t_\beta)$ é un razionale. Inoltre non é difficile dimostrare che se α e β sono due radici di Φ , anche $\beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ lo é.
Nel lemma 3.6.10 abbiamo visto che Φ genera H^*, dunque H^* ammette una base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ costituita da radici.

Lemma 3.6.13. *Se β é una radice di Φ, allora essa ha componenti, rispetto alla base $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, tutte razionali.*

Grazie all'ultimo lemma possiamo considerare l'$\mathbb{R}$-sottospazio vettoriale di H, che denotiamo con E, generato da $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$: esso contiene tutte le radici di Φ.

Proposizione 3.6.14. *La forma* $(,)$ *definisce un prodotto scalare sull'* $\mathbb{R}$*-spazio vettoriale* E*.*

Concludiamo il paragrafo riassumendo i risultati ottenuti.
Una volta fissata la sottoalgebra toroidale massimale $H \subset L$, ad L rimane associato Φ. Quest'ultimo é un sottoinsieme di un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale E, il quale é dotato di un prodotto scalare. Inoltre Φ non contiene il vettore nullo ed é un sistema di generatori di E. Se α é una radice di Φ, allora gli unici multipli di Φ conenuti in Φ sono $\pm\alpha$. Se α e β sono due radici di Φ allora $2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}$ é un intero e $\alpha - 2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta$ é una radice di Φ.
Grazie a queste proprietá Φ costituisce un sistema di radici in E. Per convincerci di questo bisogna peró pazientare ancora qualche pagina.

Capitolo 4

Sistemi di Radici

4.1 Spazi euclidei e riflessioni

Definizione 4.1.1. *Uno spazio euclideo E é uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare, ossia un'applicazione bilineare*

$$\begin{array}{rccc} <,>: & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (v,w) & \mapsto & <v,w> \end{array}$$

che soddisfa le condizioni seguenti

- *S1)* $<v,v> \geq 0 \quad \forall v \in E$ *ed inoltre* $<v,v>=0 \Leftrightarrow v=0$ *(definita poisitiva)*
- *S2)* $<v,w>=<w,v> \quad \forall v,w \in E$ *(simmetrica)*
- *S3)* $<v,w> \leq <v,z>+<z,w> \quad \forall v,w,z \in E$ *(disuguaglianza triangolare)*

Definizione 4.1.2. *Sia E uno spazio euclideo di dimensione n. Una riflessione in E è un automorfismo di E che lascia fissi i punti di un iperpiano $W \subset E$ e che manda ogni vettore ortogonale a tale iperpiano nel suo opposto.*

Ricordiamo che un sottospazio vettoriale W di uno spazio vettoriale E di dimensione finita è un iperpiano se la sua codimensione è 1, ossia $dim(E) - dim(W) = 1$.
Dalla definizione segue facilmente che ogni riflessione conserva il prodotto scalare e che la sua inversa è essa stessa.
Sia σ una riflessione dello spazio euclideo E che fissa l'iperpiano W. Dall'algebra lineare sappiamo :

$$E = W \oplus W^{\perp} \tag{4.1}$$

dunque due vettori $v, w \in E$ li possiamo scrivere come

$$v = v_1 + v_2 \qquad ; \qquad w = w_1 + w_2 \tag{4.2}$$

con $v_1, w_1 \in W$ e $v_2, w_2 \in W^\perp$. Applicando la riflessione σ a v e w otteniamo :

$$\sigma(v) = \sigma(v_1 + v_2) = \sigma(v_1) + \sigma(v_2) = v_1 - v_2 \tag{4.3}$$

$$\sigma(w) = \sigma(w_1 + w_2) = \sigma(w_1) + \sigma(w_2) = w_1 - w_2 \tag{4.4}$$

Calcolando i prodotti scalari possiamo osservare che essi sono conservati da σ :

$$< v, w >=< v_1 + v_2, w_1 + w_2 > =< v_1, w_1 > + < v_1, w_2 > + < v_2, w_1 > + < v_2, w_2 >= \tag{4.5}$$

$$=< v_1, w_1 > + < v_2, w_2 >$$

$$< \sigma(v), \sigma(w) >=< v_1 - v_2, w_1 - w_2 >=< v_1, w_1 > - < v_1, w_2 > - < v_2, w_1 > + < v_2, w_2 >= \tag{4.6}$$

$$=< v_1, w_1 > + < v_2, w_2 >=< v, w >$$

Che σ abbia come inversa se stessa segue da :

$$\sigma_\alpha(\sigma_\alpha(\beta)) = \sigma_\alpha(\beta - \frac{2 < \beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha) = \beta - 2\frac{< \beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha - 2\frac{< \beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha + 4\frac{< \alpha, \beta >< \alpha, \alpha >}{< \alpha, \alpha >< \alpha, \alpha >}\alpha = \beta \tag{4.7}$$

A partire da un vettore non nullo α di uno spazio euclideo E, di dimensione finita, è possibile costruire una riflessione in E. Consideriamo l'applicazione :

$$\begin{array}{cccc} \sigma_\alpha : & E & \to & E \\ & \beta & \mapsto & \beta - \frac{2<\beta,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}\alpha \end{array}$$

Essa è un automorfismo di E. Dato che il dominio coincide con il codominio è sufficiente mostrare che l'applicazione è lineare e iniettiva.

$$\sigma_\alpha(\beta + \gamma) = \beta + \gamma - \frac{2 < \beta + \gamma, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha = \beta + \gamma - \frac{2[< \beta, \alpha > + < \gamma, \alpha >]}{< \alpha, \alpha >}\alpha = \tag{4.8}$$

$$\beta - \frac{2 < \beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha + \gamma - \frac{2 < \gamma, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha = \sigma_\alpha(\beta) + \sigma_\alpha(\gamma) \qquad \forall \beta, \gamma \in E$$

$$\sigma_\alpha(a\beta) = a\beta - \frac{2 < a\beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha = a\beta - \frac{2a < \beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha = a(\beta - \frac{2 < \beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha) = a(\sigma_\alpha(\beta)) \qquad \forall a \in F, \beta, \in E \tag{4.9}$$

$$\sigma_\alpha(\beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta - \frac{2 < \beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{2 < \beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha \quad \Rightarrow \tag{4.10}$$

$$< \beta, \alpha >=< \frac{2 < \beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha, \alpha > \quad \Rightarrow \quad < \beta, \alpha >= 2 < \beta, \alpha > \quad \Rightarrow \quad < \beta, \alpha >= 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_\alpha(\beta) = \beta = 0$$

L'insieme costituito da tutti i vettori di E ortogonali ad α, ossia

$$P_\alpha = \{\beta \in E \mid < \beta, \alpha >= 0\} \tag{4.11}$$

è un iperpiano di E. Infatti, se denotiamo con W il sottospazio vettoriale generato da α (quindi $dim(W) = 1$), abbiamo $P_\alpha = W^\perp$.
Ne consegue:

$$dim(E) = dim(W) + dim(W^\perp) \Rightarrow dim(E) - dim(W^\perp) = dim(W) = 1 \tag{4.12}$$

Se prendiamo un punto $\beta \in P_\alpha$ abbiamo $\sigma_\alpha(\beta) = \beta$ mentre se γ è un vettore ortogonale a P_α esso è un multiplo di α (γ è ortogonale a P_α se e solo se appartiene a W, poichè $(W^\perp)^\perp = W$) e viene mandato nel suo opposto :

$$\sigma_\alpha(a\alpha) = a(\alpha - \frac{2 < \alpha, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha) = -a\alpha \tag{4.13}$$

Abbiamo dunque dimostrato che σ è una riflessione in E che fissa l'iperpiano P_α.
Considerando un multiplo $a\,\alpha$ di α abbiamo $\sigma_\alpha = \sigma_{a\alpha}$ in quanto :

$$\sigma_{a\alpha}(\beta) = \beta - \frac{2 < \beta, a\alpha >}{< a\alpha, a\alpha >}a\alpha = \beta - \frac{2 < \beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha = \sigma_\alpha(\beta) \qquad \forall \beta \in E \tag{4.14}$$

Introduciamo infine una notazione che useremo spesso in seguito. Denotiamo con il simbolo (β, α) il numero reale $\frac{2<\beta,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}$, con α e β vettori dello spazio euclideo E e α ovviamente non nullo. Questa quantità non è altro che il doppio della proiezione ortogonale di β su α diviso il quadrato della norma di α.

4.2 Sistemi di radici

Un sottoinsieme Φ di uno spazio euclideo E si dice sistema di radici in E se esso soddisfa le seguenti condizioni :

- (R1) Φ è finito, non contiene il vettore nullo e genera E
- (R2) se α appartiene a Φ gli unici multipli di α (cioè vettori del tipo $a\alpha$, con a numero reale) contenuti in Φ sono α e $-\alpha$
- (R3) se α appartiene a Φ, la riflessione σ_α lascia Φ invariato (non puntualmente)
- (R4) se $\alpha, \beta \in \Phi$, allora (α, β) è un numero intero

A partire dalla definizione, possiamo dedurre un primo risultato.
Su uno spazio euclideo E consideriamo un sottoinsieme Φ che soddisfa le condizioni R1, R3 ed R4. Mostriamo che, dato $\alpha \in \Phi$, gli unici suoi multipli che possono essere contenuti in Φ sono $\pm\frac{1}{2}\alpha, \pm\alpha, \pm 2\alpha$.
Supponiamo che $a\,\alpha$ appartenga a Φ. Per la R4 abbiamo :

$$(a\,\alpha, \alpha) = 2\frac{< \alpha, a\,\alpha >}{< \alpha, \alpha >} = 2a = h \in \mathbb{Z} \qquad ; \qquad (\alpha, a\,\alpha) = 2\frac{< \alpha, a\,\alpha >}{< a\,\alpha, a\,\alpha >} = \frac{2}{a} = k \in \mathbb{Z} \tag{4.15}$$

con h, k non nulli in quanto il caso $a = 0$ è escluso dalla condizione R1.
Ne consegue che $a = \frac{h}{2}$ e perciò $\frac{1}{a} = \frac{2}{h}$. Dunque, per la relazione $\frac{1}{a} = \frac{k}{2}$, deduciamo $\frac{2}{h} = \frac{k}{2}$ e quindi $k = \frac{4}{h}$. Dovendo essere k intero, le uniche possibilità sono $h = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$ da cui segue $k = \{\pm 4, \pm 2, \pm 1\}$. Allora da $a = \frac{h}{2}$ ricaviamo che a appartiene all'insieme $\{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$ (lo stesso si ricava partendo da $a = \frac{2}{k}$).
Questo risultato conduce ad un'osservazione : dato un sistema di radici Φ in E e una sua radice α, dalla condizione R3 ricaviamo che $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ è ancora una radice. Con la condizione R2 imponiamo una condizione più forte : $\alpha, -\alpha$ sono radici e in più esse sono gli unici multipli di α contenuti in Φ.

Osservazione : Talvolta, in letterattura, la condizione R2 viene omessa e quello che noi abbiamo chiamato sistema di radici viene chiamato sistema di radici ridotto. Esistono esempi di sistemi di radici non ridotti che contengono α e 2α come radici, il chè comporta che R2 è indipendente da R1, R3, R4.

Se al prodotto scalare definito in E sostituiamo un suo multiplo con fattore positivo $a \in \mathbb{R}$ (si verifica banalmente che quello che si ottiene è ancora un prodotto scalare), allora un sistema di radici continua a rimanere tale. Infatti le condizioni R1 e R2 restano verificate ed inoltre, date due radici α, β abbiamo:

$$(\alpha, \beta) = 2\frac{a < \alpha, \beta >}{a < \beta, \beta >} = 2\frac{< \alpha, \beta >}{< \beta, \beta >} \in \mathbb{Z} \tag{4.16}$$

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{a < \alpha, \beta >}{a < \beta, \beta >}\alpha = \beta - 2\frac{< \alpha, \beta >}{< \beta, \beta >}\alpha \in \Phi \quad \Rightarrow \quad \sigma_\alpha(\Phi) = \Phi \tag{4.17}$$

per l'ipotesi che Φ è un sistema di radici con il "vecchio" prodotto scalare.

Preso un generico spazio vettoriale E, denotiamo con $GL(E)$ l'insieme di tutti i suoi automorfismi. Tale insieme è dotato della struttura di gruppo dalla composizione funzionale : la composizione di due elementi di $GL(E)$ è ancora un automorfismo di E, l'identità è un automorfismo di E come pure l'inversa di un elemento di $GL(E)$. Infine la composizione funzionale è sempre associativa.
Dato un sistema di radici Φ nello spazio euclideo E chiamiamo gruppo di Weyl di Φ, e lo denotiamo con W, il sottogruppo di $GL(E)$ generato dalle riflessioni σ_α, al variare di α in Φ.
Ognuna delle riflessioni σ_α dette manda Φ in Φ e quindi ogni elemento di W, essendo la composizione di un numero finito di tali riflessioni, manda Φ in Φ, cioè lo permuta. Poichè Φ genera E, un automorfismo di E risulta completamente determinato quando conosciamo come agisce su Φ e ciò consente di identificare W con un sottogruppo del gruppo delle permutazioni di Φ. Infatti possiamo creare un'applicazione fra W e il gruppo delle permutazione di Φ la quale, ad ogni elemento di W, associ la sua restrizione a Φ. Ovviamente questa applicazione è un omomorfismo di gruppi ed inoltre è iniettiva per la caratterizzazione degli automorfismi attraverso la loro azione su Φ. Dunque W può essere identificato con l'immagine di tale applicazione. Da ciò consegue che il gruppo di Weyl è costituito da

un numero fnito di elementi.

Il gruppo di Weyl è costituito da auotomorfismi di E che conservano il prodotto scalare, in quanto ogni elemento è composizione di un numero finito di riflessioni le quali, come visto, conservano il prodotto scalare. Poichè gli automorfismi di E che conservano il prodotto scalare sono un sottogruppo di $GL(E)$, che denotiamo col simbolo $O(E)$, si ha $W \subset O(E)$.

Lemma 4.2.1. *Sia E uno spazio euclideo e Φ un suo sottoinsieme finito che lo genera. Supponiamo che le tutte le riflessioni σ_α, al variare di $\alpha \in \Phi$, mandino Φ in Φ. Se σ è un automorfismo di E che manda Φ in Φ, fissa i punti di un iperpiano $P \subset E$ e manda un vettore non nullo $\alpha \in \Phi$ nel suo opposto allora $\sigma = \sigma_\alpha$ e $P = P_\alpha$. Ovviamente α non appartiene a P altrimenti avremmo $\alpha = 0$.*

Dimostrazione. Fissato il vettore non nullo α dell'enunciato, consideriamo l'automorfismo $\tau = \sigma \circ \sigma_\alpha$. L'inversa di σ_α è essa stessa per cui $\tau = \sigma \circ \sigma_\alpha = \sigma \circ \sigma_\alpha^{-1}$. Allora $\tau(\Phi) = \sigma(\sigma_\alpha(\Phi)) = \sigma(\Phi) = \Phi$ ed inoltre $\tau(\alpha) = \sigma(\sigma_\alpha(\alpha) = \sigma(-\alpha) = \alpha$. Ne consegue che τ agisce come l'identità nel sottospazio $\mathbb{R}\alpha = A \subset E$ generato da α. Inoltre, se v, w sono due vettori di E equivalenti rispetto alla relazione di equivalenza modulo A, ossia $v - w = a\alpha$ con $a \in \mathbb{R}$, abbiamo $\tau(v - w) = \tau(v) - \tau(w) = -a\alpha$. Allora consideriamo :

$$\begin{array}{cccc} \bar{\tau}: & \frac{E}{\mathbb{R}\alpha} & \rightarrow & \frac{E}{\mathbb{R}\alpha} \\ & [v] & \mapsto & [\tau(v)] \end{array}$$

Prima di tutto mostriamo che tale applicazione è ben definita :

$$v \backsim w \quad \Rightarrow \quad v - w = a\alpha \quad \Rightarrow \quad [\tau(v)] - [\tau(w)] = [\tau(v) - \tau(w)] = [\tau(v - w)] = [-a\alpha] = 0 \tag{4.18}$$

ed inoltre è l'identità. Infatti abbiamo $E = P \oplus A$ e dunque il vettore $v \in E$ lo possiamo scrivere come $v = v' + a\alpha$ con $v' \in P$ e a numero reale. Allora v e $\tau(v)$ sono equivalenti, ossia $v - \sigma(v) + 2\frac{<v,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}\alpha =$ $= v' + a\alpha - v' + a\alpha + 2\frac{<v,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}\alpha$ appartiene ad A.
L'applicazione $\bar{\tau}$ è lineare (su $\frac{E}{\mathbb{R}\alpha}$ consideriamo la struttura di spazio vettoriale quoziente) ed avente 1 come unico autovalore. Ne consegue che anche τ ha 1 come unico autovalore. Infatti se λ è un autovalore di τ allora esiste un vettore non nullo $v \in E$ (lo consideriamo non appartenente a $\mathbb{R}\alpha$) perchè in quel caso si ha banalmente $\lambda = 1$) tale che $\tau(v) = \lambda v$. Ne consegue :

$$\bar{\tau}([v]) = [\tau(v)] = [\lambda v] = \lambda[v] \tag{4.19}$$

cioè λ è anche un autovalore di $\bar{\tau}$ e quindi $\lambda = 1$.
Da questo deduciamo che il polinomio caratteristico di τ è $(T-1)^l$, con l dimensione di E. Il polinomio minimo $p_\tau(T)$ di τ divide il polinomio caratteristico di τ, ossia $(T-1)^l$.
Essendo Φ finito, non tutti i vettori $\beta, \tau(\beta), ..., \tau^k(\beta)$ possono essere distinti se $\beta \in \Phi$ e $k \geq card(\Phi)$, in

quanto tutti i vettori dell'elenco appartengono a Φ. Se supponiamo che $\tau^i(\beta) = \tau^l(\beta)$ con $l < i$ allora $\tau^{-l}(\tau^i(\beta)) = \tau^{-l}(\tau^l(\beta)$, ossia $\tau^{i-l}(\beta) = \beta$ e quindi fra le radici che si ripetono c'è anche β. Denotiamo con k_β il più piccolo indice tale che $\tau^{k_\beta}(\beta) = \beta$.
Scegliamo un k abbastanza grande tale che τ^k fissi ogni $\beta \in \Phi$ (prendiamo il minimo comune multiplo deii k_β). Dato che Φ genera E, allora $\tau^k = id_E$ e dunque il polinomio minimo di τ divide $T^k - 1$ (in quanto $\tau^k - id_E = 0$ e il polinomio minimo di τ divide tutti i polinomo $p(T) \in \mathbb{R}[T]$ tali che $p(\tau) = 0$).
Abbiamo ottenuto che p_τ divide sia $T^k - 1$ che $(T-1)^l$ e quindi $p_\tau = T - 1$, in quanto stiamo ovviamente considerando $dim(V) \neq 0$ e quindi il polinomio minimo di τ non può essere di grado 0 ($T^k - 1$ ha come 1 unica radice reale, le altre sono complesse in quanto radici dell'unità mentre p_τ ha solo 1 come radice : gli unici fattori comuni sono 1 e $T - 1$).
Per definizione di polinomio minimo abbiamo $\tau - id_E = 0$, ossia $\tau = \sigma \circ \sigma_\alpha = id_E$ e quindi $\sigma = \sigma_\alpha$ in quanto abbiamo visto che $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^{-1}$.
Ma σ_α fissa un unico iperpiano P_α per cui $P = P_\alpha$. Infatti, se σ_α fissasse un secondo iperpiano, distinto da P_α, dovrebbe esistere almeno un vettore non nullo β di tale iperpiano che non appartiene a P_α. Allora la somma dei sottospazi $P_\alpha \oplus \mathbb{R}\alpha \oplus \mathbb{R}\beta$ sarebbe diretta, eccedendo la dimensione di E. $\square$

Proposizione 4.2.2. *Sia Φ un sistema di radici nello spazio euclideo E, con gruppo di Weyl W. Se σ è un automorfismo di E che lascia invariato Φ, allora:*

- *i)* $\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)} \qquad \forall \alpha \in \Phi$
- *ii)*$(\beta, \alpha) = (\sigma(\beta), \sigma(\alpha)) \qquad \forall \alpha, \beta \in \Phi$

Dimostrazione. Dato che σ è un auotomorfismo di E, $\sigma(P_\alpha)$ è un iperpiano ($\sigma_{|P_\alpha}$ è un isomorfismo). Inoltre, se $\gamma \in \sigma(P_\alpha)$ si ha :

$$\gamma = \sigma(\beta) \quad con \quad \beta \in P_\alpha \tag{4.20}$$

$$\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1}(\gamma) = \sigma(\sigma_\alpha(\sigma^{-1}(\sigma(\beta)))) = \sigma(\sigma_\alpha(\beta)) = \sigma(\beta) \tag{4.21}$$

ossia dal fatto che σ_α fissa i punti di P_α segue che $\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1}$ fissa i punti di $\sigma(P_\alpha)$.
Inoltre $\sigma(\sigma_\alpha(\sigma^{-1}(\sigma(\alpha)))) = \sigma(\sigma_\alpha(\alpha)) = \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$.
Dunque di $\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1}$ sappiamo che :

- lascia invariato Φ in quanto ognuna delle funzioni componenti lascia Φ invariato
- fissa i punti dell'iperpiano $\sigma(P_\alpha)$
- manda la radice $\sigma(\alpha) \neq 0$ (poichè $\alpha \neq 0$ e σ è iniettiva) nel suo opposto

Per il lemma precedente segue che $\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$ e $\sigma(P_\alpha) = P_{\sigma(\alpha)}$.
Sia poi β un'altra generica radice di Φ. Allora :

$$\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma \circ \sigma_\alpha(\beta) = \sigma(\beta) - (\beta, \alpha)\sigma(\alpha) \tag{4.22}$$

$$\sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1}(\sigma(\beta)) = \sigma_{\sigma(\alpha)}(\sigma(\beta)) = \sigma(\beta) - (\sigma(\beta), \sigma(\alpha))\sigma(\alpha) \tag{4.23}$$

Dall'uguaglianza di queste due quantità si ricava :

$$\sigma(\beta) - (\beta, \alpha)\sigma(\alpha) = \sigma(\beta) - (\sigma(\beta), \sigma(\alpha))\sigma(\alpha) \quad \Rightarrow \quad ((\sigma(\beta), \sigma(\alpha)) - (\beta, \alpha))\sigma(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \tag{4.24}$$

Ma $\sigma(\alpha)$ è un vettore non nullo per cui concludiamo :

$$(\sigma(\beta), \sigma(\alpha)) - (\beta, \alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sigma(\beta), \sigma(\alpha)) = (\beta, \alpha) \tag{4.25}$$

□

Definizione 4.2.3. *Siano Φ, Φ' due sistemi di radici negli spazi euclidei E, E' rispettivamente. Diremo che (Φ, E) e (Φ', E') sono isomorfi se esiste un isomorfismo*

$$\phi : E \to E'$$

di spazio vettoriali (non necessariamente un'isometria) che manda Φ in Φ' (quindi i due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione e i due sistemi di radici devono avere la stessa cardinalità) e tale che $(\phi(\beta), \phi(\alpha)) = (\beta, \alpha)$ per ogni coppia di radici α, β di Φ.

Consideriamo due sistemi di radici Φ, Φ' (negli spazi euclidei E, E', rispettivamente) isomorfi mediante l'isomorfismo ϕ. Date le radici $\alpha, \beta \in \Phi$ abbiamo :

$$\sigma_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - (\phi(\beta), \phi(\alpha))\phi(\alpha) = \phi(\beta) - (\beta, \alpha)\phi(\alpha) = \phi(\beta - (\beta, \alpha)\phi(\alpha)) = \phi(\sigma_\alpha(\beta))$$

Inoltre esiste un isomorfismo naturale fra gruppi di Weyl :

$$\begin{array}{ccc} W & \to & W' \\ \sigma & \mapsto & \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \end{array}$$

La prima cosa da verificare è che $\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ sia effettivamente un elemento di W'.
Cominciamo con l'osservare che la composizione di isomorfismi è ancora un isomorfismo, quindi $\phi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$ è un isomorfismo da E' in E', perciò è un automorfismo di E'.
Prendiamo poi una riflessione σ_α rispetto ad una radice $\alpha \in \Phi$. La sua immagine soddisfa le condizioni seguenti :

- sia γ una radice di Φ', per la defizione di ϕ esiste $\beta \in \Phi$ tale che $\phi(\beta) = \gamma$. Allora abbiamo che : $\phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}(\gamma) = \phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}(\phi(\beta)) = \phi(\sigma_\alpha(\beta)) \in \Phi'$ in quanto $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$ per la R3 ;

- $\phi(P_\alpha)$ è un iperpiano di E' in quanto $\phi_{|P_\alpha}$ è ancora un isomorfismo di spazi vettoriali e $dim(E) = dim(E')$. Sia x un vettore di tale iperpiano, allora $x = \phi(y)$ con $y \in P_\alpha$ e quindi si ha:
$\phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}(x) = \phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}(\phi(y)) = \phi(\sigma_\alpha(y)) = \phi(y) = x$
ossia $\phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}$ lascia fissi i punti dell'iperpiano $\phi(P_\alpha)$

- il vettore $\phi(\alpha)$ è non nullo (in quanto α è una radice, quindi è non nulla, e ϕ è un isomorfismo di spazi vettoriali) e si ha $\phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}(\phi(\alpha)) = \phi(\sigma_\alpha(\alpha)) = \phi(-\alpha) = -\phi(\alpha)$, cioè viene mandato da $\phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1}$ nel suo opposto

Allora, per il lemma 4.2.1 segue $\phi \circ \sigma_\alpha \circ \phi^{-1} = \sigma_{\phi(\alpha)}$: l'immagine di una simmetria di E rispetto ad una radice di Φ è la simmetria di E' rispetto alla radice $\phi(\alpha) \in \Phi'$.
Non abbiamo ancora fatto vedere che l'applicazione considerata manda effettivamente gli elementi di W in W'. Se σ_1, σ_2 sono due elementi di W abbiamo :

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 \mapsto \phi \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \phi^{-1} = \phi \circ \sigma_1 \circ \phi^{-1} \circ \phi \circ \sigma_2 \circ \phi^{-1} = (\phi \circ \sigma_1 \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \sigma_2 \circ \phi^{-1}) \tag{4.26}$$

Un automorfismo di W è composizione di un numero finito di simmetrie di E rispetto a radici di Φ e quindi la sua immagine è composizione di un numero finito di simmetrie di E' rispetto a radici di Φ'. PA questo punto siamo in grado di affermare che l'immagine di un elemento di W è un elemento di W' e l'applicazione considerata è un omomorfismo di gruppi. Essa ammette inversa

$$\begin{array}{ccc} W' & \to & W \\ \nu & \mapsto & \phi^{-1} \circ \nu \circ \phi \end{array}$$

la quale è ben definita e un omomorfismo di gruppo per osservazioni analoghe a quelle fatte per la trasformazione "diretta" ed inoltre :

$$\sigma \in W \mapsto \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \mapsto \phi^{-1} \circ \phi \circ \sigma \circ \phi^{-1} \circ \phi = \sigma \tag{4.27}$$

$$\nu \in W' \mapsto \phi^{-1} \circ \nu\phi \mapsto \phi \circ \phi^{-1} \circ \nu \circ \phi \circ \phi^{-1} = \nu \tag{4.28}$$

e dunque l'applicazione è un isomorfismo di gruppi.

Sia Φ un sistema di radici nello spazio euclideo E. Ad ogni radice $\alpha \in \Phi$ associamo quella che chiamiamo la sua duale :

$$\alpha^v = \frac{2\alpha}{< \alpha, \alpha >} \in E \tag{4.29}$$

e consideriamo il duale di Φ :

$$\Phi^v = \{\alpha^v \mid \alpha \in \Phi\} \tag{4.30}$$

Dimostriamo che anche Φ^v è un sistema di radici in E.
La cardinalità di Φ^v è la stessa di Φ quindi anche esso è finito ; non contiene il vettore nullo in quanto tutti gli $\alpha \in \Phi$ sono non nulli e infine Φ^v genera E dato che Φ è un sistema di generatori di E e i vettori di Φ^v sono multipli non nulli di quelli di Φ. La R1 risulta soddisfatta.
Dato che $\alpha, -\alpha$ sono radici di Φ allora $\alpha^v, (-\alpha^v)$ sono radici duali e sono gli unici multipli di di α^v contenuti in Φ^v (una radice duale è un multiplo di α^v se e solo se è la duale di un multiplo di α). La

R2 è verificata.

Prendiamo due generiche radici duali α^v, β^v. Allora :

$$\sigma_{\alpha^v}(\beta^v) = \beta^v - 2\frac{<\beta^v, \alpha^v>}{<\alpha^v, \alpha^v>}\alpha^v = 2\frac{\beta}{<\beta,\beta>} - 2\frac{4<\beta,\alpha>}{<\beta,\beta><\alpha,\alpha>}\frac{<\alpha,\alpha>^2}{4<\alpha,\alpha>}2\frac{\alpha}{<\alpha,\alpha>} = \tag{4.31}$$

$$= 2\frac{\beta}{<\beta,\beta>} - 4\frac{<\beta,\alpha>}{<\beta,\beta><\alpha,\alpha>}\alpha = 2\frac{1}{<\beta,\beta>}(\beta - 2\frac{<\beta,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}\alpha)$$

Ma $\beta - 2\frac{<\beta,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}\alpha$ è una radice di Φ e $2\frac{1}{<\beta,\beta>}(\beta - 2\frac{<\beta,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}\alpha)$ la sua duale in quanto:

$$<\beta - 2\frac{<\beta,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}\alpha, \beta - 2\frac{<\beta,\alpha>}{<\alpha,\alpha>}\alpha>= \tag{4.32}$$

$$<\beta,\beta> -2\frac{<\beta,\alpha>}{<\alpha,\alpha>} <\beta,\alpha> -2\frac{<\beta,\alpha>}{<\alpha,\alpha>} <\beta,\alpha> +4\frac{<\beta,\alpha>^2}{<\alpha,\alpha>} <\alpha,\alpha>=<\beta,\beta>$$

Ne concludiamo che σ_{α^v} manda Φ^v in sè e dunque vale anche la condizione R3.

Infine, se α^v e β^v sono due generiche radici duali, allora abbiamo :

$$(\alpha^v, \beta^v) = 2\frac{<\alpha^v, \beta^v>}{<\beta^v, \beta^v>} = 2\frac{4<\alpha,\beta>}{<\alpha,\alpha><\beta,\beta>}\frac{<\beta,\beta>^2}{4<\beta,\beta>} = 2\frac{<\alpha,\beta>}{<\alpha,\alpha>} \in \mathbb{Z} \tag{4.33}$$

Quindi abbiamo mostrato che anche R4 è soddisfatta.

Inoltre esiste un isomorfismo naturale di W di W^v (gruppo di Weyl del sistema duale di radici) :

$$\begin{array}{ccc} W & \to & W^v \\ \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_k} & \mapsto & \sigma_{\alpha_1^v} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_k^v} \end{array}$$

Questa applicazione è banalmente un omomorfismo di gruppi la cui inversa è :

$$\begin{array}{ccc} W^v & \to & W \\ \sigma_{\alpha_1^v} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_k^v} & \mapsto & \sigma_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \sigma_{\alpha_k} \end{array}$$

4.3 Esempi di sistemi di radici

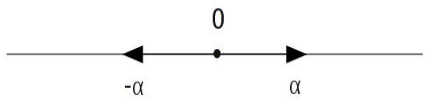
Vediamo ora alcuni esempi di sistemi di radici in spazi euclidei di dimensione 1 oppure 2.
Partiamo col considerare uno spazio euclideo E di dimensione 1. Dato un suo vettore non nullo α il sottoinsieme $\Phi = \{\alpha, -\alpha\}$ è un sistema di radici in E. Le condizioni R1, R2 sono banalmente verificate ; L'unica riflessione di E associata alle radici di Φ è σ_α per la quale si ha :

$$\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha \quad ; \quad \sigma_\alpha(-\alpha) = -(-\alpha) = \alpha \tag{4.34}$$

e dunque Φ viene lasciato invariato ; la condizione R4 è verificata in quanto

$$2\frac{< \alpha, -\alpha >}{< \alpha, \alpha >} = -2 \in \mathbb{Z} \quad ; \quad 2\frac{< \alpha, -\alpha >}{< -\alpha, -\alpha >} = -2 \in \mathbb{Z} \tag{4.35}$$

Viceversa, sia Φ un generico sistema di radici di E. Esso contiene almeno un vettore non nullo α e, per la R2, anche $-\alpha$. Ma in Φ non possono esserci altri vettori : α è una base di E e quindi ogni altra radice β deve essere del tipo $a\alpha$ con a numero reale perciò, per la R2, segue $\beta = \pm\alpha$.
Un tale sistema di radici lo denotiamo con il simbolo A_1. Se in E fissiamo una base, possiamo rappresentare E mediante una retta orientata e dunque A_1 può essere così graficato :

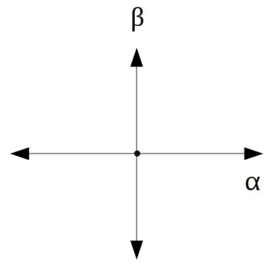


Dato che l'inversa di una simmetria è essa stessa, risulta ovvio che il gruppo di Weyl di $A1$ contiene solamente l'identità e σ_α, dunque W ha ordine 2.

Passiamo ora ad uno spazio euclideo di dimensione 2. Per semplificare i calcoli e la visualizzazione fissiamo una base ortonormale in E che ci consente di identificare E con $\mathbb{R}^2$, considerando $\mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare canonico (intendiamo che E ed $\mathbb{R}^2$ sono isometrici).
Denotiamo con l un fissato reale positivo.
Come primo caso consideriamo l'insieme

$$A_1 \times A_1 = \{\alpha = (l, 0), \beta = (0, l), -\alpha, -\beta\} \tag{4.36}$$

avente la seguente rappresentazione grafica :



L'insieme considerato è finito in quanto costituito da 4 vettori ; nessuno di questi vettori è nullo ed inoltre α e β sono indipendenti (ortogonali) per cui $A_1 \times A_1$ è un sistema di generatori di E. La condizione R1 risulta quindi dimostrata mentre la R2 è banalmente verificata.
Vediamo ora se viene verificata la condizione R4. Ragruppiamo tutti i calcoli in una tabella :

Tabella 4.1:

$(,)$	α	β	$-\alpha$	$-\beta$
α	2	0	-2	0
β	0	2	0	-2
$-\alpha$	-2	0	2	0
$-\beta$	0	-2	0	2

e dunque viene rispettata la condizione voluta.
Infine le riflessioni : quelle associate ai vettori di $A_1 \times A_1$ sono solo σ_α e σ_β. Per quanto riguarda σ_α si ha :

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - (\beta, \alpha)\alpha = \beta \tag{4.37}$$

mentre per σ_β abbiamo

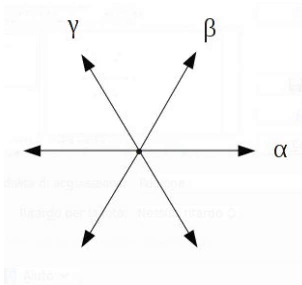
$$\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - (\alpha, \beta)\beta = \alpha \tag{4.38}$$

per cui entrambe mandano $A_1 \times A_1$ in sè e dunque anche la condizione R3 risulta soddisfatta.

Il secondo insieme che consideriamo è:

$$A_2 = \{\alpha = (l, 0), \beta = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l), \gamma = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l), -\alpha, -\beta, -\gamma\} \tag{4.39}$$

avente la seguente rappresentazione grafica :



L'insieme considerato è finito in quanto costituito da 6 vettori ; nessuno di questi vettori è nullo ed inoltre è evidente l'indipendenza di α e β per cui A_2 è un sistema di generatori di E. Quindi vale la condizione R1 e ovviamente anche la R2.
La condizione R2 è banalmente verificata.
Come prima, per la condizione R4 riassumiamo tutti i calcoli in una tabella :

Tabella 4.2:

$(,)$	α	β	γ	$-\alpha$	$-\beta$	$-\alpha$
α	2	1	-1	-2	-1	1
β	1	2	1	-1	-2	-1
γ	-1	1	2	1	-1	-2
$-\alpha$	-2	-1	1	2	1	-1
$-\beta$	-1	-2	-1	1	2	1
$-\gamma$	1	-1	-2	-1	1	2

e dunque viene rispettata la condizione voluta.
Infine le riflessioni : quelle determinate dai vettori di A_2 sono tre, ossia σ_α,σ_β e σ_γ.
Per quanto riguarda σ_α si ha :

- $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - (\beta,\alpha)\alpha = \beta - \alpha = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - (l,0) = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = \gamma$
- $\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - (\gamma,\alpha)\alpha = \gamma + \alpha = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) + (l,0) = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = \beta$

mentre per σ_β abbiamo

- $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - (\alpha,\beta)\beta = \alpha - \beta = (l,0) - (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (\frac{l}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}l) = -\gamma$
- $\sigma_\beta(\gamma) = \gamma - (\gamma,\beta)\beta = \gamma - \beta = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (-l,0) = -\alpha$

ed infine:

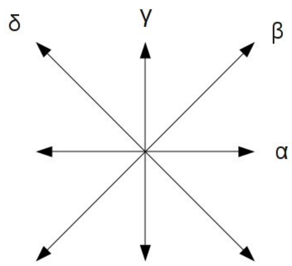
- $\sigma_\gamma(\alpha) = \alpha - (\alpha,\gamma)\gamma = \alpha + \gamma = (l,0) + (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = \beta$
- $\sigma_\gamma(\beta) = \beta - (\beta,\gamma)\gamma = \beta - \gamma = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (l,0) = \alpha$

per cui tutte e tre mandano A_2 in sè, dunque anche la condizione R3 risulta verificata.

Il terzo insieme che analizziamo lo denotiamo con B_2 ed è definito come :

$$B_2 = \{\alpha = (l, 0), \beta = (l, l), \gamma = (0, l), \delta = (-l, l), -\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta\} \tag{4.40}$$

e possiamo rappresentarlo graficamente nel modo seguente



Anche per questo terzo insieme non è difficile verificare la condizione R1 : esso ha 8 vettori, nessuno di questi è nullo, i vettori α e γ sono ortogonali, quindi indipedenti. La condizione R2 è soddisfatta per costruzione.
Per mostrare che vale anche la R3 facciamo uso della solita tabella :

Tabella 4.3:

$(,)$	α	β	γ	δ	$-\alpha$	$-\beta$	$-\gamma$	$-\delta$
α	2	1	0	-1	-2	-1	0	1
β	2	2	2	0	-2	-2	-2	0
γ	0	1	2	1	0	-1	-2	-1
δ	-2	0	2	2	2	0	-2	-2
$-\alpha$	-2	-1	0	1	2	1	0	-1
$-\beta$	-2	-2	-2	0	2	2	2	0
$-\gamma$	0	-1	-2	-1	0	1	2	1
$-\delta$	2	0	-2	-2	-2	0	2	2

Le riflessioni determinate dai vettori di B_2 sono quattro : σ_α,$\sigma_\beta, \sigma_\gamma$ e σ_δ. Per σ_α si ottiene :

- $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - (\beta, \alpha)\alpha = \beta - 2\alpha = (l, l) - 2(l, 0) = (-l, l) = \delta$
- $\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - (\gamma, \alpha)\alpha = \gamma$
- $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - (\delta, \alpha)\alpha = \delta + 2\alpha = (-l, l) + 2(l, 0) = (l, l) = \beta$

per σ_β abbiamo

- $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - (\alpha, \beta)\beta = \alpha - \beta = (l, 0) - (l, l) = (0, -l) = \gamma$

- $\sigma_\beta(\gamma) = \gamma - (\gamma, \beta)\beta = \gamma - \beta = (0, l) - (l, l) = (-l, 0) = -\alpha$
- $\sigma_\beta(\delta) = \delta - (\delta, \beta)\beta = \delta$

poi σ_γ

- $\sigma_\gamma(\alpha) = \alpha - (\alpha, \gamma)\gamma = \alpha$
- $\sigma_\gamma(\beta) = \beta - (\beta, \gamma)\gamma = \beta - 2\gamma = (l, l) - 2(0, l) = (l, -l) = -\delta$
- $\sigma_\gamma(\delta) = \delta - (\delta, \gamma)\gamma = \delta - 2\gamma = (-l, l) - 2(0, l) = (-l, -l) = -\beta$

ed infine

- $\sigma_\delta(\alpha) = \alpha - (\alpha, \delta)\delta = \alpha + \delta = (l, 0) + (-l, l) = (0, l) = \gamma$
- $\sigma_\delta(\beta) = \beta - (\beta, \delta)\delta = \beta$
- $\sigma_\delta(\gamma) = \gamma - (\gamma, \delta)\delta = \gamma - \delta = (0, l) - (-l, l) = (l, 0) = \alpha$

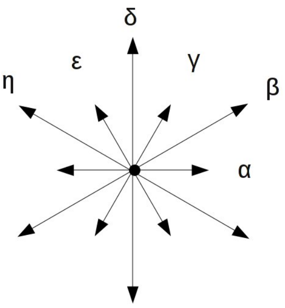
dunque tutte mandano B_2 in sè e la condizione R3 risulta così verificata.

Come ultimo insieme consideriamo :

$$G2 = \{\alpha = (l, 0), \beta = (\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l), \gamma = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l), \delta = (0, \sqrt{3}l), \epsilon = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l), \eta = (-\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l)\} \ \cup$$

$$\cup \ \ \{-\alpha, -\beta, \gamma, -\delta, -\epsilon, -\eta\}$$

che possiamo così graficare



Anche questo insieme è finito (12 vettori), non contiene il vettore nullo, α e δ sono indipendenti in quanto ortogonali. Quindi la condizione R1 è rispettata, come anche la R2.
Per la R3 consideriamo la tabella di riassunto :

Tabella 4.4:

$(,)$	α	β	γ	δ	ϵ	η	$-\alpha$	$-\beta$	$-\gamma$	$-\delta$	ϵ	η
α	2	1	1	0	-1	-1	-2	-1	-1	0	1	1
β	3	2	3	1	0	-1	-3	-2	-3	-1	0	1
γ	1	1	2	1	1	0	-1	-1	-2	-1	-1	0
δ	0	1	3	2	3	1	0	-1	-3	-2	-3	-1
ϵ	-1	0	1	1	2	1	1	0	-1	-1	-2	-1
η	-3	-1	0	1	3	2	3	1	0	-1	-3	-2
$-\alpha$	-2	-1	-1	0	1	1	2	1	1	0	-1	-1
$-\beta$	-3	-2	-3	-1	0	1	3	2	3	1	0	-1
$-\gamma$	-1	-1	-2	-1	-1	0	1	1	2	1	1	0
$-\delta$	0	-1	-3	-2	-3	-1	0	1	3	2	3	1
$-\epsilon$	1	0	-1	-1	-2	-1	-1	0	1	1	2	1
$-\eta$	3	1	0	-1	-3	-2	-3	-1	0	1	3	2

e quindi, essendo la tabella costituita da soli interi, anche la condizione R4 è verificata. Rimane la condizione R3 per la quale dobbiamo analizzare come agiscono le riflessioni σ_α, σ_β, σ_γ, σ_δ, σ_ϵ, σ_η sugli elementi di G_2. Facciamo i calcoli per σ_α

- $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - (\beta,\alpha)\alpha = \beta - 3\alpha = (\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - 3(l,0) = (-\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = \eta$
- $\sigma_\alpha(\gamma) = \gamma - (\gamma,\alpha)\alpha = \gamma - \alpha = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - (l,0) = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = \epsilon$
- $\sigma_\alpha(\delta) = \delta - (\delta,\alpha)\alpha = \delta$
- $\sigma_\alpha(\epsilon) = \epsilon - (\epsilon,\alpha)\alpha = \epsilon + \alpha = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) + (l,0) = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = \gamma$
- $\sigma_\alpha(\eta) = \eta - (\eta,\alpha)\alpha = \eta + 3\alpha = (-\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) + 3(l,0) = (\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = \beta$

poi per σ_β

- $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - (\alpha,\beta)\beta = \alpha - \beta = (l,0) - (\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (-\frac{1}{2}l, -\frac{\sqrt{3}}{2}l) = -\gamma$
- $\sigma_\beta(\gamma) = \gamma - (\gamma,\beta)\beta = \gamma - \beta = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - (\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (-l,0) = -\alpha$
- $\sigma_\beta(\delta) = \delta - (\delta,\beta)\beta = \delta - \beta = (0, \sqrt{3}l) - (\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (-\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = \eta$
- $\sigma_\beta(\epsilon) = \epsilon - (\epsilon,\beta)\beta = \epsilon$
- $\sigma_\beta(\eta) = \eta - (\eta,\beta)\beta = \eta + \beta = (-\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) + (\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (0, \sqrt{3}l) = \delta$

per σ_γ

- $\sigma_\gamma(\alpha) = \alpha - (\alpha,\gamma)\gamma = \alpha - \gamma = -\epsilon$

- $\sigma_\gamma(\beta) = \beta - (\beta, \gamma)\gamma = \beta - 3\gamma = (\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - 3(\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (0, -\sqrt{3}l) = -\delta$
- $\sigma_\gamma(\delta) = \delta - (\delta, \gamma)\gamma = \delta - 3\gamma = (0, \sqrt{3}l) - 3(\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (-\frac{3}{2}l, -\frac{\sqrt{3}}{2}l) = -\beta$
- $\sigma_\gamma(\epsilon) = \epsilon - (\epsilon, \gamma)\gamma = \epsilon - \gamma = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (-l, 0) = -\alpha$
- $\sigma_\gamma(\eta) = \eta - (\eta, \gamma)\gamma = \eta$

per σ_δ

- $\sigma_\delta(\alpha) = \alpha - (\alpha, \delta)\delta = \alpha$
- $\sigma_\delta(\beta) = \beta - (\beta, \delta)\delta = \beta - \delta = -\eta$
- $\sigma_\delta(\gamma) = \gamma - (\gamma, \delta)\delta = \gamma - \delta = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - (0, \sqrt{3}l) = (\frac{l}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}l) = -\epsilon$
- $\sigma_\delta(\epsilon) = \epsilon - (\epsilon, \delta)\delta = \epsilon - \delta = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - (0, \sqrt{3}l) = (-\frac{l}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}l) = -\gamma$
- $\sigma_\delta(\eta) = \eta - (\eta, \delta)\delta = \eta - \delta = (-\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - (0, \sqrt{3}l) = (-\frac{3}{2}l, -\frac{\sqrt{3}}{2}l) = -\beta$

per σ_ϵ

- $\sigma_\epsilon(\alpha) = \alpha - (\alpha, \epsilon)\epsilon = \alpha + \epsilon = \gamma$
- $\sigma_\epsilon(\beta) = \beta - (\beta, \epsilon)\epsilon = \beta$
- $\sigma_\epsilon(\gamma) = \gamma - (\gamma, \epsilon)\epsilon = \gamma - \epsilon = \alpha$
- $\sigma_\epsilon(\delta) = \delta - (\delta, \epsilon)\epsilon = \delta - 3\epsilon = (0, \sqrt{3}l) - 3(-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (\frac{3}{2}l, -\frac{\sqrt{3}}{2}l) = -\eta$
- $\sigma_\epsilon(\eta) = \eta - (\eta, \epsilon)\epsilon = \eta - 3\epsilon = (-\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - 3(-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (0, -\sqrt{3}l) = -\delta$

ed infine per σ_η

- $\sigma_\eta(\alpha) = \alpha - (\alpha, \eta)\eta = \alpha + \eta = (l, 0) + (-\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = \epsilon$
- $\sigma_\eta(\beta) = \beta - (\beta, \eta)\eta = \beta + \eta = \delta$
- $\sigma_\eta(\gamma) = \gamma - (\gamma, \eta)\eta = \gamma$
- $\sigma_\eta(\delta) = \delta - (\delta, \eta)\eta = \delta - \eta = \beta$
- $\sigma_\eta(\epsilon) = \epsilon - (\epsilon, \eta)\eta = \epsilon - \eta = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l) - (-\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l) = (l, 0) = \alpha$

che quindi ci consente di concludere che ogni riflessione considerata manda G_2 in sè e perciò vale la R3.

Concludiamo questo paragrafo scegliendo, in ognuno degli ultimi quattro esempi, una base di E. Per l'insieme $A_1 \times A_1$ la base che consideriamo è $\{\alpha, \beta\}$ e quindi i restanti vettori $-\alpha, -\beta$ si scrivono

banalmente in componenti rispetto ai vettori di base.
Per l'insieme A_2 fissiamo la base $\{\alpha, \gamma\}$. Vogliamo capire come si scrivere β : dato che $\alpha = (l, 0)$, $\gamma = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l)$ e $\beta = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l)$ è ovvio che si ha $\alpha + \gamma = \beta$. Sappiamo quindi come scrivere anche i vettori $-\alpha, -\beta, -\gamma$.
In B_2 prendiamo la base $\{\alpha, \delta\}$. Ricordiamo che $\alpha = (l, 0)$, $\delta = (-l, l)$, $\beta = (l, l)$ e $\gamma = (0, l)$ Dunque abbiamo $\alpha + \delta = \gamma$ e $\beta = 2\alpha + \delta$.
Infine, nell' insieme G_2 consideriamo la base $\{\alpha, \eta\}$. Ricordiamo la forma di G_2:

$$G2 = \{\alpha = (l, 0), \beta = (\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l), \gamma = (\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l), \delta = (0, \sqrt{3}l), \epsilon = (-\frac{l}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}l), \eta = (-\frac{3}{2}l, \frac{\sqrt{3}}{2}l)\} \cup$$

$$\cup \ \{-\alpha, -\beta, \gamma, -\delta, -\epsilon, -\eta\}$$

pertanto abbiamo $\beta = 3\alpha + \eta$, $\gamma = 2\alpha + \eta$, $\delta = 3\alpha + 2\eta$, $\epsilon = \alpha + \eta$.

Possiamo allora fare l'importante osservazione che rispetto all basi fissate nei singoli casi, le radici si scrivono sempre come combinazione lineare degli elementi della base, con coefficienti interi tutti non negativi o tutti non positivi.

4.4 Coppie di radici

Sia Φ un sistema di radici nello spazio euclideo e E.
Date due radici $\alpha, \beta \in \Phi$, se denotiamo con θ l'angolo fra essi compreso, abbiamo :

$$(\beta, \alpha) = 2\frac{<\beta, \alpha>}{<\alpha, \alpha>} = 2\frac{\| \beta \| \| \alpha \| cos(\theta)}{\| \alpha \|^2} = 2\frac{\| \beta \|}{\| \alpha \|}cos(\theta) \tag{4.41}$$

$$(\alpha, \beta) = 2\frac{<\beta, \alpha>}{<\beta, \beta>} = 2\frac{\| \beta \| \| \alpha \| cos(\theta)}{\| \beta \|^2} = 2\frac{\| \alpha \|}{\| \beta \|}cos(\theta) \tag{4.42}$$

Pertanto il prodotto di queste due quantità diventa :

$$(\beta, \alpha)(\alpha, \beta) = 4\frac{\| \beta \|}{\| \alpha \|}cos(\theta)\frac{\| \alpha \|}{\| \beta \|}cos(\theta) = 4cos^2(\theta) \tag{4.43}$$

Per ipotesi, entrambi i fattori sono interi e dunque anche il loro prodotto lo è. Ne segue che $cos^2(\theta)$ deve essere il rapporto di un intero (ovviamente positivo) e 4. Dato che $cos^2(\theta) \in [0, 1]$ si possono avere solo le seguenti possibilità:

- i) $cos^2(\theta) = \frac{0}{4} = 0$
- ii) $cos^2(\theta) = \frac{1}{4}$
- iii) $cos^2(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

- iv) $cos^2(\theta) = \frac{3}{4}$
- v) $cos^2(\theta) = \frac{4}{4}$

Se escludiamo la possibilità che α sia un multipli di β, il quinto caso non lo dobbiamo considerare in quanto implica che α e β sono dipendenti.

Osservando che il rapporto fra (β, α) e (α, β)

$$\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\beta)} = \frac{2 < \beta,\alpha >}{< \alpha,\alpha >}\frac{< \beta,\beta >}{2 < \beta,\alpha >} = \frac{\parallel \beta \parallel^2}{\parallel \alpha \parallel^2} \tag{4.44}$$

è il quadrato del rapporto delle norme di β e α e ipotizzando $\parallel \beta \parallel \geq \parallel \alpha \parallel$, analizziamo i singoli casi.

(i) $cos^2(\theta) = 0$

L'angolo θ è necessariamente uguale a $\frac{\pi}{2}$. Perciò abbiamo $cos(\theta) = 0$ e quindi $(\beta, \alpha) = (\alpha, \beta) = 0$.

Il rapporto fra le norme delle due radici risulta indeterminato (abbiamo 0 su 0).

(ii) $cos^2(\theta) = \frac{1}{4}$

Abbiamo $cos(\theta) = \pm\frac{1}{2}$ e dunque $\theta = \frac{\pi}{3}$ oppure $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Per $\theta = \frac{\pi}{3}$ abbiamo:

$$(\alpha,\beta) = 2\frac{\parallel \alpha \parallel}{\parallel \beta \parallel}cos(\theta) = \frac{\parallel \alpha \parallel}{\parallel \beta \parallel} = 1 \tag{4.45}$$

in quanto $\parallel \alpha \parallel / \parallel \beta \parallel$ deve essere un intero e $\parallel \beta \parallel \geq \parallel \alpha \parallel$. Ne consegue :

$$(\beta,\alpha) = 2\frac{\parallel \beta \parallel}{\parallel \alpha \parallel}cos(\theta) = \frac{\parallel \beta \parallel}{\parallel \alpha \parallel} = 1 \tag{4.46}$$

e quindi

$$\frac{\parallel \beta \parallel^2}{\parallel \alpha \parallel^2} = 1 \tag{4.47}$$

In maniera analoga, per $\theta = \frac{2\pi}{3}$ si ha:

$$(\alpha,\beta) = 2\frac{\parallel \alpha \parallel}{\parallel \beta \parallel}cos(\theta) = -\frac{\parallel \alpha \parallel}{\parallel \beta \parallel} = -1 \tag{4.48}$$

$$(\beta,\alpha) = 2\frac{\parallel \beta \parallel}{\parallel \alpha \parallel}cos(\theta) = -\frac{\parallel \beta \parallel}{\parallel \alpha \parallel} = -1 \tag{4.49}$$

e quindi

$$\frac{\parallel \beta \parallel^2}{\parallel \alpha \parallel^2} = 1 \tag{4.50}$$

(iii) $cos^2(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Abbiamo $cos(\theta) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ e dunque $\theta = \frac{\pi}{4}$ oppure $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Per $\theta = \frac{\pi}{4}$ abbiamo:

$$(\beta,\alpha) = 2\frac{\parallel \beta \parallel}{\parallel \alpha \parallel}cos(\theta) = \sqrt{2}\frac{\parallel \beta \parallel}{\parallel \alpha \parallel} = 2k \tag{4.51}$$

con k intero positivo, in quanto dobbiamo avere $\parallel \beta \parallel / \parallel \alpha \parallel = k\sqrt{2}$ (potremmo pure considerare $\parallel \beta \parallel / \parallel \alpha \parallel = k\sqrt{2}$ ma è equivalente). Ne consegue :

$$(\alpha,\beta) = 2\frac{\parallel \alpha \parallel}{\parallel \beta \parallel}cos(\theta) = \frac{\parallel \alpha \parallel}{\parallel \beta \parallel}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{2}} = \frac{1}{k} \tag{4.52}$$

da cui si ricava necessariamente $k = 1$. Inoltre

$$\frac{\| \beta \|^2}{\| \alpha \|^2} = 2 \tag{4.53}$$

Per $\theta = \frac{3\pi}{4}$ invece si ha:

$$(\beta, \alpha) = 2\frac{\| \beta \|}{\| \alpha \|}cos(\theta) = -\sqrt{2}\frac{\| \beta \|}{\| \alpha \|} = -2k \tag{4.54}$$

con k intero positivo, in quanto dobbiamo avere $\| \beta \| / \| \alpha \| = k\sqrt{2}$. Ne consegue :

$$(\alpha, \beta) = 2\frac{\| \alpha \|}{\| \beta \|}cos(\theta) = -\frac{\| \alpha \|}{\| \beta \|}\sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{2}} = -\frac{1}{k} \tag{4.55}$$

con k ancora una volta uguale ad uno. In più :

$$\frac{\| \beta \|^2}{\| \alpha \|^2} = 2 \tag{4.56}$$

(iv) $cos^2(\theta) = \frac{3}{4}$
Abbiamo $cos(\theta) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ e dunque $\theta = \frac{\pi}{6}$ oppure $\theta = \frac{5\pi}{6}$.
Nel caso $\theta = \frac{\pi}{6}$ abbiamo:

$$(\beta, \alpha) = 2\frac{\| \beta \|}{\| \alpha \|}cos(\theta) = \sqrt{3}\frac{\| \beta \|}{\| \alpha \|} = 3k \tag{4.57}$$

con k intero positivo e $\| \beta \| / \| \alpha \| = k\sqrt{3}$ per ragionamenti analoghi a quelli visti nel punto precedente. Inoltre :

$$(\alpha, \beta) = 2\frac{\| \alpha \|}{\| \beta \|}cos(\theta) = \frac{\| \alpha \|}{\| \beta \|}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{k\sqrt{3}} = \frac{1}{k} \tag{4.58}$$

da cui si ricava $k = 1$ e :

$$\frac{\| \beta \|^2}{\| \alpha \|^2} = 3 \tag{4.59}$$

Infine, per $\theta = \frac{5\pi}{6}$ si ha:

$$(\beta, \alpha) = 2\frac{\| \beta \|}{\| \alpha \|}cos(\theta) = -\sqrt{3}\frac{\| \beta \|}{\| \alpha \|} = -3k \tag{4.60}$$

con k intero positivo e $\| \beta \| / \| \alpha \| = k\sqrt{3}$. Ne consegue :

$$(\alpha, \beta) = 2\frac{\| \alpha \|}{\| \beta \|}cos(\theta) = -\frac{\| \alpha \|}{\| \beta \|}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{k\sqrt{3}} = -\frac{1}{k} \tag{4.61}$$

e quindi $k = 1$. Perciò :

$$\frac{\| \beta \|^2}{\| \alpha \|^2} = 3 \tag{4.62}$$

Per semplificare la consultazione dei risultati ottenuti, li raggruppiamo nella seguente tabella riassuntiva :

Tabella 4.5:

(α,β)	(β,α)	θ	$(\parallel \beta \parallel / \parallel \alpha \parallel)^2$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	indeterminato
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3

Proposizione 4.4.1. *Siano α e β due radici non proporzionali di un sistema di radici Φ in uno spazio euclideo E. Se $< \alpha, \beta >$ è strettamente positivo (l'angolo fra le due radici è compreso fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, entrambi esclusi) allora $\alpha - \beta$ è una radice; simmetricamente, se $< \alpha, \beta >$ è strettamente negativo (l'angolo fra le due radici è compreso fra $\frac{\pi}{2}$ e π, entrambi esclusi) allora $\alpha + \beta$ è una radice.*

Dimostrazione. Partiamo dal caso $< \alpha, \beta >> 0$ osservando che $< \alpha, \beta >$ è strettamente positivo se e solo se lo sono anche (α, β) e (β, α) (in quanto è proprio il prodotto scalare fra le due radici a determinare il segno di queste due quantità). La consultazione della tabella sopra riportata ci dice che nei casi in cui (α, β) e (β, α) sono entrambi strettamente positivi, almeno uno fra i due è uguale ad 1. Se $(\alpha, \beta) = 1$ allora :

$$\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - (\alpha, \beta)\beta = \alpha - \beta \tag{4.63}$$

e quindi, per la condizione R3, $\alpha - \beta$ è una radice.
Allo stesso modo, se $(\beta, \alpha) = 1$ abbiamo :

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - (\beta, \alpha)\alpha = \beta - \alpha \tag{4.64}$$

per cui $\beta - \alpha \in \Phi$. Ne deduciamo $\sigma_{\beta-\alpha}(\beta - \alpha) = \alpha - \beta$ e quindi anche $\alpha - \beta \in \Phi$ è una radice.
Se $< \alpha, \beta >$ è strettamente negativo allora $< \alpha, -\beta >= - < \alpha, \beta >$ è strettamente positivo. Applicando quanto visto sopra otteniamo che $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$ è una radice. □

Consideriamo due radici α, β di un sistema di radici Φ nello spazio euclideo E. Supponiamo che esse non siano proporzionali e prendiamo tutte le radici della forma $\beta + k\alpha$, con k numero intero. Chiamiamo α-stringa attraverso β l'insieme di queste radici.
Siano q ed r i più grandi interi non negativi per i quali $\beta + q\alpha$ e $\beta - r\alpha$, rispettivamente, sono radici di Φ. Ovviamente questi due interi possono anche essere nulli ed inoltre la loro esistenza è assicurata dal fatto che le radici sono in numero finito. Ipotizziamo che per un certo $i \in (-r, q)$ il vettore $\beta + i\alpha$

non sia una radice. Allora possiamo trovare $p, s \in [-r, q]$, con $p < s$ tali che:

$$\beta + p\alpha \in \Phi \qquad ; \qquad \beta + (p+1)\alpha \notin \Phi$$

$$\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi \qquad ; \qquad \beta + s\alpha \in \Phi$$

dato che basta prendere $p + 1 = i = s - 1$ Se $< \alpha, \beta + p\alpha >$ fosse strettamente negativo, per il lemma precedente $\beta + p\alpha + \alpha = \beta + (p+1)\alpha$ dovrebbe essere una radice. Quindi risulta :

$$< \alpha, \beta + p\alpha > = < \alpha, \beta > + p < \alpha, \alpha > \geq 0$$

Analogamente, se $< \alpha, \beta + s\alpha >$ fosse strettamente positivo alla $\beta + s\alpha - \alpha = \beta + (s-1)\alpha$ dovrebbe essere una radice e dunque deduciamo

$$< \alpha, \beta + s\alpha > = < \alpha, \beta > + s < \alpha, \alpha > \leq 0$$

Ma $< \alpha, \alpha >$ è positivo e p minore di s, per cui ad $< \alpha, \beta >$ sommiamo due diverse quantità : $< \alpha, \beta + s\alpha >$ e $< \alpha, \beta + p\alpha >$ non possono essere uguali ne tanto meno il secondo può essere più grande del primo, dato che a valere è il viceversa. L'assurdo trovato comporta che l'α-stringa attraverso β non ha buchi, ossia contiene tutte le radici $\beta + i\alpha$ al variare di i in $[-r, q]$.
La riflessione σ_α somma o sottrae, alle radici su cui agisce, un multiplo intero di α e dunque l'α-stringa attraverso β viene mandata in sè stessa da σ_α. Prendiamo una generica radice $\alpha + i\beta$ della stringa. Abbiamo:

$$\sigma_\alpha(\beta + i\alpha) = \beta + i\alpha - 2\frac{< \beta + i\alpha, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha = \beta + i\alpha - 2\frac{< \beta, \alpha > + i < \alpha, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha =$$

$$\beta + i\alpha - 2\frac{\beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha - 2i\alpha = \beta - i\alpha - 2\frac{\beta, \alpha >}{< \alpha, \alpha >}\alpha = \beta - j\alpha$$

dunque le immagini delle diverse radici della stringa variano solo per il fattore $-i\alpha$. Allora, se $i_1 < i_2$, segue $-i_1 > -i_2$ e quindi $j_1 > j_2$. Questo significa che la stringa viene "rovesciata" : numerando le radici secondo il crescere di i, quelle che erano le prime diventano le ultime e viceversa. In particolare abbiamo $\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - r\alpha$. Ma da quest'ultima relazione si ricava :

$$\beta + q\alpha - (\beta, \alpha)\alpha - 2q\alpha = \beta - r\alpha \qquad \Rightarrow \qquad ((\beta, \alpha) + q - r)\alpha = 0 \tag{4.65}$$

ed, essendo α non nullo, abbiamo $(\beta, \alpha) = r - q$.

4.5 Basi di sistemi di radici

Sia Φ un sistema di radici nello spazio euclideo E.
Un sottoinsieme $\Delta \subset \Phi$ si dice base del sistema di radici Φ se :

- (B1) Δ è una base di E
- (B2) ogni radice di Φ ha, rispetto a Δ, componenti intere tutte non positive o tutte non negative

Le radici appartenenti alla base Δ sono dette semplici.
Osserviamo che la cardinalità di una base di Φ coincide con la dimensione dello spazio euclideo E e che non è detto che un sistema di radici ammetta sempre una base (esiste almeno un sottoinsieme di radici che soddisfa B1 ma non necessariamente anche B2).
Nel pargrafo 4.3, per ognuno dei sistemi di radici analizzati (escluso quello nello spazio euclideo unidimensionale), abbiamo fissato due radici che costituivano una base dello spazio euclideo. Esse soddisfano inoltre la condizione B2 e dunque sono una base dei sistemi di radici visti.

Lemma 4.5.1. *Sia Δ una base di un sistema di radici Φ in uno spazio euclideo E. Allora $< \alpha, \beta > \leq 0$ per ogni coppia di radici semplici distinte. Inoltre $\alpha - \beta$ non è una radice.*

Dimostrazione. Supponiamo che $< \alpha, \beta >$ sia strettamente positivo. Ovviamente $\alpha \neq \pm\beta$ (per l'indipendenza dei vettori di base). Per quanto visto nella proposizone 4.4.1 $\alpha - \beta$ è una radice. Avremmo cosí una radice che ha come componenti rispetto a Δ sia 1 che -1, contraddicendo la condizione $(B2)$. Questo assurdo dimostra entrambe le affermazioni del lemma. □

Fissiamo uno spazio euclideo E, un sistema di radici Φ in E e una sua base Δ.
Definiamo l'altezza di una radice $\beta \in \Phi$ rispetto a Δ, e la denotiamo col simbolo $ht(\beta)$, nel modo seguente :

$$ht(\beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \tag{4.66}$$

con le k_α componenti di β rispetto alla base. Se tutte le k_α sono non negative chiamiamo β positiva e scriviamo $\beta \succ 0$; se tutte le k_α sono non positive chiamiamo β negativa e scriviamo $\beta \prec 0$. Si deduce facilmente che le radici semplici sono postive con altezza 1.
Denotiamo con Φ^+ l'insieme delle radici positive, con Φ^- quello delle radici negative.
Per la R2 sappiamo che il sistema di radici Φ è della forma $\Phi = \{\pm\beta_i \mid i \in I\}$. Pertanto, se una radice è positiva, la sua opposta è negativa ed in particolare si ha $\Phi^- = -\Phi^+$. Osserviamo che se α e β sono due radici positive ed anche $\alpha + \beta$ è una radice, pure essa è positiva.
Con quanto fin qui introdotto possiamo definire una relazione d'ordine su E.
Dati due elementi λ, μ di E scriviamo $\mu \prec \lambda$ se $\lambda = \mu$ oppure $\lambda - \mu$ è somma di radici positive. Abbiamo definito una relazione binaria su E che è sicuramente riflessiva. Essa è pure simmetrica : se $\mu \prec \lambda$ e $\lambda \prec \mu$ ma supponiamo, per assurdo, $\lambda \neq mu$, allora $\mu - \lambda$ e $\lambda - \mu$ si scrivono come somme di radici positive. Ma questi due vettori sono uno l'opposto dell'altro e l'opposto di una radice positiva abbiamo visto essere negativa. Dunque non può che essere $\mu = \lambda$. Infine la transitività : se $\mu \prec \lambda$ e

$\lambda \prec \gamma$ possiamo avere 3 possibilità. La prima è $\mu = \lambda$ e $\lambda = \gamma$ quindi $\mu = \gamma$ e $\mu \prec \gamma$; la seconda possibilità è che $\lambda - \mu$ è somma di radici positive e $\mu = \gamma$ (o viceversa) e quindi $\lambda - \mu = \lambda - \gamma$, ossia $\lambda \prec \gamma$; infine possiamo avere che $\mu - \lambda$ e $\lambda - \gamma$ sono somme di radici positive, per cui $\mu - \lambda + \lambda - \gamma = \mu - \gamma$ è somma di radici positive, dunque $\mu \prec \gamma$.

Lemma 4.5.2. *Sia E uno F-spazio vettoriale di dimensione finita, con F campo che possiede almeno $n-1$ elementi non nulli distinti. Se $U_1, \ldots, U_n$ sono sottospazi propri di E aventi tutti la stessa dimensione, la loro unione U non è un sottospazio di E e quindi è un suo sottoinsieme proprio (se U concidesse con E sarebbe un suo sottospazio vettoriale)*

Dimostrazione. Assumiamo, senza ledere la generalità, che gli U_i siano tutti distinti.
Dunque, se $i \neq j$, abbiamo :

$$U_i \setminus U_j \neq 0 \qquad ; \qquad U_j \setminus U_i \neq 0 \tag{4.67}$$

Infatti se, ad esempio, non valesse la prima relazione, avremmo $U_i \cap U_j = U_i$, dunque U_i sarebbe contenuto in U_j e avremmo $U_i = U_j$ (in quanto i due sottospazi vettoriali hanno la stessa dimensione) contrariamente all'ipotesi fatta. In maniera analoga si prova la seconda relazione.
Procediamo per induzione su n.
Partiamo da due sottospazi. Per quanto sopra osservato esistono due vettori non nulli $u_1 \in U_1 \setminus U_2$ e $u_2 \in U_2 \setminus U_1$: di questi due vettori consideriamo la somma. Se $u_1 + u_2$ appartenesse ad U_1 allora $u_2 = (u_1 + u_2) - u_1 = u_2$ sarebbe contenuto in U_1, il che è un assurdo. Ad una contraddizione analoga si arriva se si suppone $u_1 + u_2 \in U_2$. Dunque ad U appartengono u_1 e u_2 ma non $u_1 + u_2$: l'unione dei sottospazi non è chiuso rispetto alla somma e quindi non è un sottospazio.
Passiamo a considerare n generico.
Supponiamo per assurdo che U sia un sottospazio vettoriale di E. Il sottospazio U_1 non è contenuto in $\cup_{i=2}^n U_i$ altrimenti quest'ultimo insieme coinciderebbe con U e sarebbe un sottospazio vettoriale contraddicendo l'ipotesi induttiva. Allora esiste un vettore $u_1 \in U_1$ non contenuto in $\cup_{i=2}^n U_i$, quindi u_1 appartiene a U_1 ma non è contenuto in nessun altro U_i $(i \neq 1)$. Similmente, esiste $u_2 \in U_2$ che non appartiene a nessuno degli U_i con $i \neq 2$. Consideriamo ora $u_1 + \lambda u_2$ con λ scalare non nullo del campo F : esso appartiene ad U e quindi ad almeno un U_i.
Se poi λ_1, λ_2 sono due scalari non nulli distinti, i vettori $u_1 + \lambda_1 u_2$, $u_1 + \lambda_2 u_2$ devono appartenere a differenti U_i. Se infatti supponiamo che essi appartengano entrambi ad un U_j (j non può essere ne 1 ne 2 per lo stesso ragionamento fatto per $n = 2$), allora la differenza $(u_1 + \lambda_1 u_2) - (u_1 + \lambda_2 u_2) = (\lambda_1 - \lambda_2) u_2$ appartiene ad U_j. Questo conduce all'assurdo che u_2 sia contenuto in U_j.
Ipotizzando che F contenga almeno $n-1$ elementi $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ non nulli distinti, i vettori

$$u_1 + \lambda_k u_2 \qquad k = 1, \ldots, n-1 \tag{4.68}$$

appartengono ad $n-1$ distinti U_i (abbiamo visto che due di questi vettori non possono stare nello stesso sottospazio). Ma U_1 e U_2 sono esclusi, quindi abbiamo solamente $n-2$ sottospazi U_i "disponibili". Siamo giunti ad un assurdo e quindi l'unione degli n sottospazi non è un sottospazio vettoriale. □

Se E è uno spazio euclideo e Φ un suo sitema di radici, allora l'unione degli iperpiani P_α, al variare di α in Φ, non ricopre tutto E grazie all'applicazione del lemma precedente. Infatti gli iperpiani sono sottospazi propri di E, hanno tutti la stessa dimensione e sono in numero finito. Inoltre $\mathbb{R}$ è infinito. Un elemento $\gamma \in E$ si dice regolare se esso non è ortogonale a nessuna radice, ossia appartiene all'insieme :

$$E \setminus \cup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$$

Dato un elemento $\beta \in E$ definiamo :

$$\Phi^+(\beta) = \{\alpha \in \Phi \mid < \beta, \alpha >> 0\} \quad ; \quad \Phi^-(\beta) = \{\alpha \in \Phi \mid < \beta, \alpha >< 0\} \tag{4.69}$$

Se prendiamo un elemento regolare γ allora :

$$\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup \Phi^-(\gamma) = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma) \tag{4.70}$$

dato che se $< \beta, \alpha >> 0$ allora $< \beta, -\alpha >< 0$. La decomposizione di Φ che abbiamo scritto prende il nome di polarizzazione di Φ rispetto a γ.
Diremo che una radice $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ è decomponibile se si scrive come la somma di due radici di $\Phi^+(\gamma)$, non decomponibile nel caso contrario.

Lemma 4.5.3. *Sia E uno spazio euclideo di dimensione n e $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ una sua base. Allora esiste almeno un vettore non nullo $\gamma \in E$ tale che i prodotti scalari $< \gamma, \gamma_i >$, con $i = 1, \ldots, n$, sono tutti positivi.*

Dimostrazione. Sia V_i il sottospazio vettoriale generato dagli elementi di base, escluso γ_i. Dunque V_i è un iperpiano e $V_i^\perp$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 1 per il quale scegliamo la base δ_i. Consideriamo il vettore :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} r_i\, \delta_i \tag{4.71}$$

con gli r_i numeri reali. Allora, dato che δ_i è ortogonale a tutti i vettori di base tranne γ_i (altrimenti avremmo $< E, \delta_i >= 0$ contrariamente all'ipotesi che γ sia non nullo), abbiamo :

$$< \gamma, \gamma_j >= \sum_{i=1}^{n} r_i < \delta_i, \gamma_j >= r_i\ < \delta_j, \gamma_j > \qquad j = 1, \ldots, n \tag{4.72}$$

Scegliendo $r_j =< \delta_j, \gamma_j >$ abbiamo che $< \gamma, \gamma_j >$ è postivo per ogni valore di j. □

Teorema 4.5.4. *Sia Φ un sistema di radici in uno spazio euclideo E di dimensione n e $\gamma \in E$ un elemento regolare.*
Allora l'insieme $\Delta(\gamma)$ composto dalle radici non decomponibili di $\Phi^+(\gamma)$ è una base di Φ ed inoltre ogni base si ottiene in questo modo.

Dimostrazione. Procediamo per passi.
(1) Cominciamo col mostrare che ogni radice contenuta in $\Phi^+(\gamma)$ è una combinazione lineare degli elementi di $\Delta(\gamma)$ mediante coefficienti interi non negativi. Supponiamo per assurdo che qualche radice non abbia la forma detta ; fra esse scegliamo la radice α per la quale risulta minimo il prodotto scalare $< \alpha, \gamma >$ (dato che le radici sono in numero finito questo miminimo esiste sicuramente). Ovviamente α è decomponibile (se non fosse decomponibile apparterrebbe a $\Delta(\gamma)$ e si scriverebbe come combinazione lineare degli elementi di $\Delta(\gamma)$ con un coefficiente unitario e gli altri nulli) per cui :

$$\alpha = \beta_1 + \beta_2 \tag{4.73}$$

con $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$. Almeno uno fra β_1 e β_2 deve, necessariamente, non potersi scrivere come combinazione lineare con coefficienti interi non negativi degli elementi di $\Delta(\gamma)$ altrimenti anche α potrebbe scriversi in questa forma. Ne consegue che $< \gamma, \alpha > = < \gamma, \beta_1 > + < \gamma, \beta_2 >$ è somma di addendi positivi, più piccoli di $< \gamma, \alpha >$. Ciò contraddice la minimalità di α, quindi α deve potersi scrivere nella forma detta. Iterando il ragionamento (risaliamo nella sequenza crescente dei $< \gamma, \alpha >$) otteniamo quanto volevamo dimostrare.
(2) Se $\alpha, \beta \in \Phi^+(\gamma)$ sono radici non decomponibili, allora $< \alpha, \beta > \leq 0$ a meno che non si abbia $\alpha = \beta$ (in questo caso il prodotto scalare è positivo). Se così non fosse, per il Lemma 4.4.1, avremmo che $\alpha - \beta$ è una radice. Allora una fra $\alpha - \beta$ e $\beta - \alpha$ è contenuta in $\Phi^+(\gamma)$. Se è $\alpha - \beta$ ad essere contenuta in $\Phi^+(\gamma)$ si ha $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ e quindi α sarebbe decomponibile ; nell'altro caso avremmo $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ con β decomponibile. In entrambe le possibilità abbiamo ottenuto un assurdo. (3) L'insieme $\Delta(\gamma)$ è costituito da vettori linearmente indipendenti. Consideriamo una combinazione lineare di vettori di $\Delta(\gamma)$ che sia uguale al vettore nullo :

$$\sum_{\alpha \in \Delta(\gamma)} r_\alpha \alpha = 0 \tag{4.74}$$

Separando i coefficienti positivi da quelli negativi scriviamo

$$\sum_\alpha s_\alpha \alpha = \sum_\beta t_\beta \beta \tag{4.75}$$

chiamando ϵ questi due vettori uguali. Allora :

$$< \epsilon, \epsilon > = < \sum_\alpha s_\alpha \alpha, \sum_\beta t_\beta \beta > = \sum_{\alpha, \beta} s_\alpha t_\beta < \alpha, \beta > \leq 0 \tag{4.76}$$

in quanto combinazione lineare, con coefficienti positivi, di quantità non positive.
Dato che il prodotto scalare è definito positivo ne deduciamo $<\epsilon,\epsilon>=0$ e quindi $\epsilon=0$. Pertanto :

$$0=<\epsilon,\gamma>=\sum_{\alpha} s_\alpha <\alpha,\gamma> \tag{4.77}$$

Gli s_α sono positivi ma potrebbero non esistere, i prodotti scalari $<\gamma,\alpha>$ sono positivi. Allora non esistono s_α altrimenti quel prodotto scalare non potrebbe essere nullo in quanto avremmo una somma di quantità positive. In modo analogo si dimostra che non esistono t_β e dunque la combinazione lineare da cui siamo partiti ha tutti i coefficienti nulli.
(4) Siamo ora in grado di concludere che $\Delta(\gamma)$ è una base di Φ. Infatti $\Delta(\gamma)$ genera $\Phi^+(\gamma)$ e quindi Φ, per cui $\Delta(\gamma)$ genera E (poichè genera un sistema di generatori). Per il punto (3) $\Delta(\gamma)$ è una base di E, mentre per il punto 1 esso è una base di Φ.
(5) Concludiamo mostrando che ogni base Δ di Φ è uguale ad una $\Delta(\gamma)$ per un certo vettore regolare $\gamma\in E$. Data una base Δ di Φ, scegliamo un elemento γ tale che $<\gamma,\alpha>>0$ per ogni radice semplice α.
L'esistenza di elementi di questo tipo è assicurata dal Lemma 4.5.3. Per la condizione B2, l'elemento scelto è regolare, in quanto il prodotto scalare di γ con una qualsiasi radice è una combinazione lineare, con coefficienti tutti non negativi o tutti non positivi, di quantità postive.
Ne consegue che $\Phi^+=\Phi^+(\gamma)$: se $\alpha\in\Phi^+$ allora è ovvio che $\alpha\in\Phi^+$ poichè $<\gamma,\alpha>$ è una combinazione lineare con coefficienti non negativi di quantità positive ; viceversa, se $<\gamma,\alpha>$ è positivo, dato che tutti coefficienti di α rispetto alla base Δ devono avere lo stesso segno, essi devono essere necessariamente non negativi.
Quindi abbiamo anche $\Phi^-=-\Phi^+=-\Phi^+(\gamma)=\Phi^-(\gamma)$.
Per come abbiamo scelto γ è evidente che $\Delta\subset\Phi^+(\gamma)$. Inoltre $\Delta\subset\Delta(\gamma)$ in quanto gli elementi di Δ non posso essere decomponibili. Sia α_j una radice semplice e supponiamo sia decomponibile, ossia $\alpha_j=\beta_1+\beta_2$ con β_1,β_2 radici di $\Phi^+(\gamma)$. Allora possiamo avere tre possibilità. La prima è che β_1 e β_2 sono semplici (e sicuramente diverse da α_j altrimenti una delle due dovrebbe essere nulla), ma questo è un assurdo per l'indipendenza dei vettori di base. La seconda possibilità è che β_1 sia semplice (quindi $\beta_1=\alpha_i$) e β_2 no (o viceversa). Quindi β_2 è una radice positiva che rispetto a Δ si scrive $\beta_2=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$. Pertanto si ha :

$$\alpha_j=\beta_1+\beta_2=a_1\alpha_1+\cdots+(1+a_i)\alpha_i+\cdots+a_n\alpha_n \tag{4.78}$$

Se $\alpha_i=\alpha_j$ allora $a_k=0$ per $k=1,\dots,n$, il che è un assurdo in quanto β_2 è non nullo ; in caso contrario si ha $a_j=1$ e tutti gli altri coefficienti nulli con l'assurdo che $(1+a_i)$ non può essere 0 in quanto a_i è non negativo. Infine possiamo avere β_1 e β_2 entrambe non semplici e quindi :

$$\alpha_j=\beta_1+\beta_2=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n+b_1\alpha_1+\cdots+b_n\alpha_n=(a_1+b_1)\alpha_1+\cdots+(a_n+b_n)\alpha_n$$

Per cui se $i \neq j$ abbiamo $a_i + b_i = 0$ ossia $a_i = b_i = 0$, mentre $a_j + b_j = 1$. Ma in questo modo α_j cesserebbe di essere decomponibile (quando parliamo di radice decomponibile non consideriamo la possibilità di scriverla come somma di suoi multipli, altrimenti tutte le radici sono decomponibili). Accertateci del fatto che le radici semplici non sono decomponibili, osserviamo che Δ e $\Delta(\gamma)$ hanno la stessa cardinalità dato che sono entrambe basi di E e perciò $\Delta(\gamma) = \Delta$. □

Se Φ è un sistema di radici nello spazio euclideo E, abbiamo detto che l'unione degli iperpiani P_α, al variare di α in Φ, non ricopre tutto E. Negli spazi euclidei è possibile definire una topologia mediante il prodotto scalare, dunque ha senso considerare $E \setminus \cup P_\alpha$ come spazio topologico.
Le componenti connesse di $E \setminus \cup P_\alpha$ prendono il nome di camere di Weyl di E. Ne consegue che ogni vettore regolare $\gamma \in E$ appartiene ad un unica camera di Weyl, che denotiamo col simbolo $\Upsilon(\gamma)$.
Nell'insieme degli elementi regolari possiamo definire una relazione di equivalenza : due elementi regolari, γ e γ', sono equivalenti se $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Sicuramente questa relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva. Attraverso questa relazione di equivalenza determiniamo una partizione di $E \setminus \cup P_\alpha$.
Si può allora dimostrare che due vettori regolari γ, γ' appartengno la stessa camera di Weyl se e solo se sono equivalenti, ossia $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Ciò è dovuto al fatto che le componenti connesse sono anche convesse. Quindi γ e γ' stanno nella stessa camera di Weyl se e solo se $t\gamma + (1-t)\gamma'$ non appartiene a nessuno degli iperpiani P_α, al variare di t in $[0, 1]$. Le componenti connesse per archi coincidono con le componenti connesse per cui :

$$t < \alpha, \gamma > +(1-t) < \alpha, \gamma' >> 0 \tag{4.79}$$

per ogni valore di t (in quanto al variare di t abbiamo un'applicazione continua che non può cambiare segno, possiamo supporre che l'ultima quantità sia negativa oppure positiva). Dunque ponendo $t = 1$ e $t = 0$ otteniamo, rispettivamente, $< \alpha, \gamma >> 0$ e $< \alpha, \gamma' >> 0$. Ciò significa che se due elementi regolari stanno nella stessa componente connessa allora il loro prodotto scalare per una generica radice ha lo stesso segno e viceversa. Se $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$ allora $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$ (segue banalmente da come si sono definite le radici decomponibili e non decomponibili). Vale anche l'implicazione inversa dato che ogni radice di $\Phi^+(\gamma)$ si scrive come combinazione lineare dei vettori di $\Delta(\gamma)$ con coefficienti non negativi, quindi appartiene a $\Phi^+(\gamma')$, e viceversa.

Prendiamo una camera di Weyl e, fissato un suo elemento γ, associamogli una base $\Delta(\gamma)$ che non dipende dalla scelta di γ (perchè ogni radice della camera di Weyl scelta determina la stessa polarizzazione ; ad ogni polarizzazione corrisponde una decomposizione univoca in radici decomponibili e non). Ad una base possiamo associare un elemento regolare σ (vedi passo 5 della dimostrazione del Teorema 4.5.4) e considerarne la camera di Weyl. Se alla base associamo due diversi elementi regolari, σ e σ', dato che si ha $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\sigma) = \Phi^+(\sigma')$, allora essi appartengono in ogni caso alla stessa

camera di Weyl. Ma quest'ultima coincide con quella da cui siamo partiti? La risposta è positiva in quanto $\Phi^+(\sigma) = \Phi^+(\sigma')$.
In questo modo abbiamo definito un'applicazione f dalle camere di Weyl alle basi e un'applicazione g dalle basi alle camere di Weyl, con $f \circ g$ uguale all' identità. Mostriamo che anche $g \circ f$ è l'identità e quindi f, g sono una l'inversa dell'altra.
Prendiamo una base Δ e un elemento regolare σ tale che $\Phi^+ = \Phi^+(\sigma)$ di cui consideriamo la camera di Weyl. A sua volta, alla camera di Weyl facciamo corrispondere una base. Quella di partenza e quella di arrivo coincidono in quanto le due basi sono determinate dalla stessa polarizzazione.

Data una base Δ del sistema di radici Φ nello spazio euclideo E, scriviamo $\Upsilon(\Delta) = \Upsilon(\gamma)$ se $\Delta = \Delta(\gamma)$: chiamiamo tale componente connessa la camera di Weyl fondamentale relativa a Δ.
Se $\Delta = \Delta(\gamma)$ allora è ovvio che $< \alpha, \gamma >> 0$ per tutte le radici semplici α. Viceversa, se γ è tale che $< \alpha, \gamma >> 0$ per tutte le radici semplici α, per il passo 5 della dimostrazione del Teorema 4.5.4, abbiamo $\Delta = \Delta(\gamma)$. Disponiamo quindi di una condizione necessaria e sufficiente affinchè un vettore $\gamma \in E$ "generi" la base Δ.
Osserviamo che se γ e γ' generano Δ essi sono regolari ed inoltre $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$ in quanto il prodotto scalare per una qualsiasi radice è la combinazione lineare di quantità positive con coefficienti tutti non positivi o non negativi ; questi coefficienti sono non tutti nulli e uguali sia per γ che per γ'. Dunque gli elementi regolari che generano Δ sono nella stessa camera di Weyl Υ. Vogliamo capire se tutti gli altri elementi di Υ generano Δ. La risposta è positiva in quanto due elementi della stessa camersa di Weyl determinano la stessa polarizzazione e la polarizzazione determina univocamente la base. Dunque in $\Upsilon(\Delta)$ ci sono tutti e soli gli elementi regolari di E che generano Δ, ossia tutti gli elementi tali che $< \alpha, \gamma >> 0$ per ogni radice semplice α. La camera di Weyl fondamentale relativa a Δ è quindi ben definita.

Definizione 4.5.5. *Sia G un gruppo moltiplicativo e A un generico insieme. Un'azione sinistra di G su A è un'applicazione :*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & G \times A & \rightarrow & A \\ & (g, a) & \mapsto & \varphi(g, a) = g \cdot a \end{array}$$

tale che :

- $1 \cdot a = a \qquad \forall a \in A;$
- $g \cdot (h \cdot a) = (gh) \cdot a \qquad \forall g, h \in G, a \in A.$

Diremo che l'azione φ è transitiva se per ogni coppia di elementi a, a' di A esiste $g \in G$ tale che $g \cdot a = a'$. Se l'elemento g è unico diremo che φ è semplicemente transitiva.

Se poi G agisce a sinistra sugli insiemi A_1, A_2 tramite le azioni φ_1, φ_2 rispettivamente ed inoltre $f : A_1 \to A_2$ è tale che $f(g \cdot a) = f(g) \cdot a$ per ogni $g \in G, a \in A_1$ diremo che f è una mappa G-equivariante.

Dato un sistema di radici Φ nello spazio euclideo E possiamo considerare due azioni del gruppo di Weyl W : una sulle camere di Weyl e l'altra sulle basi di Φ.
Partiamo dall'azione sulle camere di Weyl. Alla camera di Weyl $\Upsilon(\gamma)$ e all'automorfismo $\sigma \in W$, associamo la camera di Weyl $\Upsilon(\sigma(\gamma))$. Dobbiamo verificare, primariamente, che l'applicazione considerata è ben definita. Innanzitutto osserviamo che anche $\sigma(\gamma)$ è un elemento regolare. Come già visto precedentemente gli automorfismi di W conservano il prodotto scalare e mandano Φ in sè. Allora ogni radice α è della forma $\sigma(\beta)$ con $\beta \in \Phi$ e quindi $< \sigma(\gamma), \alpha >=< \sigma(\gamma), \sigma(\beta) >=< \gamma, \beta >\neq 0$: il prodotto scalare di $\sigma(\gamma)$ per una arbitraria radice è non nullo, ossia dalla regolarità di γ segue quella di $\sigma(\gamma)$. Se poi γ, γ' sono due elementi regolari che stanno nella stessa camera di Weyl, anche le loro immagini tramite σ stanno nella stessa camera di Weyl. Infatti se $\alpha = \sigma(\beta)$ appartiene a $\Phi^+(\sigma(\gamma))$, essa è contenuta anche in $\Phi^+(\sigma(\gamma'))$ poichè $< \sigma(\gamma), \alpha >=< \sigma(\gamma), \sigma(\beta) >=< \gamma, \beta >$ quindi, dato che $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$, abbiamo che anche $< \sigma(\gamma'), \alpha >=< \sigma(\gamma'), \sigma(\beta) >=< \gamma', \beta >$ è strettamente positivo. Analogamente si mostra il viceversa.
Quanto appena visto ci dice che $\sigma(\Upsilon(\gamma)) \subseteq \Upsilon(\sigma(\gamma))$ e, considerando σ^{-1} ovviamente si ha anche $\Upsilon(\sigma(\gamma)) \subseteq \sigma(\Upsilon(\gamma))$, ossia $\sigma(\Upsilon(\gamma)) = \Upsilon(\sigma(\gamma))$. Che l'applicazione definita rispetta le condizioni per essere un'azione di gruppo è banale.
Passiamo all'azione sulle basi : alla base Δ di Φ e a $\sigma \in W$ associamo $\sigma(\Delta)$.
Dato che σ è un automorfismo, $\sigma(\Delta)$ è una base di E. Inoltre una generica radice α è uguale a $\sigma(\beta)$ con $\beta \in \Phi$. Ma β la scriviamo come combinazione lineare, con coefficienti tutti non positivi o non negativi, degli elementi di Δ. Dunque α conserva i coefficienti di β ma si scrive come combinazione lineare degli elementi di $\sigma(\Delta)$. Abbiamo quindi mostrato che $\sigma(\Delta)$ soddisfa le condizioni B1 e B2. Come nel caso precedente, l'applicazione definita soddisfa in modo ovvio le condizioni per essere un'azione.
Inoltre, dato un vettore regolare $\gamma \in E$, si ha $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$. Per verificare questa relazione basta accertarsi che i prodotti scalari di $\sigma(\gamma)$ con gli elementi di $\sigma(\Delta(\gamma)))$ siano strettamente positivi (in accordo col passo 5 del dimostrazione del Teorema 4.5.4). Ed infatti $< \sigma(\gamma), \sigma(\alpha) >=< \gamma, \alpha >$ è strettamente positivo per ogni radice $\alpha \in \Delta(\gamma)$.
Abbiamo visto che esiste una bigezione fra basi e camere di Weyl : sia f che g sono W equivarianti. Pertiamo da g : sia σ un generico automorfismo di W e $\Delta(\gamma)$ un'arbitraria base di Φ. Allora abbiamo che $\sigma(\Delta(\gamma)) = \Delta(\sigma(\gamma))$, la cui immagine tramite g è $\Upsilon(\sigma(\gamma))$. Viceversa, g manda la base $\Delta(\gamma)$ nella camera di Weyl $\Upsilon(\gamma)$ ed inoltre $\sigma(\Upsilon(\gamma) = \Upsilon(\sigma(\gamma))$. Per f prendiamo un automorfismo $\sigma \in E$ e una camera di Weyl $\Upsilon(\gamma)$. L'azione di W sulle camere di Weyl associa $\Upsilon(\sigma(\gamma))$ alla camera di Weyl $\Upsilon(\gamma)$. L'immagine tramite f di $\Upsilon(\sigma(\gamma))$ è la base $\Delta(\sigma(\gamma))$; $f(\Upsilon(\gamma) = \Delta(\gamma)$ e l'azione di σ su $\Delta(\gamma)$ restituisce

la base $\Delta(\sigma(\gamma))$.

4.6 Il gruppo di Weyl

Cominciamo questo paragrafo con due importanti risultati sul comportamento delle radici semplici. A tale scopo, fissiamo un base Δ di un sistema di radici Φ nello spazio euclideo E.

Lemma 4.6.1. *Se α è una radice semplice allora σ_α permuta le radici positive diverse da α*

Dimostrazione. Una radice semplice è banalmente positiva. Sia β una radice positiva diversa da α, dunque abbiamo :

$$\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma \tag{4.80}$$

con i coefficienti k_γ interi non negativi. Ovviamente β non può essere un multiplo di α : non è uguale ad α e neanche a $-\alpha$, dato che quest'ultima è una radice negativa. Dunque esiste almeno una radice semplice γ, diversa da α, per la quale k_γ è non nullo. Ora consideriamo :

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - (\beta, \alpha)\alpha \tag{4.81}$$

che restituisce una radice avente come coordianata rispetto a γ ancora k_γ (la radice che otteniamo, rispetto a β, modifica solo la componente rispetto ad α). Avendo una componente positiva, per la condizione B2, deduciamo che $\sigma_\alpha(\beta)$ è una radice positiva ed inoltre è diversa da α (σ_α è una bigezione e solo $-\alpha$ viene mandata in α). Proprio perchè σ_α è una bigezione è ovvio che

$$\sigma_\alpha(\Phi^+ \setminus \{\alpha\}) = \Phi^+ \setminus \{\alpha\}$$

□

Corollario 4.6.2. *Per ogni radice semplice α abbiamo che*

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\beta \succ 0} \beta \tag{4.82}$$

ha come immagine rispetto a σ_α il vettore $\delta - \alpha$

Dimostrazione. Fra le radici postive abbiamo anche α. Per il lemma precedente, σ_α permuta le radici positive diverse da α e dunque, sfruttando la linearità ed il fatto che in δ tutte le radici positive hanno lo stesso coefficiente, ricaviamo :

$$\sigma_\alpha(\delta) = \sigma_\alpha((\sum_{\beta \succ 0, \beta \neq \alpha} \frac{1}{2}\beta) + \frac{1}{2}\alpha) = (\sum_{\beta \succ 0, \beta \neq \alpha} \frac{1}{2}\beta) - \frac{1}{2}\alpha = (\sum_{\beta \succ 0, \beta \neq \alpha} \frac{1}{2}\beta) + \frac{1}{2}\alpha - \alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta \succ 0} \beta - \alpha = \delta - \alpha$$

□

Lemma 4.6.3. *Date le radici semplici* $\alpha_1, \dots, \alpha_t$*, non necessariamente tutte distinte, denotiamo con* σ_i *la riflessione* σ_{α_i}*, al variare di* i *in* $\{1, \dots, t\}$*. Se la radice*

$$\sigma_1(\cdots(\sigma_{t-1}(\alpha_t))\cdots)$$

è negativa allora, per un certo indice $1 \leq s < t$*, abbiamo*

$$\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{s-1} \circ \sigma_{s+1} \circ \cdots \circ \sigma_{t-1}$$

(ossia l'automorfismo non cambia se gli togliamo σ_s *e* σ_t*)*

Dimostrazione. Denotiamo con β_i la radice $(\sigma_{i+1} \circ \cdots \circ \sigma_{t-1})(\alpha_t)$, con $i \in [0, t-2]$, mentre con β_{t-1} denotiamo α_t. Per ipotesi abbiamo $\beta_0 \prec 0$ e $\beta_{t-1} \succ 0$, dato che α_t è una radice semplice. Allora ha senso parlare del più piccolo indice s per il quale β_s è una radice positiva (al più avremo $s = t-1$). Ovviamente, per come abbiamo definito s, si ha che $\sigma_s(\beta_s) = \beta_{s-1}$ è una radice negativa. Dal lemma precedente segue $\alpha_s = \beta_s$ (se così non fosse, β_s dovrebbe essere trasformata in una radice positiva). In generale, per la proposizione 4.2.2, dato un automorfismo $\sigma \in W$, abbiamo $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1}$ per ogni radice α. Nel nostro caso poniamo $\sigma = \sigma_{s+1} \circ \cdots \circ \sigma_{t-1}$ e $\alpha = \alpha_t$. Ma $\sigma(\alpha) = \beta_s = \alpha_s$ dunque abbiamo $\sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma_{\alpha_s} = \sigma_s$ e quindi :

$$\sigma_s = \sigma_{s+1} \circ \cdots \sigma_{t-1} \circ \sigma_t \circ \sigma_{t-1} \circ \cdots \circ \sigma_{s+1} \tag{4.83}$$

in quanto l'inversa di una riflessione è se stessa. Sostituendo l'espressione di σ_s in

$$\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_s \circ \cdots \circ \sigma_{t-1} \circ \sigma_t$$

otteniamo :

$$\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{s-1} \circ \sigma_{s+1} \circ \cdots \sigma_{t-1} \circ \sigma_t \circ \sigma_{t-1} \circ \cdots \circ \sigma_{s+1} \circ \sigma_{s+1} \circ \cdots \circ \sigma_{t-1} \circ \sigma_t$$

la quale, effettuando le semplificazioni, ci conduce al risultato che volevamo dimostrare. □

Corollario 4.6.4. *Sia* σ *un automorfismo di* W *composizione di riflessioni associate a radici semplici*

$$\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t \tag{4.84}$$

dove t *è il più piccolo possibile e* σ_i *indica la riflessione rispetto alla radice semplice* α_i*. Allora* $\sigma(\alpha_t)$ *è una radice negativa*

Dimostrazione. Se per assurdo $\sigma(\alpha_t)$ fosse una radice positiva, allora $\sigma_1(\cdots(\sigma_{t-1}(\sigma_t(\alpha_t)))\cdots) = -\sigma_1(\cdots(\sigma_{t-1}(\alpha_t))\cdots)$ e quindi $\sigma_1(\cdots(\sigma_{t-1}(\alpha_t))\cdots)$ dovrebbere essere negativa. Potremmo allora applicare il lemma precedente, contraddicendo la minimalità di t. □

Teorema 4.6.5. *Sia Φ un sistema di radici nello spazio euclideo E e Δ una sua base. Allora:*

- *a) se γ è un vettore regolare di E esiste $\sigma \in W$ tale che $< \sigma(\gamma), \alpha >$ è strettamente positivo per ogni radice semplice $\alpha \in \Delta$ (l'azione di W sulle camere di Weyl è transitiva);*
- *b) se Δ' è un'altra base di Φ, allora $\sigma(\Delta') = \Delta$ per un certo elemento σ di W (l'azione di W sulle basi di Φ è transitiva);*
- *c) se α è una radice di Φ esiste $\sigma \in W$ tale che $\sigma(\alpha) \in \Delta$;*
- *e) W è generato dalle riflessioni σ_α associate alle radici semplici $\alpha \in \Delta$;*
- *f) se per $\sigma \in W$ si ha $\sigma(\Delta) = \Delta$, allora $\sigma = id_E$ (W agisce in modo semplicemente transitivo sulle basi).*

Dimostrazione. Denotiamo con W' il sottogruppo di W generato dalle riflessioni σ_α associate alle radici semplici $\alpha \in \Delta$. Proviamo le prime tre implicazioni per W' e poi, dimostrando il quarto punto, deduciamo $W' = W$.
(a) Sia δ il vettore $\frac{1}{2}\sum_{\alpha \succ 0} \alpha$. Scegliamo $\sigma \in W'$ tale che $< \sigma(\gamma), \delta >$ sia il più grande possibile (la possibilità di effettuare una tale scelta è assicurata dalla finitezza del gruppo di Weyl).
Se α è un radice semplice allora è ovvio che $\sigma_\alpha \circ \sigma$ è ancora un elemento di W'. Per come abbiamo definito σ, per il fatto che σ_α conserva il prodotto scalare e ha come inversa essa stessa e per il Corollario 4.6.2 possiamo dedurre :

$$< \sigma(\gamma), \delta > \geq < \sigma_\alpha(\sigma(\delta)), \gamma > = < \sigma(\gamma), \sigma_\alpha(\delta) > = < \sigma(\gamma), \delta - \alpha > = < \sigma(\gamma), \delta > - < \sigma(\gamma), \alpha >$$

Questo impone $< \sigma(\gamma), \alpha >$ non negativo per ogni radice semplice α (la radice semplice la avevamo scelta in modo arbitrario).
L'inversa di σ la si ottiene invertendo l'ordine delle riflessioni (associate a radici semplici) che la compongono. Dunque σ^{-1} conserva il prodotto scalare e manda Φ in Φ. Se, per assurdo, avessimo $< \sigma(\gamma), \alpha >= 0$ per una qualche radice semplice α, allora avremmo $< \sigma^{-1}(\sigma(\gamma)), \sigma^{-1}(\alpha) >=< \gamma, \sigma^{-1}(\alpha) >= 0$, che cotraddirebbe la regolarità di γ. Possiamo allora dedurre che $\sigma(\gamma)$ appartiene alla camera di Weyl fondamentale $\Upsilon(\Delta)$, dunque $\sigma(\Upsilon(\gamma)) = \Upsilon(\Delta)$. Se Υ_1 e Υ_2 sono due differenti camere di Weyl, esistono σ_1 e σ_2 appartenenti a W' che mandano Υ_1 e Υ_2 in $\Upsilon(\Delta)$. Dunque $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$ e $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$ fanno passare da Υ_2 a Υ_1 e viceversa. Ricordando come si era definita l'azione di W sulle camere di Weyl, da quanto detto segue la transitività dell'azione.
(b) Siano Δ_1 e Δ_2 due diverse basi di Φ. Essendo f la bigezione fra camere di Weyl e basi, esistono due camere di Weyl differenti, Υ_1 e Υ_2, tali che $f(\Upsilon_1) = \Delta_1$ e $f(\Upsilon_2) = \Delta_2$. Il punto precedente ci dice che esiste un automorfismo $\sigma \in W'$ che agisce sulle camere di Weyl mandando Υ_1 in Υ_2. Dato che f è W-equivariante deduciamo che l'azione di σ sulle basi manda Δ_1 in Δ_2.

(c) Per quanto visto in (b), ci è sufficiente mostrare che ogni radice appartiene ad almeno un base di Φ. Dato che le uniche radici proporzionali ad α sono $\pm\alpha$, se β è una radice diversa da $\pm\alpha$ l'iperpiano P_β non coincide con P_α (altrimenti α e β insieme ad una base di $P_\alpha = P_\beta$ dovrebbero essere indipendenti). Dunque abbiamo che $P_\alpha \cap P_\beta$ è un sottospazio proprio di P_α, quindi al più è un suo iperpiano. L'unione di questi sottospazi intersezione, al variare di β, non ricopre tutto P_α. Allora esiste un vettore γ appartenente a P_α ma non contenuto in nessuno degli iperpiani P_β, al variare delle radici β non proporzionali ad α. Scegliamo γ' regolare e abbastanza vicino a γ in modo tale che $<\gamma', \alpha >= \epsilon > 0$ e $|<\gamma', \beta>| > \epsilon$ per ogni β.
Ne consegue che α appartiene a $\Phi^+(\gamma')$ e non è decomponibile (ossia non la possiamo scrivere come somma di due radici di $\Phi^+(\gamma')$) perchè altrimenti il prodotto scalare fra γ' e α sarebbe maggiore di ϵ.
(d) Per dimostrare che $W' = W$ ci è sufficiente dimostare, per come è definito W, che ogni riflessione associata ad una generica radice α appartiene a W'. Usando i punti b e c, troviamo $\sigma \in W'$ tale che $\sigma(\alpha) = \beta$ è una radice semplice. Allora, per la Proposizione 4.2.2, abbiamo :

$$\sigma_\beta = \sigma_{\sigma(\alpha)} = \sigma \circ \sigma_\alpha \circ \sigma^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_\alpha = \sigma^{-1} \circ \sigma_\beta \circ \sigma$$

e dunque σ_α appartiene a W'.
(e) Supponiamo che l'automorfismo $\sigma \in W$ mandi Δ in se stessa ma sia diverso dall'identità e che σ si esprima come composizione di riflessioni associate a radici semplici nel modo seguente :

$$\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_t$$

dove t è il più piccolo possibile. Ma allora $\sigma(\alpha_t)$ sarebbe una radice positiva (in quanto semplice) in contraddizione con il Corollario 4.6.4. Dunque si deve avere $\sigma = id_E$. Questo implica che l'azione di W sulle basi sia semplicemente transitiva : se σ_1 e σ_2 mandano entrambe la base Δ' nella base Δ'' allora $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$ manda Δ' in se. Dunque $\sigma_1^{-1} \circ \sigma_2$ ossia $\sigma_1 = \sigma_2$. $\square$

4.7 Sistemi di radici irriducibili

Sia Φ un sistema di radici in uno spazio euclideo E. Diremo che Φ è irriducibile se non può essere scomposto nell'unione di due sottoinsiemi propri e disgiunti, Φ_1 e Φ_2, tali che ogni radice di Φ_1 è ortogonale a tutte le radici di Φ_2.
Supponiamo che Δ sia una base di Φ. Mostriamo che Φ è irriducibile se e solo se Δ non può essere partizionato in due sottoinsiemi, Δ_1 e Δ_2, non vuoti, disgiunti e tali che ogni radice semplice di Δ_1 è ortogonale a tutte quelle di Δ_2.
Cominciamo col supporre $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ con $<\Phi_1, \Phi_2>= 0$. A meno che Δ non sia completamente contenuto in uno fra Φ_1 e Φ_2, la partizione su Φ induce una partizione analoga su Δ.
Se $\Delta \subset \Phi_1$ abbiamo $<\Delta, \Phi_2>= 0$ e di conseguenza $<E, \Phi_2>= 0$, in quanto Δ è una base di E.

Questo è un assurdo poichè Φ_2 non contiene vettori nulli, per cui il prodotto scalare di un vettore di Φ_2 per se stesso non potrà mai essere nullo. Lo stesso succede se $\Delta \subset \Phi_2$. Quindi, se Φ non è irriducibile, non lo è neanche Δ : condizione necessaria affinchè Δ sia irriducibile è che lo sia Φ.
Proviamo ora a dimostrare che questa è anche una condizione sufficiente. Sia Φ irriducibile e ipotizziamo per assurdo che Δ non lo sia, dunque :

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \tag{4.85}$$

con Δ_1 e Δ_2 non vuoti, disgiunti e tali che $< \Delta_1, \Delta_2 >= 0$. Per ogni radice $\alpha \in \Phi$, esiste un automorfismo σ di W tale che $\sigma(\alpha)$ è una radice semplice : diremo allora che α è coniugata ad una radice semplice. Indichiamo con Φ_1 e Φ_2 i sottoinsieme di Φ costituiti dalle radici coniugate con elementi di Δ_1 e Δ_2 rispettivamente.
Se α e β sono due radici ortogonali e v un generico vettore di E abbiamo :

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(\sigma_\beta(v)) = \sigma_\alpha(v - 2\frac{< v,\beta >}{< \beta,\beta >}\beta) &= v - 2\frac{< v,\beta >}{< \beta,\beta >}\beta - 2(\frac{< v,\alpha >}{< \alpha,\alpha >} - 2\frac{< v,\beta >< \beta,\alpha >}{< \beta,\beta >< \alpha,\alpha >})\alpha = \\ &= v - 2\frac{< v,\beta >}{< \beta,\beta >}\beta - 2\frac{< v,\alpha >}{< \alpha,\alpha >}\alpha\end{aligned} \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\beta(\sigma_\alpha(v)) = \sigma_\beta(v - 2\frac{< v,\alpha >}{< \alpha,\alpha >}\alpha) &= v - 2\frac{< v,\alpha >}{< \alpha,\alpha >}\alpha - 2(\frac{< v,\beta >}{< \beta,\beta >} - 2\frac{< v,\alpha >< \alpha,\beta >}{< \alpha,\alpha >< \beta,\beta >})\beta = \\ &= v - 2\frac{< v,\alpha >}{< \alpha,\alpha >}\alpha - 2\frac{< v,\beta >}{< \beta,\beta >}\beta\end{aligned} \tag{4.87}$$

ossia σ_α e σ_β commutano. Se la radice α è coniugata con la radice semplice $\alpha' \in \Delta_1$ tramite l'automorfismo σ allora σ^{-1} porta α' in α. Ma W è generato dalle riflessioni associate alle radici semplici e quindi σ^{-1} possiamo scriverlo, per la commutatività detta sopra, mettendo come prime funzioni della composizione le riflessioni associate a radici di Δ_2 (le quali fissano α') e come ultime tutte le riflessioni associate a radici di Δ_1. Queste, agendo su α', restituiscono una combinazione lineare dei vettori di Δ_1. Quindi Φ_1 è contenuto nel sottospazio $E_1 \subset E$ generato da Δ_1. Ragionando in modo analogo deduciamo che Φ_2 è contenuto nel sottospazio $E_2 \subset E$ generato da Δ_2. Questo comporta che Φ_1 e Φ_2 sono mutuamente ortogonali, dato che $< \Delta_1, \Delta_2 >= 0$. Per l'irriducibilità di Φ non può che essere $\Phi_1 = 0$ oppure $\Phi_2 = 0$. Ne consegue $\Delta_1 = 0$ o $\Delta_2 = 0$ (se, ad esempio, Δ_1 non fosse vuoto, allora ogni automorfismo di W manderebbe i suoi elementi in radici di Φ, e quindi queste radici dovrebbero stare in Φ_1). Questo contraddice le ipotesi fatte e dunque se Φ è irriducibile allora lo è anche Δ.

4.8 La matrice di Cartan

Sia Φ un sistema di radici nello spazio euclideo E avente dimensione l, con Δ base di Φ.
Fissiamo un ordine $\alpha_1, ..., \alpha_l$ nelle radici semplici e associamo a Φ una matrice quadrata di ordine l. Essa prende il nome di matrice di Cartan di Φ e, per definizione, ha come elemento di riga i e colonna

j l'intero (α_i, α_j). Dato che le entrate della matrice di Cartan sono degli interi, esse prendono il nome di interi di Cartan di Φ.

Ovviamente la matrice di Cartan dipende dalla scelta della base e dall'ordine fissato in essa.

Se Δ' è un'altra base di Φ allora esiste un unico automorfismo $\sigma \in W$ tale che $\sigma(\Delta) = \Delta'$. Ricordando che gli elementi di W conservano il prodotto scalare, se numeriamo le radici di Δ' secondo l'ordine fissato in Δ, ossia $\alpha'_1 = \sigma(\alpha_1), ..., \alpha'_l = \sigma(\alpha_l)$ allora abbiamo:

$$(\sigma'_i, \sigma'_j) = (\sigma(\alpha_i), \sigma(\alpha_j)) = 2\frac{< \sigma(\alpha_i), \sigma(\alpha_j) >}{< \sigma(\alpha_j), \sigma(\alpha_j) >} = 2\frac{< \alpha_i, \alpha_j >}{< \alpha_j, \alpha_j >} = (\alpha_i, \alpha_j) \tag{4.88}$$

e dunque la matrice di Cartan associata alle due basi è la stessa.

La matrice di Cartan è non singolare : se vogliamo calcolarne il determinante possiamo osservare che dalla colonna j-esima possiamo mettere in evidenza $2/ < \alpha_j, \alpha_j >$ il quale è, per ogni α_j un fattore positivo, in quanto il prodotto scalare è definito positivo. Quindi il determinante della matrice di Cartan concide, a meno di un fattore non nullo (ossia il prodotto, al variare delle radici semplici α_j, di $2/ < \alpha_j, \alpha_j >$), con il determinante della matrice associata al prodotto scalare di E rispetto a Δ. Questo determinante è non nullo in quanto il prodotto scalare è una forma bilineare non degenere.

Calcoliamo ora le matrici di Cartan associate ai sistemi di radici $A_1 \times A_i$, A_2, B_2 e G_2 visti nel paragrafo 4.3 : la base che consideriamo per ognuno è quella vista in conclusione dello stesso paragrafo. Ponendo sempre α come prima radice, utilizziamo le tabelle viste per ogni singolo esempio per dedurre :

$$A_1 \times A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

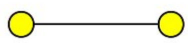
Proposizione 4.8.1. *Siano E, E' due spazi euclidei di dimensione l, con Φ sistema di radici in E e Φ' sistema di radici in E'. Supponiamo di avere fissato la base $\Delta = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ di Φ e la base $\Delta' = \{\alpha'_1, ..., \alpha'_l\}$ di Φ'. Se $(\alpha_i, \alpha_j) = (\alpha'_i, \alpha'_j)$ per ogni $i, j \in \{1, ..., l\}$, allora la bigezione $\alpha_i \mapsto \alpha'_i$ estesa ad E ed E' determina un isomorfismo $\phi : E \to E'$ tale che $\phi(\Phi) = \Phi'$ e $(\phi(\alpha), \phi(\beta) = (\alpha, \beta)$ per ogni coppia di radici α, β di Φ.*
Quindi la matrice di Cartan di Φ determina Φ a meno di isomorfismi.

4.9 Grafico di Coxeter e diagrammi di Dynkin

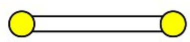
Sia E uno spazio euclideo e Φ un suo sistema di radici.
Se α e β sono radici distinte e non proporzionali di Φ, abbiamo visto che il prodotto $(\alpha, \beta)(\beta, \alpha)$ è positivo e può valere 0, 1, 2 oppure 3. Fissata una base Δ di Φ, il grafico di Coxeter di Φ è un diagramma avente tanti vertici quanti sono gli elementi della base (ossia il numero dei vertici coincide con la dimensione di E), con l'i-esimo vertice congiunto con il j-esimo (ovviamente stiamo considerando $i \neq j$), da $(\alpha_i, \alpha_j)(\alpha_j, \alpha_i)$ fili.
Se fissiamo un'altra base Δ' sappiamo che esiste un unico automorfismo $\sigma \in W$ che manda Δ in Δ' ed inoltre $(\alpha_i, \alpha_j)(\alpha_i, \alpha_j) = (\sigma(\alpha_i), \sigma(\alpha_j)(\sigma(\alpha_j), \sigma(\alpha_i)$ per cui il grafico di Coxeter (a patto di considerare su Δ' l'ordine indotto da quello fissato in Δ) rimane invariato.
Come esempi consideriamo i sistemi di radici, in uno spazio euclideo E bidimensionale, visti nel paragrafo 4.3 per i quali consideriamo sempre con le stesse basi. Allora per $A_1 \times A_1$ i vettori di base sono α e β, con $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = 0$ per cui il grafico di Coxeter risulta :

A1 × A1 

La base di A_2 è costituita dai vettori α, γ. Sappiamo che $(\alpha, \gamma)(\gamma, \alpha) = (-1)(-1) = 1$ e dunque in questo caso il grafico di Coxeter è :

A2 

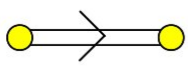
Per $B2$ avevamo scelto la base $\{\alpha, \delta\}$ ed inoltre $(\alpha, \delta)(\delta, \alpha) = (-1)(-2) = 2$. Perciò abbiamo il seguente grafico di Coxeter :

B2 

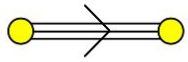
Infine per $G2$ i vettori di base sono α e η con $(\alpha, \eta)(\eta, \alpha) = (-1)(-3) = 3$. Il grafico di Coxeter di $G2$ è :

G2 

Se due radici semplici α, β hanno la stessa norma, allora è evidente che $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ per cui dal grafico di Coxeter possiamo ricavare (α, β) e (β, α) (la radice quadrata del numero dei fili che congiungono α con β).
Se abbiamo radici semplici con norme differenti, il grafico di Coxeter non è in grado, date due radici semplici α,β, di dirci i valori di $\alpha, \beta)$ e (β, α). Ad esempio, nei sistemi di radici $B2$ e $G2$ le due radici di base hanno norme diverse.
Se due radici hanno norma uguale esse sono legate da un filo oppure sconnesse. Infatti se $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$ allora il loro prodotto è un intero positivo che può essere 0, 1, 2 o 3. Se è 0 allora i due fattori sono nulli. Ma se non è 0 non può valere nè 2 nè 3, poichè questi valori non sono il quadrato di nessun intero. Rimane allora il valore 1.
Viceversa, se due radici semplici sono legate da un filo allora esse hanno la stessa norma. Infatti, indicato con θ l'angolo fra le due radici, si ha $\cos^2(\theta) = 1$ e dunque $cos(\theta) = \pm 1/2$. Perciò abbiamo $(\alpha, \beta) = \frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}$ e $(\beta, \alpha) = \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$ a meno del segno (che comunque è uguale per entrambe le quantità). Ma dato che questi due fattori sono interi e che gli unici interi con inverso moltiplicativo sono ± 1, ne consegue che il rapporto fra le norme è uguale ad 1 e quindi le norme coincidono.
Allora, se due radici semplici α,β sono connesse da due o tre fili, esse hanno lunghezza differente. Questo ci invita ad aggiungere, nel grafico di Coxeter, la punta di una freccia diretta verso la più corta fra le due radici α e β. Tale informazione addizionale trasforma i grafici di Coxeter nei cosidetti diagrammi di Dynkin : quest'ultimo ci consente di determinare gli interi di Cartan dal grafico di Coxeter.
Il prodotto sacalare fra due radici semplici, α e β, è non positivo e dunque neanche (α, β) e (β, α) lo sono. Se le due radici non sono connesse allora $(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta) = 0$; se sono connesse da un filo allora $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha) = -1$. Dalla tabella vista nel paragrafo sulle coppie di radici deduciamo che se le radici sono connesse da due fili e β ha norma maggiore di quella di α, allora $(\alpha, \beta) = -1$ mentre $(\beta, \alpha) = -2$. Infine se le radici sono legate da tre fili e $\| \alpha \| < \| \beta \|$ allora abbiamo $(\alpha, \beta) = -1$ e $(\beta, \alpha) = -3$.
I diagrammi di Dynkin di $A_1 \times A_1$ e A_2 coincidono con i rispettivi grafici di Coxeter in quanto le radici sono sconnesse nel primo caso e legate da un filo nel secondo. Il diagramma di Dynkin di B_2 differisce dal suo grafico di Coxeter :

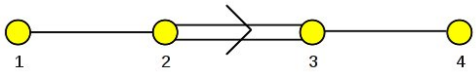
B2 

dove il vertice a sinistra rappresenta δ e quello a destra α (infatti la norma di α è più piccola rispetto a quella di δ. Anche il diagramma di Dynkin di G_2 varia rispetto al grafico di Coxeter

G2 

con il vertice a sinistra che rappresenta η e quello a destra che rappresenta α ($\| \alpha \| < \| \eta \|$). Concludiamo il paragrafo con un esempio pratico di come dal digramma di Dynkin si possa risalire alla matrice di Cartan e con un importante risultato di cui non riportiamo la dimostrazione (si veda [4] a pagina 122).

Prendiamo il seguente digramma di Dynkin :

F4 

Per quanto riguarda la prima riga abbiamo :

- $(\alpha_1, \alpha_1) = 2$
- $(\alpha_1, \alpha_2) = -1$
- $(\alpha_1, \alpha_3) = 0$
- $(\alpha_1, \alpha_4) = 0$

e in modo analogo ricaviamo gli interi della quarta riga

- $(\alpha_4, \alpha_1) = 0$
- $(\alpha_4, \alpha_2) = 0$
- $(\alpha_4, \alpha_3) = -1$
- $(\alpha_4, \alpha_4) = 2$

Dato che il diagramma di Dynkin ci dice che la norma di α_2 è maggiore di quella di α_3 la seconda riga ha le entrate :

- $(\alpha_2, \alpha_1) = -1$
- $(\alpha_2, \alpha_2) = 2$
- $(\alpha_2, \alpha_3) = -2$
- $(\alpha_2, \alpha_4) = 0$

ed infine la terza

- $(\alpha_3, \alpha_1) = 0$
- $(\alpha_3, \alpha_2) = -1$
- $(\alpha_3, \alpha_3) = 2$
- $(\alpha_3, \alpha_4) = -1$

La matrice di Cartan risultante è quindi :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposizione 4.9.1. *Siano Φ e Φ' due sistemi di radici negli spazi euclidei, rispettivamente, E ed E'. Se questi due sistemi di radici sono isomorfi allora hanno lo stesso diagramma di Dynkin e viceversa.*

4.10 Componenti irriducibili

Abbiamo detto che un sistema di radici Φ, nello spazio euclideo E, si dice irriducibile se non può essere partizionato in due sottoinsiemi non vuoiti di Φ, aventi intersezione nulla e mutuamente ortogonali (ogni vettore di un sottoinsieme è ortogonale a tutti i vettori dell'altro insieme). Inoltre, data una base Δ di Φ, essa è irriducibile (definizione analoga a quella vista per Φ) se e solo se Φ è irriducibile.
Diremo che il grafico di Coxeter di un sistema di radici è connesso se ogni suo vertice è connesso (perlomeno con un filo) ad almeno un altro vertice e se non ci sono sottoinsiemi di vertici che non hanno nessuna connessione con quelli restanti. La stessa definizione possiamo darla per i diagrammi di Dynkin, ed è ovvio che un grafico di Coxeter di un sistema di radici Φ è connesso se e solo se lo è il diagramma di Dynkin di Φ.
Facendo uso della topologia, possiamo vedere i vertici di un grafico di Coxeter (diagramma di Dynkin) come punti di $\mathbb{R}^2$ e i fili che li uniscono come rette : il grafico è connesso se l'insieme dei vertici è connesso per archi.
Vogliamo dimostrare che una base Δ del sistema di radici Φ nello spazio euclideo E è irriducibile se e solo se il diagramma di Dynkin di Φ è connesso.
Partiamo con supporre Δ irriducibile. Se, per assurdo, esistesse un vertice α non connesso a nessun altro allora $(\alpha, \beta) = 2 < \alpha, \beta > / < \beta, \beta >$ sarebbe nullo per ogni altra radice semplice β e quindi avremmo $< \alpha, \beta >= 0$. Dunque potremmo decomporre Δ in due insiemi : in uno mettiamo solo α e nell'altro le radici semplici rimanenti. Questi due sottoinsiemi sono non vuoti, con intersezione nulla e mutuamente ortogonali. Ma questo contraddice l'irriducibilità di Δ. Allo stesso modo, supponiamo

che tutti i vertici siano legati da perlomeno un filo ad almeno un altro vertice ma esista un sottoinsieme di radici semplici $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_h\}$ non aventi nessuna connessione con i restanti vertici $\{\alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_n\} = \{\beta_{h+1}, \ldots, \beta_n\}$ (n è la dimensione di E). Anche in questo caso Δ sarebbe riducibile in quanto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_h\}$ e $\{\beta_{h+1}, \ldots, \beta_n\}$ sono non vuoti, con intersezione nulla e mutuamente ortogonali.
Viceversa, supponiamo che il diagramma di Dynkin di Φ sia connesso. Se, per assurdo, Δ fosse riducibile, ossia $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$, avremmo i vertici di Δ_1 non connessi a nessuno dei vettori di Δ_2. Ma in questo modo viene contraddetta la connessione del diagramma di Dynkin.
In generale i diagrammi di Dynkin sono costituiti da un un numero finito t di sottodiagrammi connessi (a questo gruppo di vertici si applica la definizione data per la connessione dei diagrammi di Dynkin). Se il diagramma di Dynkin è connesso allora $t = 1$ altrimenti abbiamo $t \geq 2$.
Da questo momento fissiamo un sistema di radici Φ nello spazio euclideo E e una sua base Δ. La partizione in sottodiagrammi connessi (la possiamo sempre fare, il caso limite è quello in cui ci sia un sottografico connesso per ogni vertice) determina una partizione di Δ, ossia :

$$\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \ldots \Delta_t \tag{4.89}$$

con Δ_i che contiene i vertici appartenenti all'i-esimo sottodiagramma connesso. I Δ_i sono non vuoti, a due a due disgiunti e mutuamente ortogonali.
Sia E_i il sottospazio vettoriale di E generato da Δ_i. Ovviamente la somma $E_1 + E_2 + \cdots + E_t$ di questi sottospazi coincide con E. Se prendiamo E_i ed E_j (con $i \neq j$) la loro intersezione è costituita dal solo vettore nullo. Infatti un vettore che appartiene all'intersezione si scrive sia come combinazione lineare dei vettori di Δ_i, sia come combinazione lineare dei vettori di Δ_j. L'uguaglianza fra queste due combinazioni e l'indipendenza dei vettori di $\Delta_i \cup \Delta_j$ impone che tutti i coefficienti delle due combinazioni lineari siano nulli. Dunque abbiamo :

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_t \tag{4.90}$$

con E_i ortogonale ad E_j se $i \neq j$.
Denotiamo con Φ_i l'insieme delle radici di Φ contenute in E_i, con $i \in \{1, \ldots, t\}$. Ognuno degli E_i è uno spazio euclideo con il prodotto scalare indotto. Vogliamo dimostrare che Φ_i è un sistema di radici in E_i. I vettori di Φ_i sono in numero finito (Φ_i è un sottoinsieme di Φ che è costituito da un numero finito di vettori), generano E_i (abbiamo $\Delta_i \subset \Phi_i$ e nessuno dei vettori è nullo (il vettore nullo non è contenuto in Φ). Quindi la condizione R1 è verificata. Ma anche la condizione R4 risulta soddisfatta : se α e β sono due radici di Φ_i allora (α, β) è un intero in quanto α e β sono prima di tutto radici di Φ.
Se $\alpha \in \Phi_i$ allora anche $-\alpha$ appartiene a Φ_i e quest'ultimo insieme non contiene nessun altro multiplo di α (perchè in Φ stesso non ci sono altri multipli di α). Inoltre l'iperpiano P'_α di E_i (iperpiano associato ad $\alpha \in E_i$) è un sottospazio di P_α essendo in esso contenuto. La riflessione σ'_α prende un vettore

$\beta \in E_i$ e gli associa :

$$\beta - (\beta, \alpha)(\alpha, \alpha)\alpha \in E_i \tag{4.91}$$

e dunque è semplicemente la restrizione ad E_i di σ_α Allora se anche β appartiene a Φ_i, abbiamo che $\sigma'_\alpha(\beta)$ è una radice di Φ appartenente ad E_i, dunque contenuta in Φ_i. Perciò Φ_i soddisfa anche le condizioni R2 e R4. Possiamo allora concludere che esso è un sistema di radici di E_i.
Il gruppo di Weyl di Φ_i, che denotiamo con W_i, è costituito dalle restrizioni ad E_i degli automorfismi di W generati dalle riflessioni associate ad elementi di Φ_i.
Ogni elemento $\sigma \in W$ manda E_i in sè stesso. Ci basta dimostrare che quanto detto è verificato per le riflessioni associate alle radici semplici di Φ, dato che esse generano W. Sia β una radice semplice e α un vettori di Δ_i. Se $\beta \in \Delta_i$ è ovvio che $\sigma_\beta(\alpha)$ è contenuto in E_i e quindi che σ_β manda E_i in se stesso. Se invece β non appartiene a Δ_i allora abbiamo :

$$\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - (\alpha, \beta)\beta = \alpha \tag{4.92}$$

ossia σ_β ristretta a E_i è l'identità.
Quanto appena dimostrato fa si che le riflessioni associate ad ogni radice di Φ mandino E_i in E_i al variare di i in $\{1, \ldots, t\}$. Per concludere il ragionamento ci è utile il seguente risultato generale : se E' è un sottospazio dello spazio euclideo E e la riflessione σ_α (con α elemento non nullo di E) manda E' in E' allora $\alpha \in E'$ oppure $E' \subset P_\alpha$. Infatti, dato $\beta \in E'$ abbiamo :

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - (\beta, \alpha)\alpha = \gamma \in E' \qquad \Rightarrow \qquad \beta - \gamma = (\beta, \alpha)\alpha \in E' \tag{4.93}$$

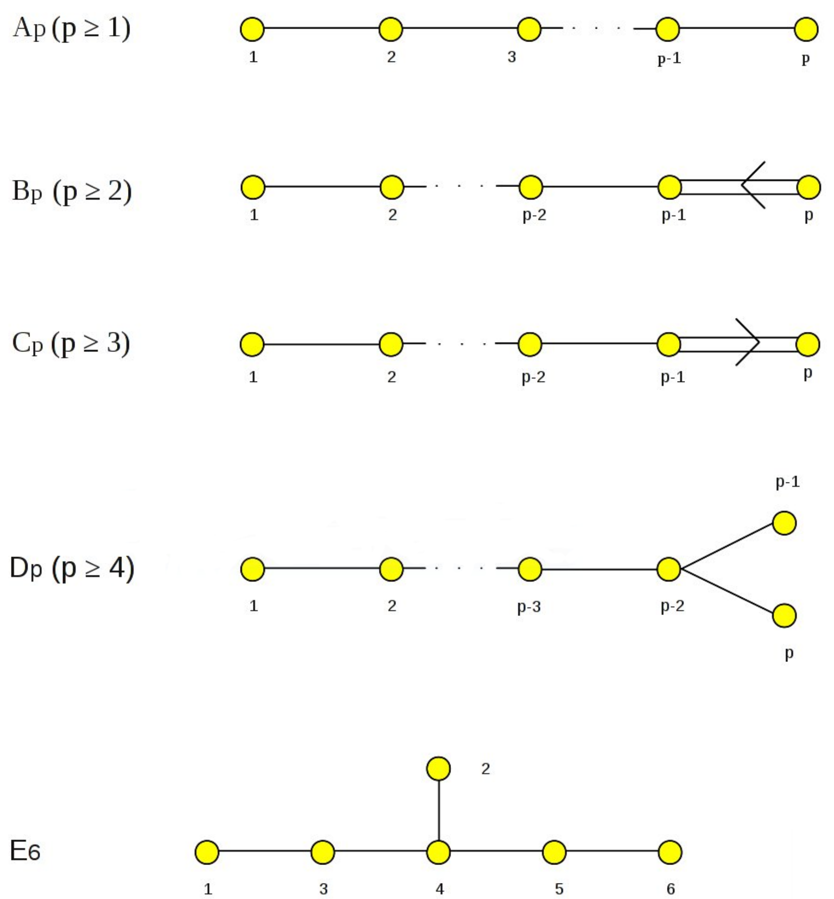
Allora possiamo avere $\alpha \in E'$ mentre,se α non è un vettore di E', $(\beta, \alpha)\alpha$ deve necessariamente essere il vettore nullo e quindi, dato che β lo abbiamo scelto in modo arbitrario, abbiamo $(\beta, \alpha) = 0$ per ogni $\beta \in E'$ da cui consegue $E' \subset P_\alpha$.
Se α è una radice di Φ, dato che $\sigma_\alpha(E_i) = E_i$ per ogni $i \in \{1, \ldots, t\}$ e non tutti gli E_i possono essere contenuti in P_α (altrimenti avremmo l'assurdo $E \subset P_\alpha$), α deve essere contenuta in uno degli E_i. Dunque possiamo concludere che $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \cdots \cup \Phi_t$.

Capitolo 5

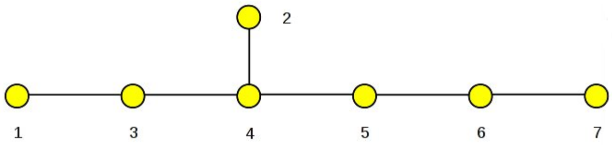
Teorema di Classificazione

Ci accingiamo a dimostrare l'importante teorema di classificazione dei diagrammi di Dynkin di sistemi di radici. Quanto visto nel paragrafo 4.10 ci suggerisce che è sufficiente classificare i sistemi di radici irriducibili e quindi, equivalentemente, i diagrammi di Dynkin connessi.

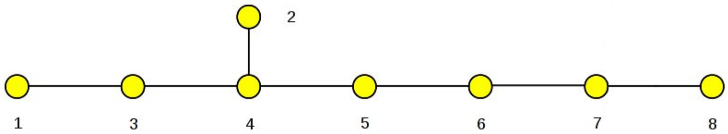
Teorema 5.0.1. *Sia Φ un sistema di radici nello spazio euclideo E. Supponiamo che E abbia dimensione p e che Φ sia irriducibile. Allora il diagramma di Dynkin di Φ è uno dei seguenti :*



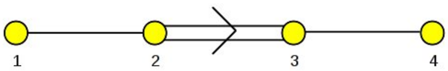
E7



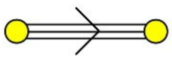
E8



F4



G2



Prima di procedere con la dimostrazione è importante soffermarci su alcune osservazioni.
Le restrizioni su p nei casi B_p. C_p, D_p sono poste per evitare doppioni. Se prendiamo B_p, C_p, D_p con $p = 1$ ricadiamo nel caso A_1 (per uno solo vertice si ha una sola possibilità) ; se consideriamo C_p nel caso in cui p sia uguale a 2 ricadiamo nella situazione rappresentata da B_2 poichè il fatto che la freccia sia invertita non cambia la sostanza delle cose; i casi D_2 e D_3 concidono, rispettivamente, con i casi A_2 e A_3.
A parte i casi B_p e C_p, i digrammi di Dynkin elencati coincidono coi corrispondenti grafici di Coxeter.
I casi B_p e C_p hanno gli stessi grafici di Coxeter ma differiscono per il numero di radici lunghe e radici corte : per B_p le radici sono tutte lunghe tranne una, per C_p è il contrario.
Le matrici associate ai digrammi di Dynkin elencati nell'enunciato sono :

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F_4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. Sia E uno spazio euclideo di dimensione p e $U = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ un insieme di n vettori ($n \leq p$) indipendenti e con norma unitaria. Supponiamo che $< \epsilon_i, \epsilon_j >$ sia non positivo ogni volta che i è diverso da j ed inoltre si abbia $4 < \epsilon_i, \epsilon_j >^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Un sottoinsieme di uno spazio euclideo con le caratteristiche di U si dice ammissibile. Ad U associamo un grafico Γ : identifichiamo ogni elemento di U con un vertice e il vertice che rappresenta ϵ_i lo colleghiamo con quello che rappresenta ϵ_j con $4 < \epsilon_i, \epsilon_j >^2$ fili. Dato che il grafico definito è dello stesso tipo dei grafici di Coxeter, possiamo estendere a Γ la definizione di grafico connesso.

Prendiamo un sistema di radici $\Phi \subset E$ e ne scegliamo una base $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$. Dividiamo ogni radice semplice per la sua norma ottenendo un nuovo sottoinsieme Δ' di E. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sono indipendenti, continuano ad esserlo se sostituiamo ognuno di essi con un multiplo non nullo, dunque Δ' è un insieme di vettori indipendenti ed unitari. Il prodotto scalare fra due suoi elementi

$$< \frac{\alpha_i}{\| \alpha_j \|}, \frac{\alpha_i}{\| \alpha_j \|} >= \frac{1}{\| \alpha_i \| \cdot \| \alpha_j \|}(< \alpha_i, \alpha_j >) \leq 0 \tag{5.1}$$

è non positivo poichè il fattore a sinistra è positivo mentre quello a destra è non positivo per il lemma 4.5.1.

Inoltre, se $i \neq j$ e θ è l'angolo compreso fra α_i e α_j, abbiamo :

$$4 < \frac{\alpha_i}{\| \alpha_j \|}, \frac{\alpha_i}{\| \alpha_j \|} >^2 = 4\frac{1}{\| \alpha_i \|^2 \cdot \| \alpha_j \|^2}(< \alpha_i, \alpha_j >^2) = 4\frac{\| \alpha_i \|^2 \cdot \| \alpha_j \|^2}{\| \alpha_i \|^2 \cdot \| \alpha_j \|^2}(\cos^2 \theta) = (\alpha_i, \alpha_j)(\alpha_j, \alpha_i)$$

ossia $4 < \frac{\alpha_i}{\|\alpha_j\|}, \frac{\alpha_i}{\|\alpha_j\|} >^2$ appartiene a $\{0, 1, 2, 3\}$.

Ciò significa che Δ' è un sottoinsieme ammissibile di E ed inoltre il grafico Γ di Δ' coincide col grafico di Coxeter di Φ.

Vogliamo ora classificare tutti i possibili grafici Γ connessi e, lo sottolineiamo, questi grafici contengono tutti i possibili grafici di Coxeter. La classificazione dei grafici Γ ci dice come possono essere i grafici di Coxeter ma non tutti i grafici Γ (per ora!) sono grafici di Coxeter.

Da questo momento procediamo per passi, con l'ipotesi che il grafico Γ sia connesso.

(1) Se da U togliamo alcuni vettori, i rimanenti formano ancora un un sottoinsieme ammissibile (viene conservata l'indipendenza ed ovviamente anche le due condizioni sui prodotti scalari). Il grafico Γ di quanto rimane si ottiene eliminando i vertici dei vettori che sono stati scartati, compresi i fili da essi uscenti. (2) Dimostriamo che il numero di coppie di vertici fra loro connessi da almeno un filo nel grafico Γ, è inferiore ad n. Consideriamo il vettore :

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \tag{5.2}$$

Dato che i vettori ϵ_i sono linearmente indipendenti è ovvio che ϵ è non nullo (tutti i coefficienti della combinazione lineare sono uguali ad 1). Essendo il prodotto scalare definito positivo abbiamo che $< \epsilon, \epsilon >$ è positivo :

$$< \epsilon, \epsilon >=< \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i, \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j >= \sum_{i,j=1}^{n} < \epsilon_i, \epsilon_j >= \sum_{k=1}^{n} < \epsilon_k, \epsilon_k > + \sum_{i<j} 2 < \epsilon_i, \epsilon_j >= n + 2\sum_{i<j} < \epsilon_i, \epsilon_j >$$

La scomposizione della sommatoria è dovuta al fatto che, se per $< \epsilon_i, \epsilon_j >$ si ha $i \neq j$, allora o i è minore di j oppure viceversa. Se $i < j$ l'addendo è compreso nella seconda sommatoria, se $i > j$ allora $< \epsilon_i, \epsilon_j >=< \epsilon_j, \epsilon_i >$ e quindi ci basta moltiplicare ogni addendo per 2.

Se due differenti vertici, ϵ_i ed ϵ_j con $i \neq j$, sono legati da almeno un filo, ossia $< \epsilon_i, \epsilon_j > \neq 0$, allora $4 < \epsilon_j, \epsilon_i >^2 \in \{1, 2, 3\}$. Ne consegue $2 < \epsilon_i, \epsilon_j > \leq -1$, in quanto il prodotto scalare è negativo e se il valore assoluto di $2 < \epsilon_i, \epsilon_j >$ fosse strettamente minore di uno anche il quadrato lo dovrebbe essere mentre deve essere perlomeno uguale ad 1. Dato che $< \epsilon, \epsilon >$ è positivo, le coppie di vertici legate da almeno un filo non possono essere più di $n-1$, altrimenti avremmo $< \epsilon, \epsilon > \leq 0$. Osserviamo che non è detto ci siano esattamente $n-1$ coppie di questo tipo.

(3) Γ non contiene cicli. Con ciclo intendiamo un sottoinsieme $U' = \{\nu_1, \ldots, \nu_q\}$ tali che ν_1 è connesso con almeno un filo a ν_2, ν_2 è connesso con almeno un filo a ν_3,...,ν_{q-1} è connesso con almeno un filo a ν_q ed infine ν_q è connesso con almeno un filo ν_1.

Anche per la definizione di ciclo possiamo avere un approccio topologico : i vertici di U' devono essere connessi per archi ma il loro insieme non deve essere semplicemente connesso.

Se esistessero cicli, essendo U' non sottoinsieme ammissibile per il passo 1, allora in esso ci sarebbero q coppie di vertici connessi fra loro da almeno un filo (una coppia per ogni elemento di U') contraddicendo il passo 2.

(4) Mostriamo ora cha da ogni vertici di Γ possono partire al più 3 fili.

Sia ϵ un generico vertice e $\eta_i, \ldots, \eta_k$ i vettori di U ad esso legati da almeno un filo. Dunque abbiamo $< \epsilon, \eta_i >$ minore di 0, al variare di i fra 1 e k. Due vettori η_i, η_j, con $i \neq j$, non possono essere connessi perchè altrimenti formerebbero un ciclo con ϵ, contraddicendo il passo 3. Quindi $< \eta_i, \eta_j >= 0$ ogni volta che i è diverso da j. I vettori $\epsilon, \eta_1, \ldots, \eta_k$ appartengono ad U e sono fra loro tutti differenti : essi sono indipendenti. Consideriamo il sottospazio vettoriale W generato da quest vettori. I vettori $\eta_i, \ldots, \eta_j$ sono unitari e fra loro ortogonali : per il processo di ortonormalizzazione di Graham-Schimdt esiste un vettore unitario η_0, contenuto in W, che forma con $\eta_i, \ldots, \eta_j$ una base ortonormale. Ovviamente η_0 non è ortogonale a ϵ altrimenti sarebbe ortogonale a W e quindi dovrebbe essere il vettore nullo ($W \cap W' = 0$) contrariamente al fatto che ha norma unitaria. Le componenti di ϵ rispetto alla base ortonormale fissata in W si ottengono mediante il prodotto scalare, ossia :

$$\epsilon = \sum_{i=0}^{k} < \epsilon, \eta_i > \eta_i \tag{5.3}$$

Ma ϵ è un vettore di U dunque ha norma unitaria. Da questo consegue :

$$1 =< \epsilon, \epsilon >=< \sum_{i=0}^{k} < \epsilon, \eta_i > \eta_i, \sum_{j=0}^{k} < \epsilon, \eta_j > \eta_j >= \sum_{i,j=0}^{k} < \epsilon, \eta_i >< \epsilon, \eta_j >< \eta_i, \eta_j >= \sum_{i=0}^{k} (< \epsilon, \eta_i >)^2$$

Dato che $< \epsilon, \eta_0 > \neq 0$ ne deduciamo :

$$\sum_{i=1}^{k} (< \epsilon, \eta_i >)^2 < 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{i=1}^{k} 4(< \epsilon, \eta_i >)^2 < 4 \tag{5.4}$$

Ma $4(<\epsilon, \eta_i>)^2$ sono i fili che collegano ϵ con η_i. Se facciamo la sommatoria al variare di i otteniamo che tutti i fili uscenti da ϵ sono al più 3.

(5) L'unico grafico Γ connesso che ammette un vertice da cui partono 3 fili è :

G2 

ossia il caso G_2. Se, infatti, ci fossero altri vertici i primi due non potrebbero essere connessi a nessuno di essi per il passo 4 e quindi Γ non sarebbe connesso.

(6) Supponiamo che il sottoinsieme $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\} \subset U$ abbia il sotto grafico seguente :

che chiamiamo catena semplice in Γ. Consideriamo il vettore $\epsilon = \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i$ e mostriamo che l'insieme $U' = (U \setminus \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k\} \cup \{\epsilon\}$ è ammissibile.

Che i vettori di U' siano indipendenti segue dal fatto che una combinazione lineare dei vettori di U' non è altro che che una combinazione lineare dei vettori di U e quindi i coefficienti devono essere tutti nulli.

Per $i \in [1, k-1]$ abbiamo che $4(<\epsilon_i, \epsilon_{i+1})^2 = 1$ e dunque $2(<\epsilon_i, \epsilon_{i+1}) = -1$. Pertanto abbiamo :

$$<\epsilon, \epsilon> = <\sum_{i=1}^{k} \epsilon_i, \sum_{j=1}^{k} \epsilon_j> = k + 2\sum_{i<j} <\epsilon_i, \epsilon_j> = k - (k-1) = 1 \tag{5.5}$$

dato che i prodotto scalari $<\epsilon_i, \epsilon_j>$ sono non nulli solo per $j = i+1$. Dunque anche ϵ è un vettore unitario. Inoltre il prodotto scalarementedi ϵ per un altro vettore di U' è non positivo in quanto somma di addendi non positivi.

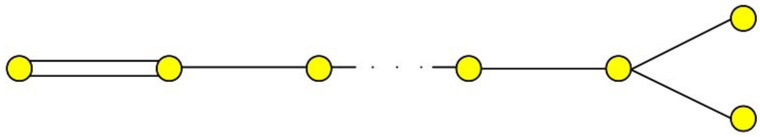
Ogni vettore $\eta \in U'$ diverso da ϵ può essere connesso con almeno un filo al più ad uno fra gli $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ perchè altrimenti si formerebbe un ciclo in contraddizione col passo 3. Pertanto si possono avere due casi:

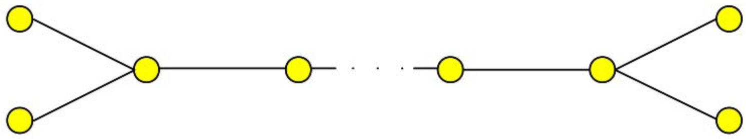
- $<\epsilon, \eta> = 0$ se η non è connesso a nessuno degli $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$;
- $<\epsilon, \eta> = <\epsilon_i, \eta>$ per un $i \in [i, k]$.

In entrambi i casi si ha che $4(<\epsilon, \eta)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$. Per i vettori di U' diversi da ϵ questa proprietà è ovvia.

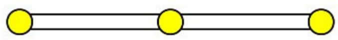
Abbiamo quindi verificato U' è un sottoinsieme ammissibile ed inoltre il suo grafico Γ' si ottiene da Γ schiacciando la catena semplice su uno dei suoi vertici (infatti quello U' si ottiene da U sostituendo $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k$ con la loro somma ϵ).

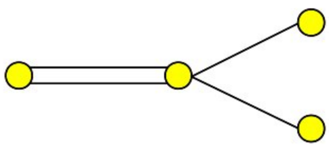
(7) Γ non può contenere sottografici del tipo :

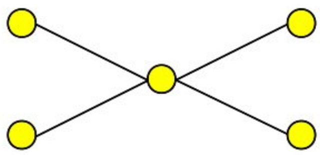




Supponiamo che Γ contenga uno di questi sottografici. Allora per il passo 1 esso è il grafico del sottoinsieme ammissibile formato dai vertici del sottografico. Per quanto visto nel passo 6 possiamo rimpiazzare la catena semplice con un unico vertice ottenendo ancora il grafico di un insieme ammissibile. I grafici ottenuti sono della forma :

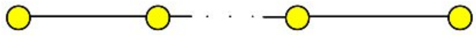




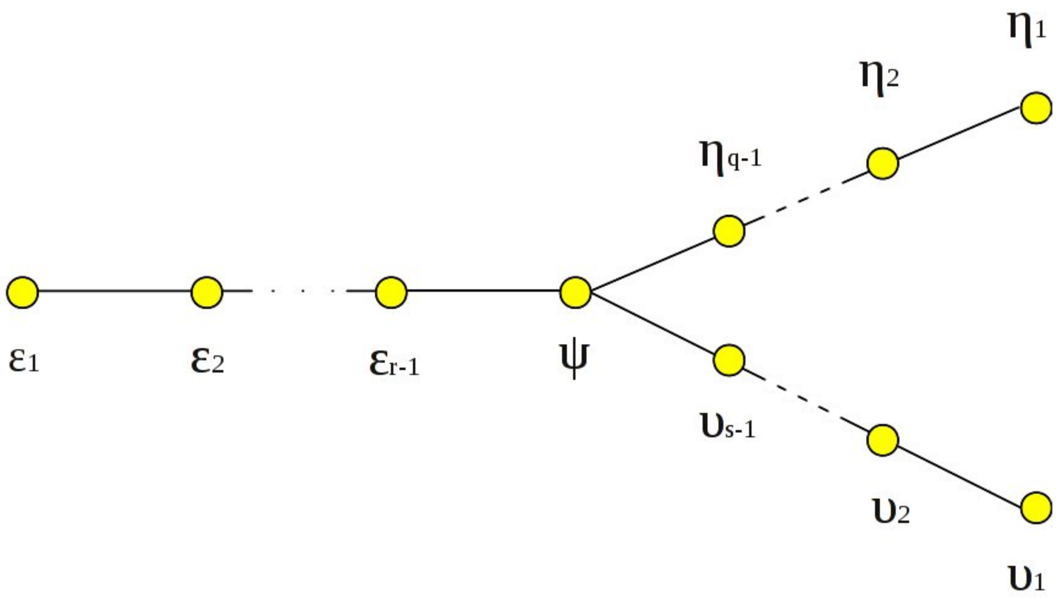


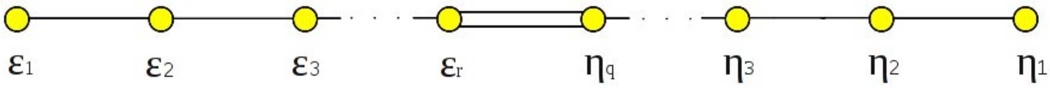
che è un assurdo in quanto contraddice il passo 4 dato che contengono un vertici da cui partono 4 fili.

(8) Mostriamo ora che ogni grafico Γ connesso è di una delle forme seguenti :

(i) 

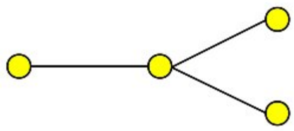
(ii) 

(iii) 

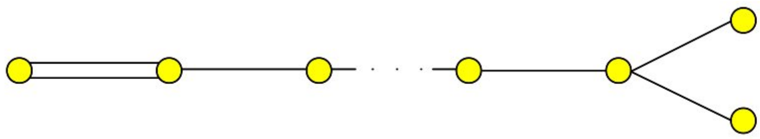
(iv) 

Abbiamo visto nel passo 5 che il grafico (ii) è l'unico grafico Γ connesso avente un vertice da cui partono 3 fili.
Un grafico Γ connesso che contiene più di una coppia di vertici legati da 2 fili contiene un sottografico della forma

Per dimostrare questa affermazione, partiamo da una coppia di vertici, ϵ_1 e ϵ_2, legati da 2 fili. Uno di essi (supponiamo ϵ_2) deve essere legato con un filo ad un terzo vertice ϵ_3 dato che Γ è connesso e contiene perlomeno 4 vertici per l'ipotesi fatta. Prendiamo un quarto vertice ϵ_4 a cui i primi tre vertici sono collegati (deve succedere altrimenti Γ non sarebbe connesso). Esso può essere legato con due fili a ϵ_3, e quindi abbiamo concluso, oppure essere legato con un filo a ϵ_1 o ϵ_3. Alla fine di questo passaggio possiamo avere due catene semplici (una con primo vertice ϵ_1 e l'altra con primo vertice ϵ_2) oppure una catena semplice (con primo vertice in ϵ_1 oppure in ϵ_2). Se ci sono solo 5 vertici, il quinto deve essere legato con due fili all'ultimo vertice di una delle catene semplici (con due fili non può essere legato, per il punto 4, ad ϵ_1, ϵ_2 e ad uno dei vertici "intermedi" delle catene semplici)e dunque abbiamo concluso. Se invece i vertici sono più di 5 deve comunque esistere un quinto vertice ϵ_5 connesso ad uno dei primi 4. Se è connesso con doppio filo lo sarà con l'ultimo vertice delle catene semplici e anche in questo caso abbiamo concluso. Se invece è legato con un solo filo allora deve ugualmente essere necessariamente con l'ultimo vertice di una delle catene : non può essere legato ad ϵ_1 ed ϵ_2, ma neanche ad uno dei vertici intermedi delle catene semplici altrimenti si crea un nodo

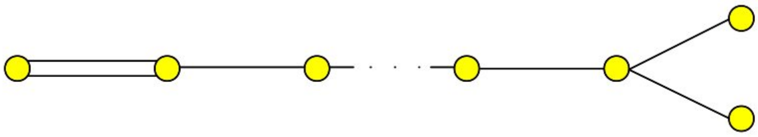


e ricadiamo nel sottografico



vietato dal punto 7. Iterando il ragionamento, dato che i vertici di Γ sono finiti, dobbiamo necessariamente arrivare, con una delle due catene semplici, alla seconda coppia unita da due fili (ad essere precisi arriviamo ad uno dei vertici della coppia a cui poi l'altro vertice si lega con due fili). Abbiamo dimostrato quanto volevamo, ma il sottografico che deve contenere Γ è vietato dal passo 7 dunque Γ ammette al massimo una coppia di vertici legati da 2 fili.

Se Γ ha una coppia di vertici legati da 2 fili non può avere un nodo. Come prima, supponiamo che Γ contenga un nodo e partiamo dalla coppia di vertici, ϵ_1 e ϵ_2, legati da 2 fili. Uno di essi (supponiamo ϵ_2) deve esere legato con un filo ad un terzo vertice ϵ_3 dato che Γ è connesso e contiene perlomeno 5 vertici per l'ipotesi fatta. Se ϵ_3 è uno dei vertici del nodo abbiamo concluso. Altrimenti procediamo prendendo un quarto vertice ϵ_4 a cui i primi tre vertici sono collegati (deve succedere altrimenti Γ non sarebbe connesso). Esso può essere legato con un filo a ϵ_1 o ϵ_3. Se ϵ_4 è uno dei vertici del nodo ci fermiamo altrimenti andiamo avanti osservando che alla fine di questo passaggio possiamo avere due catene semplici (una con primo vertice ϵ_1 e l'altra con primo vertice ϵ_2) oppure una catena semplice (con primo vertice in ϵ_1 oppure in ϵ_2). Sempre per la connessione di Γ deve esistere un quinto vertice ϵ_5 connesso ad uno dei primi 4. Esso è legato con un solo filo con l'ultimo vertice di una delle catene semplici : non può essere legato ad ϵ_1 ed ϵ_2, ma neanche ad uno dei vertici intermedi delle catene semplici altrimenti si crea un nodo, situazione vietata dal passo 7. Iterando il ragionamento, dato che i vertici di Γ sono finiti, con una delle due catene semplici arriviamo ad uno dei vertici del nodo. Ricadiamo allora nel sottografico :



che è ancora vietato dal passo 7.

Allora possiamo dire che se Γ contiene due vertici legati da due fili esso non può che essere della tipologia (ii) (il ragionamento che si fa è identico ai due precedenti, soltanto che non si incontrano mai nodi ne coppie di vertici legati da due fili, quindi ad ogni passo un vertice si collega all'ultimo vertice di una delle catene semplici che partono da ϵ_1 o da ϵ_2, la coppia di vertici legati da due fili).

Se invece Γ ha che i vertici sono legati fra loro con solo un filo e non ci sono nodi, Γ non può che essere della forma (i) (sempre lo stesso modo di ragionare, questa volta partendo da un vertice). Infine vediamo cosa capita se Γ contiene un nodo. Siano ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 e ϵ_4 i punti del nodo. Prendiamo un quinto vertice ϵ_5 connesso ad uno dei vertici del nodo. Esso deve necessariamente essere connesso con un filo ad un fra ϵ_1,ϵ_3 e ϵ_4 (da ϵ_2 partono già tre fili). Un sesto vertice collegato ad uno dei primi cinque sarà legato con un filo o a ϵ_5 o ad uno dei due vertici fra ϵ_1,ϵ_3 e ϵ_4 al quale non abbiamo legato ϵ_5. In questo modo, ad ogni passo, aggiungiamo un vertice legato con un filo all'ultimo vertice delle catene semplici che partono da ϵ_1,ϵ_3 e ϵ_4. Quindi in questo caso il grafico di Γ è della forma (ii).

(9) Se il grafico connesso Γ è del tipo (ii) allora è il grafico di Coxeter F_4 o il grafico di Coxeter $B_p = C_p$.

Dato che siamo in uno spazio euclideo, quindi uno spazio vettoriale reale, ha senso considerare le conmbinazioni lineari

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{r} i\epsilon_i \qquad ; \qquad \eta = \sum_{j=1}^{q} j\eta_j \tag{5.6}$$

aventi come coefficienti dei numeri interi. Per ipotesi abbiamo :

$$4(<\epsilon_i, \epsilon_{i+1}>)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2(<\epsilon_i, \epsilon_{i+i}>) = -1 \qquad con \quad i = 1, 2, \ldots, r-1 \tag{5.7}$$

$$4(<\eta_j, \eta_{j+1}>)^2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 2(<\eta_j, \eta_{j+i}>) = -1 \qquad con \quad j = 1, 2, \ldots, q-1 \tag{5.8}$$

$$4(<\epsilon_r, \eta_q>)^2 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad (<\epsilon_r, \eta_q>)^2 = \frac{1}{2} \tag{5.9}$$

mentre tutte le altre coppie di vertici sono ortogonali (in quanto non connesse da nessun filo). Ne consegue :

$$<\epsilon, \epsilon> = <\sum_{i=1}^{r} i\epsilon_i, \sum_{k=1}^{r} k\epsilon_k> = \sum_{i,k=1}^{r} ik <\epsilon_i, \epsilon_k> = \sum_{i}^{r} (i)^2 <\epsilon_i, \epsilon_i> +2\sum_{i=1}^{r-1} i(i+1) <\epsilon_i, \epsilon_{i+1}> \tag{5.10}$$

con 2 fattore moltiplicativo dell'ultima sommatoria in quanto consideriamo i casi $j = i+1$ e $i = j+1$ che sono uguali per la simmetria del prodotto scalare. La norma al quadrato di ϵ allora diventa :

$$\sum_{i}^{r}(i)^2 - \sum_{i=1}^{r-1} i(i+1) = \sum_{i}^{r}(i)^2 - \sum_{i=1}^{r-1}(i^2+i) = r^2 - \sum_{i}^{r-1} i = r^2 - \frac{r(r-1)}{2} = \frac{2r^2 - r^2 + r}{2} = \frac{r^2+r}{2} = r\frac{r+1}{2}$$

Simmetricamente otteniamo $<\eta,\eta>= q(q+i)/2$. Inoltre abbiamo :

$$<\epsilon,\eta>=<\sum_{i=1}^{r} i\epsilon_i, \sum_{j=1}^{q}\eta_j>=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{q} ij<\epsilon_i,\eta_j>= rq<\epsilon_r,\eta_q> \tag{5.11}$$

Ne consegue :

$$(<\epsilon,\eta>)^2 = (rq<\epsilon_r,\eta_q>)^2 = \frac{r^2q^2}{2} \tag{5.12}$$

I vettori ϵ ed η sono indipendenti (una loro combinazione lineare è una combinazione lineare dei vettori di U e dalla indipindenza di questi ultimi segue la nullità dei coefficienti) e dunque la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz vale con il minore stretto, ossia

$$(<\epsilon,\eta>)^2 < \ <\epsilon,\epsilon><\eta,\eta> \tag{5.13}$$

Dunque abbiamo ottenuto :

$$\frac{r^2q^2}{2} < r\frac{r+1}{2}q\frac{q+1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad rq < \frac{(r+1)(q+1)}{2} = \frac{rq+q+r+1}{2}$$

In conclusione abbiamo trovato la relazione :

$$2rq - rq - r - q - 1 = rq - r - q - 1 < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (r-1)(q-1) < 2 \tag{5.14}$$

Quest'ultima relazione ci consente di capire come possono essere r e q. Ovviamente non consideriamo $r = 0$ oppure $q = 0$ altrimenti si ricade nel grafico (i). Se $r = 1$ allora q può essere qualsiasi, se $q = 1$ allora r può essere arbitrario : in entrambi i casi Γ non è altro che $B_n = C_n$. Ora supponiamo $r, q \neq 1$, dato che questi casi li abiamo già considerati. Se $r = 2$ allora anche q deve essere uguale a 2, non potendo essere maggiore di 2 perchè altrimenti non è verificata la condizione detta) Per lo stessa ragione, r non può essere maggiore di 2. Invertendo il ragionamento otteniamo $r = 2$ per $q = 2$ e q che non può essere maggiore di 2. Per $r = q = 2$ il grafico Γ è il grafico di Coxeter F_4.

(10) Se il grafico connesso Γ è della tipologia (iv) allora esso è uno dei grafici di Coxeter D_n, E_6, E_7, E_8. Analogamente al punto precedente consideriamo i vettori :

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{r-1} i\epsilon_i \qquad ; \qquad \eta = \sum_{j=1}^{q-1} j\eta_j \qquad ; \qquad \nu = \sum_{k=1}^{s-1} k\nu_k \tag{5.15}$$

Questi tre vettori sono indipendenti (una loro combinazione lineare è la combinazione lineare di elementi di U e dall'indipendenza di questi ultimi segue che tutti i coefficienti devono essere nulli), sono mutuamente ortogonali (i vertici addendi di uno di questi vettori sono scollegati dai tutti i vertici addendi degli altri due vettori) ed inoltre ψ non è da essi generato (altrimenti U non sarebbe un insieme di vettori indipendenti perchè uno di essi si scriverebbe come combinazione lineare dei restanti). Come visto nel punto 6, schiacciando le catene semplici su ϵ, η, ν otteniamo un nuovo sistema ammissibile $\psi, \epsilon, \eta, \nu$ il cui grafico Γ' è un nodo. Applicando a ψ quanto fatto nel passo 4, otteniamo

$$(<\psi,\epsilon>)^2 + (<\psi,\eta>)^2 + (<\psi,\nu>)^2 < 1 \tag{5.16}$$

Siano $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ gli angoli fra ψ e ϵ,η e ν rispettivamente.

Con un ragionamento analogo a quello fatto nel passo 4 si ricava :

$$\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_3) < 1 \tag{5.17}$$

Inoltre per calcolare la norma al quarato di ϵ,η e ν possiamo applicare quanto visto nel passo precedente ottenendo :

$$< \epsilon, \epsilon >= \frac{r(r-1)}{2} \quad ; \quad < \eta, \eta >= \frac{q(q-1)}{2} \quad ; \quad < \nu, \nu >= \frac{s(s-1)}{2} \tag{5.18}$$

Dato che ψ ha norma unitaria e non è ortogonale solo a ϵ_{r-1}, η_{q-1}, ν_{s-1} (e con ognuno di questi è legato con un solo filo) ricaviamo le relazioni :

$$\cos^2(\theta_1) = \frac{(< \psi, \epsilon >)^2}{\parallel \psi \parallel^2 \parallel \epsilon \parallel^2} = \frac{(r-1)^2(< \epsilon_{r-1}, \psi >)^2}{\parallel \epsilon \parallel^2} = \frac{1}{4}\frac{2(r-1)^2}{r(r-1} = \frac{r-1}{2r}$$

$$\cos^2(\theta_2) = \frac{(< \psi, \eta >)^2}{\parallel \psi \parallel^2 \parallel \eta \parallel^2} = \frac{(q-1)^2(< \eta_{q-1}, \psi >)^2}{\parallel \eta \parallel^2} = \frac{1}{4}\frac{2(q-1)^2}{q(q-1} = \frac{q-1}{2q}$$

$$\cos^2(\theta_3) = \frac{(< \psi, \nu >)^2}{\parallel \psi \parallel^2 \parallel \nu \parallel^2} = \frac{(s-1)^2(< \nu_{s-1}, \psi >)^2}{\parallel \nu \parallel^2} = \frac{1}{4}\frac{2(s-1)^2}{s(s-1} = \frac{s-1}{2s}$$

Sostituendo quanto ottenuto ricaviamo la condizione :

$$\cos^2(\theta_1) + \cos^2(\theta_2) + \cos^2(\theta_3) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{r} - \frac{1}{q} - \frac{1}{s}) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} > 1$$

A meno di cambiare le lettere, possiamo supporre $1/r \leq 1/q \leq 1/s$. Inoltre r, q, s li consideriamo maggiori di 1 in quanto se uno di essi fosse uguale unitario ricadremmo nel grafico (i), dunque $1/r \leq 1/q \leq 1/s \leq 1/2$ essendo 2 il valore più piccolo che può assumere s. La prima condizione che ricaviamo è su s:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \geq \frac{1}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} = \frac{3}{s} > 1 \tag{5.19}$$

La disuguaglianza a destra implica $s < 3$ e quella a sinistra $s \geq 2$ dunque non può che essere $s = 2$. Sostituendo il valore di s otteniamo una nuova condizione che coinvolge solo r e q :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{q} + \frac{1}{2} > 1 \quad ; \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \tag{5.20}$$

Ragionando come prima si è fatto per s otteniamo la condizione su q :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{r} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq \frac{2}{q} > \frac{1}{2} \tag{5.21}$$

da cui si rivava $2 \leq q < 4$. Se $q = 2$ allora r può essere arbitrario (in quanto $1/q + 1/s = 1$ e quindi qualsiasi sia il valore di r abbiamo $1/r + 1/q + 1/s > 1$) e in questo caso Γ coincide con D_p. Se $q = 3$ invece per r abbiamo la condizione :

$$\frac{1}{r} > 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad r < 6 \tag{5.22}$$

Per $r = 2$ abbiamo un sottocaso del precedente (D_p) ; per $r = 3$ abbiamo $\Gamma = E_6$; per $r = 4$ si ha che Γ coincide col grafico di Coxeter E_7 ed infime per $r = 5$ abbiamo $\Gamma = E_8$.
Abbiamo allora visto che i grafici di Coxeter sono dei grafici Γ e viceversa. Dunque i grafici di Coxeter sono tutti e soli quelli dell'enunciato del teorema, con $C_p = B_p$. Se poi passiamo a considerare i diagrammi di Dynkin, come detto solo $B_p = C_p$ ha digramma di Dynkin diverso da quello di Coxeter e le possibilità sono proprio B_p e C_p.

L'ultima parte della dimostrazione la dedichiamo ad un aspetto che fin qui non abbiamo portato alla luce : per ogni diagramma elencato nell'enunciato esiste effettivamente un sistema di radici con quel diagramma di Dynkin? La risposta risulta cruciale per la validità della classificazione, ossia per poter dire che quelli elencati sono grafici di Coxeter, altrimenti tutto quanto fatto perderebbe di senso (quello che ci accingiamo a dimostare lo abbiamo implicitamente dato per buono nella parte precedente della dimostrazione).

Da questo momento con $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p$ denotiamo la base canonica (ortonormale) di $\mathbb{R}^p$, nel quale consideriamo il prodotto scalare canonico. Con I indichiamo l'insieme di tutte le possibili combinazioni lineari, con coefficienti interi, dei vettori $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p$.

(A_p) In $\mathbb{R}^{p+1}$ prendiamo il vettore non nullo $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_p + \epsilon_{p+1}$ e denotiamo con E il sottospazio ortogonale a questo vettore. Per costruzione E è un iperpiano, ossia un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{p+1}$ avente dimensione p. Anche E possiamo considerarlo uno spazio euclideo, munendolo del prodotto scalare ereditato da $\mathbb{R}^{p+1}$ (ossia la restrizione del prodotto scalare canonico). Sia I' l'intersezione fra $\Phi \subset I'$ l'insieme dei vettori di I' aventi norma al quadrato uguale a 2. Vogliamo dimostrare che Φ è un sistema di radici di E.
Prima di tutto cerchiamo di capire che forma hanno i vettori che compongono Φ.
Se $\alpha \in \Phi$ allora esso è anche un elemento di I e dunque è della forma :

$$\alpha = \sum_{i=1}^{p+1} a_i \epsilon_i \tag{5.23}$$

con gli a_i interi. Inoltre devono essere verificate la condizione di ortogonalità e quella sulla norma :

$$< \alpha, \sum_{j=1}^{p+1} \epsilon_j >=< \sum_{i=1}^{p+1} a_i \epsilon_i, \sum_{j=1}^{p+1} \epsilon_j >= \sum_{i,j=1}^{p+1} a_i < \epsilon_i, \epsilon_j >= a_1 + a_2 + \cdots + a_p + a_{p+1} = 0 \tag{5.24}$$

$$< \alpha, \alpha >= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_p^2 + a_{p+1}^2 = 2 \tag{5.25}$$

La seconda relazione ci dice che nessuno degli interi a_i può avere valore assoluto maggiore di 1 (in quanto se così non fosse, il quadrato dell'elemento sarebbe maggiore di 2 e gli dovremmo soommare quantità postive o al più nulle). Dovendo essere la somma dei quadrati uguali a 2 deduciamo che due differenenti coefficienti, a_i e a_j con $i \neq j$, devono avere valore assoluto unitario mentre gli altri devono essere nulli. La prima condizione non consente che a_i e a_j abbiano lo stesso segno per cui abbiamo $a_i = 1$ e $a_j = -1$ oppure viceversa. Dunque ogni elemento di Φ è della forma $\epsilon_i - \epsilon_j$, con i e j che variano in $\{1, \ldots, p+1\}$ ma sempre differenti. Viceversa, un elemento $\epsilon_i - \epsilon_j$ con $i \neq j$ appartiene ad I, è un vettore di E in quanto $< \epsilon_i - \epsilon_j, \epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_p + \epsilon_{p+1} >=< \epsilon_i, \epsilon_i > - < \epsilon_j, \epsilon_j >= 1 - 1 = 0$, ed inoltre ha norma al quadrato uguale a $(-1)^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$. Ne consegue che :

$$\Phi = \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i \neq j\} \tag{5.26}$$

I vettori di Φ sono tutti non nulli in quanto hanno norma non nulla e sono in numero finito (precisamente $p(p+1)$). L'opposto di un vettore $\epsilon_i - \epsilon_j$ di Φ appartiene anch'esso a Φ ed inoltre se $a(\epsilon_i - \epsilon_j) \in \Phi$ allora $< a(\epsilon_i - \epsilon_j), a(\epsilon_i - \epsilon_j) >= 2a^2 = 2$ e dunque $a = \pm 1$.
Siano $\epsilon_i - \epsilon_j$,$\epsilon_k - \epsilon_h$ due vettori di Φ, vogliamo capire se $\sigma_{\epsilon_i - \epsilon_j}(\epsilon_k - \epsilon_h) = (\epsilon_k - \epsilon_h) - (\epsilon_k - \epsilon_h, \epsilon_i - \epsilon_j)(\epsilon_i - \epsilon_j) = \epsilon_k - \epsilon_h - < \epsilon_k - \epsilon_h, \epsilon_i - \epsilon_j > (\epsilon_i - \epsilon_j)$ è ancora un elemento di Φ. Si possono avere i seguenti casi :

- se i, j, h, k sono tutti diversi fra loro allora $\epsilon_k - \epsilon_h$ risulta fissato ;
- se $i = k$ ma $j \neq h$ otteniamo $\epsilon_i - \epsilon_h - < \epsilon_i - \epsilon_h, \epsilon_i - \epsilon_j > (\epsilon_i - \epsilon_j) = \epsilon_i - \epsilon_h - \epsilon_i + \epsilon_j = \epsilon_j - \epsilon_h$;
- se $j = h$ ma $i \neq k$ si ha $(\epsilon_k - \epsilon_j) - < \epsilon_k - \epsilon_j, \epsilon_i - \epsilon_j > (\epsilon_i - \epsilon_j) = \epsilon_k - \epsilon_j - \epsilon_i + \epsilon_j = \epsilon_k - \epsilon_i$;
- se $i = k$ e $j = h$ allora i due elementi di Φ sono uguali quanto vogliamo dimostrare è banale.

Quindi $\sigma_{\epsilon_i - \epsilon_j}(\epsilon_k - \epsilon_h)$ è ancora un elemento di Φ : Φ soddisfa la condizione R2 ed R3, inoltre i calcoli appena fatti mostrano che Φ verifica anche la condizione R4. Affinchè Φ sia un sistema di radici ci rimane da mostrare che esso è un sistema di generatori. Consideriamo l'insieme :

$$\Delta = \{\epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid i = 1, \ldots, p\} \tag{5.27}$$

L'indipendenza di questi vettori segue da quella dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^p$. Infatti nella combinazione lineare

$$b_1(\epsilon_1 - \epsilon_2) + b_2(\epsilon_2 - \epsilon_3) + \cdots + b_p(\epsilon_p - \epsilon_{p+1}) = b_1\epsilon_1 + (b_2 - b_1)b_1\epsilon_2 + \cdots + (b_{p-1} - b_{p-2})\epsilon_{p-1} + (b_p - b_{p-1})\epsilon_p - b_p\epsilon_{p+1} \tag{5.28}$$

tutti i coefficienti devono essere nulli. Cominciando col porre nullo b_1 otteniamo che anche $b_2, b_3, \ldots, b_p$ devono essere uguali a zero. Questo dimostra che Φ è un sistema di generatori per E e quindi un sistema di radici.
Dato che E ha dimensione p, Δ è un base di E. Ma non solo : se $\epsilon_i - \epsilon_j$ è un elemento di Φ con $i < j$ (questa ipotesi non lede la generalità perchè se così non fosse basterebbe considerare l'opposto

del vettore detto) allora esso si scrive come $(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) + (\epsilon_{i+1} - \epsilon_{i+2}) + \cdots + (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)$, ossia con tutti i coefficienti uguali ad 1. Concludiamo studiando il diagramma di Dynkin di Φ. Prima di tutto osserviamo che tutte le radici hanno la stessa norma (ossia radice di 2) e quindi due vertici sono legati da un filo oppure scollegati.

Abbiamo già osservato che $(\epsilon_k - \epsilon_h, \epsilon_i - \epsilon_j) =< \epsilon_k - \epsilon_h, \epsilon_i - \epsilon_j >$ e dunque ci basta calcolare i prodotti scalari. Partiamo da $\epsilon_1 - \epsilon_2$ e moltiplichiamolo scalarmente per $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ (con $i \neq 1$) : il prodotto scalare vale -1 solo nel caso in cui i sia uguale a 2 in tutti gli altri casi è nullo. Prendiamo poi $\epsilon_p - \epsilon_{p+1}$ e lo moltiplichiamo scalarmente per $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ con $i \neq p$: il prodotto scalare vale -1 solo nel caso in cui i sia uguale a $p-1$, in tutti gli altri casi è nullo. Infine, dato un vettore $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ con i diverso da 1 e p, il suo prodotto scalare per $\epsilon_j - \epsilon_{j+1}$ (con $j \neq i$) vale -1 solo per $i = j+1$ e per $i+1 = j$, negli altri casi è nullo. Ossia il prodotto scalare vale -1 solo per $\epsilon_j - \epsilon_{j+1} = \epsilon_{i-1} - \epsilon_i$ e $\epsilon_j - \epsilon_{j+1} = \epsilon_{i+1} - \epsilon_{i+2}$ ossia solo per le radici semplici che lo seguono e lo precedono. Per quanto detto risulta evidente che la matrice di Cartan di Φ è A_p e quindi pure il suo digramma di Dynkin è il diagramma di Dynkin A_p (la matrice di Cartan determina completamente il diagramma di Dynkin).

(B_p e C_p) Sia E lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ e Φ l'insieme così definito :

$$\Phi = \{\alpha \in I \,|< \alpha, \alpha >= 1 \quad oppure \quad 2\} \tag{5.29}$$

Vogliamo capire se Φ è un sistema di radici di E.

Per prima cosa tentiamo di capire da quali vettori è composto.

Consideriamo un vettore $\alpha \in \Phi$: esso è della forma $\sum_{i=1}^{p} a_i \epsilon_i$, con gli a_i numeri interi. Se α ha norma unitaria allora è tale da verificare la condizione :

$$< \alpha, \alpha >= \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 = 1 \tag{5.30}$$

Se un intero è diverso da 1 o da 0, allora il suo quadrato è maggiore o uguale a 4. Avendo una somma di quadrati, gli $(a_i)^2$ devono essere o nulli o uguali ad uno. Per essere più precisi uno degli $(a_i)^2$ è uguale ad 1, gli altri sono nulli. Quindi i vettori di Φ aventi norma unitaria sono tutti e soli quelli della forma $\pm\epsilon_i$ al variare di i in $\{1, \ldots, p\}$.

Se α ha norma al quadrato uguale a 2 allora deve verificare la condizione :

$$< \alpha, \alpha >= \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 = 2 \tag{5.31}$$

Ragionando come prima deduciamo che due diversi interi, a_i e a_j, hanno quadrato uguale ad 1 mentre tutti gli altri sono nulli. I vettori di Φ aventi norma uguale $\sqrt{2}$ sono della forma $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$, con gli indici $i \neq j$ che variano nell'insieme $\{1, \ldots, p\}$ (i segni si possono scegliere in maniera indipendente). Ovviamente i vettori della forma $\pm\epsilon_i$ (con $i = 1, 2, \ldots, p$) e $\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$ $(i \neq j)$ appartengono a Φ : sono vettori di I e la loro norma soddisfa la condizione richiesta. Dunque abbiamo :

$$\Phi = \{\pm\epsilon_i \mid i = 1, 2, \ldots, p\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i \neq j\} \tag{5.32}$$

Controlliamo se Φ soddisfa le condizioni richiete ad un sistema di radici.

Partiamo dalla condizione R2 e supponiamo che α e un suo multiplo $b\,\alpha$ appartenengano entrambi a Φ. Se α ha norma unitaria allora $< b\,\alpha, b\,\alpha >= b^2$, con b^2 che deve essere uguale ad 1 o a 2. Ma non può essere uguale a 2 perchè altrimenti avremmo $b = \pm\sqrt{2}$ e $b\,\alpha$ non apparterrebbe a I. Dunque $b^2 = 1$ e quindi $b = \pm 1$.

Se α ha norma uguale a 2 allora $< b\,\alpha, b\,\alpha >= 2b^2$, con b^2 che deve essere uguale ad 1 o a $1/2$. Ne segue banalmente che il quadrato di b deve essere unitario se ($b = 1/\sqrt{2}\ b\,\alpha$ non apparterrebbe ad I) e quindi $b = \pm 1$. Viceversa, se α è un elemento di Φ anche il suo opposto lo è in quanto la norma non cambia e non viene intaccata l'appertenenza ad I : tutti e soli i multipli di α contenuti in Φ sono $\pm\alpha$.

Tutti i vettori di Φ sono non nulli (perchè hanno norma diversa da 0) e sono in numero finito (precisamente sono $2p + 4(p-1) + 4(p-2) + \cdots + 4 + 0$). Che Φ sia un sistema di generatori lo verificheremo mostrando che esso contiene un base Δ di E.

Siano α e β due elementi di Φ, vogliamo capire se $\sigma_\alpha(\beta)$ è ancora un elemento di Φ. Ricordando che $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - (\beta, \alpha)\alpha$ consideriamo i seguenti diversi casi :

- se $\alpha = \pm\epsilon_i$ e $\beta = \pm\epsilon_j$, con $i \neq j$ (il caso $i = j$ è banale), allora $(\beta, \alpha) = 0$ e dunque β risulta fissato da σ_α ;

- se $\alpha = \pm\epsilon_i$ e $\beta = \pm\epsilon_j \pm \epsilon_k$ possiamo avere i diverso sia da j che da k, e quindi ricadiamo nel caso precedente, oppure i uguale ad uno fra j e k, supponiamo j. In questo secondo caso ϵ_i può comparire in α e β con segno uguale oppure opposto. Che il segno sia uguale o differente abbiamo $\sigma_\alpha(\beta) = \pm\epsilon_j \pm \epsilon_k \mp 2\epsilon_j = \pm\epsilon_j \mp \epsilon_j$ (se hanno lo stesso segno (α, β) è positvo e il meno che ha davanti cambia il segno di α, se invece il segno è diverso $-(\alpha, \beta)$ è positivo e quindi il segno di α non viene cambiato).

- se $\alpha = \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$ e $\beta = \epsilon_k$ procediamo in modo simmetrico al punto precedente soltanto che in questo caso, se k è uguale ad i si ha $\sigma_\alpha(\beta) = \pm\epsilon_j \pm \epsilon_k \mp \epsilon_i = \pm\epsilon_j$, in quanto il fattore moltiplicativo 2 è semplificato dalla norma al quadrato di α

L'ultimo caso è il più complicato e lo si ha per $\alpha = \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j$ e $\beta = \pm\epsilon_k \pm \epsilon_h$. Se i, j, k, h sono tutti diversi β rimane fissato. Se invece $i = k$ (oppure $i = h$, ma il caso è analogo) e j diverso da h abbiamo due possibilità. La prima è che ϵ_i abbia lo stesso segno sia in α che in β, dunque $< \alpha, \beta >= 1$. Otteniamo :

$$\pm\epsilon_i \pm \epsilon_h - < \pm\epsilon_i \pm \epsilon_h, \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j > (\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j) = \pm\epsilon_i \pm \epsilon_h \mp \epsilon_i \pm \epsilon_j = \pm\epsilon_h \pm \epsilon_j \tag{5.33}$$

quindi l'immagine di β è ancora un elemento di Φ dato che $j \neq h$. Se invece gli ϵ_i di α e β hanno segno opposto, allora $< \alpha, \beta >= -1$ ed otteniamo :

$$\mp \epsilon_i \pm \epsilon_h - < \mp\epsilon_i \pm \epsilon_h, \pm\epsilon_i \pm \epsilon_j > (\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j) = \mp\epsilon_i \pm \epsilon_h \pm \epsilon_i \pm \epsilon_j = \pm\epsilon_h \pm \epsilon_j \tag{5.34}$$

ossia l'immagine di β appartiene ancora a Φ. Infine potremmo avere $i = k$ e $j = h$ (il caso $i = h$ e $j = k$ è analogo). Questa volta le possibilità sono 3. La prima è quella nella quale ϵ_i e ϵ_j hanno in α e β entrambi lo stesso segno. Si ha $< \alpha, \beta >= 2$ e quindi $(\beta, \alpha) = -2$, da cui segue che l'immagine di β è $-\beta$. La seconda possibilità è che gli ϵ_i compaiano in α e β con segni uguali e gli ϵ_j con segni opposti (o viceversa, la situazione è analoga). Allora abbiamo che il prodotto scalare $< \alpha, \beta >$ è nullo e dunque β viene mandato in se stesso. L'ultima possibilità è che sia ϵ_i che ϵ_j compaiano in α e β con segno opposto. Allora $(\beta, \alpha) = 2$ e accade quanto visto nella prima possibilità.

Dunque abbiamo verficato che $\sigma_\alpha(\beta)$ è ancora un vettore di Φ ed inoltre (β, α) è un intero comunque si scelgano α e β nell'insieme Φ.

Consideriamo ora il sottoinsieme Δ di Φ, costituito dai p vettori $\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3, \ldots, \epsilon_{p-1} - \epsilon_p, \epsilon_p$. Prendiamo una loro combinazione lineare che ci dia il vettore nullo :

$$a_1(\epsilon_1 - \epsilon_2) + a_2(\epsilon_2 - \epsilon_3) + \cdots + a_{p-1}(\epsilon_{p-1} - \epsilon_p) + a_p(\epsilon_p) =$$

$$a_1\epsilon_1 + (a_2 - a_1)\epsilon_2 + \cdots + (a_{p-1} - a_{p-2})\epsilon_{p-1} + (a_p - a_{p-1})\epsilon_p = 0$$

Per l'indipendenza dei vettori $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p$, tutti i coefficienti della combinazione lineare sono nulli. Partendo dal primo otteniamo $a_1 = 0, a_2 = 0, \ldots, a_{p-2} = 0, a_{p-1} = 0, a_p = 0$. Quindi i vettori di Δ sono indipendenti ed essi costituiscono una base di E. Come preannunciato, questo mostra che Φ è un sistema di generatori di E : grazie alle caratteristiche di Φ viste sopra possiamo concludere che Φ è un sistema di radici di E.

Vogliamo capire se Δ è una base di Φ. Consideriamo una radice della forma ϵ_i. Allora abbiamo $\epsilon_i = (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) + \cdots + (\epsilon_{p-1} - \epsilon_p) + \epsilon_p$. Di conseguenza un vettore della forma $\epsilon_i + \epsilon_j$ si scrive ugualmente come somma di elementi della base. Rimangono i vettori della forma $\epsilon_i - \epsilon_j$. Possiamo supporre, senza ledere la generalità, che i sia minore di j (in caso contrario ne consideriamo l'oposto). Ciò rende evidente che : $\epsilon_i - \epsilon_j = (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) + \cdots + (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)$.

La radice semplice $\epsilon_1 - \epsilon_2$ è ortogonale a tutti le altre radici di Δ tranne $\epsilon_2 - \epsilon_3$ e si ha :

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_3)(\epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_1 - \epsilon_2) = 1 \tag{5.35}$$

Il vettore ϵ_p è ortogonale a tutte le radici semplici tranne $\epsilon_{p-1} - \epsilon_p$ e abbiamo :

$$(\epsilon_p, \epsilon_{p-1} - \epsilon_p)(\epsilon_{p-1} - \epsilon_p, \epsilon_p) = 2 \tag{5.36}$$

Infine la radice semplice $\epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ (con $i \neq 1$) è ortogonale a tutti le altre radici di Δ tranne $\epsilon_{i-1} - \epsilon_i$ e $\epsilon_{i+i} - \epsilon_{i+2}$ per le quali otteniamo :

$$(\epsilon_{i-1} - \epsilon_i, \epsilon_i - \epsilon_{i+1})(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}, \epsilon_{i-1} - \epsilon_i) = 1 \tag{5.37}$$

$$(\epsilon_{i+1}-\epsilon_{i+2},\epsilon_i-\epsilon_{i+1})(\epsilon_i-\epsilon_{i+1},\epsilon_{i+1}-\epsilon_{i+2})=1 \tag{5.38}$$

Dato che ϵ_p è l'unica radice semplice avente norma 1, i calcoli nelle righe precedenti mostrano che il diagramma di Dynkin di Φ è proprio B_p

Per $p \geq 3$ consideriamo il duale Φ^v del sistema di radici Φ. Ci chiediamo se Δ^v è una base di Φ^v. Sicuramente i vettori di Δ^v sono una base di E in quanto gli elementi che contiene sono indipendenti (i duali delle radici semplici sono moltiplicati per scalari positivi : 2 diviso la loro norma al quadrato) e in numero uguale alla dimensione di E. Denotiamo con $\alpha_i,\ldots,\alpha_p$ i vettori di Δ e sia α una radice di Φ. Allora abbiamo $\alpha=\sum_{i=1}^p a_i\alpha_i$ dove gli a_i sono interi tutti non positivi oppure non negativi. Ne consugue che :

$$\alpha^v=\frac{2\alpha}{<\alpha,\alpha>}=\sum_{i=1}^p(\frac{2a_i}{<\alpha,\alpha>})\alpha_i=\sum_{i=1}^p a_i(\frac{<\alpha_i,\alpha_i>}{<\alpha,\alpha>})\alpha_i^v \tag{5.39}$$

I reali $\frac{<\alpha_i,\alpha_i>}{<\alpha,\alpha>}$ sono positivi in quanto rapporto di quantità positive, dunque non modificano il segno degli a_i. Quindi abbiamo che i coefficienti $a_i(\frac{<\alpha_i,\alpha_i>}{<\alpha,\alpha>})$ sono tutti non positivi oppure non negativi. Essi, inoltre, sono interi. Abbiamo dimostrato che Δ^v è una base per Φ^v ed inoltre :

$$(\alpha_i^v,\alpha_j^v)=2(<\frac{2\alpha_i}{<\alpha_i,\alpha_i>},\frac{2\alpha_j}{<\alpha_j,\alpha_j>}>)/(<\frac{2\alpha_j}{<\alpha_j,\alpha_j>},\frac{2\alpha_j}{<\alpha_j,\alpha_j>}>)=2\frac{<\alpha_i,\alpha_j>}{<\alpha_i,\alpha_i}=(\alpha_j,\alpha_i)$$

$$(\alpha_j^v,\alpha_i^v)=2(<\frac{2\alpha_j}{<\alpha_j,\alpha_j>},\frac{2\alpha_i}{<\alpha_i,\alpha_i>}>)/(<\frac{2\alpha_i}{<\alpha_i,\alpha_i>},\frac{2\alpha_i}{<\alpha_i,\alpha_i>}>)=2\frac{<\alpha_i,\alpha_j>}{<\alpha_j,\alpha_j}=(\alpha_i,\alpha_j)$$

e dunque il frafico di Coxeter di Φ^v coincide con quello di Φ sono che per per gli ultimi due vertici il verso della freccia è invertito in quanto passando al duale le radici lunghe diventano corte e l'unica corta diventa lunga (la norma di una radice duale è 2 fratto la norma della radice) ed infatti sappiamo anche che $(\alpha_i^v,\alpha_j^v)=(\alpha_j,\alpha_i)$ e $(\alpha_j^v,\alpha_i^v)=(\alpha_i,\alpha_j)$. Dunque il diagramma di Dynkin di Φ^v è C_p.

(D_p) A partire da questo caso eviteremo di entrare nei dettagli, facendo tutti i calcoli come nei casi precedenti.

Sia E lo spazio euclideo $\mathbb{R}^p$ e Φ il sottoinsieme così definito :

$$\Phi=\{\pm\epsilon_i\pm\epsilon_j \mid i\neq j\} \tag{5.40}$$

L'insieme Φ è un sistema di radici in E, avente come base :

$$\Delta=\{\epsilon_1-\epsilon_2,\epsilon_2-\epsilon_3,\ldots,\epsilon_{p-1}-\epsilon_p,\epsilon_{p-1}+\epsilon_p\} \tag{5.41}$$

e come diagramma di Dynkin D_p.

(E_8,E_7,E_6) Denotiamo con E lo spazio euclideo $\mathbb{R}^8$ nel quale consideriamo il sottoinsieme :

$$\Phi=\{\pm\epsilon_i\pm\epsilon_j \mid i\neq j\}\cup\{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1\pm\cdots\pm\epsilon_7\pm\epsilon_8)\} \tag{5.42}$$

con i segni che possono essere scelti in modo indipendente. Allora Φ è un sistema di radici in E, avente come base

$$\Delta = \{\frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_8 - (\epsilon_2 + \cdots + \epsilon_7)), \epsilon_1 + \epsilon_2, \epsilon_2 - \epsilon_1, \epsilon_3 - \epsilon_2, \epsilon_4 - \epsilon_3, \epsilon_5 - \epsilon_4, \epsilon_6 - \epsilon_5, \epsilon_7 - \epsilon_6\} \tag{5.43}$$

e come diagramma di Dynkin E_8.

Consideriamo il sottospazio vettoriale $E' \subset E$ generato dai primi sette elementi di Δ : chiamiamo Δ' l'insieme di questi sette vettori e indichiamo con Φ' l'insieme delle radici di Φ contenute in E'. Con il prodotto scalare canonico indotto da E anche E' è uno spazio euclideo. Vogliamo mostrare che Φ' è un sistema di radici in E' e che Δ' è una base di Φ'.
Dato che Φ' è un sottoinsieme di Φ, esso è finito e non contiene il vettore nullo (in quanto Φ è finito e non ammette il vettore nullo). Inoltre i vettori di $\Delta' \subset \Phi'$, per costruzione, generano E'. Quindi Φ' soddisfa la condizione R1.
Se $\alpha \in \Phi$ è un radice contenuta in E', allora anche il suo opposto appartiene ad E' (dato che E' è un sottospazio vettoriale e quindi chiuso rispetto al prodotto per scalare) e nessun altro multiplo di α giace in E' (gli unici multipli di α in Φ sono $\pm\alpha$ dunque non ne possiamo avere altri neanche in $\Phi' \subset \Phi$). Anche la condizione R2 risulta soddisfatta.
Se α, β appartengono a Φ' allora esse sono radici di Φ ed inoltre (α, β) e (β, α) sono interi (queste quantità non cambiano se restringiamo l'attenzione ad E' in quanto il prodotto scalare che consideriamo in esso è semplicemente la restrizione del prodotto scalare canonico) : la condizione R4 è verificata. Rimane la condizione R3.
Consideriamo sempre due vettori $\alpha, \beta \in \Phi'$ e ricordiamo che $\sigma_\alpha(\beta)$ è uguale ad $\beta - (\beta, \alpha)\alpha$, la quale è una radice di Φ. Ci chiediamo se questa radice appartiene ad E' oppure no. La risposta è positiva in quanto sia β che $-(\beta, \alpha)\alpha$ sono combinazione lineare dei vettori di Δ' e dunque anche la loro somma lo è.
Possiamo allora dedurre che Φ' è un sistema di radici di E'. Per costruzione, Δ' è una base in E'.
Prendiamo una radice $\alpha \in \Phi'$: essa si scrive come combinazione lineare dei vettori di Δ'. Ma α è anche una radice di Φ ed essa si scrive come combinazione lineare dei vettori di Δ con coefficienti interi tutti non positivi oppure non negativi. Evidentemente, quest'ultima combinazione lineare ha l'ultimo coefficiente nullo (in quanto $\Delta' \subset \Delta$ e rispetto ad una base ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare dei vettori di base) e quindi le componenti di α rispetto a Δ' sono intere e tutte non positive oppure non negative. Dunque Δ' è una base di Φ' ed il digramma di Dynkin di Φ' coincide con quello di Φ privato del vertice rappresentante l'ultimo vettore di Δ. Abbiamo infatti già osservato che le quantità (α, β) e (β, α) non cambiano se consideriamo α, β come radici semplici di Δ' oppure di Δ.
Il diagramma di Dynkin ottenuto è proprio il diagramma E_7 per cui da un sistema di radici avente

come diagramma di Dynkin E_8 abbiamo estratto un sistema di radici avente come diagramma di Dynkin E_7. Applicando un analogo ragionamento, possiamo estrarre da Φ' un sistema di radici Φ'' avente come diagramma di Dynkin E_6.

(F_4) In $\mathbb{R}^4$ prendiamo l'insieme :

$$\Phi = \{\pm\epsilon_i \mid i = 1, 2, 3, 4\} \cup \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid i \neq j\} \cup \{\frac{1}{2}(\pm\epsilon_1 \pm \epsilon_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)\} \tag{5.44}$$

dove i segni, negli ultimi due insiemi, possono esssere scelti in modo indipendente. Con i soliti calcoli (che evitiamo di riportare) si dimostra che Φ è un sistema di radici in $\mathbb{R}^4$, avente come base

$$\Delta = \{\epsilon_2 - \epsilon_3, \epsilon_3 - \epsilon_4, \epsilon_4, \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)\} \tag{5.45}$$

e come diagramma di Dynkin proprio F_4.

□

Bibliografia

[1] Abate Marco, *Geometria*, McGraw-Hill 1996

[2] Lipschutz Seymour, *Algebra lineare*, McGraw-Hill

[3] Humphreys James E. , *Introduction to Lie Algebra and Representation Theory*, Springer

[4] Karin Erdmann and Mark J. Wildon, *Introduction to Lie Algebras*, Springer